COMUNE DI CASTEL S. PIETRO TERME • 4-5-6 NOVEMBRE 2011 • INCONTRI CON LA MATEMATICA N. 25

UN QUARTO DI SECOLO AL SERVIZIO DELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

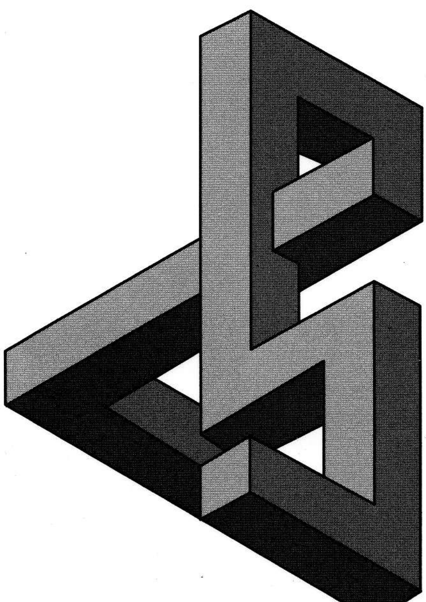
a cura di BRUNO D'AMORE e SILVIA SBARAGLI

Testi delle relazioni generali di:

Mariolina Bartolini Bussi • Luciana Bazzini
Bruno D'Amore • Maria Alessandra Mariotti • Domingo Paola
Luis Radford • Piergiuseppe Rossi • Silvia Sbaragli

Testi delle relazioni di scuola dell'infanzia di:

Mariolina Bartolini Bussi • Erminia Dal Corso
Giorgio Häusermann e Patrizia Renzetti • Paola Vighi



Pitagora Editrice Bologna

Direzione del Convegno
Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Silvia Sbaragli

ISBN 88-371-1849-X

Stampa: Tecnoprint s.n.c., Via del Legatore 3, Bologna.
Codice: 46/94

http://www.pitagoragroup.it
e-mail: pited@pitagoragroup.it

Sullo sviluppo del pensiero matematico nei giovani studenti: la graduale armonizzazione di percezione, gesti e simboli

Luis Radford
Laurentian University, Canada

Abstract. *This article deals with the question of the development of mathematical thinking in young students. In contrast to mental approaches to cognition, we argue that thinking is made up of material and ideational components – such as (inner and outer) speech, objectified forms of sensuous imagination, gestures, tactility, and actual actions with signs and cultural artifacts. Drawing on data from a longitudinal classroom based research program where 8-year old students were followed as they moved from Grade 2 to Grade 3 to Grade 4, our developmental research question is investigated in terms of the manner in which new relationships between embodiment, perception, and symbol-use emerge and evolve as students engage in patterning activities.*

1. Introduzione e quadro teorico

In generale, i problemi legati allo sviluppo del pensiero matematico sono rinomati per le difficoltà metodologiche e teoriche che presentano. Non sono per nulla semplici da studiare. Essi possono soltanto essere formulati e affrontati alla luce di punti di vista teorici espliciti riguardo al pensiero e allo sviluppo. Nel nostro caso, la ricerca si inserisce in una prospettiva Vygotskijana dell'insegnamento e apprendimento – la *teoria dell'oggettivazione della conoscenza* (Radford, 2008). Una caratteristica centrale di questa teoria è che, diversamente dagli approcci mentali cognitivi, il pensiero non è considerato come qualcosa che avviene soltanto 'nella testa'. Il pensiero è considerato piuttosto come costituito da componenti materiali e ideative: è composto dal linguaggio (interno ed esterno), dalle forme oggettivate di immaginazione sensoriale, dai gesti, dalla tattilità, e dalle nostre azioni effettive con artefatti culturali. Ciò non significa che il pensiero sia una *collezione* di *oggetti*. Noi consideriamo il pensiero come un'*unità* dinamica *di componenti materiali e ideali* – una pratica sociale tangibile materializzata nel corpo (per esempio attraverso azioni cinestetiche, gesti, percezione, visualizzazione), nell'uso di segni (per esempio: simboli matematici, grafici, lingua scritta e parlata), e di artefatti di vari tipi (righelli, calcolatrici e così via). In questo contesto, porsi il problema dello sviluppo del pensiero algebrico è come porsi il problema della comparsa di nuove *relazioni* strutturanti tra le componenti materiali-ideative del pensiero (per esempio: gesti, linguaggio interno ed esterno) e del modo in cui queste relazioni sono organizzate e riorganizzate. Ora, nella prospettiva teorica qui articolata, non si ritiene che lo sviluppo segua un percorso prestabilito o innato. Piuttosto, si ritiene che lo sviluppo sia essenzialmente culturale. Il nostro problema di ricerca non riguarda dunque semplicemente la comparsa di nuove forme di funzionamento psichico, ma anche le condizioni contestuali che rendono in primo luogo possibili queste forme. È in questo quadro teorico che nei paragrafi seguenti si prenderà in esame il problema dello sviluppo del pensiero algebrico dei giovani studenti.

