

Ricardo Cantoral Uriza
Olda Covián Chávez
Rosa María Farfán Márquez
Javier Lezama Andalón
Avenilde Romo Vázquez

INVESTIGACIONES SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Un reporte iberoamericano

Clame

Comité Latinoamericano
de Matemática Educativa



Reservados todos los derechos.

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, y a sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares de Copyright

© 2006 Comité Latinoamericano de Matemáticas Educativa, A.C
© Ediciones Díaz de Santos, S.A.

www.diazdesantos.es/ediciones (España)
www.diazdesantos.com.ar (Argentina)
www.diazdesantosexico.com.mx (México)

ISBN: 84-7978-803-8
Depósito Legal: M 16.167-2006

En coedición con
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-ClameA.C.
www.clame.org.mx

Editores por Clame: Ricardo Cantoral Uriza
Olda Covián Chávez
Rosa María Farfán Márquez
Javier Lezama Andalón
Avenilde Romo Vázquez

Diseño y Formación: Rodolfo Dueñas

Colaboración de: Abraham Francisco Espinosa Pat
Martha Maldonado Rosales
Leticia Sánchez García

Agradecemos al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo a través del proyecto "Construcción social del conocimiento matemático avanzado. Estudios sobre la reproducibilidad y obsolescencia de situaciones didácticas: de la investigación a la realidad del aula" No. 41740-S

Publidisa Mexicana SA de CV
Calzada Chabacano N° 69, Planta Alta
Colonia Asturias Deleg. Cuauhtémoc
06850 México DF
www.publidisa.com

SEMIÓTICA CULTURAL Y COGNICIÓN*

Luis Radford**

La psicología debe proceder necesariamente del hecho que entre la conciencia individual y la realidad objetiva existe el "enlace mediador" de la cultura históricamente formada, la cual actúa como prerrequisito y condición de la actividad individual mental.

Evald Ilyenkov, The Concept of the Ideal.

INTRODUCCIÓN

La semiótica cultural que será abordada en este trabajo plantea el problema de la cognición humana desde un punto de vista antropológico. A la pregunta general que formula la antropología acerca de la relación entre cognición y cultura, la semiótica cultural responde en dos etapas.

La primera etapa trata sobre la naturaleza misma de la cognición. Hablar de cognición nos lleva no solamente a intentar definir lo que se entiende por ese término sino también a posicionar al individuo en el acto del conocimiento. La semiótica cultural parte de un reposicionamiento del individuo visto como individuo que vive, piensa y actúa en el marco de su cultura y de la premisa que la base de la cognición se encuentra en la *praxis* social.

En la segunda etapa, la semiótica cultural plantea el problema de la cognición como *re-flexión* de la práctica social. Es en esta etapa que la dimensión semiótica adquiere toda su importancia: signos y artefactos cobran vigencia como mediatizadores de la actividad y elementos claves de los procesos de reflexión. En este contexto, la actividad cognitiva es considerada como una actividad social, mediada, de interiorización reflexiva de prácticas sociales históricamente constituidas. La producción de objetos ideales (idealidades) no es aquella que se efectúa de acuerdo con las posibilidades del sujeto que medita en las profundidades de una conciencia aislada sino producción social que se mueve en el espacio de signos de acuerdo con la lógica cultural del significado.

* Este artículo proviene de un programa de investigación subvencionado por The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (SSHRC/CRSH).

** Radford, L. (2007). Semiótica Cultural y Cognición. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 669-689). México DF, México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Objetivar el conocimiento es la acción de convergencia del signo y del pensamiento que lleva a hacer aparente lo que en el mundo conceptual se perfila como meramente potencial. Objetivar es toparse con el objeto (con eso que objeta a la conciencia) en el encuentro entre lo subjetivo y lo cultural.

Las ideas anteriores son articuladas en las secciones que siguen de acuerdo con siguiente esquema. En la sección 1 planteamos brevemente el problema de la cognición y el papel del individuo en el acto del conocimiento a la luz de discusiones recientes en el campo de la educación matemática. Aunque nuestro planteamiento es selectivo —dado que se limita en gran parte a ciertos elementos que se encuentran en la base del socio-constructivismo— el mismo da una idea de la polémica que ha surgido en las discusiones contemporáneas de los últimos años. Al final de la sección 1 sugerimos que la respuesta socio-constructivista al problema de la cognición y el papel del individuo reposa en un concepto particular de individuo. La sección 2 elabora esta idea y nos lleva a sugerir una noción cultural de individuo, la cual es expuesta en la sección 3. La sección 4 es consagrada a ampliar las elaboraciones teóricas de la sección anterior y a proponer una reconceptualización del saber y una definición cultural del pensamiento. Dicha sección constituye el corazón del presente artículo. En la última sección, que complementa la anterior, exponemos el concepto de objetivación del saber el cual es ilustrado a través de un ejemplo histórico: la emergencia de la segunda incógnita en el álgebra.

1. LA NATURALEZA DE LA COGNICIÓN

La palabra cognición tiene sus raíces etimológicas en la expresión *cognitiō* cuyo significado es *llegar a saber*, tomado originalmente en el sentido de *ver* o *percibir*. Este sentido se encuentra todavía vigente en el tiempo de Platón, quien en el diálogo *Teeteto* lanza una crítica contra el mismo. El saber, argumenta Platón, no puede ser el resultado de ese acto cognitivo entendido como percepción del mundo que nos rodea, pues lo que percibimos a través de los sentidos no es estable, sino que está sujeto a cambio. En la epistemología platónica, sólo aquello que es permanente puede ser objeto de saber.

No obstante la crítica de Platón, todavía en los siglos XVII, XVIII y XIX pensadores interesados en el estudio del conocimiento solían incluir en sus obras discusiones importantes sobre la relación entre percepción y la formación de ideas. Tal es el caso de Maupertuis, Condillac, Locke, Hume y otros. Así, por ejemplo, en su libro *Éléments d'idéologie*, escrito en el siglo XIX, el conde francés Antoine-Louis-Claude Destutt de Tracy (1804, pp. 6-7) decía que "las verdades mas abstractas son consecuencias de la observación de hechos (empíricos)".

Antoine-Louis-Claude La teoría del conocimiento elaborada por Kant en el siglo XVIII es un esfuerzo de reconciliación de las dos categorías históricas fundamentales sobre las cuales se ha erigido el pensamiento occidental —las categorías de lo "sensual" de los empiristas y de lo "ideal" de los racionalistas. La epistemología genética de Piaget es una prolongación del esfuerzo reconciliatorio kantiano en el que se ofrece una tematización teórica del amarre entre esas categorías, tematización en la que el saber empieza con lo sensual (estadio sensori-motor) y que, en el curso de su desarrollo,

se intelectualiza gracias a una supuesta organización necesaria alrededor de estructuras lógico-matemáticas.¹

En las aproximaciones inspiradas del constructivismo piagetiano la naturaleza de la cognición reside esencialmente en dos conceptos claves: uno es el de esquema, el otro es el de abstracción reflexiva. El concepto de esquema subraya la idea de la acción que efectúa el individuo en lo que se ha llamado "la construcción del saber". El concepto de abstracción reflexiva es el mecanismo que asegura, en la teoría piagetiana, el camino hacia formas más complejas del conocimiento:

Llamemos abstracción empírica aquella que se realiza sobre objetos físicos exteriores al sujeto. La abstracción lógico-matemática será, por el contrario, llamada "reflexiva" (réfléchissante) pues ésta procede de las acciones y operaciones del sujeto. Ella es reflexiva en un sentido doble proveniente de dos procesos distintos aunque solidarios: (1) aquél de la proyección sobre un plano superior de lo que es jalado del nivel inferior, se trata pues de un reflexionamiento; y (2) aquél de una reflexión en tanto que reorganización sobre el nuevo plano. (Piaget en Piattelli-Palmarini, 1982, pp. 56-57)

En el curso de una intensa discusión que ha tenido lugar en los últimos años, el constructivismo ha introducido cada vez más el contexto social del aprendizaje, dando lugar a varias ramificaciones, siendo una de ellas el socio-constructivismo elaborado por Cobb y sus colaboradores.² El problema central ha sido el de elaborar formas más refinadas de comprensión del papel que desempeña lo social en el sujeto que aprende. Partiendo de una perspectiva puramente individualista, la posición constructivista se definía a fines de los años 80 en los términos siguientes: "En esta perspectiva, las estructuras matemáticas no son percibidas, intuitas o incorporadas (taken in) sino que son construidas a través de abstracciones reflexivas y reorganizaciones de la actividad sensorimotriz y conceptual." (Cobb, 1988, p. 88). Lo social no aparece todavía como parte constituyente del discurso constructivista. El maestro es visto como simple guía del aprendizaje del alumno. Una de las mayores responsabilidades del maestro es facilitar reestructuraciones cognitivas profundas y reorganizaciones conceptuales en los alumnos (*op. cit.*, p. 89).

