Università
degli Studi
di Bologna

ISSN 1120-9968

la matematica e la sua didattica

n. 2 - 2005

PITAGORA EDITRICE BOLOGNA

Periodico trimestrale - n. 2 - Apr.-Giu. 2005 - Sped. Abb. Post. - Gruppo IV (70%)

La matematica e la sua didattica

Comitato scientifico

Direttore: Bruno D'Amore

Comitato di redazione: Gianfranco Arrigo (Svizzera), Ferdinando Arzarello (Italia), Giulio Cesare Barozzi (Italia), Guy Brousseau (Francia), Umberto Bottazzini (Italia), Ricardo Cantoral (Messico), Encarnacion Castro Martinez (Spagna), Miguel de Guzmán (Spagna), Raymond Duval (Francia), Rosa Maria Farfán (Messico), Fulvia Furinghetti (Italia), Athanassios Gagatsis (Cipro), Colette Laborde (Francia), Hermann Maier (Germania), Carlo Marchini (Italia), Consolato Pellegrino (Italia), Piero Plazzi (Italia), Luis Rico Romero (Spagna), Alan Rogerson (Australia), Maria Luisa Schubauer Leoni (Svizzera), Gérard Vergnaud (Francia), Rosetta Zan (Italia).

Istruzioni per chi invia articoli proponendoli per la stampa. Gli articoli proposti per la stampa devono essere inviati in triplice copia al prof. Bruno D'Amore, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Piazza di Porta San Donato 5, 40127 Bologna. La pagina in Word va impostata con i seguenti margini: superiore 5,5 cm; inferiore 5,5 cm; sinistro 4,3; destro 4,3. Deve essere composto utilizzando preferibilmente il carattere TIMES corpo 12 interlinea automatica e fornito su carta e supporto informatico. Nel caso il proponente non fosse in grado di realizzare queste condizioni, deve mettersi in contatto con la Tecnoprint s.n.c., Via del Legatore 3, 40138 Bologna, tel. 051 531159/533311, fax 051 535301. Sotto il titolo, eventuale sottotitolo, Autore/i, ecc. va inserito un riassunto dell'articolo in lingua inglese, di non oltre 10 righe a 60 battute. Gli articoli inviati al di fuori di queste norme non verranno presi in esame e non verranno restitutiti al proponente.

I dattiloscritti ricevuti dalla redazione sono sottoposti ad un primo parere di alcuni membri del Comitato Scientifico e poi inviati a tre referee le cui decisioni sono definitive ed inappellabili.

Redazione scientifica: Berta Martini, presso Mathesis Bologna, Dipartimento di Matematica dell'Università, Piazza di Porta San Donato 5, 40127 Bologna, Tel. 051 2094446

Redazione amministrativa: presso Pitagora Editrice s.r.l.,
Via del Legatore 3, 40138 Bologna, Tel. 051 530003 • Fax 051 535301

Direttore Responsabile Bruno D'Amore
Direzione Redazione Amministrazione Pitagora Editrice s.r.l., Via del Legatore 3, 40138 Bologna, Tel. 051 – 530003

Periodico trimestrale
Autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/9/1993 – ISSN 1120-9968

I manoscritti non richiesti non vengono restituiti.
Per qualsiasi comunicazione si prega di allegare la fascetta con stampato l'indirizzo al quale viene recapitata la rivista.