2. Metodologia: raccolta dati e analisi

I nostri dati provengono da un programma di ricerca longitudinale di 3 anni condotto in una scuola primaria, nella quale una classe di 25 studenti di 8 anni è stata seguita nel passaggio dalla seconda, alla terza, fino alla quarta. I dati sono stati raccolti durante le regolari lezioni di matematica, progettate dall'insegnante e dal nostro gruppo di ricerca. Per limiti di spazio, i dati qui presentati riguardano soltanto le classi seconda e terza e provengono da episodi che evidenziano quello che è accaduto quando gli studenti hanno affrontato problemi sulla generalizzazione di regolarità. Ci focalizzeremo in particolare su uno studente, Carlos, il cui percorso di sviluppo è rappresentativo dei nostri risultati. In sintonia con il nostro quadro teorico, per esaminare lo sviluppo del pensiero matematico iniziale abbiamo condotto un'*analisi multisemiotica* dei dati. Abbiamo effettuato una microanalisi raffinata, fotogramma per fotogramma, di un filmato *low-motion*, per studiare il ruolo dei e la relazione tra gesti, linguaggio, e segni matematici.

3. Risultati e discussioni

3.1 Primo episodio: Classe seconda

La prima attività di algebra che gli studenti hanno affrontato in seconda elementare ruotava attorno alla sequenza mostrata in Fig. A.

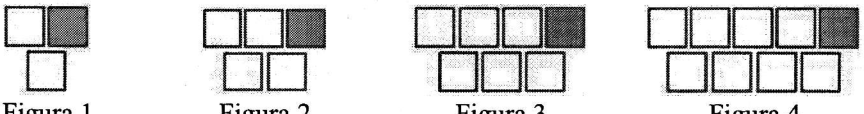


Fig. A. Le prime quattro figure di una sequenza, fornite agli studenti di una seconda elementare.

Nella prima parte dell'attività, agli studenti è stato chiesto di estendere la sequenza fino alla Figura 6. Carlos, uno degli studenti, ha iniziato a contare i quadrati ad alta voce, accompagnando il processo di conteggio con un movimento ritmico della parte superiore del corpo e con gesti di puntamento della penna. Ha contato tutti i quadrati in modo ordinato, partendo dai quadrati della riga superiore, da sinistra verso destra, e poi quelli della riga inferiore (vedi Fig. B, foto 1-2). Ha disegnato dunque la Figura 5, in modo ordinato, partendo dalla riga inferiore, da sinistra verso destra. La Figura 5, sebbene contenga quasi l'esatto numero di quadrati, non è di certo conforme alla disposizione su due righe dei termini forniti della sequenza (vedi Fig. B, foto 3).