En la tematización de lo social que realizó el constructivismo en la década de los 90, la relación entre lo individual y lo social se planteó como relación recíproca. Esta reciprocidad no implica, empero, un peso igual. Como Cobb apunta en varios de sus trabajos, el foco de atención es en la actividad del *individuo* visto a la luz de su participación en el plano social. Así, en una comparación entre constructivismo y las teorías de la inteligencia distribuida (teorías que sostienen que, en el estudio de la cognición, es un error tomar al individuo como unidad de análisis y que es más conveniente analizar al individuo en su contexto social), Cobb afirma que en la perspectiva constructivista el foco de atención es dado explícitamente a la actividad individual, "a la actividad de un alumno individual que participa en una actividad matemática" (Cobb, 1998, p. 197).

¹ Como lo hemos mostrado en un artículo anterior, la prolongación que ofrece Piaget de la epistemología kantiana no es la única. Ernst Cassirer ofrece una prolongación diferente de la de Piaget que, no obstante su diferencia, al abordar el problema de la cognición humana, se compromete, como la de Piaget, con la misma forma de racionalidad: la racionalidad occidental (ver Radford, 2004)

² Una discusión interesante entre escuelas constructivistas que se distinguen en su posición respecto a lo social se encuentra en Thomson y Cobb (1998).

En su fase “madura”, la versión social del constructivismo introdujo el constructo teórico de discurso reflexivo (*reflexive discourse*). Este se presenta como una solución que permite mantener el principio piagetiano de construcción activa del conocimiento realizada por el alumno, reconociendo al mismo tiempo el lugar de lo social en el aprendizaje. Refiriéndose al socio-constructivismo, Cobb *et al.* (1997) dicen:

Esta perspectiva reconoce que tanto el proceso de aprendizaje de las matemáticas y sus productos ... son sociales de principio a fin. Sin embargo, ésta también enfatiza que los niños construyen activamente sus comprensiones matemáticas en el curso de su participación en los procesos sociales de la clase... Esta discusión sobre la reflexión colectiva cuestiona la vista que los niños son meramente acarreados por un discurso que determina su pensamiento individual. (Cobb *et al.* 1997, p. 264)

La discusión anterior debe comprenderse en su contexto propio: un contexto polémico en el que lo social aparece visto muchas veces como algo que puede imponer vistas u opiniones sobre el individuo, poniendo así en peligro la autonomía individual.³ Desde este punto de vista, el socio-constructivismo aparece como la respuesta de una teoría del conocimiento que busca salvar la individualidad de la persona que ciertas interpretaciones de la obra de Vygotski parecían poner en riesgo. Así, Cobb *et al.* dicen:

Vygotski mantuvo que las cualidades del desarrollo mental *derivan* y son *generadas* por las propiedades particulares de la organización socio-cultural de las actividades en las que los individuos participan (*op. cit.*; p. 264, el énfasis es del original).

Es esa relación, que Cobb interpreta como *directa*, la que el socio-constructivismo no está dispuesto a endosar. Es por esa razón, dicen Cobb *et al.*, que en este punto se separan los socio-constructivistas de los vygotskianos (*op. cit.*)

La noción de reflexión colectiva se elabora, en efecto, de manera tal que ésta permite introducir un elemento social en el aprendizaje evitando al mismo tiempo que el alumno sea reducido a algo que es simplemente acarreado, como las piedras por el agua de un río. Dicha noción opera bajo el amparo del concepto moderno de individualidad que hemos heredado de la Ilustración.⁴

2. EL CONCEPTO DE INDIVIDUO

Al igual que todo concepto, el concepto moderno de individuo es el resultado de un proceso histórico. Como observa Kaufmann en su libro “La invención del yo”, en las comunidades “tradicionales”, el individuo vivía integrado a su comunidad al mismo tiempo que vivía concretamente como individuo

³ Una crítica al constructivismo radical desarrollado por von Glasersfeld es la de uno de los impulsores más importantes de la teoría de Vygotski en educación – Steve Lerman (1996). Ver la defensa del constructivismo radical en la respuesta a Lerman por Steffe y Thompson (2000). Otra crítica reciente al constructivismo ha sido hecha por Campbell (2002).

⁴ Es decir, el período histórico en el aparece una oposición abierta a la filosofía escolástica y que pone a la razón humana como medio para alcanzar el “progreso”; la Ilustración se inicia con la obra de Descartes y los racionalistas en el siglo XVII y alcanza su punto culminante en la obra de Kant en el siglo XVIII.

particular; dicho individuo no se planteaba los problemas de individualidad que nos planteamos ahora.⁵ Los problemas modernos que subyacen al concepto de individuo "son el resultado de una desestructuración de las comunidades provocadas por la individualización de la sociedad." (Kaufmann, 2004). Es interesante notar a ese respecto la observación hecha por Rubinstein en su obra *Problemas de psicología general*. Dice Rubinstein:

En una investigación especial, consagrada a la historia de la palabra persona, A. Trendelenburg señaló que la palabra latina persona, de la que procede la designación de la personalidad en la mayoría de los idiomas de la Europa occidental, es una palabra etrusca que utilizaban los romanos en el contexto de persona *patris, regis, accusatoris*, y que por lo tanto no significaba una individualidad concreta sino una función social ejecutada por el hombre. K. Bühler, basándose en esta investigación de Trendelenburg, observa que actualmente el significado de esta palabra se ha modificado: no significa ya una función del hombre sino la esencia interna de éste... (Rubinstein, 1983, p. 46)

El concepto de individuo que hemos heredado de la Ilustración se refiere al concepto que postula la autonomía como categoría fundamental de la persona. Según esta visión, el individuo puede enriquecerse significativamente de su participación en la práctica social, pero que ésta no puede alterar su **esencia**. En psicología esta visión se traduce por la idea que el medio no puede alterar el funcionamiento cognitivo del individuo. Este concepto aboga por una idea de persona como ente fundamentalmente inalienable y constituye una categoría fundamental en discusiones contemporáneas que van más allá que las del aprendizaje de las matemáticas. Así, en un artículo sobre el discurso argumentativo y la interpretación que se da la persona en el campo jurídico norteamericano, su autor dice:

Aquellos casos que involucran las escogencias más íntimas y personales que un individuo puede hacer en su vida son centrales a la libertad protegida por la Catorceava Enmienda. Al centro de la libertad está el derecho de definir su propio concepto de existencia, de significados, del universo... Imponer una vista sobre otra sería violar las libertades fundamentales. (Schiappa, 2002, p. 75)

El concepto moderno de individuo se apoya, pues, en una distinción tajante entre lo social y lo individual que ha servido de pilar a muchas elaboraciones teóricas contemporáneas cuyas bases se encuentran ya en la epistemología de Kant.⁶

⁵ La referencia a ciertas comunidades como comunidades "tradicionales" es, por supuesto, muy problemática. El apelativo "tradicional" supone un punto de vista "moderno" y en consecuencia una idea de desarrollo que coloca, de una manera u otra, lo moderno por encima de lo tradicional. Desde un punto de vista antropológico, la diferencia no puede plantearse de esa manera. Esto no quiere decir que no hay diferencias entre ambas comunidades. Una de las diferencias se encuentra a nivel tecnológico. Ambas comunidades mediatizan sus actividades con ciertas tecnologías. Lo que el habitante de la comunidad "moderna" mira de tradicional es quizás la "sencillez" en la tecnología que utilizan los habitantes de las comunidades "tradicionales". Recíprocamente, lo que el habitante de la comunidad "tradicional" mira de diferente respecto a las comunidades "modernas" es la obsesión de sus miembros en gastar tiempo en la dimensión tecnológica.

⁶ La epistemología genética de Piaget, por ejemplo, presenta una división insuperable entre individuo y sociedad. Esta división se manifiesta en una línea de demarcación entre los mecanismos de producción del saber y la manera en que el individuo puede concebir los objetos de ese saber. Como indica Piaget claramente, "la sociedad puede modificar los últimos, pero no los primeros". (Piaget y García, 1989, p. 267).

