REVUE DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

Rédacteurs invités

Philippe Jonnaert
Richard Pallascio

Les apprentissages mathématiques en situation

NUMÉRO THÉMATIQUE
VOL. XXII, N° 2, 1996

Entre les idées, les choses et les symboles. Une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre.

(1996) *Revue des sciences de l'éducation*, 22, 253-276.

Luis Radford
Professeur
Université Laurentienne

Monique Grenier
Enseignante
Conseil de l'éducation de Sudbury

Résumé – L'introduction à l'algèbre se fait très souvent en imposant à l'élève la maîtrise d'un langage symbolique complexe et sans signification précise. Nous présentons ici une voie alternative structurée autour d'une séquence d'enseignement. L'analyse des verbalisations de deux groupes d'élèves de 9e année (3e secondaire) fait ressortir que ces derniers arrivent à construire les idées algébriques de base dans un contexte de résolution de problèmes et à symboliser ces idées.

«J'ai trouvé que le calcul a pour objet toutes les espèces de détermination des inconnues au moyen des connues, et j'ai remarqué que la plus claire des règles et le plus évident des moyens pour cet effet est l'art de l'algèbre.»

Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan Alkarkhî,
mathématicien arabe du XIe siècle.

Introduction: les idées et les symboles

Malgré les efforts importants déployés ces dernières années dans le domaine de la recherche en enseignement des mathématiques, l'enseignement de l'algèbre soulève encore beaucoup de questions et les approches didactiques d'introduction à l'algèbre (résolution de problèmes, généralisation, modélisation, etc.) posent toujours des difficultés d'apprentissage aux élèves.

Une des questions, au centre de plusieurs études, concerne la détection et la compréhension des erreurs que commettent les élèves dans l'utilisation du langage algébrique (c'est le cas de Matz, en 1980, qui discute d'erreurs telle la suivante: $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.

D'autres études traitent des difficultés qu'éprouvent les élèves dans l'acquisition de la syntaxe du langage algébrique dans la résolution d'équations. Une de ces difficultés, repérée par Filloy et Rojano (1984) et observée chez des élèves débutants en algèbre, apparaît dans le passage des équations du type Ax + B = C aux équations du type Ax + B = Cx + D (où A, B, C et D sont des nombres donnés). Selon ces auteurs, l'opération de l'inconnue (x) pose, dans le deuxième type d'équations, une difficulté que l'élève ne rencontre pas dans le premier type d'équation, et marque une «coupure» ou un obstacle – qu'ils appellent «coupure didactique» – au cheminement de la maîtrise de la syntaxe du langage algébrique.

Le problème de la traduction, en langage algébrique, de propositions numériques énoncées en langage naturel a également suscité l'intérêt des chercheurs (Bell et Malone, 1993; Burton, 1988; Kaput, 1983)[1].

Enfin, un troisième point, traité dans certaines recherches récentes, concerne les changements conceptuels qu'exige le passage d'un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique dans la résolution de problèmes verbaux (*word-problems*) (voir, par exemple, Bednarz, Janvier, Mary et Lepage, 1992*a*; Bednarz, Radford, Janvier et Lepage, 1992*b*; Bednarz et Janvier, 1994). À la différence des approches précédentes, qui ont en commun l'étude de la compréhension de l'acquisition de la syntaxe algébrique par l'élève (voir également Gallardo et Rojano, 1988), l'attention est centrée ici sur les raisonnements que l'élève doit développer selon qu'il s'engage dans une démarche arithmétique ou algébrique.

Cependant, il y a une voie qui demeure encore peu explorée dans la recherche et dans l'enseignement: celle du rôle des symboles dans l'appropriation par l'élève des idées algébriques de base dans un contexte de résolution de problèmes verbaux[2]. Les professeurs qui enseignent et les futurs professeurs ont trop souvent une idée trop restreinte de ce qu'est le savoir algébrique lui-même. Nos propres observations suggèrent que, pour la plupart des enseignants, l'algèbre est constituée uniquement de symboles. Ainsi, quand nous posons la question «Qu'est-ce que l'algèbre?», la réponse qui revient systématiquement est «là où l'on trouve des x et des y».

Or, un symbole («x» ou autre) est le symbole de quelque chose, d'une idée. Quelles sont donc les idées que représentent les symboles de l'algèbre scolaire? Comment pouvons-nous créer en salle de classe des situations qui inciteront les élèves à développer eux-mêmes ces idées? Comment, en salle de classe, orienter les activités afin de stimuler l'interaction symboles-idées?

Il nous semble que la relation entre les symboles et les idées ne peut être envisagée comme une interaction qui consisterait seulement à mettre en contact un objet (ou une idée) immuable et externe à l'individu avec la représentation de cet objet, comme c'est le cas dans l'épistémologie platonicienne[3]. Loin de là, l'interaction entre les symboles et les idées devrait, d'après nous, être vue comme un système de relations construites par l'individu lui-même dans son cheminement intellectuel, à la fois social et individuel.

Or, les relations entre l'idée et le symbole sont loin d'être évidentes. Ainsi, dans un travail récent sur la démonstration en géométrie (Radford, 1994), trois sortes de relations ont été mises en évidence, chacune sous-tendant un mode de raisonnement très particulier. On peut essayer d'aller plus loin et de faire l'hypothèse que chaque relation idée-symbole sous-tend une conceptualisation des objets mathématiques.

Dans le cas de l'enseignement de l'algèbre, il convient d'identifier les idées de base de l'algèbre, les voies d'accès qui permettent aux élèves de construire des représentations externes de plus en plus complexes, les actions permettant de déboucher sur une dialectique entre les idées et leurs symboles. En outre, mais c'est aussi important, il convient d'identifier les situations dans lesquelles les relations entre les idées ou les objets de connaissance et leurs symboles prendront forme.

Bien qu'il soit toujours possible, pour répondre à ces questions, de faire appel à une épistémologie non historique, il nous semble que le recours à l'histoire des idées algébriques peut apporter des renseignements importants. En effet, pendant très longtemps, l'algèbre a été dépourvue de symboles. On pourrait même dire que l'émergence du langage algébrique, qui trouve son origine au début du XVIe siècle ap. J.-C., est une affaire récente. Les premières idées algébriques, d'après les documents historiques, remontent au moins à la fin de la première dynastie babylonienne, c'est-à-dire à la fin du XVIIe siècle av. J.-C. Examiner en profondeur l'histoire de l'algèbre, surtout dans sa période présymbolique, peut nous permettre de voir les premiers pas des idées algébriques. Examiner les premiers symboles mathématiques représentant des nombres peut aussi nous fournir des pistes intéressantes.

La construction des idées élémentaires de l'algèbre selon l'histoire

La séquence didactique que nous avons bâtie et mise à l'épreuve dans deux classes de 9e année (3e secondaire) a été structurée, en grande partie, à partir de nos recherches historiques. Pour aider à comprendre la structure de notre séquence d'enseignement, nous présentons un sommaire de ces recherches. Nous commençons par parcourir les premiers textes écrits, qui fournissent des points de repères pour mieux comprendre l'écriture des premières idées algébriques, tant au sujet de l'histoire que dans la salle de classe.

Idées et symboles: l'écriture cunéiforme

De petits objets de terre cuite de différentes formes (cônes, disques, etc.), couramment appelés jetons, semblent avoir été utilisés en Mésopotamie pour tenir des comptes. Chaque forme de jeton servait probablement à compter certaines quantités d'objets (par exemple, des quantités de nourriture, d'animaux, etc.). Les jetons ont été placés dans des récipients ronds faits en terre cuite eux aussi. Ce système d'«enveloppes» permettait de garder et de transmettre des renseignements d'un endroit à un autre; il semble que cette façon de procéder a été utilisée à des fins administratives et dans les échanges commerciaux entre les villes. Les récipients étaient parfois scellés. Le destinataire du message pouvait les ouvrir et compter le nombre de jetons afin de prendre connaissance de la quantité de biens impliqués dans la transaction. L'étape suivante fut celle d'imprimer un petit message sur le récipient: le message indiquait la quantité de jetons à l'intérieur. Finalement, le message étant gravé sur l'enveloppe, il était inutile d'ajouter les jetons à l'intérieur. Cela a donné naissance aux tablettes mésopotamiennes dont certaines ont survécu jusqu'à nos jours. C'est là qu'on a appris, à la suite des travaux archéologiques qui se sont succédé depuis le XIX^{e} siècle, les développements intellectuels (astronomiques, mathématiques, littéraires, médicaux, etc.) de l'ancienne civilisation mésopotamienne.