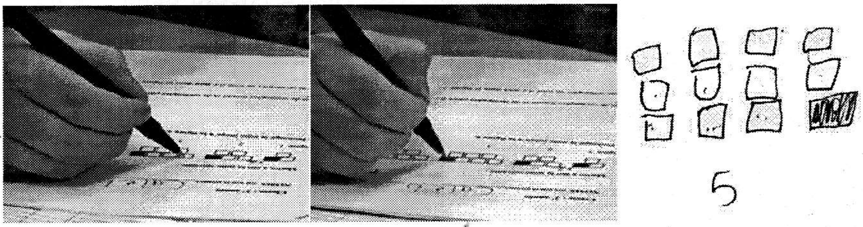


Fig. B. Nelle foto 1 e 2, contando ad alta voce, Carlos punta in modo sequenziale ai quadrati della riga superiore della Figura 3. La foto 3 mostra la Figura 5 di Carlos.

Per fornire un'interpretazione delle azioni di Carlos, notiamo che, in generale, per estendere una sequenza figurale, gli studenti devono cogliere una regolarità che riguarda il legame tra due strutture differenti: una *spaziale* e l'altra *numerica*. Dalla struttura spaziale emerge il senso della *posizione spaziale* dei quadrati, mentre la loro numerosità emerge dalla struttura numerica. Nell'attività di generalizzazione, mentre Carlos presta attenzione alla struttura numerica, la struttura spaziale non è coerentemente considerata importante. Questo non significa che Carlos non veda le figure come composte di due righe orizzontali. Come nel caso di altri studenti, l'importanza attribuita da Carlos alla struttura numerica, lascia in qualche modo sullo sfondo la struttura geometrica. Potremmo dire che la *forma* dei termini della sequenza è utilizzata per facilitare il processo di conteggio (poiché Carlos ha contato sempre i quadrati di una figura in modo ordinato spazialmente), ma la struttura geometrica non è messa in relazione con quella numerica in modo efficace e *significativo*. Il processo di Carlos può essere contrapposto a quello di Kyle, che dà importanza alla forma ma non presta molta attenzione alla numerosità. Kyle ha rappresentato la Figura 5 con due righe, ma ha disegnato 4 quadrati nella riga inferiore e 4 quadrati nella riga superiore.

È interessante notare che nell'estendere le sequenze, gli studenti non hanno utilizzato termini deittici spaziali, come "sotto" o "sopra". Nei casi in cui gli studenti sono riusciti a collegare le strutture spaziale e numerica, la struttura spaziale è apparsa soltanto in modo ostensivo, cioè, nel regno incorporato dell'azione e della percezione (Radford, 2010). La struttura geometrica ha raggiunto il regno del linguaggio il giorno successivo, quando l'insegnante ha discusso la sequenza con gli studenti.

L'insegnante disegnò alla lavagna i primi cinque termini della sequenza, e fece riferimento a uno studente immaginario che contasse per righe: «Questo studente» disse alla classe «ha notato che in Figura 1 (e indicò il nome della figura) c'è un rettangolo sotto (e indicò il rettangolo della riga inferiore), uno sopra (indicando il rettangolo), più un rettangolo scuro (indicando il rettangolo scuro)». L'insegnante passò poi alla Figura 2 e ripeté in maniera ritmica lo stesso processo di conteggio, coordinando i deittici spaziali "sotto" e "sopra", le righe spaziali corrispondenti della figura, e il numero di rettangoli ivi contenuti. Per assicurarsi che tutti seguissero, ripartì ancora dalla Figura 1 e, alla Figura 3, invitò gli studenti a unirsi a lei nel processo di conteggio, per arrivare insieme fino alla Figura 5 (vedi Fig. C).