La transformación histórica que efectúa la teoría kantiana del conocimiento y que pone en primera fila al individuo como constructor de su propio saber puede ser entendida solamente a la luz de una reorganización profunda de la distribución social del saber que empieza a cobrar vigencia en el Renacimiento y que expresará varios siglos más tarde la filosofía de la Ilustración. Reaccionando contra las estructuras jerárquicas de poder de la Edad Media y aprovechando las transformaciones sociales efectuadas por el Renacimiento, dicha filosofía transforma al *Homo sapiens* en *Homo Faber*. saber significa ya no lo que la tradición (política, eclesiástica, etc.) afirma sino aquello de cuyo proceso de construcción el individuo puede dar cuenta.⁷

El papel de primera fila que viene a desempeñar el individuo en la nueva epistemología está relacionado directamente con los fenómenos de subjetivación y de reificación que aporta el elemento burgués del Siglo XVIII, el cual afirma que el mundo de la experiencia es el producto de la labor del individuo. Así, tomando el término burgués como categoría sociológica (esto es, como refiriendo a "aquellos que viven en los burgos" en oposición a "aquellos que viven en los campos"), Adorno dice que

el subjetivismo y la reificación expresan [...] las antinomias esenciales de la sociedad burguesa en general [...] los seres humanos han hecho cada vez más el mundo a su imagen, y el mundo se ha convertido progresivamente en el mundo de ellos. Al mismo tiempo, sin embargo, el mundo se ha convertido en un mundo que los domina (Adorno 2001, p. 115)

A partir de Kant, saber es algo que se hace en *primera persona*. Y esa persona que viene a ocupar la escena central es visto como un organismo auto-regulador, que labora solitariamente, capaz de llevara a cabo su propia reflexión y sus propias acciones, un ser cartesiano que "inspecciona el paisaje exterior en búsqueda de signos de afirmación personal, de posibilidades de expresión y de pistas de acción estratégica" (Martin, 2004, p. 197). Se trata de un *yo* racional que conoce ya lo que hay que hacer, uno que requiere si mucho un entorno favorable para realizar construcciones viables de su mundo. Como dice Martin,

Cortado esencialmente de las tradiciones históricas y contemporáneas de la vida con los otros, descargado de las consideraciones políticas y éticas que incumben a la vida comunal, este ser vacío simplemente hace lo que quiere hacer según su mejor interés en ese momento. (Martin 2004, p. 199)

En la sección que sigue elaboramos una noción cultural del individuo.

3. EL INDIVIDUO COMO *SER-EN-LA-CULTURA*

En la sección anterior hemos visto que las discusiones actuales sobre el papel de lo social y de lo cultural en la cognición humana han llevado a un replanteamiento del individuo en el acto del

⁷ Ver Arendt, 1958.

conocimiento. En varias de esas discusiones se nota un esfuerzo por abordar el problema de la cognición a partir de una concepción de persona de carácter menos individualista, una concepción en la cual la dimensión sociocultural está llamada a desempeñar un papel decisivo, tanto en la dimensión cognitiva como en la de la identidad de los individuos. Este es el caso de la teoría vygotskiana (Bozhovich, 1977, 1979, 1980; Aidman and Leontiev, 1991; Bibler, 1983-1984).

Al igual que los socio-constructivistas contemporáneos, Vygotski se opuso a la teoría de la transmisión cultural directa. La oposición de Vygotski fue el resultado de sus estudios experimentales sobre el desarrollo conceptual. Partiendo de una posición genética, Vygotski decía que transmitir un modo de pensar al niño es imposible, pues todo concepto implica un desarrollo en el tiempo. Por ende, es imposible que el niño sea simplemente “acarreado” por el medio.

Desafortunadamente, en muchas interpretaciones de la teoría de Vygotski, ésta se presenta como una simple teoría de transmisión directa (ver la discusión de Alzamora, 2000). Se cree, además, que la teoría vygotskiana sostiene que el individuo es determinado por su sociedad y cultura. Así, el profesor Ageyev, que se ha dado la tarea de enseñar cursos sobre Vygotski en universidades de Norte América, cuenta en los términos siguientes la reacción de uno de sus alumnos después de haber leído los primeros capítulos de *Mind in Society*: “Yo soy un ser que se ha hecho él mismo, nadie me ha formado o construido, nadie me ha lavado el cerebro”. (Ageyev, 2003, p. 433-434).

Para Vygotski la relación entre el individuo y lo social no puede ser reducida a una relación de simple determinación del uno por el otro. La relación es mucho más compleja. El medio socio-cultural del niño ofrece a éste *direcciones de desarrollo y formas de apropiación del saber* y de la experiencia humana. A través de los recursos materiales y conceptuales del medio socio-cultural, el niño puede efectuar las generalizaciones y las síntesis sobre las cuales reposa la formación de conceptos. Así, Vygotski (1934/1985) decía que “el lenguaje del medio ambiente, con sus significaciones estables y constantes, señala la dirección que seguirá la generalización del niño. ... El adulto no puede transmitir al niño su modo de pensar, sólo puede suministrarle el significado ya hecho de una palabra” alrededor de la cual “éste piensa según el modo las peculiaridades estructurales, funcionales y genéticas propias a su estadio de desarrollo conceptual.”

De hecho, el problema del desarrollo conceptual no se limita a la relación que liga al individuo con su medio socio-cultural a través del conjunto de recursos materiales y conceptuales que el segundo pone a disposición del primero. El problema es más amplio: los recursos materiales y conceptuales tienen una historia. De allí que, como notaba Wartofsky, las actividades que realiza un individuo no son simplemente *de él*, pues dichas actividades han sido configuradas en el curso de un proceso filogenético (Wartofsky, 1979, p. 114). Ser es un concepto mucho más amplio y complejo que subsume el concepto de individualidad. Ser significa *ser-en-la-cultura*.

Para disipar malentendidos, habría que insistir, en este punto de nuestra discusión, que la idea de *ser-en-la-cultura* no se opone a la idea de individualidad. La idea de *ser-en-la-cultura* elabora, de forma diferente, la individualidad al romper con la dicotomía individuo/sociedad. En su lugar, ésta propone una concepción en la que “ser” quiere decir *ser-con-otros*.

Quizás las ideas centrales de individuo como *ser-en-la-cultura* y de direcciones culturales de desarrollo conceptual pueden ser mejor entendidas si recurrimos al ejemplo de niños que han crecido al margen de la sociedad. En un libro reciente dedicado al estudio de varios de esos niños, Newton (2002) analiza el caso “del salvaje de Aveyron”.

Luego de ser encontrado en Rhodéz, una ciudad entre Montpellier y Toulouse, en 1800, el niño, de aproximadamente 1.40 m, parecía más animal que humano. Sin saber hablar, su conducta era regulada por instintos bestiales y las funciones fisiológicas puramente básicas. Pierre-Joseph Bonnaterre - un profesor de historia natural de la Escuela Central de Aveyron que se dio la tarea de estudiarlo detalladamente - no podía encontrar en el niño ningún signo de interés en otros seres humanos. Afuera de la pura necesidad, el niño no daba seña alguna de afección o amistad. La falta de interés del niño por lo que sucedía en su entorno llevó incluso a Bonnaterre a creer que aquél era sordo. La reacción a ciertos sonidos (por ejemplo, el canto de las aves), lo convenció, sin embargo, de lo contrario. El niño no era ni malvado ni bueno: inconsciente de tales categorías culturales, el niño vivía una conducta al exterior de las mismas.

La cultura y la vida social nos plantean vías de desarrollo que tomamos sin que por ello seamos arrastrados por ellas. Las vías de desarrollo se presentan como *opciones* de varios tipos: de tipo ético (lo que nos permite distinguir entre formas culturales de "bueno" y "malo"), de tipo conceptual (respecto, por ejemplo, al espacio, al tiempo, al número), de tipo estético (lo que lleva a distinciones entre bello y feo), de tipo ontológico (respecto a lo que entendemos por realidad, apariencia), etc. Como dice el crítico de arte Michael Baxandall, las culturas *no imponen* un equipo de categorías conceptuales a sus individuos. Vivir en una cultura, crecer en ella, implica una práctica especial a través de la cual sensibilidades perceptivas, manuales e intelectuales son desarrolladas. Las categorías conceptuales que la cultura nos ofrece nos capacitan con hábitos de discriminación que afectan la manera con que vemos y actuamos en el mundo (Baxandall, 1985, p. 107).