Abbonamento anno 2005
per l'Italia e paesi UE € 25,00 – Paesi extra-UE € 40,00 – copia singola € 9,00
da versarsi sul c.c.p. 20264404 intestato a Pitagora Editrice s.r.l., Via del Legatore 3, 40138 Bologna

Finito di stampare nel mese di maggio 2005
presso Tecnoprint s.n.c., Via del Legatore 3, 40138 Bologna

Questa rivista è realizzata con il contributo dell'Università di Bologna

La generalizzazione matematica come processo semiotico[1]

Luis Radford
École des sciences de l'éducation, Université Laurentienne
Ontario, Canada

Summary. *Inspired by Vygotsky's psychology, Husserl's phenomenology and Kantian epistemology, in the first part of this paper I sketch the theoretical basis of a cultural anthropological approach to mathematical thinking. As is shown in the paper, the cultural anthropological approach offers a way to define cognitive activity without reducing it to something strictly mental and to consider mathematical generalizations in semiotic terms. Words, gestures and symbols, it is argued, constitute different semiotic layers, each providing possibilities and limits for expressing and objectifying that which is to be generalized. In the second part of the paper, I compare generalizations which I have called "factual" and "contextual" to symbolic algebraic generalization. The findings suggest that the transition to symbolic generalization requires the putting into place of a system of signification which finds itself in opposition to those significations which are derived from natural language and from a range of conspicuous iconic gestures and which, taken together, allow the students to situate their mathematical experiences in time and space. This putting into place of a new system of signification compels the student to situate him or herself outside of his or her own spatial and temporal points of reference, thus creating a "de-subjectivized" void to be filled by an interpersonal cultural mode of expression namely, an objective mathematical discourse.*

Sunto. *Ispirato dalla psicologia di Vygotskij, dalla fenomenologia di Husserl e dall'epistemologia kantiana, nella prima parte dell'articolo tratteggio la base teorica di un approccio culturale e antropologico al pensiero matematico.*

---

[1] I risultati presentati qui derivano da un programma di ricerca sovvenzionato dal Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada / The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (CRSH/SSHRC).
Questo è il testo della conferenza che Luis Radford ha tenuto, su invito di Bruno D'Amore, al *II Seminario di Didattica della Matematica del Ticino* a Locarno, 24-25 settembre 2004; esso appare in francese in quegli Atti ed in italiano sul *Bollettino dei docenti di matematica*, 49, 39-56. Si ringrazia il Direttore della rivista svizzera, prof. Gianfranco Arrigo, per la gentile concessione.

Come è mostrato nell'articolo, l'approccio culturale e antropologico fornisce una via per definire l'attività cognitiva senza ridurla a qualche cosa di strettamente mentale e per considerare le generalizzazioni matematiche in termini semiotici. Si asserisce che le parole i gesti ed i simboli costituiscono differenti stratificazioni semiotiche ciascuna delle quali fornisce possibilità e limiti nell'esprimere ed oggettivare quello che deve essere generalizzato. Nella seconda parte dell'articolo confronto le generalizzazioni che ho chiamato "reali" e "contestuali" con quelle algebriche e simboliche. I risultati della ricerca suggeriscono che la transizione alla generalizzazione simbolica richiede di mettere in gioco un sistema di significati che è in contrasto con quei significati che derivano dal linguaggio naturale e da una gamma di cospicui gesti iconici che, presi insieme, permettono agli studenti di situare la loro esperienza matematica nello spazio e nel tempo. Mettere in gioco un nuovo sistema di significati costringe lo studente a situarsi al di fuori dei suoi riferimenti spaziali e temporali, creando così un vuoto "de-soggettivato" che deve essere colmato con una modalità di espressione culturale interpersonale, vale a dire un discorso matematico oggettivo.

1. Introduzione

Il tema che mi accingo ad affrontare in questa sede concerne la generalizzazione in matematica. È un tema al quale ho cominciato a interessarmi parecchi anni fa, osservando quattro classi di allievi di 13 anni, secondo un programma longitudinale di ricerca centrato sull'algebra. Ovviamente, non ci si può interessare alla matematica senza considerare nello stesso tempo la generalizzazione, perché, come dice Mason (1966), la generalizzazione è il motore della matematica. Prima di svolgere questo programma longitudinale di cinque anni non mi ero mai occupato della generalizzazione come problema specifico di ricerca. È stato nell'osservare le difficoltà degli allievi che mi sono accorto della complessità dei problemi che concernono la generalizzazione. Questi mi sono apparsi all'inizio come problemi cognitivi. Tuttavia, per poterli formulare in quanto problemi di ricerca, avevo bisogno di concettualizzarli in profondità. Questa constatazione mi ha condotto a intraprendere una riflessione sulla generalizzazione nell'ottica dell'ontologia e dell'epistemologia. Come verrà chiarito nel corso della mia relazione, è praticamente impossibile lavorare sulla generalizzazione senza entrare in considerazioni ontologiche ed epistemologiche.