Un des faits qui nous intéressent ici concerne le type de relation idée-symbole. Il faut noter, à cet égard, que l'écriture la plus ancienne établissait un lien étroit entre l'objet et sa représentation. Il s'agit d'une écriture à base de logogrammes. Ainsi, pour exprimer l'action de marcher, on utilisait le dessin d'un pied. Ce type d'écriture était très polysémique, c'est-à-dire qu'un même symbole pouvait représenter plusieurs idées. Le pied pouvait aussi représenter le mot «amener» ou «rester». La signification à retenir se faisait d'après le contexte. D'autre part, il convient de mentionner qu'au début les symboles sur les tablettes n'étaient pas gravés en suivant l'ordre du message oral; en écrivant un texte, le scribe choisissait seulement les «mots clés». La lecture d'un texte exigeait donc de la part du lecteur une reconstitution extensive du texte lu. Ce n'est que vers le XXV^{e} siècle av. J.-C. que les symboles ont suivi l'ordre du message oral (Larsen, 1986, p. 4).

En ce qui concerne l'écriture des nombres, on sait qu'elle n'a commencé à respecter la position des chiffres que vers l'an 2000 av. J.-C. C'est au moment où la langue sumérienne a été remplacée par la langue akkadienne que l'écriture logogrammique a été progressivement remplacée par une écriture syllabique. Ce changement a créé un lien important entre le langage parlé et le langage écrit, ce qui a réduit considérablement le nombre de symboles (ou «lettres») de base.

L'émergence de l'écriture des nombres – c'est vrai également pour l'écriture en général – correspond donc à des besoins bureaucratiques et commerciaux particuliers. C'est dans ce contexte qu'il faut situer le développement des mathématiques. En effet, ce développement a été lié à la profession du scribe, qui est la personne formée pour pouvoir «rédiger» des contrats, des lettres, des testaments, des adoptions, des ventes, des locations, des documents officiels. Les scribes ont aussi été appelés à faire des comptes reliés aux mesures des terrains et aux calculs de volumes dans les constructions: c'est le cas, par exemple, des calculs du volume de terre à excaver pour construire des canaux. Il y a des fragments de tablettes d'arpentage qui montrent un plan de ville contenant les canaux d'irrigation (Bottéro, 1994, p. 22).

Comme Hoyrup (1991) l'a mis en évidence, la formation de scribe demandait non seulement de pouvoir répondre aux exigences pratiques de la profession, mais aussi de prouver qu'on était digne d'être scribe, en répondant à des questions qui n'étaient pas d'ordre pratique: ce sont précisément les problèmes «non pratiques» qui seraient à la base d'une recherche mathématique de laquelle l'algèbre serait issue. De plus, l'algèbre aurait deux sources: une source géométrique et une source numérique (Hoyrup, 1994; Radford, 1996).

Nous nous intéressons ici à la source numérique qui débouche sur une algèbre numérique. Une des questions qui s'impose est la suivante: de quelle façon les premières idées de l'algèbre numérique ont-elles émergé?

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre

Dans un travail précédent, nous nous sommes efforcés de démontrer que les premières idées de l'algèbre numérique sont ancrées dans la pensée proportionnelle, particulièrement dans les idées proportionnelles sous-jacentes aux méthodes de fausse position (Radford, à paraître). Schématiquement, traduit en notations modernes, un des problèmes classiques appartenant au domaine de la fausse position babylonienne est le suivant[4]:

$$x + \frac{1}{n}x = b$$

Pour résoudre ce problème, on part d'une solution fausse *a priori*, par exemple n, qui a l'avantage d'éliminer les calculs sur des parties fractionnaires. En remplaçant x par n, le premier membre devient $n + 1$. Or, on voulait obtenir b. Supposons que $n + 1 > b$ (si $n + 1 < b$, un raisonnement semblable à celui que nous allons suivre permet de résoudre le problème). Donc, nous devons réduire la fausse position prise initialement, c'est-à-dire n. Nous devons apporter à n une réduction du même ordre que celui qui nous permet de réduire $n + 1$ à b. Cette réduction s'obtient en prenant de $(n + 1)$ la $(n + 1)$-ième partie de b, c'est-à-dire en utilisant une notation fractionnaire, en prenant la fraction $\frac{b}{n+1}$ de $n + 1$. Donc, pour obtenir la bonne réponse, on applique la même réduction à la fausse position, n, ce qui s'obtient en prenant de n la fraction $\frac{b}{n+1}$, donc la réponse est $\frac{n \cdot b}{n+1}$ [5].

Le raisonnement précédent est un raisonnement arithmétique du type proportionnel. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre se ferait au moment où l'on arrête de penser en termes de fausses solutions choisies plus ou moins astucieusement (mais fausses *a priori*) et où l'on décide de penser en termes de la valeur exacte de la quantité qu'on cherche. Le problème initial, pour être résolu, demande alors qu'on effectue des calculs complètement différents: ce sont des calculs qui ne se font plus avec des chiffres, mais avec la valeur exacte du nombre qu'on cherche. Dans notre exemple, cela aurait pu se faire comme suit: en suivant un patron qu'on rencontre dans les mathématiques babyloniennes, on multiplierait les deux membres de l'équation par n (bien sûr, dans les mathématiques babyloniennes il n'y a ni n ni b; ce sont toujours des chiffres concrets). On aurait alors: $nx + x = nb$, donc $(n + 1)x = nb$. Pour trouver la valeur du nombre qu'on cherche, c'est-à-dire x, on trouverait l'«igi» de $(n + 1)$, c'est-à-dire son inverse, et on le multiplierait par nb. En termes modernes, on aurait: $x = (n + 1)^{-1} \times nb$. Évidemment, au niveau numérique, dans les deux cas, on arrive à la même solution, mais le raisonnement dans chaque cas est différent.

Nous n'allons pas entrer dans les arguments historiques qui soutiennent notre thèse, car ils ont été développés ailleurs (Radford, à paraître). Qu'il nous suffise ici de mentionner schématiquement le passage de l'arithmétique à l'algèbre et de nous arrêter à d'autres points qui découlent de nos recherches sur l'histoire des idées algébriques et qui ont été retenus dans l'élaboration de notre séquence d'enseignement de l'algèbre. Plus précisément, ces recherches tentent de répondre à la question suivante: quelles ont été les idées de base de l'algèbre dans sa période présymbolique? C'est la question dont traite la section suivante.

Les idées de base de l'algèbre médiévale

Mentionnons que notre étude sur l'algèbre abaquiste (Radford, 1995), c'est-à-dire l'algèbre médiévale italienne, suggère que la connaissance algébrique a été avant tout un outil ou une technique (l'algèbre était en fait présentée comme une règle, une «*regola*») développée dans le but de résoudre des problèmes verbaux (initialement des problèmes non pratiques; par la suite, son champ d'action s'est étendu aux problèmes commerciaux). Une des caractéristiques des problèmes «purement algébriques» est d'avoir – par rapport aux autres types de problèmes – une mise en équation relativement facile. Leur difficulté résidait dans la transformation de l'équation traductrice: si E_0 désigne l'équation traductrice, le problème est celui de trouver les actions qui permettent de générer une suite d'équations E_1, E_2, ..., jusqu'à une équation canonique E_c qu'on savait résoudre. Bien qu'il y ait eu des propriétés numériques et géométriques qu'on généralisait et intercalait dans les raisonnements algébriques, selon le problème à résoudre, on reconnaît deux transformations de base. Ces transformations, dont le nom paraît dans le titre du traité d'al-Khwarizmi[6], étaient considérées comme les transformations par excellence, à savoir les règles de «l'al-gabr» et «l'al-muqabala». La dernière règle mentionnée permettait, en confrontant les deux membres de l'équation, d'opérer sur les termes constants; elle permettait aussi d'augmenter ou de réduire une équation (donc de trouver une équation équivalente, «proportionnelle» à l'équation précédente)[7]. La règle de l'al-gabr, d'où vient le nom de l'algèbre, présuppose une conceptualisation très particulière des termes algébriques, conceptualisation qui est liée à l'absence de nombres négatifs dans l'algèbre arabe et abaquiste.