El caso de la diversidad de sensibilidades estéticas, patente en la historia de la pintura, ilustra de manera clara el punto anterior: una sociedad desarrolla sus propios hábitos y destrezas, entre ellas las de percepción. "Esas destrezas visuales y hábitos se convierten en parte del medio del pintor" y de su público (Baxandall, 1972, p. 152). El tema de la Virgen y el niño se expresa de manera diferente en las pinturas del Medioevo que en las del Renacimiento. La sensibilidad estética se ha transformado de una época a la otra. En la segunda, el equipo conceptual incluye no solamente la perspectiva como herramienta, sino también un cierto realismo que expresa la obsesión del detalle (obsesión que corre en paralelo con la definición de individuo del Renacimiento). El nuevo equipo conceptual permite al sujeto renacentista ver el mundo bajo una nueva luz, luz que, a su vez, refleja al individuo y hace posible que éste se aprehenda de cierta forma.

Por supuesto, el tipo de sensibilidad que resulta de vivir en una cultura en una época dada no atañe sólo a la estética. Lo mismo sucede con la sensibilidad matemática, como veremos más adelante.

Si creyéramos cortados completamente de la vida social, sin acceso a las categorías conceptuales de la cultura, probablemente estaríamos como el salvaje de Aveyron, con un sentido del olfato muy desarrollado, pero sin lenguaje con que organizar nuestra experiencia en el tiempo y en el espacio, viviendo en consecuencia prácticamente en el presente, gobernados por nuestras sensaciones, afuera del bien y del mal, haciendo ruidos extraños, defecando de pie o pasando buena parte del día subidos en un árbol cantando como pajaritos.

4. LA NATURALEZA DE LA COGNICIÓN DESDE UNA PERSPECTIVA SEMIÓTICA CULTURAL

En esta sección presentamos un esbozo de la perspectiva semiótica cultural en la que hemos venido trabajando en los últimos años.⁸ Dos elementos claves subtienden esta perspectiva:

1. Una reconceptualización del saber.
2. Una definición cultural del pensamiento.

Los dos elementos anteriores son elaborados a partir de la teoría de la actividad de Leontiev (1978/1993). A continuación discutiremos cada uno de estos elementos. Sin embargo, en aras de una mayor claridad, esbozaremos primero los aspectos que necesitamos de la teoría de Leontiev.

4.1 EL CONCEPTO DE ACTIVIDAD

El concepto de actividad de Leontiev reviste un interés particular en nuestro estudio por el hecho que éste presenta un potencial importante de teorización de la relación entre saber, pensamiento y cultura. Tal concepto se separa de las corrientes conductistas de la primera mitad del Siglo XX, que reducían el comportamiento intelectual del individuo a respuestas causadas por ciertos estímulos; de igual modo, también se separa del idealismo que aislaba al sujeto de su medio. En armonía con la idea central de la psicología de Vygotski, Leontiev propuso que el funcionamiento intelectual puramente humano es un funcionamiento *mediatizado*. En efecto, en la teoría de Leontiev, la actividad humana se caracteriza, entre otras cosas, por (1) el objetivo que se persigue y (2) los medios para alcanzar dicho objetivo

El objetivo de la actividad:

En vez de ser simplemente estímulo, el objetivo *orienta* la actividad. Es por ello que Leontiev (1977) insistía en que “no puede haber actividad sin un motivo”. Pero el motivo no es algo que se presenta al individuo *directamente*. Un objetivo (por ejemplo, el del aprendizaje del álgebra o de los números negativos) se presenta, de entrada, cargado con una significación cultural. El objetivo lleva encapsulado en sí mismo un valor, científico, estético, etc. ofreciendo así una vía de desarrollo posible. Estos significados culturales mediatizan la actividad en un primer estrato de la mediación semiótica.

Los medios para alcanzar el objetivo:

Los medios para alcanzar el objetivo de la actividad son aquellos que *mediatizan* en un plano material la actividad misma: objetos, instrumentos, signos, el lenguaje, etc. Dichos objetos se convierten en

⁸ Ver, por ejemplo, Radford, 1998, 1999, 2000, 2002, 2003a, 2004.

herramientas psicológicas, como sugería Vygotski. Signos y artefactos no son simplemente elementos periféricos de la actividad (Wertsch, 1981). Su valor no reside en la posibilidad de volver la actividad más fácil sino en convertirse en parte *consustancial* de la misma. Estos objetos y signos culturales mediatizan la actividad en un segundo estrato de la mediación semiótica.

La importancia de la mediación semiótica reside no solamente en el hecho que las significaciones culturales proveen a los individuos con vías de desarrollo conceptual, sino que, además, el recurso a signos e instrumentos (es decir, el recurso a herramientas psicológicas) *altera* nuestro funcionamiento cognitivo. Así, Vygotski notaba que

Al ser incluido en el proceso del comportamiento, la herramienta psicológica altera el curso entero y la estructura de las funciones mentales. La herramienta psicológica determina la estructura de un nuevo acto instrumental de la misma forma que una herramienta técnica altera el proceso natural de adaptación al determinar la forma de las operaciones de trabajo. (Vygotski, 1981, p. 137)

Al concebir la naturaleza semiótica de la actividad humana de la manera anterior, la teoría de la actividad se aparta no sólo del constructivismo sino de otras teorías, como la psicología cognitiva, que ven en los instrumentos ayudas externas que vienen a *ampliar* las posibilidades de nuestras estructuras cognitivas sin alterarlas en su esencia. El ejemplo del microscopio es muy claro: el microscopio nos permite ver más allá de los límites de la percepción "natural", pero en ningún momento pueden modificar nuestra percepción. De hecho, por esta razón, en la psicología cognitiva, los instrumentos tecnológicos son conceptualizados simplemente como *amplificadores* (ver Cole y Griffin, 1980).

El concepto de actividad no hace referencia, pues, simplemente a un espacio donde los individuos se congrega para pensar juntos. No es simplemente interactuar como sugiere, por ejemplo, el interaccionismo. Una actividad, en el sentido de Leontiev, es un proceso social cuyo propósito es alcanzar un objetivo impregnado de entrada con significados culturales y conceptuales, objetivo que se alcanza a través de acciones mediatizadas por sistemas semióticos depositarios de la historia cognitiva escrita en estos últimos por generaciones pasadas. Una actividad es una secuencia dialécticamente interconectada de acciones mediatizadas a través de las cuales los individuos se relacionan no solamente con el mundo de los objetos sino que también con otros individuos, adquiriendo, en el curso de ese proceso, la experiencia humana (ver Leontiev, 1978/1993).

4.2 UNA RECONCEPTUALIZACIÓN DEL SABER

En la reconceptualización del saber que propone la perspectiva semiótica cultural, el énfasis es puesto en el papel que desempeñan las *actividades* humanas en la configuración de los tipos de problemas que se plantea una cultura y la manera en que esos problemas son resueltos. La organización de las actividades está regida, a su vez, por el contexto histórico-económico y por una superestructura simbólica de la que se desprenden las conceptualizaciones culturales (por ejemplo, lo que es matemáticas, ciencias, medicina, ley, etc.).

El efecto de esta superestructura simbólica es palpable en las conclusiones a las que llegó Crombie (1995) en sus investigaciones sobre los diferentes tipos de pensamiento científico. Aunque

Crombie no menciona explícitamente las superestructuras simbólicas, concluía que la conceptualización cultural de las matemáticas determina el tipo de argumento que será socialmente aceptado, así como el tipo de evidencia y de explicación que será considerado válido. Así, la validez de un argumento supone un cierto ordenamiento de los objetos ontológicos sobre los que trata la investigación. Explicar y probar suponen, en otras palabras, una cierta forma de ser de los objetos conceptuales (una ontología). Estas suposiciones (que están más allá de la demostración y sin las cuales sería simplemente imposible demostrar o probar algo), pertenecen al mundo de las significaciones culturales.

En un trabajo anterior, llamamos *Sistemas Culturales Semióticos* (SCS) a la superestructura simbólica que, juntamente con la dimensión histórico-económica, da cierta forma y organización a la actividad de los individuos (Radford, 2003a). Los *Sistemas Culturales Semióticos* son sistemas de significación en relación estrecha con la ontología de la cultura. Para ilustrar la forma en que los *Sistemas Culturales Semióticos* operan, contrastemos dos tipos de prueba matemática. Como es muy bien sabido, la prueba en la episteme griega reposa sobre un pequeño número de suposiciones (reducción a un número finito de principios, oposición entre “el ser” y el “no-ser”, “principio de contradicción”, etc.). Probar un hecho significa *deducirlo deductivamente* (directamente o por contradicción) de los principios adoptados. La prueba en la matemática china antigua es muy diferente. La matemática china no parte de un pequeño número de suposiciones. Un resultado (por ejemplo un algoritmo para calcular un volumen) se prueba cuando se muestra que detrás de los cálculos se encuentran operaciones opuestas que se han cancelado mutuamente (por ejemplo, una división por tres con una multiplicación por 3). Aunque el algoritmo se valida en la práctica, es esa anulación teórica de operaciones que, interpretadas a la luz de la oposición del *yin/yang* sobre la que se erige la episteme China clásica, la que le confiere el rango de prueba (ver Chemla, 2004).