A mano a mano che la riflessione teorica procedeva, mi permetteva di capire meglio i fenomeni cognitivi concreti che osservavo in classe. D'altro canto, la produzione di nuove idee concrete esigeva spesso un'interpretazione più fine dei dati e un approfondimento della riflessione teorica. È all'interno di questo processo dialettico tra riflessione concettuale e analisi di situazioni di apprendimento che ho potuto formulare, a poco a poco, certi principi che servono da fondamento a un approccio teorico che si vuole antropologico, grazie al ruolo che gioca il contesto storico-culturale nella concettualizzazione del pensiero matematico.
La mia impostazione antropologica si è sviluppata, in parte, come risultato del bisogno di ricontestualizzare l'attività cognitiva. Kant ci ha insegnato che ogni sapere è il prodotto di un'attività cognitiva. Se si vuole capire la natura di questo sapere, occorre studiare l'attività cognitiva che lo ha prodotto. Certamente il compito non era facile. Tuttavia mi sembrava importante andare al di là della concezione cartesiana che concepisce l'attività cognitiva come un processo intellettuale che si svolge unicamente all'interno del soggetto stesso.[2]
In un testo pubblicato nel 1997, proponevo di considerare il pensiero matematico come un pensiero di natura intrinsecamente sociale ancorato a modi di significazione culturale (Radford, 1997a). Ma, per andare più in là, dovevo precisare meglio questo ancoraggio. Mi era parso evidente, dai lavori di Lizcano (1993) sulla matematica cinese e da quelli di Høyrup (1990) sulla matematica babilonese, che la generalizzazione non è un processo che si sviluppa in modo naturale. C'è una moltitudine di direzioni possibili a ogni tappa dello sviluppo. Capire la generalizzazione conduce a capire il modo nel quale si effettuano le scelte di sviluppo alla luce del pensiero culturale che le sottendono. Allora potevo formulare la questione solo in grandi linee. Oggi, dunque 8 o 9 anni più tardi, potrei riformularla in maniera più precisa utilizzando metaforicamente uno dei concetti più profondi elaborati da Vygotskij. Potrei dire che, a ogni epoca, ogni cultura crea zone

[2] Per essere più precisi, questa idea di attività cognitiva trova ispirazione nella filosofia austera di S. Agostino. Se, per esempio, si vuole rintracciare l'idea contemporanea molto popolare secondo la quale gli oggetti matematici sono *nella* nostra testa, è S. Agostino e non Descartes o Platone che si incontra risalendo la genealogia delle idee (Radford, 2004).