En effet, il n'y avait pas de nombres négatifs, mais, évidemment, on savait soustraire. Alors, quand on avait un terme, par exemple $3x^2$, et qu'on lui enlevait une certaine quantité, disons $2x$, on voyait le terme original comme un terme incomplet ou «brisé». Pour le resituer dans son état naturel, il fallait le «réparer». Les mathématiciens italiens utilisaient l'expression «restaurer».

Clarifions à l'aide d'un exemple. Prenons un des problèmes présents dans de nombreux traités de l'époque, que nous tirons du livre *Ragionamenti d'Algebra i Problemi* de Raffaello Canacci, en 1490; ce problème paraît formulé ainsi:

> Partage 10 en deux parties de sorte qu'en multipliant chacune par elle-même et en additionnant ces multiplications, on arrive à 60. Je demande quelle valeur a chaque partie (Procissi, 1983, p. 28).

Pour résoudre le problème, les mathématiciens désignaient une des parties cherchées par «la chose». La chose était leur inconnue algébrique. D'ailleurs, ils ne disposaient que d'une inconnue algébrique (Radford, 1995). Dans le problème formulé ci-dessus, on dirait que le premier terme cherché serait égal à une chose et que l'autre est égal à 10 diminué de la chose (car les deux termes ensemble doivent être égaux à 10). En termes modernes, si nous désignons la chose par x, on aurait que le premier terme cherché serait x et le deuxième serait 10-x. En faisant les calculs de la somme des carrés, on arriverait à $2x^2 + 100 - 20x = 60$.

Le terme principal est $2x^2 + 100$. Il lui manque 20x (vingt choses). Donc, on doit le restaurer; pour cela, on lui donne les choses qui manquent (c'est la règle de l'al-gabr): il retrouve alors son état naturel, qui est $2x^2 + 100$. Pour conserver l'égalité, on doit donner la même quantité de chose à 60. Ce dernier terme devient $60 + 20x$; donc, on obtient l'équation $2x^2 + 100 = 60 + 20x$.

La règle de l'al-muqabala permet maintenant de retrancher 60 de chaque côté, ce qui donne $2x^2 + 40 = 20x$.

Cette équation a deux carrés (c'est le coefficient du terme $2x^2$). Maintenant, on doit la réduire à une équation contenant seulement un carré. La réduction donne $x^2 + 20 = 10x$.

Cette équation appartient aux équations de la forme $x^2 + c = bx$, que les mathématiciens médiévaux savaient résoudre. Ils avaient un algorithme qu'ils appliquaient directement et dont les détails ne nous intéressent pas ici. Ce qu'il convient de souligner, en revanche, c'est le rôle prépondérant joué par les règles de base de l'algèbre dans la résolution des problèmes et la conceptualisation qui les sous-tend.

En effet, en regardant les introductions qui sont proposées dans les manuels scolaires d'aujourd'hui, nous nous sommes aperçus que les nombres négatifs sont censés avoir été acquis et que la résolution de problèmes par l'algèbre demande aux élèves la maîtrise d'un langage algébrique complexe. Il y a donc un décalage conceptuel très important entre la construction du savoir algébrique selon l'histoire et la construction qu'on exige des élèves en salle de classe. On peut même se demander si les échecs scolaires sont dus à l'absence de conceptualisations préalables qui pourraient aider l'élève à donner un sens aux idées de base.

En termes des relations entre l'objet et sa représentation discutées dans la première section, on peut dire que les approches actuelles, véhiculées par les manuels scolaires, ne semblent pas reposer sur une articulation didactique convenable dans laquelle le symbole émergerait de l'objet lui-même et évoluerait dialectiquement en parallèle avec celui-ci pour ne s'en détacher que progressivement, jusqu'à pouvoir mener une vie autonome (du moins jusqu'à un certain point).

L'esquisse historique précédente est très éloquente à ce sujet: nous avons mentionné que les algébristes médiévaux désignaient l'inconnue par un mot, la chose. Ce n'est que plus tard que la chose est désignée par un symbole.

Avant que cela ne se produise, qu'était exactement la chose? Comment la définissait-on? On trouve, dans un manuscrit italien daté de 1460, une définition attribuée au plus talentueux des mathématiciens des XIII[e] et XIV[e] siècles, Antonio de Mazzinghi: «une chose est une quantité occulte» (cité par Franci et Rigatelli, 1988, p. 15).

Cette belle définition donne un sens profond à l'idée de base: une quantité occulte dont l'identité sera dévoilée à la fin du problème.

Nous sommes partis de cette idée dans notre séquence d'enseignement. Mais avant de dire comment nous l'y avons incorporée, récapitulons ce qui vient d'être dit dans cette sous-section. L'algèbre médiévale a reposé essentiellement sur un concept clé, celui d'inconnue, qu'on appelait la chose, et sur deux règles principales: celle de l'al-gabr et celle de l'al-muqabala. Ces règles permettaient de transformer des équations en complétant – ou en restaurant – et en enlevant des termes semblables de chaque membre de l'équation. La première paraît donc comme une règle additive, en ce sens qu'elle ajoute toujours les éléments manquants dans un terme, et l'autre comme une règle soustractive, mais aussi multiplicative, quand il s'agit d'augmenter ou de réduire, proportionnellement, les coefficients de l'équation.

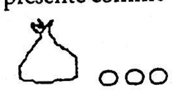
Ce sont ces idées-là que nous avons retenues pour notre séquence d'enseignement. Afin de ne pas rendre doublement complexe la tâche des élèves, notre but a été d'amener ceux-ci à développer ces idées sans faire intervenir, dès le départ, le symbolisme. Le symbolisme n'a été introduit qu'une fois les idées maîtrisées (du moins jusqu'à un certain point). En procédant autrement, nous aurions risqué de lancer les élèves dans des représentations symboliques d'idées qui n'étaient pas encore là.

Description de la séquence et des élèves

Structure de la séquence

Notre séquence a été structurée autour de trois niveaux d'abstraction: un niveau concret, un niveau semi-concret et un niveau symbolique.

Niveau concret. – Nous avons exposé ici des problèmes verbaux qui devaient être résolus en utilisant du matériel concret. Nous sommes partis du modèle classique de la balance. La différence avec des approches existantes (par exemple, Hands-on Equations®[8] and Alge-Tiles™[9]) et l'étude récente de Da Rocha Falcão (1995) est que nous avons exclu tout recours aux nombres négatifs et que les transformations à l'équation étaient menées dans une conceptualisation proche de celle de l'évolution historique du savoir algébrique. Ainsi, le concept d'inconnue a été présenté comme une vraie quantité occulte ou cachée: on a utilisé au départ des sacs de papier contenant une quantité inconnue de bonbons que les élèves devaient découvrir d'après l'énoncé du problème.