Dependiendo de la cultura, los *Sistemas Culturales Semióticos* pueden alcanzar un nivel más o menos elevado de verbalización. La ontología griega clásica, por ejemplo, nos brinda un ejemplo en el que los sistemas culturales semióticos aparecen de forma bastante explícita. En otras culturas, los sistemas culturales semióticos pueden quedar simplemente *mostrados* a nivel de la práctica social.

Resumamos las ideas anteriores. En la aproximación semiótica cultural esbozada aquí, el saber no es considerado como el descubrimiento de algo que ya estaba allí, como algo anterior a toda actividad semiótica cognitiva. El saber no es algo acerca de cosas pre-existentes o acerca de objetos eternos que no cambian. El saber se genera en el curso de la actividad humana y la forma que toma ese saber depende de la dimensión histórico-económico y de una superestructura simbólica.

Nuestra aseveración anti-platonista y anti-realista es consistente con aseveraciones hechas por varios educadores contemporáneos, como Barbin (1996) y D'Ambrosio (1996). Sin embargo, esta aseveración de naturaleza antropológica puede interpretarse de muchas formas. Necesitamos pues refinar las bases de la teoría.

Lo que hace distintivo y diferente la perspectiva semiótica cultural, no sólo del constructivismo sino de otras corrientes antropológicas utilizadas en educación, es el concepto de pensamiento que ésta propone, un concepto que ancla de manera precisa y definitiva el pensamiento en la cultura.

4.3. UNA DEFINICIÓN CULTURAL DEL PENSAMIENTO Y DEL SABER

En la perspectiva semiótica cultural que estamos esbozando aquí, el conocimiento resulta anclado en la cultura exactamente en el sentido que pensar es considerado como *reflexión cognitiva del mundo de acuerdo con las formas culturales de significación que enmarcan la actividad humana*.

Demos, como ejemplo, la forma en que los números negativos han sido pensados en dos culturas distintas. Lo que llamamos modernamente *números negativos* aparecieron bajo conceptualizaciones muy diferentes en la antigua China y en el Renacimiento occidental. En el primer caso, los números "negativos" aparecieron como resultado de reflexiones acerca del mundo de acuerdo a formas culturales de significación basadas en la oposición simétrica *yin/yang* mencionada anteriormente.⁹ Dentro de este contexto, un número posee *naturalmente* un opuesto. Para el pensamiento occidental, sustentado por el principio de contradicción y de igualdad, el número negativo no es algo natural. El número negativo es simplemente impensable en la dicotomía asimétrica que plantea la episteme griega entre el ser y el no ser. Fue necesaria la actividad comercial que sostuvo al Renacimiento, su gran difusión de la moneda y la concepción de ésta en tanto que medida *homogénea* de productos naturales y manufacturados para que el número negativo pudiese ser conceptualizado como *deuda* (ver Gallardo, 1996). En general, es la actividad humana práctica, con sus categorías ontológicas propias, la que naturaliza los conceptos matemáticos, científicos, artísticos y otros.

¿Qué podemos entender por concepto dentro de esta aproximación semiótica cultural? Los conceptos son concebidos como *reflexiones* que reflejan el mundo de acuerdo con cristalizaciones conceptuales (científicas, éticas, estéticas, etc.) que son disponibles a los individuos en cierta época y cultura. Los conceptos del álgebra china antigua son una reflexión (física y metafísica) del mundo de acuerdo a las posibilidades de la episteme china y de sus formas semióticas de objetivación del saber (por ejemplo, fichas de colores que se desplazan sobre un tablero cuyas posiciones son cargadas de significados particulares). En la siguiente sección regresaremos a la idea de objetivación del saber. Por el momento notemos que la *idealidad* de los objetos conceptuales, lo que hace que éstos sean de una forma y no de otra, está en relación directa con la forma de la actividad humana de la cual éstos son el resultado. Es el filósofo Ilyenkov el que nos ofrece la precisión siguiente:

la 'idealidad' es más bien como una estampa impresa en la sustancia de la naturaleza por la actividad de la vida social humana, una forma de la manera de funcionar de la cosa física en el proceso de esta actividad. Así, todas las cosas envueltas en el proceso social adquieren una nueva forma de existencia que no está incluida en su naturaleza física y que difiere de ésta completamente – esta forma es su forma ideal. (Ilyenkov, 1977a, p. 86)

Las observaciones anteriores nos conducen a la definición del saber que proponemos a continuación. El saber es concebido como el producto de una praxis cognitiva reflexiva, mediatizada.

El saber como praxis cognitiva (*praxis cogitans*) quiere decir que lo que conocemos y la manera en que llegamos a conocerlo esta circunscrito por posiciones ontológicas y procesos de producción de

⁹ Una discusión detallada se encuentra en Lizcano (1993).

significados que dan forma a cierta clase de racionalidad que permite plantear ciertos problemas. La naturaleza reflexiva del saber debe entenderse en el sentido de Ilyenkov, esto es, como la componente distintiva que hace a la cognición una reflexión intelectual del mundo externo según las formas de la actividad de los individuos (Ilyenkov 1977b, p. 252). De armonía con lo mencionado anteriormente, el carácter mediatizado del saber se refiere al papel que desempeñan los objetos, instrumentos y signos en la realización de la praxis cognitiva.¹⁰

5. COGNICIÓN Y SEMIÓTICA: LA OBJETIVACIÓN DEL SABER

Hemos dicho anteriormente que el concepto de mediación semiótica va más allá de la vista puramente instrumental con la que, en otras perspectivas, se consideran a los signos y artefactos. La mediación semiótica va también más allá de adjudicarle a los signos el simple rol de representación del conocimiento. Desde el punto de vista cognitivo, la semiótica desempeña un papel de *objetivación* del saber.

¿Qué significa objetivar el saber? La idea de objetivación está íntimamente relacionada con la naturaleza de los objetos conceptuales (es decir, con la ontología) y con la relación epistémica entre sujeto y objeto: dada la idealidad de dichos objetos, la única manera de hacer referencia a éstos es a través de signos. Es esta característica de los objetos conceptuales que Duval (1995), refiriéndose a los objetos matemáticos, ha llamado la paradoja del conocimiento y que Platón discute en el pasaje muy famoso de *La República* en donde afirma que los geómetras no hablan de las figuras concretas sino sobre las formas (*eidos*) correspondientes.¹¹ Es esta diferencia entre los que nos dan los sentidos y la cosa en sí misma que llevó a Kant a investigar los límites de la razón humana en la *Crítica de la razón pura* y que condujo al joven Husserl a distinguir entre representaciones directas e indirectas. Son representaciones indirectas, decía Husserl, aquellas que representan un objeto del cual es imposible tener contacto directo. Los signos de los grandes números (, por ejemplo) son indirectos, pues la multitud que designa no es algo que podemos aprehender directamente. Si nuestra percepción fuera tal que de golpe pudiéramos ver cualquier multitud de objetos, con sólo *ver* podríamos decidir si proposiciones como son o no verdaderas. En ese caso no habría ciencia de la aritmética (Husserl, 1890-1908/1994).

Para Platón, Kant y Husserl, los objetos matemáticos son anteriores a la actividad semiótica. Es por ello que la semiótica desempeña solamente un papel de *representación* de los objetos.¹² La actividad semiótica no puede crear al objeto. Peirce, a quien debemos añadir a la lista anterior, decía

¹⁰ El término *praxis* aparece en las "Tesis sobre Feuerbach", escritas por Marx en 1845. Acuñado un año antes, en los "Manuscritos económicos y filosóficos", *praxis* hace referencia a una práctica no contemplativa, sino a la actividad humana sensual y concreta. Es en este sentido que tomamos la expresión en el presente trabajo.

¹¹ "Sabes que ellos (los geómetras) discuten usando figuras visibles, pero en realidad no están pensando en ellas, sino de los originales a los que éstas se parecen." (*La República*, 510d)

¹² Representación debe entenderse pues aquí en el sentido literal: el objeto está ya dado y el acto semiótico no hace más que *re-presentar* el objeto.

muy claramente que el signo no crea al objeto: aquél es solamente afectado por éste.¹³ En pocas palabras, en las diferentes escuelas de pensamiento que adoptan una perspectiva trascendental respecto a los objetos matemáticos (que sea el caso del idealismo o del realismo), los signos constituyen el puente de acceso a esos objetos conceptuales vistos como situados más allá de las peripecias de la acción humana y la cultura.