prossimali di sviluppo all'interno delle quali si effettuano le scelte che determinano la direzione che seguirà lo sviluppo stesso.
È proprio ispirandomi alla scuola socio-storica di Vygotskij che sono stato indotto a esaminare la relazione tra segno e oggetto e ad allontanarmi dalla corrente tradizionale che considera i segni come indici dell'attività mentale e come semplici «aiuti» al pensiero (Radford, 1998, 1999). Certe correnti linguistiche e psicologiche ispirate allo strutturalismo, per esempio, distinguono tra due piani: quello del pensiero propriamente detto -che, secondo queste teorie, è governato da «strutture profonde» nascoste nella testa- e quello delle «strutture di superficie», nelle quali si trovano i segni che, sempre secondo queste teorie, non sono che *vestigia* delle strutture profonde. All'opposto dell'approccio cartesiano dell'attività mentale e delle correnti strutturaliste, mi collocavo dalla parte dei filosofi e degli psicologi culturali (come Wertsch, 1991, Kozoulin, 1990 e Zinchenko, 1985) che insistono sul ruolo cognitivo del segno. Alla fine degli anni 1990, mi è parso di capire che la risposta alla domanda che concerne i processi di generalizzazione poteva essere trovata studiando i meccanismi di oggettivazione mediata del sapere culturale. È in questo ambito che ho agito in questi anni nelle mie ricerche.
Ecco dunque un breve sunto del cammino che mi ha condotto a interessarmi al problema della generalizzazione. In questa sede vorrei presentare due «momenti» particolari di questo cammino.
Da una parte vorrei mostrare alcuni elementi della riflessione concettuale che concernono la generalizzazione nell'ottica ontologica ed epistemologica.
Senza la pretesa di essere esaustivo, esaminerò i rapporti che possono esistere tra il generale e il particolare nella teoria della conoscenza di Kant. Questa è importante nella nostra discussione perché si iscrive in una critica della Ragione che non esita a mettere in questione tutto ciò che il pensiero occidentale aveva considerato acquisito fino al XII secolo, ma che, curiosamente, risparmia la matematica. Si tratta di una critica che, dal punto di vista antropologico, fallisce, ma che fallendo si apre verso un tentativo di «semiotizzazione» dell'oggetto matematico.
D'altra parte vorrei mostrare alcuni risultati concreti della mia ricerca in classe. Non bisognerebbe perdere di vista che, come ho affermato in precedenza, questi due aspetti sono correlati e che la separazione che opero qui per ragioni di esposizione è del tutto artificiale.

2. Alcune considerazioni teoriche sulla generalizzazione

Una delle caratteristiche della matematica è che i suoi oggetti sono oggetti «generali». Quando enunciamo una proprietà sui triangoli o sulle funzioni continue, queste ultime non concernono un triangolo particolare o una determinata funzione continua, ma l'oggetto generale corrispondente. La natura generale degli oggetti matematici pone immediatamente due problemi diversi. Un problema ontologico e uno epistemologico. Il problema ontologico ha a che fare con il modo di essere di questa generalità. Si può, per esempio, considerare che gli oggetti matematici sono realtà trascendentali. Per contro, si può considerare che gli oggetti matematici sono prodotti del pensiero umano. Il problema epistemologico si può sintetizzare nella domanda seguente: come possiamo giungere a conoscenza di questi oggetti generali, dal momento che non abbiamo accesso a questi oggetti se non attraverso rappresentazioni che ci facciamo di essi?

In una celebre lettera scritta il 21 febbraio 1772, Kant mette in dubbio il potere delle nostre rappresentazioni. In questa lettera, inviata a Herz, Kant dice: «su quale fondamento si basa il rapporto tra ciò che chiamiamo rappresentazione e l'oggetto corrispondente?»[3] In questa lettera Kant dibatte la questione della legittimità che avrebbero le nostre rappresentazioni nel presentare o rappresentare gli oggetti. In termini semiotici, Kant si interroga sull'adeguatezza del segno. Ora, quali sono le ragioni di Kant che lo fanno dubitare? La natura del dubbio kantiano è di ordine epistemologico. Dal lato ontologico, Kant non nega la trascendenza stessa degli oggetti. Kant dubita che possiamo riuscire a conoscere la vera realtà degli oggetti perché tutto ciò che captiamo dall'esperienza del mondo è ineluttabilmente filtrato dai nostri sensi. Occorre distinguere tra l'oggetto in sé e l'oggetto come ci appare nel corso dell'esperienza. Il primo è l'oggetto così com'è realmente; il secondo è solo un'apparenza.