De plus, dans la première étape, celle des problèmes de sacs (sacs entiers et demi-sacs) et des enveloppes (voir description ci-dessus), notre point de mire était la règle de l'al-muqabala. Dans la deuxième étape (problèmes de pizzas) s'ajoutait la règle de l'al-gabr. À la suite de cela, les élèves devaient résoudre des problèmes au sujet des pizzas incluant les deux règles. La dernière règle a été introduite à partir des pizzas auxquelles il manquait des morceaux. Nous demandions alors non pas de restaurer la pizza (ce qui n'aurait pas signifié grand-chose pour les élèves), mais de la compléter.

Une fois que ces idées-là étaient saisies, nous sommes passés au deuxième niveau d'abstraction, celui du niveau semi-concret.

Niveau semi-concret. – À ce niveau, nous avons suivi la même séquence que pour le niveau concret, sauf que, cette fois, nous demandions aux élèves de représenter et de résoudre le problème écrit en utilisant des dessins.

Niveau symbolique. – Ici, l'élève devait arriver à résoudre le problème en utilisant des lettres et des chiffres. Cette façon de traduire le problème signifie une rupture dans les représentations: alors que, au premier niveau, l'action se fait sur l'objet lui-même et que, au deuxième niveau, l'action se fait sur une représentation «fidèle» de l'objet (en ce sens qu'elle garde la forme de l'objet représenté), à ce troisième niveau, l'élève doit faire une abstraction à propos de la représentation. Cette abstraction reflète, de façon moins évidente, sa relation avec l'objet représenté et marque la première étape d'un long processus de vie autonome[10].

Les types de problèmes

— Les problèmes de sacs

Les sacs entiers (ou sacs pleins) – Voici un exemple de problèmes de cette catégorie.

Problème 1
Alain a cinq bonbons et sa mère lui donne un sac de bonbons ce qui lui fait vingt-trois bonbons en tout. Alors, combien y a-t-il de bonbons dans son sac?

Les demi-sacs – Voici un exemple de problèmes de cette catégorie.

Problème 2
Nicole décide d'acheter cinq bonbons chez un dépanneur et un demi-sac de bonbons chez un autre. En tout, elle a 12 bonbons. Combien de bonbons y a-t-il dans un sac entier de bonbons?

Les demi-sacs et les sacs entiers – Voici un exemple de problèmes de cette catégorie.

Problème 3
Jean et Paul ont le même nombre de bonbons. Jean a un demi-sac de bonbons et cinq bonbons et Paul a un sac entier et trois bonbons. Combien y a-t-il de bonbons dans un sac entier?

— Les enveloppes

Le but des problèmes de cette catégorie (ainsi que ceux de la sous-catégorie «demi-sacs et sacs entiers») était de présenter aux élèves des problèmes où ils devaient faire des opérations sur l'inconnue des deux côtés de l'équation. Comme nous l'avons déjà dit, Filloy et Rojano (1989) ont démontré que ces équations présentent des difficultés particulières pour les élèves en raison des opérations sur l'inconnue qu'ils doivent faire en vue de résoudre l'équation (ces opérations sur l'inconnue n'étant pas présentes dans les problèmes de type «sacs entiers» et «demi-sacs»). Étant donné que la possibilité ou l'impossibilité de faire des opérations sur l'inconnue est toujours liée à la conceptualisation de cette inconnue, nous nous sommes demandé si les difficultés rencontrées dans les recherches précédentes au sujet du symbolisme apparaîtraient dans les niveaux concret et semi-concret. Les environnements concrets et semi-concrets, proposés dans notre approche, permettraient-ils une transition en douceur vers la coupure didactique repérée par Filloy et son équipe?

Voici un exemple de problèmes de cette catégorie.

Problème 4
Je partage mes cartes de hockey également entre mes deux frères. J'ai trois enveloppes qui contiennent le même nombre de cartes et quatre autres cartes. Je donne à Jacques deux enveloppes plus une carte de hockey et à Paul, je donne trois cartes de hockey et une enveloppe. Combien y a-t-il de cartes de hockey dans une enveloppe?

— Les pizzas

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, le but des problèmes de pizzas était d'introduire la règle de compléter ou de restaurer, à la façon des algébristes médiévaux, une règle qui a donné lieu à une des idées les plus fructueuses de l'algèbre présymbolique. Nous avons fait une adaptation de cette règle. Dans notre séquence, il s'agit de compléter un terme inconnu auquel il manque un terme connu. Il s'agit donc de transformer – au cours de la résolution d'un problème – une ou plusieurs expressions du type «x - a» en une expression du type «x».

Nous avons retenu trois types de problèmes.

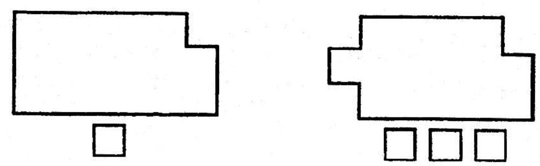
Pizzas 1 – Ce sont des problèmes où l'inconnue (incomplète) paraît dans un seul membre de l'équation. Symboliquement, un des problèmes de cette catégorie est le suivant: $x - a = b$.

Pizzas 2 – Ce sont des problèmes où l'inconnue paraît dans les deux membres de l'équation. Voici un exemple.

Problème 5
Louis doit acheter le même nombre de morceaux de pizza que Louise. En se rendant à la pizzaria, ils s'aperçoivent qu'il manque deux morceaux à chaque pizza. Louise achète trois pizzas incomplètes et Louise prend une pizza incomplète et quatre morceaux. Combien y a-t-il de morceaux dans une pizza complète?

Pizzas 3 – Ce sont des problèmes comme ceux de la catégorie des pizzas 2, sauf que la quantité de morceaux qui manquent aux pizzas pouvait varier d'une pizza à l'autre.

En ce qui concerne le matériel concret utilisé pour les pizzas, nous avons construit des pizzas rectangulaires en carton. Nous avons enlevé respectivement un, deux, trois, etc., morceaux de la pizza pour que les élèves puissent résoudre – lors de l'étape concrète – le problème en utilisant les pizzas indiquées dans l'énoncé du problème. Voici un exemple d'une pizza à laquelle il manque un morceau et d'une pizza à laquelle il manque trois morceaux.



Notre séquence didactique a été expérimentée dans un centre de ressources (centre d'aide pour les élèves ayant des difficultés), dans une école secondaire où se trouvait un petit groupe d'élèves. On a commencé le projet avec cinq élèves de neuvième année et puis, après trois jours, un autre élève s'est ajouté au groupe. Ces élèves n'avaient pas étudié l'algèbre auparavant. La séquence a été enregistrée sur vidéocassette.

On a fait l'expérience de la même séquence dans une classe régulière de neuvième année de 24 élèves.

Dans les deux cas, les groupes ont été organisés d'après une modalité de travail d'apprentissage coopératif (à tâches égalitaires[11]). L'enseignante présentait un problème et demandait aux élèves de proposer des solutions en fonction du degré d'abstraction qu'exigeait la tâche.

L'ordre prédéterminé pour le projet était le suivant. D'abord, on présentait aux élèves les problèmes portant sur les sacs entiers; ensuite, ceux portant sur les cartes de hockey; après, ceux portant sur les demi-sacs, les demi-sacs et les sacs entiers; finalement, on leur présentait les problèmes concernant les pizzas 1, les pizzas 2 et les pizzas 3. On a suivi cette séquence au niveau concret, puis au niveau semi-concret et, finalement, au niveau du symbolisme.

Le temps requis pour la séquence d'enseignement dans la classe régulière a été de quatre semaines, d'une durée de quarante minutes par jour.

Le tableau suivant donne un aperçu du temps approximatif alloué aux types de problèmes en fonction du degré d'abstraction, dans le groupe non régulier.

	Sacs	Cartes de hockey	Demi-sacs	Pizzas 1	Pizzas 2	Pizzas 3
Concret	←	40 →	← 40 →	←	80	→
Semi-concret	←	60 →	← 60 →	←	80	→
Abstrait	←	60 →	← 30 →	←	60	→

Figure 1 – Type de problème

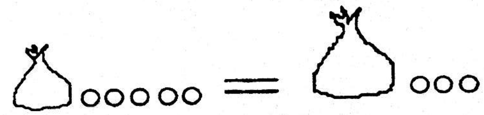
L'analyse des résultats que nous présentons dans les prochaines sous-sections est basée (à une exception près: voir extrait 5 plus loin) sur le groupe de six élèves du centre de ressources mentionné ci-dessus. Ensuite, nous analysons un groupe de la classe régulière.