En la perspectiva semiótica cultural esbozada aquí, este no es el caso. La actividad humana produce el objeto. El signo y la *forma* en que éste es usado (esto es, su sintaxis) –forma necesariamente cultural en tanto que inmersa en *Sistemas Semióticos Culturales* de significación– son considerados como constitutivos del objeto conceptual: éstos *objetivan* al objeto.

Lo que estamos proponiendo para dar cuenta de las idealidades matemáticas es pues una forma cultural de producción conceptual basada en el concepto de objetivación, que aclararemos a continuación. Para expresarlo en términos generales, coloquémonos en el caso de una actividad A general.

Sea A una actividad con un objetivo O. Para alcanzar el objetivo O, las personas movilizan ciertos conceptos C1, C2, ... Una situación usual es aquella en la que, para alcanzar el objetivo O, un nuevo concepto C es introducido. Previo a su aparición, el concepto C se encuentra como simple “cosa matemática” (*chose mathématique*, ver Charraud, 2000, p. 135; 2004, p. 12). La cosa matemática (CM) es una forma confusa, simplemente presentida como matematizable. Utilizando el concepto de zona de desarrollo próximo propuesto por Vygotski (1934/1985), podemos decir que esta cosa matemática es un elemento de la zona de desarrollo próximo de la cultura en un momento dado. La objetivación del saber es el paso de la cosa matemática, CM, al concepto C. Dicho paso tiene lugar al interior de la actividad y como tal está circunscrito por los sistemas Culturales Semióticos de significación así como por los medios de mediación semiótica.

EL EJEMPLO DE LA OBJETIVACIÓN DE LA SEGUNDA INCÓGNITA

Como hemos tenido la ocasión de mostrarlo en un artículo que consagramos al problema de la aparición de la segunda incógnita en el álgebra del siglo XIV,¹⁴ durante mucho tiempo los métodos algebraicos de la tradición cosista reducían los diferentes números desconocidos en un problema a expresiones en una sola incógnita (que curiosamente los algebristas italianos llamaban *la cosa*). Así, si en el enunciado del problema había dos o más números desconocidos, estos números se expresaban en términos de una misma incógnita algebraica. Un prototipo de problema (que remonta a la tradición árabe) es dividir 10 en dos números tales que satisfagan ciertas condiciones. Por ejemplo, el siguiente problema aparece en el *Liber Abaci* de Leonardo Pisano (Fibonacci): “Divide 10 en dos partes, añade sus cuadrados y eso da $62\frac{1}{2}$ ”. La solución típica consiste en designar una de las partes por “una cosa” y la otra por “10 menos la cosa”. De esa cuenta, el problema es reducido a un problema con una incógnita.¹⁵

¹³ En efecto Peirce decía “the sign does not affect the object but is affected by it” (Peirce, CP 1.538).

¹⁴ Radford, 1997.

¹⁵ Ver p. 560 de la edición reciente del *Liber Abaci* hecha por Sigler, 2002. Una discusión de ese problema se encuentra en (Radford, 1995). Como menciono en una nota de pie, el mismo problema se encuentra en muchos otros tratados matemáticos, como el *Ragionamenti d'Algebra: i Problemi* de Raffaello Canacci (ca. 1490) (Procissi, ed., 1983, p. 28), excepto que Canacci utiliza 60 y no $60\frac{1}{2}$; en el *Trattato d'Abaco* de Piero della Francesca (Arrighi, ed. 1970, p. 126) y en *L'Algebra* de Rafael Bombelli (Bortolotti, ed., 1966, p. 341), excepto que Bombelli divide el número 12 en dos partes en lugar del número 10.

En su obra, *Trattato di Fioretti*, escrita en el siglo XIV, Antonio de Mazzinghi introdujo en ciertos problemas de su tratado de abaco una nueva incógnita, que llamó la "cantidad" (*quantità*). En la reconstrucción histórico-epistemológica que hemos sugerido, hemos discutido con detenimiento el problema siguiente:

"Encuentra dos números que multiplicados entre sí den 8 y [que la suma] de sus cuadrados sea 27".
En lenguaje algebraico moderno, el problema consiste en encontrar a y b tales que

$$\begin{aligned} a \times b &= 8 \\ a^2 + b^2 &= 27 \quad (\text{P}) \end{aligned}$$

No estamos interesados aquí en los detalles técnicos (los cuales pueden ser encontrados en el artículo citado). Contentémonos en señalar que Mazzinghi propone la designación de las incógnitas de esta forma: el primer número buscado (esto es, a) es designado por "una cosa más la raíz de una cierta cantidad"; el segundo número buscado (esto es, b) es designado por "una cosa menos la raíz de una cierta cantidad".

En otras palabras, Mazzinghi propone la designación de números:

$$\begin{aligned} a &= t + \sqrt{q} \\ b &= t - \sqrt{q} \quad (\text{Q}) \end{aligned}$$

Utilizando esta designación de números buscados en la segunda condición del problema (es decir, la condición que estipula que la suma de los cuadrados es 27), Mazzinghi encuentra que la "cierta cantidad" es igual a $13 \frac{1}{2}$ menos el "censo" (es decir, el cuadrado de la cosa). Con esta nueva designación de los números a y b , Mazzinghi vuelve sobre la primera condición del problema original y obtiene una ecuación de tipo "censo = número" que, al resolverla, le permite encontrar sucesivamente la cosa, la cierta cantidad y luego los números buscados.

¿Cómo se le ocurre a Mazzinghi tal designación de los números buscados? Hay una pista clara en el *Trattato di Fioretti*. En dicho tratado, antes de resolver el problema anterior por métodos algebraicos, Mazzinghi utiliza un método geométrico, inspirado del libro II de los *Elementos* de Euclides y de la tradición babilónica. Con dicho método, Mazzinghi obtiene las soluciones $\sqrt{10 \frac{3}{4}} + \sqrt{2 \frac{3}{4}}$ y $\sqrt{10 \frac{3}{4}} - \sqrt{2 \frac{3}{4}}$.

Las soluciones se expresan como suma y resta de radicales. La designación algebraica de los números buscados se inspira de la forma de la solución. Mazzinghi opta, en efecto, por designar el primer número por la cosa y el segundo número por la raíz de la "cierta cantidad". (Nótese que el segundo número buscado hubiese podido ser simplemente designado por q , en vez de \sqrt{q} . De hecho, en otros problemas del *Trattato di Fioretti*, Mazzinghi utiliza la designación $t + q, t - q$).

Un elemento que no deja de llamar la atención al lector moderno es la aparente complicación en la que Mazzinghi se coloca al escoger tal designación de números. ¿Acaso no hubiera sido *más fácil* utilizar la designación de los números por dos letras diferentes, por ejemplo, x e y o a y b , como en el sistema de ecuaciones (P)?

Obviamente, la respuesta es *sí*. El único problema es que dicha respuesta es completamente anacrónica y, por tanto, falsa.

Antonio de Mazzinghi pertenece a una época en la que la forma de representación del saber en general, y del saber algebraico en particular, estaba enmarcada por Sistemas Semióticos Culturales de significación muy diferentes de los nuestros. Mazzinghi es uno de los últimos matemáticos importantes cuya reflexión matemática se lleva a cabo a través de una idea de eficiencia de carácter más estético que tecnológico.

Para explicar este último punto, observemos que la emergencia del simbolismo algebraico en el Renacimiento estuvo ligada con transformaciones profundas en la división del trabajo y de los concomitantes cambios en la sensibilidad humana ocasionadas por la inserción masiva de máquinas e instrumentos en prácticamente todas las esferas de la vida social. A medida que la manufactura, el comercio, el banco y otras actividades fueron paulatinamente refinados desde el Siglo XIII, una nueva cristalización de los estratos de formación conceptual del renacimiento tuvo lugar. Esta fue la *eficiencia*. El concepto de proceso eficiente pasó de ser entendido como proceso que asegura la subsistencia (tal y como fue entendido en el medioevo) a un concepto entendido en el sentido *tecnológico*.¹⁶ Los instrumentos para dibujar objetos en perspectiva de Dürer, el péndulo para medir el tiempo, las poleas estudiadas por Leonardo da Vinci y, más tarde, la máquina aritmética de Pascal, son ejemplos de la diversidad de máquinas e instrumentos que empezaron a penetrar la vida diaria, transformando, poco a poco, el principio de eficiencia de su sentido medieval en el nuevo sentido tecnológico. La imprenta es quizá el mejor emblema del fenómeno cultural que estamos señalando. La imprenta representó la sistematización de las acciones humanas a través de instrumentos y artefactos. Tal sistematización modificó radicalmente la experiencia humana poniendo en relieve factores como la repetición, la homogenización y la uniformidad propias de la producción en cadena o producción masiva.