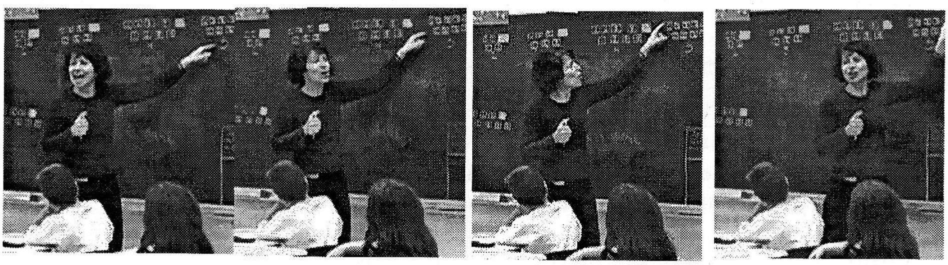


Fig. C. L'insegnante e gli studenti contando ritmicamente dicono (Foto 1) "Figura 5", (Foto 2) "5 sotto", (Foto 3) "5 sopra", (Foto 4) "più 1".

Poi, l'insegnante chiese alla classe il numero di quadrati della Figura 25. Mary alzò la mano e rispose: "25 sotto, 25 sopra, più 1". La classe trascorse un po' di tempo a esaminare figure "remote", come le Figure 50 e 100. In forma schematica, le risposte degli studenti sono state: "x sotto, x sopra, più 1" dove x era sempre un numero *specifico*. Poiché in quel periodo gli studenti erano in grado di fare addizioni sistematiche fino a 25, l'insegnante mise a loro disposizione delle calcolatrici e chiese loro di spiegare i passaggi per calcolare il totale dei quadrati in figure specifiche. In forma schematica, la risposta degli studenti è stata "$x+x+1$" (dove x era sempre un numero *specifico*). Gli studenti tornarono poi a lavorare in piccoli gruppi e continuarono il loro lavoro. In uno dei problemi, essi dovevano spiegare come Pierre dovrebbe procedere per costruire una grande figura di una sequenza. Lo scopo di questo e di altri problemi simili era quello di dare l'opportunità agli studenti di oggettivare una regolarità numerico-spaziale dei termini forniti della sequenza e di utilizzarla per immaginare e trattare termini remoti (o anche non specificati). Carlos scrisse: "Pierre vuole costruire la Figura 10.000. Pierre deve mettere 10.000 sotto [;] sopra deve mettere 10.001".
Come indicato nel nostro quadro teorico, lo sviluppo concettuale è evidenziato dalla comparsa di nuove *relazioni* tra le componenti materiali-ideative del pensiero; esso produce nuove forme di funzionamento psichico.
Sebbene durante il primo giorno Carlos e gli altri studenti avessero dato importanza al processo analitico di conteggio dei quadrati uno alla volta, dal secondo giorno in poi, la loro percezione delle figure e dei processi di