Analyse des résultats

La résolution des problèmes aux niveaux concret et semi-concret

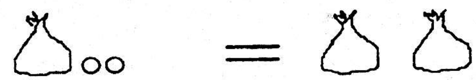
Les élèves sont arrivés à maîtriser assez rapidement les stratégies de résolution de problèmes aux niveaux concret et semi-concret. L'idée de la balance facilitait le recours à la règle d'élimination de termes semblables (règle de l'al-muqabala).

La présence du matériel concret rendait possible l'organisation des actions nécessaires à la résolution du problème. Une des stratégies qu'il convient de mentionner ici est celle qui permet de résoudre les problèmes de «demi-sacs et sacs entiers». Dans le problème 3, mentionné ci-dessus, la stratégie se présente comme suit: l'élève organise les éléments du problème d'après une disposition spatiale semblable à celle-ci.



Au niveau concret, l'égalité est assurée par le dessin d'une balance à deux plateaux; au niveau symbolique, la balance est représentée par un symbole d'égalité.

En général, les élèves ont enlevé trois bonbons de chaque côté; puis, ils ont spontanément remplacé le sac entier par deux demi-sacs.



Ensuite, ils ont enlevé un demi-sac de chaque membre et ils ont trouvé que le demi-sac contient deux bonbons et que le sac entier en contient quatre.

Comme on le voit, le raisonnement se fait en termes de demi-sacs. Le demi-sac devient une sorte d'«inconnue auxiliaire».

Nous reviendrons à l'effet de cette stratégie sur les stratégies de résolution de problèmes basées sur le symbolisme.

Le passage du semi-concret au symbolique: le problème des représentations

Le passage du concret au semi-concret s'est fait facilement. Dans le cas des problèmes portant sur des sacs entiers et des demi-sacs, les élèves ont opté pour représenter l'objet par un dessin de l'objet lui-même. Pour les pizzas, ils ont commencé par les représenter par des pizzas carrées auxquelles il manquait des morceaux, mais ils ont trouvé que les représentations des pizzas rondes étaient plus faciles à dessiner, ce qui a fait que les pizzas carrées ont été remplacées par des pizzas rondes.

Quand nous avons dit aux élèves qu'on ne résoudrait plus les problèmes avec des dessins, mais avec des lettres, une élève a dit : «Ça va être plus difficile parce que tu dois le faire dans ta tête». Ainsi, il semble que, *a priori*, le symbole est perçu par l'élève non pas comme un appui porteur de signification, mais comme une entité vide, on dirait sans personnalité et, par là, un obstacle plutôt qu'une aide à la pensée.

Un premier phénomène observé concerne l'utilisation des lettres pour désigner le nombre inconnu. Au départ, se dégage une tendance à représenter les sacs par une grande lettre S, alors que les bonbons sont représentés par des nombres de petite taille (cela s'est produit par trois fois pour les quatre élèves présents ce jour-là). Le critère utilisé pour représenter l'objet repose donc sur une conservation métrique des objets, critère qui assure la conservation des grandeurs et révèle par là un lien encore trop étroit entre l'objet et sa représentation (voir extrait 1).

Cependant, au fur et à mesure que les élèves résolvent des problèmes, la taille des lettres devient graduellement égale à celle des chiffres: ainsi, la représentation passe à un premier détachement de l'objet, grâce à un travail effectué sur la résolution de problèmes.

$$\begin{array}{rcl} S+5 & = & 23 \\ -5 & & -5 \\ S & = & 18 \end{array}$$

Extrait 1

Pour ce qui est de la résolution du problème, il faut noter que l'écriture de l'équation est prise comme un appui statique sur laquelle on pose les actions qu'on doit entreprendre pour aboutir au résultat. Cela signifie que l'écriture n'évolue pas de manière séquentielle, ligne par ligne, comme on s'y attendrait dans le cas d'une utilisation compétente du langage algébrique. L'écriture symbolique de l'équation a ici une valeur heuristique qui guide les actions de la résolution. Examinons à cette fin la résolution du problème 4 d'un élève (extrait 2): il ressort que l'écriture symbolique et les actions entreprises sur les objets représentés sont calquées sur la disposition utilisée aux niveaux concret et semi-concret. L'élève enlève une carte et une enveloppe de chaque côté. Il n'écrit même pas e = 2. Sa réponse paraît cependant sur le papier: le 1 placé au-dessus de l'écriture «2e», au début du membre à gauche, signifie «une enveloppe», c'est-à-dire ce qui reste à gauche, et le numéro «2» en bas, à droite, c'est le nombre de cartes de hockey qui restent.

Un autre élève (extrait 3) utilise l'équation traductrice comme appui, mais les actions qu'il effectue pour résoudre le problème sont organisées autrement sur le plan symbolique. Les actions sont, en effet, écrites de façon séquentielle, ligne par ligne (on enlève une carte, puis une enveloppe, etc.).

$$\begin{array}{rcl} \overset{1}{\cancel{2e}}+1 & = & \cancel{e}+3 \\ -1 & & -1 \\ \hline & & 2 \end{array}$$

Extrait 2

Cependant, l'écriture a ici un rôle mnémotechnique qui est loin de refléter la structure formelle et logicoséquentielle des équations équivalentes. Ceci est évident dans l'extrait 4, qui concerne le problème 2, où notre élève laisse même tomber le symbole S au plan symbolique.

$$\begin{array}{rcl} 2E+1 & = & E+3 \\ -1 & & -1 \\ \hline 2E & & E+2 \\ -E & & -E \\ \hline E & = & 2 \end{array}$$

Extrait 3

Comme on peut le voir, le symbole «S» ne paraît ni dans la ligne où figure $\frac{1}{2}=7$ ni dans la suivante, bien que l'élève garde l'objet «en tête» (il sait qu'il s'agit de l'égalité: un demi-sac de bonbons est égal à sept bonbons). Dans les dernières phases de la démarche de résolution, l'objet n'a pas besoin d'être représenté.

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}S+5 & = & 12 \\ -5 & & -5 \\ \hline 0 & & 7 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}=7 \qquad 7\times 2=14$$

$$1=14$$

Extrait 4

Un autre exemple du phénomène précédent est le suivant. Il provient d'un élève du groupe régulier:

> Jessica a une pizza à laquelle il manque un morceau et une pizza à laquelle il manque trois morceaux. En tout, elle a 16 morceaux de pizza. Combien y a-t-il de morceaux dans une pizza complète?

$$\begin{array}{rcl} 1-1+1-3 & = & 16 \\ 1-1+1+1-3+3 & = & 16+1+3 \\ 1+1 & = & 20 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2 & = & 20 \\ 2\div 2 & = & 20\div 2 \\ 1 & = & 10 \end{array}$$

∴ Il ya 10 morceaux dans 1 pizza complète

Extrait 5

Comme l'illustre la copie de l'élève, l'objet n'est pas représenté. Cependant, aux yeux de l'élève, la signification des chiffres est tout à fait claire. Sa disposition spatiale dans le texte suit celle des représentations semi-concrètes.

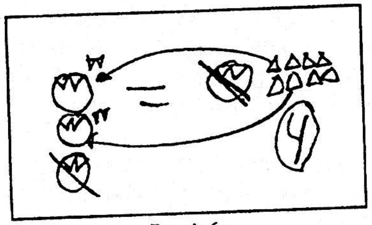
Il est intéressant de noter ici qu'un papyrus gréco-égyptien, daté du premier siècle av. J.-C., contient plusieurs problèmes qui montrent un rôle heuristique de l'équation tout à fait semblable à celui que nous venons de discuter au sujet des façons de procéder de nos élèves (Radford, à paraître).