El uso de letras en álgebra estuvo relacionado con la idea de volver a los métodos algebraicos eficientes en el sentido tecnológico anterior.¹⁷ Utilizando tantas incógnitas como se necesite, el problema se *traduce* en símbolos. La traducción evacua las palabras y sus significados. Lo que tiene frente a nosotros es una serie de signos que pueden manipularse de manera eficiente, como una pequeña maquinita.

En el curso de la manipulación de símbolos, ya no tenemos ni que saber cuáles son los objetos que designan las incógnitas. Transportamos los símbolos como los productos manufacturados eran transportados o manipulados en el mercado del Siglo XVI. Y de la misma manera que no necesitamos saber quién hizo tal o tal producto, así no necesitamos saber cuáles son los objetos a los que hacen referencia los signos. Dos siglos después de Mazzinghi, nos encontramos frente a un nuevo estrato epistemológico que regula, de la misma manera, la abstracción del referente en álgebra y en el mundo económico. Mazzinghi pertenece a otra época con su propia episteme, y como tal su forma de pensar la representación es diferente. La designación de objetos en Mazzinghi, decíamos anteriormente, obedece más bien a la lógica de la estética del siglo XIV. Mazzinghi no está obsesionado por la

¹⁶ Gies y Gies (1990) dicen que la necesidad básica del individuo del medioevo era la subsistencia, esto es, la producción de cantidades suficientes de comida y bebida derivadas de los granos. Cuando la cosecha era mayor que el consumo, el residuo era simplemente convertido en desperdicio.

¹⁷ Diofanto, cuyos métodos vistos a la luz de la matemática moderna parecen adolecer de generalidad y eficiencia, hubiera sostenido que sus métodos eran perfectamente generales y eficientes.

rapidez o por la sistematización, como será el caso más adelante en el desarrollo histórico de las ideas matemáticas.

Mazzinghi aprovecha una ruptura que su siglo ha realizado a niveles más generales de la representación: su siglo ha efectuado una separación entre el objeto y su representación. Esta ruptura, anclada en la racionalidad naciente provocada por el desplazamiento del sistema cerrado socio-político feudal medieval, se manifiesta no solamente en las matemáticas sino también en la pintura, la poesía, la literatura, etc.

El florentino Coluccio Salutati decía respecto a Giotto que en su obra

No percibimos las imágenes religiosas como si fueran Santos o Dioses, sino más bien como *imágenes* de Dios y de los Santos (...) La pintura (es) algo hecho por la mano del hombre, no algo divino en sí mismo sino que una *similitud* a la providencia divina, a la dirección, al orden —que representa ciertamente no los caracteres esenciales sino más bien las sinuosidades y los giros de los asuntos mundanos (...). (Citado por Baxandall, 1971, pp. 60-61, la traducción y el énfasis son nuestros)

Un testimonio similar de la ruptura entre representaciones medievales y góticas nos es dado por Pierre Francastel, quien dice a propósito de la obra de Giotto, *El pesebre de Greccio*, que

Giotto pinta, evidentemente, una situación que no corresponde ni a la escena primitiva ni tampoco a la escena exacta anual de la conmemoración del hecho milagroso. La imagen no es ni la visualización fiel del evento ni la representación exacta del rito. Esta se sitúa de cierta forma sobre un plano combinado de realidad combinatoria, entre los elementos que vienen de la experiencia visual y de los elementos prestados a varias tradiciones escritas u orales (Francastel, 1967, pp.189-190).¹⁸

Mientras que “en Bizancio el pintor fabrica un icono, una imagen que es el reflejo exacto del orden divino” pintura en la que “todas las partes del sistema son vistas como la proyección directa y fiel de una realidad suprema, en Asís —la ciudad donde trabaja Giotto— el pintor “no solamente no presenta un fragmento de la realidad, sino que el fragmento que presenta es un fragmento problemático, contradicho, contestado tanto en la forma como en el contenido” (Francastel, pp.191-192)

Es la ruptura que hemos esbozado a nivel de la representación - ruptura que libera la representación semiótica gótica del siglo XIV de la majestuosa pintura medieval - que permite a Mazzinghi ver las expresiones $\sqrt{10\frac{3}{4}} + \sqrt{2\frac{3}{4}}$ y $\sqrt{10\frac{3}{4}} - \sqrt{2\frac{3}{4}}$ bajo una nueva luz. La cultura del *Trecento* pone a disposición de Mazzinghi categorías culturales que éste utiliza para ver las expresiones numéricas anteriores de otra forma. En efecto, ¿qué es $t + \sqrt{q}$ sino la expresión $\sqrt{10\frac{3}{4}} + \sqrt{2\frac{3}{4}}$ vista como *imagen*, como algo *similar*?

Regresemos ahora al problema de la segunda incógnita como objetivación cultural del saber. *Objetivación* es una palabra que viene de la palabra *objeto*, cuyo origen proviene del latín *objectare*, que significa “lanzar algo en el camino, lanzar algo enfrente” (Charleton, 1996, p. 550). El sufijo

¹⁸ Una foto de *El pesebre de Greccio* puede ser vista en la imagen 32 del sitio: <http://www.christusrex.org/www1/francis/francis1.html>

“-tivación” proviene del verbo *facere*, que significa “hacer” (Charleton, 1996, p. 311). De esa cuenta, etimológicamente hablando, objetivación hace referencia a las acciones cuyo propósito son de colocar o de poner algo frente a alguien o de hacer visible algo a la vista. En términos más generales, como lo entendemos en nuestra perspectiva semiótica cultural, el acto de objetivación consiste en volver aparente lo potencial.

La objetivación de la segunda incógnita en el álgebra se lleva a cabo en el seno de la actividad matemática abaquista de la cual nos hemos ocupado con detenimiento en un artículo previo (Radford, 2003b) –actividad cuyo objetivo es la elaboración de un saber que responde a las necesidades comerciales de la época (Filloy y Rojano, 1989, Van Egmond, 1976). Dicha objetivación se realiza, pues, como la acción que consiste en materializar algo que hasta entonces se perfilaba solamente como potencial en la zona de desarrollo próximo de la cultura del siglo XIV. La objetivación de la segunda incógnita es el paso de la cosa matemática de cosa simplemente confusa, hacia algo definido, que toma parte de un proceso que vuelve aparente lo que hasta entonces era pre-sentido como matematizable. La objetivación se realiza a través de signos cuyo modo de funcionamiento está regido por reglas culturales (no necesariamente codificadas de manera explícita). Estas reglas pertenecen a los Sistemas Semióticos Culturales de significación.

Naturalmente, la explicación anterior no significa que Antonio de Mazzinghi fue arrastrado por su cultura y que ésta le impuso una forma de ver el mundo. Nuestro concepto de *ser-en-la-cultura* significa que Mazzinghi pudo aventurarse por nuevos senderos en un acto de creación que estuvo sustentado por categorías culturales que van más allá del individuo como ente singular. Esto no disminuye en nada los méritos de este gran algebrista italiano. Al contrario, para realizar lo que Mazzinghi hizo se requiere de una imaginación muy particular. Como nos lo recuerda Franci (1988), Mazzinghi, a pesar de su joven edad, era considerado por sus amigos como un matemático talentoso, de hecho el mejor de todos los de su época. El punto central de la discusión es que todo pensamiento es un ir y venir entre lo particular y lo general y que entre los dos media una superestructura simbólica, construida por los propios individuos a partir de la *praxis* social. Es en esta superestructura simbólica en la que se ancla la imaginación intelectual, de suerte que la objetivación del saber, en tanto que reflexión del mundo, es un punto de encuentro entre la experiencia personal y el saber cultural.

BIBLIOGRAFÍA

- Adorno, T. (2001). *Kant's Critique of Pure Reason*. Stanford CA: Stanford University Press.
- Ageyev, V. (2003). Vygotsky in the Mirror of Cultural Interpretations. In A. Kozulin, B. Gindis, V. Ageyev and S. Miller (eds.), *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context* (pp. 432-449). New York: Cambridge University Press.
- Aidman, E. y Leontiev, D. (1991). “From being motivated to motivating oneself: a vygotskian perspective. *Studies in Soviet Thought*, 42, 137-151.
- Alzamora, S. (2000). Lecturas que se han realizado, en la década del '90, sobre la obra de Vygotski. En S. Dubrovsky (Ed.), *Vigotski. Su proyección en el pensamiento actual* (pp. 51-59). Buenos Aires y México: Novedades Educativas.