conteggio cambiò. Il legame tra le strutture geometrica e spaziale fu raggiunto e, come le risposte di Mary e Carlos hanno evidenziato, i deittici spaziali divennero parte del loro repertorio linguistico.
Questi cambiamenti testimoniano la comparsa di nuove relazioni tra gesto, linguaggio, percezione, immaginazione, e conteggio. Si era formata una nuova unità di componenti materiali e ideative di pensiero. Così, gli studenti furono in grado non solo di immaginare figure remote (per esempio, la Figura 100) – che sarebbero difficili da immaginare all'interno delle relazioni tra le componenti ideali e materiali del pensiero sottostanti le procedure di conteggio analitico puro, uno alla volta – ma anche di concepire formule per calcolare il numero di quadrati in figure al di fuori della percezione (per esempio, "100+100+1").
Il processo di conteggio comune al quale l'insegnante e gli studenti si dedicarono durante il secondo giorno è, ovviamente, un esempio di *zona di sviluppo prossimale*. L'uso esplicito di ritmo, gesti, e deittici linguistici da parte dell'insegnante, seguito poi dagli studenti, ha aperto nuove possibilità per gli studenti di utilizzare forme culturali efficaci ed evolute di generalizzazione matematica, che essi hanno applicato con successo ad altre sequenze con forme differenti. Il processo di conteggio comune ha reso possibile agli studenti di *notare* e *articolare* nuove forme di generalizzazione matematica. In particolare, essi sono diventati consapevoli del fatto che il processo di conteggio può essere basato su un'idea relazionale: collegare il numero della figura a parti rilevanti di essa (per esempio, ai quadrati della riga inferiore). La figura appare ora non come un semplice insieme di quadrati ordinati ma come qualcosa suscettibile di essere decomposto, dove le parti decomposte forniscono possibili indicazioni sulle relazioni algebriche che si presentano. Ma non è solo la percezione a essere modificata evolutivamente. Nello stesso modo in cui la percezione si sviluppa, così fanno il linguaggio (per esempio, attraverso i deittici spaziali) e i gesti (attraverso il ritmo e la precisione). Anzi, la percezione, il linguaggio, i gesti, e l'immaginazione si sviluppano in modo interrelato. Essi arrivano a formare una nuova unità di componenti materiali-ideative di pensiero, dove le parole, i gesti, e i segni più in generale, sono usati come mezzi di oggettivazione, o come Vygotskij ha espresso, "come mezzi per dirigere intenzionalmente l'attenzione, come mezzi per astrarre e isolare delle caratteristiche, e come mezzi per (...) sintetizzare e simbolizzare" (1987, p. 164).

3.2 Secondo episodio: Classe terza

In terza gli studenti si sono trovati di fronte a compiti di generalizzazione da affrontare in piccoli gruppi. Il primo compito conteneva una sequenza figurale, S_n, costituita orizzontalmente da n cerchi e verticalmente da n 1 cerchi, della quale erano stati dati i primi quattro termini.

Contrariamente a quanto aveva fatto prima in seconda elementare, Carlos percepì la sequenza sfruttando la configurazione spaziale dei suoi termini. Discutendo con i suoi compagni della Figura 4, disse: "qui (indicando la parte verticale) ce ne sono quattro. Così come si prende tutto questo [cioè la parte verticale] insieme (disegnando una linea che la racchiude), e tutto questo [cioè la parte orizzontale] insieme (disegnando una linea che la racchiude; vedi Fig. D, foto 1). Così, dovremmo disegnarne 5 in quel modo (attraverso un gesto verticale indica il luogo in cui la parte verticale dovrebbe essere disegnata) e (facendo un gesto orizzontale) 5 in quel modo" (vedi Fig. D, foto 2-3).

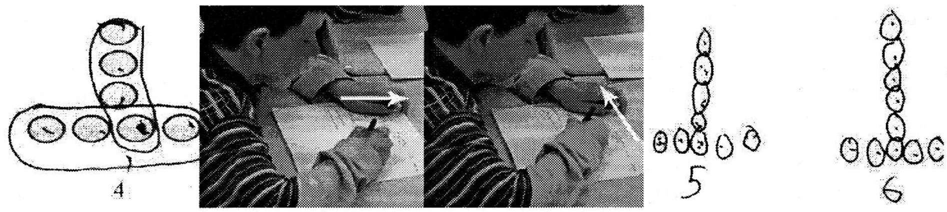


Fig. D. A sinistra, la Figura 4 della sequenza data. In mezzo, il gesto verticale e quello orizzontale di Carlos mentre immagina la e discute della Figura 5 ancora da disegnare. A destra, i disegni di Carlos delle Figure 5 e 6.