Tout cela laisse entendre que le rôle heuristique de l'équation semble être un patron récurrent dans l'appropriation des premières idées algébriques. Une suggestion pour l'enseignement serait alors de permettre à l'élève de découvrir et de développer le rôle heuristique de l'équation. L'écriture formelle, basée sur l'utilisation de lettres, qui sous-tend le concept d'équations équivalentes, pourrait avoir lieu après.

Les traces de la pensée concrète sur la pensée symbolique au niveau des stratégies de résolution

Ce qui précède montre que les traces de la pensée concrète sur la pensée symbolique, c'est-à-dire la pensée qui s'appuie sur l'utilisation de symboles, sont visibles dans les représentations choisies. Dans cette sous-section, nous allons voir qu'il en est de même pour les stratégies de résolution suivies pour résoudre les problèmes.

Regardons, à cette fin, la façon de procéder suivante (extrait 6a) pour résoudre le problème 5 mentionné ci-dessus.



Extrait 6a

L'élève commence par enlever une pizza incomplète de chaque côté; puis, il complète les pizzas à gauche, en donnant deux morceaux à chaque pizza et en ajoutant les équivalents (quatre morceaux) à droite. Après, il «voit» les huit morceaux à droite comme un ensemble composé de deux groupes de quatre morceaux chacun et il associe chacun des groupes de l'ensemble à une des pizzas de gauche.

Sur le plan du symbolisme, la façon de procéder la plus fréquente devant des problèmes comme le précédent consiste à éliminer en bloc des termes semblables. Voyons-en un exemple (extrait 6b). Le problème en question est le suivant:

> Sandra et Richard sont allés s'acheter des pizzas auxquelles il manque deux morceaux à chacune. Ils ont acheté le même montant de morceaux. Sandra a trois pizzas incomplètes et Richard a 18 morceaux plus une pizza incomplète. Combien y a-t-il de morceaux dans une pizza complète?

En suivant la même idée qu'au niveau semi-concret, l'élève commence par enlever le terme «p-2» des deux côtés de l'équation. Ce terme est vu comme un bloc; après, l'élève complète les deux pizzas à gauche et donne quatre morceaux à droite. Puis, il divise par le nombre de pizzas complètes et obtient le résultat.

$$\cancel{p-2}$$
$$p\underset{+2}{-2} = 18 + \cancel{p-2}$$
$$p\underset{+2}{-2} \quad \begin{matrix}+2\\+2\end{matrix} = 22 \div 2 = 11$$

Extrait 6b

La conceptualisation du terme algébrique «p - 2» et l'action d'élimination de celui-ci provient de la signification concrète du terme. Il y a cependant des cas

où l'élève arrive à écrire une équation du type «3p - 6 = 1p - 2 + 18», qui est résolue comme suit: on ajoute les 6 termes qui manquent à gauche; à droite, on ajoute deux au terme «1p - 2» et les quatre qui restent sont ajoutés à 18. Cela se produit chez l'élève le plus «fort» en mathématiques. Cette observation suggère que cette étape, qui n'est pas franchie par les autres élèves, pourrait être conduite ou préconisée par le professeur lui-même en relation avec les «moins forts».

Une autre stratégie de résolution qui montre les traces du concret sur le symbolique est celle que nous avons appelée «la stratégie un par un». Elle consiste à éliminer, afin de garder l'égalité, un objet de l'ensemble de gauche et ensuite un objet semblable de l'ensemble de droite; et on recommence. Par exemple, dans un des problèmes des cartes (un problème qui mène à l'égalité «3 enveloppes + 4 cartes = 2 enveloppes + 6 cartes»), l'élève va, au niveau concret, éliminer une par une les cartes. Cela l'amène à la situation «3 enveloppes = 2 enveloppes + 2 cartes»; ensuite, l'élève enlève une enveloppe de chaque côté, puis une autre, et arrive à la réponse «1 enveloppe = 2 cartes». Remarquons que, chez les autres élèves, il y a une tendance à se défaire des enveloppes en premier; mais le principe est le même.

Quelques jours plus tard, quand la séquence d'enseignement est rendue au niveau du symbolisme, l'élève écrit:

$$3e + 4 = 2e + 6$$

puis, elle biffe une enveloppe et une carte, ce qui l'amène à:

$$2e + 3 = 1e + 5$$

puis, elle écrit:

1e + 3 (qui provient de l'élimination d'un «e» faite au membre gauche).

Or, n'ayant plus de «e» à droite, après l'élimination du «e» dans «1e + 5», l'élève ne sait plus comment s'y prendre pour continuer (voir extrait 7).

Cet exemple est intéressant d'un autre point de vue. L'analyse de la séquence vidéo montre que l'élève perd le sens des actions entreprises. L'égalité sous-jacente, qui était l'axe de la démarche, est perdue. L'élève ne peut plus associer un sens aux termes «1e + 3», c'est-à-dire le membre gauche transformé et «5» qui est le membre droit transformé.

$$\cancel{3e} + \cancel{4} = \cancel{2e} + \cancel{6}$$
$$\cancel{2e} + 3 \qquad \cancel{1e} + 5$$
$$1e + 3$$

Extrait 7

Cette élève avait été l'une des premières à avoir bâti une systématisation des actions utilisées à la résolution des problèmes aux niveaux concret et semi-concret (suppression un par un des termes semblables de chaque côté de l'équation). Au niveau du symbolisme, cette systématisation, quand elle est extrapolée, entre en conflit avec l'évolution du problème. C'est que la signification du résultat des actions n'est pas évidente en elle-même, car le résultat des actions est enregistré ici à l'aide de lettres («3e + 4» devient «2e + 3» puis «1e + 3»); cela exige soit d'abandonner le contexte lui-même, soit d'être en mesure d'établir des liens entre le symbolisme et le contenu sémantique à chaque moment.

Or, abandonner le contexte exige d'élever les actions au-dessus des significations concrètes auxquelles elles s'appliquent (bonbons, cartes, pizzas, etc.) et donc de rendre ces actions abstraites. Il est clair que cette élève n'a pas réussi à atteindre ce niveau d'abstraction.

La classe régulière

Comme nous l'avons dit antérieurement, une classe régulière de neuvième année a été soumise à la même séquence d'enseignement que le groupe d'élèves du Centre de ressources dont nous venons d'analyser la démarche. Les observations prélevées dans la classe régulière confirment ces résultats. Au niveau semi-concret, les stratégies de résolution de problèmes sont calquées sur celles développées par les élèves au niveau concret. Grâce à sa matérialisation concrète, l'inconnue est facilement saisie; de plus, les actions sont intériorisées en termes de conservation de l'équilibre entre les deux plateaux de la balance, équilibre qui, au fur et à mesure que les élèves résolvent des problèmes, est pensé de plus en plus en termes d'une égalité numérique abstraite. Lors du passage au symbolisme, nous avons pu remarquer à nouveau une diversité de difficultés qu'ont certains élèves à résoudre les problèmes posés. Une de ces difficultés, qui n'a pas paru dans notre groupe du Centre de ressources, concerne l'impossibilité éprouvée par certains élèves d'intégrer l'objet inconnu (par exemple, une enveloppe) dans un processus de résolution, dès que cet objet est représenté par une lettre, c'est-à-dire par un symbole. La seule façon de se tirer d'affaire est de retourner au niveau semi-concret, d'y résoudre le problème, puis de transférer la solution isomorphiquement au niveau du symbolisme.

Voici un extrait du dialogue entre une élève et l'enseignante, dans un problème appartenant à la catégorie des enveloppes (et dont l'équation est «3e + 1 = 2e + 5»).