- Arendt, H. (1958). *The Human Condition*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Arrighi, G. (1970). (Ed.) *Piero Della Francesca: Trattato de Abaco*. Pisa: Domus Galileana.
- Barbin, E. (1996). The role of problems in the history and teaching of mathematics. En R. Calinger (Ed.), *Vita Mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 17-25). Washington DC: Mathematical Association of America.
- Baxandall, M. (1971) *Giotto and the Orators*, Oxford: Clarendon Press.
- Baxandall, M. (1972). *Painting and Experience in Fifteenth Century Italy - A Primer in the Social History of Pictorial Style*. Oxford: Clarendon Press.
- Baxandall, M. (1985). *Patterns of Intention: On the Historical Explanation of Pictures*. New Haven and London: Yale University Press.
- Beth E. y Piaget, J. (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology*. Netherlands: D. Reidel Publishing company.
- Bibler, V. (1983-1984). Thinking as creation: Introduction to the logic of mental dialogue. *Soviet Psychology*, **22**(2), 29-54.
- Bortolotti, E. (1966). (ed.) *Rafael Bombelli da Bologna: L'Algebra*. Milano: Giangiacomo Feltrinelli.
- Bozhovich, L. (1977). The concept of the cultural-historical development of the mind and its prospects. *Soviet Psychology*, **26**(1), 5-22.
- Bozhovich, L. (1979). Stages in the formation of the personality in ontogeny. *Soviet Psychology*, **27**(3), 3-24.
- Bozhovich, L. (1980). Stages in the formation of personality in ontogeny. *Soviet Psychology*, **28**(3), 36-52.
- Campbell, S. (2002). Constructivism and the limits of Reason: revisiting the Kantian problematic. *Studies in Philosophy and Education*, **21**, 421-445.
- Charleton, T. (1996). *An Elementary Latin Dictionary*. Oxford, England: Oxford University Press.
- Charraud, N. (2000). La chose mathématique. *Revue de la Cause freudienne* **44**, 134-143.
- Charraud, N. (2004). Introduction. En Cartier, P., Charraud, N. (2004). *Le réel en mathématiques: Psychanalyse et mathématiques*. Paris: Agalma.
- Chemla, K. (2004). Le calcul dans les mathématiques chinoises. En P. Cartier et N. Charraud (eds.), *Le réel en mathématiques* (pp. 229-262). Paris : Agalma.
- Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist*, **23**(2), 87-103.
- Cobb, P. (1998). Learning from Distributed Theories of Intelligence. *Mind, Culture, and Activity* **5**(3), 187-204.
- Cobb, P., Boifi, A., McClain, K. y Whitenack, J. (1997). Reflective Discourse and Collective Reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, **28**(3), 258-277.
- Cole, M. & Griffin, P. (1980). Cultural amplifiers reconsidered. En D. R. Olson (ed.), *The Social Foundations of Language and Thought, Essays in Honor of Jerome S. Bruner* (pp. 343-364). New York/London, W. W. Norton & Company.
- Crombie, A. (1995). Commitments and Styles of European Scientific Thinking. *History of Sciences*, **33**, 225-238.
- D'Ambrosio, U. (1996). Ethnomathematics: An Explanation. En R. Calinger (ed.), *Vita Mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 245-250). Washington DC, Mathematical Association of America.

- Destutt de Tracy, A. L. C. (1804). *Éléments d'idéologie. I. Idéologie*. Paris : Courcier. Téléchargé du site: <http://gallica.bnf.fr/>
- Duval, R. (1995) *Sémoisis et pensée humaine*, Bern : Lang.
- Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.
- Francastel, P. (1967). *La figure et le lieu. L'ordre visuel du Quattrocento*. Paris : Gallimard.
- Franci, R. (1988) Antonio de' Mazzinghi: An Algebraist of the 14th Century. *Historia Mathematica*, 15, 240-249.
- Gallardo, A. (1996). Real problems in the history of mathematics and its contributions to algebra teaching. En T. Rojano y L. Radford, *Algebraic Process and Structure Working Group*, 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Valencia, Spain, pp. 19-22.
- Gies, F. y Gies, J. (1990). *Life in a Medieval Village*. New York: Harper & Row.
- Husserl, E. (1890-1908/1994). *Early Writings in the Philosophy of Logic and Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Ilyenkov, E. (1977a). The Concept of the Ideal. En *Philosophy in the USSR: Problems of Dialectical Materialism*. Moscow: Progress Publishers.
- Ilyenkov, E. V. (1977b). *Dialectical Logic*. Moscow: Progress Publishers.
- Kaufmann, J-C. (2004). *L'invention de soi: une théorie de l'identité*. Paris: Armand Colin.
- Leontiev, A. N. (1977). Activity and Consciousness. *Philosophy in the USSR, Problems of Dialectical Materialism*. Moscow, Progress Publishers.
- Leontiev, A. N. (1978/1993). *Actividad, conciencia y personalidad*. México, ASBE Editorial.
- Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in Mathematics Learning: A Challenge to the Radical Constructivist Paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 133-150.
- Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Barcelona, Editorial Gedisa.
- Martin, J. (2004). The Educational Inadequacy of Conceptions of Self in Educational Psychology. *Interchange: A quarterly review of Education* 35, 185-208.
- Newton, M. (2002). *Savage Girls and Wild Boys. A History of Feral Children*. London, Faber and Faber.
- Peirce, C. S. (1966). *Collected Papers*. Edited by A. Burks. Cambridge: The Belknap Press of Harvard University Press.
- Piaget, J and Garcia, R. (1989) *Psychogenesis and the history of science*, New York: Columbia University Press.
- Piattelli-Palmarini, M. (éd.). (1982). *Théories du langage – Théories de l'apprentissage. Le débat entre Jean Piaget et Noam Chomsky*. Paris: Éditions du Seuil.
- Procissi, A. (1983) (Ed.). *Raffaello Canacci: Ragionamenti d'algebra i problemi*. Italia: Quaderni del Centro Studi della Matematica medioevale, No. 7. Università di Siena.
- Radford, L. (1995). Before the Other Unknowns Were Invented: Didactic Inquiries on the Methods and Problems of Mediaeval Italian Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 15 (3), 28-38.
- Radford, L. (1997). L'invention d'une idée mathématique : la deuxième inconnue en algèbre, *Repères* (Revue des instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques de France), juillet, 28, 81-96.

- Radford, L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 35(1), 277-302.
- Radford, L. (1999). La razón desnaturalizada. Ensayo de epistemología antropológica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3, 47-68.
- Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática*, 12(1), 51-69.
- Radford, L. (2002). The Object of Representations: Between Wisdom and Certainty. En F. Hitt (Ed.) *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 219-240). Mexico, Departamento de matemática educativa Cinvestav-IPN.
- Radford, L. (2003a). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger and V. V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa, Legas Publishing.
- Radford, L. (2003b). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice during the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, 52(2) 123-150.
- Radford, L. (2004). Del símbolo y de su objeto. Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 7(2), 157-170.
- Rubinstein, S. (1983). *Problemas de psicología general*. México: Grijalbo.
- Schiappa, E. (2002). Evaluating argumentative discourse from a rhetorical perspective. En F. H. van Eemeren & P. Houtlosser (Eds.), *Dialectic and Rhetoric* (pp. 65-80). Dordrecht: Kluwer.
- Sigler, L. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci*. New York: Springer Verlag.
- Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Interaction or Intersubjectivity? A Reply to Lerman. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 191-209
- Thomson, P. y Cobb, P. (1998). On relationships between psychological and sociocultural perspectives. En S. Berenson et al. (Eds.), *Proceedings of the 20th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp.3-26). North Carolina State University.
- Van Egmond, W. (1976). *The Commercial Revolution and the Beginnings of Western Mathematics in Renaissance Florence, 1300-1500*. Ph. D. Dissertation. Indiana University Press.
- Vygotski, L. S. (1934/1985). *Pensée et langage*. Paris: Éditions sociales.
- Vygotsky, L. (1981). The instrumental method in psychology. En: J. Wertsch (Ed.) *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 135-143). Armonk, New York: Sharpe.
- Wartofsky, M. (1979). *Models, Representation and the Scientific Understanding*. Dordrecht, D. Reidel.
- Wertsch, J. (1981). The concept of activity in Soviet psychology: An Introduction. En J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 3-36). New York: M. E. Sharpe.

Luis Radford
École des sciences de l'éducation
Université Laurentienne Sudbury, Ontario Canada, P3E 2C6
<http://www.laurentian.ca/educ/lradford/>
Canadá