L'insegnante, quando venne a vedere il gruppo, chiese a Carlos di fare per lei uno schizzo della Figura 5, e poi della Figura 50. La prima risposta è stata data utilizzando deittici non specificati e gesti. Carlos disse velocemente: "10 così (gesto verticale) e 10 così" (gesto orizzontale). Il termine deittico specifico "verticale" è stato usato per rispondere alla domanda sulla Figura 50. Lui disse: "50 sulla verticale … e 49 …". Quando l'insegnante lasciò il gruppo, gli studenti continuarono a discutere su come scrivere la risposta alla domanda sulla Figura 6. Carlos scrisse: "6 in verticale e 5 in orizzontale".
Dal punto di vista dello sviluppo, noi vediamo qui l'evoluzione dell'unità di componenti ideative-materiali del pensiero algebrico. Ora, Carlos da solo e con grande facilità coordina gesti, percezione, e linguaggio. La coordinazione di queste componenti esterne del pensiero è molto più raffinata rispetto a quella che abbiamo osservato in seconda elementare. Questo raffinamento è ciò che abbiamo chiamato una *contrazione semiotica* (Radford, 2002) ed è un sintomo di apprendimento e di sviluppo concettuale.

4. Sintesi e considerazioni finali

Questo articolo intende fornire un contributo al problema dello sviluppo del pensiero algebrico dei giovani studenti.
Entro la cornice della teoria dell'oggettivazione, si è suggerito che il pensiero sia un'*unità di componenti materiali e ideative* – linguaggio interno ed esterno, forme di visualizzazione sensoriale e immaginazione, gesti e tattilità,

ecc. Si ritiene che lo sviluppo consista nel raffinamento di *relazioni* strutturanti precedenti, e nella comparsa di nuove *relazioni*, tra le componenti materiali-ideative del pensiero. In questo quadro, si ritiene che il pensiero algebrico iniziale sia basato sulle possibilità dello studente di cogliere regolarità in modi co-variazionali culturalmente evoluti e di utilizzarle per affrontare problemi con termini remoti e non specificati. Dal punto di vista cognitivo, affinché ciò si verifichi, gli studenti devono ricorrere a una coordinazione di strutture numeriche e spaziali. La consapevolezza di queste strutture e della loro coordinazione richiede una relazione complessa tra linguaggio (interno o esterno), forme di visualizzazione e immaginazione, gesti, e attività sui segni (per esempio, numeri e notazioni proto-algebriche). I nostri dati offrono una visione dell'evoluzione del pensiero algebrico. Essi mostrano come in seconda elementare una percezione "spontanea" sia stata trasformata con successo attraverso il lavoro comune dell'insegnante e degli studenti. Questo lavoro comune, abbiamo suggerito, può essere concettualizzato nella zona di sviluppo prossimale, dalla quale gli studenti hanno creato nuove funzioni psichiche. Come infatti osserva Schneuwly, «L'insegnamento non impianta nuove funzioni psichiche nel bambino. Esso mette a disposizione degli strumenti e crea le condizioni necessarie affinché il bambino le costruisca» (1994, p. 288). Un raffinamento importante delle nuove *relazioni* tra componenti materiali-ideative del pensiero algebrico è stato realizzato in terza elementare. A questo punto stiamo studiando come la nuova attività simbolica dia luogo a notazioni algebriche astratte.

Bibliografia

Radford L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*. 22(2), 14-23.

Radford L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In: Radford L., Schubring G., Seeger F. (eds.). *Semiotics in mathematics education.* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford L. (2010). Elementary forms of algebraic thinking in young students. In: Pinto M.F., Kawasaki T.F. (eds.). *Proc. 34th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 4, pp. 73-80). Belo Horizonte: PME.

Radford L. (in press). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In: Cai J., Knuth E. (eds.). *Early Algebraization*. Berlin: Springer-Verlag.

Schneuwly B. (1994). Contradiction and development: Vygotsky and paedology. *European Journal of Psychology of Education*. *9*(4), 281-291.

Vygotskij L.S. (1987). *Collected works* (Vol. 1). In: Rieber R.W., Carton A.S. (eds.). New York: Plenum.

Traduzione di Maura Iori

Studio finanziato dal Consiglio di Ricerca nelle Scienze Sociali e Umanistiche del Canada.

Parole chiave: sviluppo; pensiero algebrico; generalizzazione; regolarità numerico-spaziali.