L'enseignante	Essaie de le faire sans faire le dessin pour commencer. [Elle voit que l'élève hésite; alors elle dit:] Penses-tu que tu vas pouvoir le faire?
L'élève	Non. J'ai besoin de faire les dessins.
	[Elle fait les dessins qui traduisent l'équation, puis dit:]

	J'enlève mon surplus; donc, j'enlève une carte. Si je le fais de ce côté-ci, je dois le faire de l'autre.
	Alors, là, je peux enlever des enveloppes des deux côtés; alors, tu as une enveloppe égale à quatre cartes.
L'enseignante	OK. Maintenant, fais-le-moi avec des lettres.
L'élève	3e + 1 = 2e + 5
	J'enlève une carte ici; donc [elle revient à son équation et y inscrit l'action d'enlever la carte; l'équation se voit comme suit:]
	3e + 1 - 1 = 2e + 5 - 1, égale 3e = 2e + 4.
	[Maintenant l'élève se prépare à enlever deux cartes de chaque côté de l'égalité:]
	Comment est-ce que tu dis [c'est-à-dire «tu écris»] que tu enlèves deux enveloppes?
L'enseignante	Comment as-tu fait pour enlever une carte? Tu as fait un moins un.
L'élève	Ah! [à ce moment, elle comprend et écrit:] 3e - 2e = 2e - 2e + 4, 1e = 4.

Après ce problème, on a demandé à cette élève de résoudre un problème de demi-sacs et de sacs en utilisant des lettres. Faute de pouvoir le faire, il lui a fallu recommencer par résoudre le problème au niveau semi-concret; ce n'est qu'à ce moment qu'elle a pu tenter la résolution du problème au niveau du symbolisme.

Enfin, une autre difficulté observée dans le groupe régulier a été celle de la symbolisation d'un sac et d'un demi-sac. Alors que, dans le groupe du Centre de ressources, les élèves ont opté pour les représenter par «s» et «½s», respectivement, dans le groupe régulier, quelques élèves ont choisi «s» et «d», d'après la première lettre du mot en question. Certains de ces élèves n'ont pas réussi, faute d'avoir pu établir la relation numérique reliant «s» à «d», c'est-à-dire «2d = s».

Conclusion

Le langage algébrique moderne a ceci en commun avec les premiers langages écrits: ils ne tiennent pas compte exactement du langage parlé. Le langage algébrique échappe à une transcription complète du «dit» et ne retient – à la manière des premières tablettes sumériennes – que quelques idées clés. Mais, à la différence des textes narratifs, le langage algébrique n'a pas seulement un rôle de traduction descriptive; il vise le dégagement des renseignements clés non en relation aux objets eux-mêmes (Pierre, Marie, etc.), mais plutôt en termes des relations quantitatives (arithmétiques, géométriques, etc.) qui existent entre ces objets. Il ne se soucie pas d'être fidèle dans sa traduction, mais efficace lors de la résolution du problème.

Or, l'efficacité est un sous-produit: elle permet de faire mieux (par exemple, aller plus vite) ce qu'on savait déjà faire (penser, par exemple, au problème babylonien) et, éventuellement, d'aller plus loin (par exemple, trouver de nouveaux moyens, faire face à de nouvelles situations, etc.).

L'histoire de l'algèbre montre en effet que c'est un souci d'efficacité qui a amené les anciens mathématiciens à développer le langage algébrique: il émerge comme une abréviation du langage parlé. Par exemple, Diophante a utilisé le symbole ς pour désigner l'inconnue car, d'après Heath (1910), c'est une déclinaison de la dernière lettre du mot grec *arithmos* (ἀριθμός). Les *Maestri d'Abaco* du Moyen Âge italien ont souvent utilisé «co.», à la place du mot *cosa* (chose), et ont écrit «p.» pour désigner le mot «più» (plus). Notre symbole moderne de racine carrée, $\sqrt{\ }$, est une dégénération de l'abréviation «r» du mot «racine» (en italien «radice») qu'on écrivait au long et qui rendait les textes plus longs.

Le but du symbolisme était donc d'effectuer les calculs d'une manière plus économique.

Le symbole, dans notre séquence didactique, a suivi cette même direction. Il a été introduit comme un moyen pour faciliter les calculs.

Sans doute, un des moments décisifs, dans l'apprentissage de l'algèbre, est celui où l'on arrive à détacher l'objet représenté de sa représentation symbolique. En effet, c'est grâce à cette éclosion que le symbole acquiert une autonomie et une vie propre. Cela signifie qu'il se produit une rupture avec une façon d'agir et la naissance de nouvelles relations entre l'objet et son symbole. Or, ceci est d'autant plus difficile à accomplir que (tant au point de vue de notre séquence d'enseignement qu'à celui de l'histoire) les premières relations entre l'objet et sa représentation, bâties sur une quasi-superposition des deux, ont été fructueuses.

Est-ce que nos élèves ont pu arriver à détacher l'objet, c'est-à-dire l'inconnue, de sa représentation? Il est difficile de donner une réponse catégorique. Il semble que le problème doit être envisagé en termes de relations objet-représentation qui se construisent au cours d'un long processus. En effet, nous avons mis en évidence une première relation entre l'objet et sa représentation: elle se situe dans la perte des proportions métriques; une autre relation, plus difficile, se produit pour l'écart qui se creuse entre l'objet comme contenu conceptuel et sa représentation. Nous croyons qu'il y a seulement un élève – parmi notre groupe de six élèves en difficulté – qui a su le faire (voir extrait 3; le comparer à l'extrait 7: l'échec auquel l'élève se heurte est dû à l'impossibilité de gérer le symbole au-delà de sa signification concrète.).

À la lumière des résultats, il semble que, devant la base des problèmes proposés, cette éclosion ne sera possible que chez certains élèves. Pour aller plus loin, il serait nécessaire de faire une intervention didactique probablement au moyen d'autres problèmes.

Mais l'apprentissage de l'algèbre n'est pas lié seulement au développement de l'idée d'inconnue, mais aussi à l'utilisation des règles de base, c'est-à-dire celle de l'al-gabr et l'al-muqabala. Ces règles doivent aussi être l'objet d'une abstraction. Nous avons vu que, aux niveaux concret et semi-concret, cela se faisait assez facilement. En revanche, au niveau du symbolisme, cela posait des problèmes à certains élèves. L'utilisation de ces règles, dans un contexte symbolique, demande un contrôle supplémentaire qui ne va pas de soi.

En résumé, notre séquence d'enseignement a permis aux élèves de créer eux-mêmes leurs propres stratégies et leurs propres symboles. De plus, notre séquence a permis aux élèves de donner un contenu au symbole. C'est un point qui mérite d'être souligné. En effet, un symbole doit représenter quelque chose de concret. C'est le principe sur lequel repose la construction des représentations symboliques. Un symbole, sans appui sur le concret (ou sur un autre symbole à contenu sémantique non vide), ne représente rien: c'est juste un trait. Comme nous l'avons dit au départ, nous concevons que l'apprentissage des mathématiques repose en grande partie sur la construction, à la fois individuelle et sociale, des relations entre les objets et leurs représentations.

De cette perspective, chaque relation ouvre un monde de possibilités, même si ce monde n'est pas très grand, comme c'est le cas des relations qui paraissent au niveau semi-concret[12]; mais, en même temps, chaque système de relations «objet-représentation» établit sa propre frontière qui n'est franchissable qu'au prix d'un changement conceptuel.

NOTES

1. Ce travail a été subventionné en partie par FCAR n° 95ER0716, Québec, et les Fonds de recherche de l'Université Laurentienne, Ontario. Nous tenons à remercier Mme Brigitte Caveen. Nous tenons aussi à remercier M. Guy Lehoux et ses élèves: Kevin Guy, Kevin Fraser, Jean Desjardins, Mireille Spencer et Éric Grégoire, qui ont rendu possible l'enregistrement vidéo de la séquence didactique présentée ici.

2. Pour fixer les idées, rappelons l'exemple classique de Rosnick et Clement (1980): «Il y a six fois plus d'étudiants que de professeurs à cette université»; la tâche consiste à traduire cette expression qui est donnée du langage naturel au langage algébrique, en utilisant S pour représenter les étudiants et P pour les professeurs.

3. En effet, la représentation d'un objet apparaît, chez Platon, comme un moyen d'accéder à l'idée préexistante, c'est-à-dire à l'eidos ou la *Forme*. C'est précisément ce rôle-là qu'ont les figures imprécises tracées par les géomètres sur le sable ou les parchemins dans *La République* (voir Livre VI, 509d ff).

4. Dans les problèmes babyloniens, b était un chiffre donné; d'autre part, $\frac{1}{n}x$ signifiait la $n^{\text{ième}}$ partie du nombre cherché (qui était, par exemple, le poids d'une pierre).

5. Pour fixer les idées, supposons que nous avons à faire au problème $x + \frac{1}{11}x = 6$. Prenons comme fausse position, c'est-à-dire comme solution provisoire qu'on sait être fausse *a priori*, le nombre 11. En substituant cette valeur dans le premier membre, nous obtenons 12; or, on voulait 6. Donc, on est arrivé au double de ce qu'on cherchait. Il faut donc réduire de moitié. On applique la même réduction à la fausse position ou fausse valeur 11; donc, le résultat cherché est $\frac{11}{2}$.

6. Il s'agit du *Traité concis sur les règles de l'al-gabr et de l'al-muqabala*, écrit à Bagdad vers 833.

7. Il faut se rappeler que les mathématiciens d'autrefois n'étaient pas toujours cohérents dans l'utilisation des règles; le *Traité concis* d'al-Khwarizmi donne, dans certains passages, un sens différent à la règle de l'al-muqabala ainsi qu'à celle de l'al-gabr. Il faudrait placer ces incongruités dans un contexte historique pour comprendre qu'il s'agit d'une étape de systématisation d'une connaissance transmise jusqu'alors de façon orale.

8. Développé par Borenson and Associates, P. O. Box 3328, Allentown, PA, 18106, États-Unis.

9. Distribué par Exclusive Educational Products, 243 Saunders Road, Barrie, Ontario, L4M 6E7.

10. Notre séquence diffère de certaines approches proposées précédemment – et qu'on retrouve parfois dans les textes scolaires – où il est question d'utiliser comme représentation de l'inconnue un petit carré, □, qui cache le nombre cherché. Ce carré est par la suite remplacé par une lettre (voir, par exemple, Herscovics et Kieran, 1980). Outre le cheminement progressif que suit notre séquence à propos des représentations, il y a des différences sur la conceptualisation de l'équation. En effet, dans ces approches-là, l'équation est déjà donnée; elle est un objet mathématique *per se*. Pour nous, l'objet équation est un outil pour résoudre un problème. De ce fait, il ressort aussi que la conceptualisation de l'inconnue est très différente dans l'approche que nous proposons.

11. On n'avait pas, à l'intérieur du groupe, une hiérarchie de type «expert».

12. Remarquons toutefois que ce monde de possibilités a été assez grand pour permettre aux élèves de traverser sans difficulté la coupure didactique (au sens de Filloy et Rojano, 1989).

Abstract – The introduction of algebra to students in formal school environments is most often presented by requiring mastery of a complex symbolic language which has little significance for the student. The authors present a teaching sequence which offers an alternative means for introducing algebra. An analysis of the verbal reports of two groups of grade 9 students (Secondary III) showed that these students construct basic algebraic concepts within a context of problem-solving, and then begin to create symbolic concepts.

Resumen – La introducción al álgebra se hace frecuentemente imponiendo al alumno el dominio de un lenguaje simbólico complejo y sin una significación precisa. Presentamos aquí una alternativa estructurada en torno de una secuencia didáctica. El análisis de la verbalización de dos grupos de alumnos de 9° año (3° de secundaria) señala que los alumnos llegan tanto a construir las ideas algebraicas básicas dentro de un contexto de resolución de problemas como a simbolizar de sus ideas.

Zusammenfassung – Bei der Einführung in die Algebra wird vom Schüler sehr oft die Beherrschung einer komplexen symbolischen Sprache ohne genaue Bedeutung auferlegt. Wir schlagen hier eine Alternative vor, die in eine Unterrichtsreihe gegliedert ist. Die Analyse der Äußerungen von zwei Gruppen von Schülern der neunten Klasse (dritte Klasse der Mittelschule) ergiebt, daß diese innerhalb einer Aufgabenlösungssituation selber algebraische Ideen konstruieren und diese Ideen symbolisieren können.

Références

Bednarz, N., Janvier, B., Mary, C. et Lepage, A. (1992*a*). L'algèbre comme outil de résolution de problèmes: une réflexion sur les changements nécessaires dans le passage d'un mode de traitement arithmétique à un mode de traitement algébrique. *Recueil des textes du Colloque du programme de Recherche sur l'émergence de l'algèbre* (p. 17-31). Montréal: CIRADE, Université du Québec à Montréal.

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B. et Lepage, A. (1992*b*). Arithmetical and algebraic thinking in problem-solving. *In* W. Geeslin et K. Graham (dir.), *Proceedings of the 16th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, p. 65-72). Durham, NH: University of New Hampshire.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context: A problem analysis. *In* J. da Ponte et J. Matos (dir.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. II, p. 64-71). Lisbonne: Université de Lisbonne.

Bell, A. et Malone, J. (1993). Learning the language of algebra. *In* I. Hyrabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu et F.-L. Lin (dir.), *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 130-137). Tsukuba, Ibaraki, Japon: University of Tsukuba.

Bottéro, J. (1994). *Babylone, à l'aube de notre culture*. Paris: Gallimard.

Burton, M. (1988). A linguistic basis for the student difficulties with algebra. *For the Learning of Mathematics, 8*, 2-7.

Da Rocha Falcão, J. T. (1995). A case study of algebraic scaffolding: From balance to algebraic notation. *In* L. Meira et D. Carraher (dir.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, p. 66-73). Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

Filloy, E. et Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought (A clinical study with 12-13 years old). *Proceedings of the Sixth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (p. 51-56). Madison, WI: University of Madison.

Filloy, E. et Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Franci, R. et Rigatelli, L. T. (1988). Fourteenth-century italian algebra. *In* C. Hay (dir.), *Mathematics from manuscript to print. 1300-1600* (p. 11-29). Oxford: Clarendon Press.

Gallardo, A. et Rojano, T. (1988). Areas de dificultad en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(2), 155-188.

Heath, L. (1910). *Diophantus of Alexandria. A study in the history of greek algebra* (2e éd.). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Herscovics, N. et Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher, 73*, 572-580.

Hoyrup, J. (1991). *Mathematics and early state formation, or, the Janus face of early mesopotamian mathematics: Bureaucratic tool and expression of scribal professional autonomy*. Danemark: Département des langues et de la culture, Roskilde University Centre.

Hoyrup, J. (1994). *The antecedents of algebra*. Danemark: Département des langues et de la culture, Roskilde University Centre.

Kaput, J. (1983). Errors in translations to algebraic equations: Roots and implications. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 5*, 63-78.

Larsen, M. T. (1986). Writing on clay: From pictograph to alphabet. *The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition*, *8*(1), 7-33.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior*, *3*, 93-166.

Procissi, A. (dir.) (1983). *Raffaello Canacci: Ragionamenti d'algebra i problemi.* Siena: Quaderni del Centro Studi della Matematica medievale, n° 7, Università di Siena.

Radford, L. (1994). La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos. *Educación Matemática*, *6*(3), 21-36.

Radford, L. (1995). Before the other unknowns were invented: Didactic inquiries on the methods and problems of medieval italian algebra. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 28-38.

Radford, L. (à paraître). Elementary algebraic thinking from the perspective of didactic epistemology. *In* R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell et R. Lins (dir.), *Algebraic processes and structure.*

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. *In* N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (p. 39-53). Kluwer.

Rosnick, P. et Clement, J. (1980). Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, *3*(1), 3-27.