Ciò non vuole però dire che ogni conoscenza resta inaccessibile, perché la conoscenza degli oggetti matematici costituisce un'eccezione. Infatti, per Kant, vi sono conoscenze possibili: sono conoscenze *a priori*. E l'esempio paradigmatico è proprio la matematica: «la matematica

---

[3] Kant in (Zweig, 1970); mia traduzione

costituisce l'esempio più appariscente di una ragione pura che riesce a estendersi da sola e senza il concorso dell'esperienza» (A 712/B 740)[4].
Ora, che cos'è una conoscenza *a priori*? Kant dice:

> Si dicono *a priori* conoscenze indipendenti dall'esperienza e anche da tutte le impressioni dei sensi, e le si distingue dalle conoscenze empiriche, che hanno la loro sorgente *a posteriori*, cioè nell'esperienza. (B 2)

Non bisogna confondere *a priori* con *innata*. Per Kant, l'*a priori* è una categoria logica; l'*innata* è una categoria psicologica. Come sottolinea Kant nel passaggio precedente, è a priori tutto ciò che non trova le condizioni di costituzione nell'esperienza. Dove può trovare l'*a priori* le proprie condizioni? Le trova nei concetti della comprensione e nella logica implacabile che le governa.
Per Kant, il teorema che afferma che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° è vero, ma non trova la sua verità nell'esperienza, bensì nel concetto stesso di triangolo. La stessa cosa si può dire del teorema dell'uguaglianza degli angoli alla base di un triangolo isoscele. Nell'introduzione della *Critica della Ragion Pura*, Kant dice:

> Il primo che dimostrò il *triangolo isoscele* (che si chiamasse Talete o altro) ebbe un'illuminazione; perché trovò che non doveva fare riferimento a ciò che vedeva nella figura e neppure al semplice concetto che ne aveva, per apprendere le proprietà, ma doveva produrre questa figura perché ci pensava e la presentava (per costruzione) *a priori* secondo i concetti stessi, e che, per conoscere sicuramente una cosa *a priori*, non doveva attribuire a questa cosa altro che ciò che risultava necessariamente di ciò che lui stesso vi aveva messo, conformemente al suo concetto. (Kant, BXI-BII)

Certamente, visto sotto questa angolazione, Kant appare terribilmente razionalista. Lo è, è sicuro. Ma si oppone al razionalismo su due punti importanti: (1) le verità matematiche non si possono restringere alla non-contradditorietà degli enunciati. Per Kant ciò non fa altro che provare la loro *possibilità logica* e non la loro *possibilità reale*; (2) l'altro punto concerne il ruolo epistemologico del sensibile. Nella teoria della conoscenza di Kant, il sensibile non gioca semplicemente un ruolo

[4] Come sempre, il riferimento A 712 rinvia alla prima edizione della *Critca della Ragione Pura*, pubblicata nel 1781; B 740 rinvia alla seconda edizione, pubblicata nel 1787.

accessorio. Per Kant ogni cognizione comporta un elemento concettuale e un elemento sensuale. L'elemento sensuale è in relazione con ciò che Kant chiama l'*intuizione*. «L'intuizione è una rappresentazione dipendente immediatamente dalla presenza dell'oggetto» (Prolegomena, § 8). Nella terminologia moderna, l'intuizione si riconduce a ciò che chiamiamo solitamente una rappresentazione particolare o ancora un simbolo (Hintikka, 1980, pp. 61-62). Kant sottolinea con forza che «intuizione e concetti costituiscono… gli elementi di ogni nostra conoscenza, in modo che né concetti senza corrispondente intuizione né intuizione senza concetti possono dare origine a conoscenza». (A 50/B 74)

In effetti, il ruolo che Kant attribuisce al sensibile è evidente nel passaggio concernente il triangolo isoscele menzionato in precedenza. Secondo questo passaggio, Talete forma una conoscenza a priori; questa non risulta dalla lettura della figura, perché ciò significherebbe che la conoscenza dipende dall'esperienza. L'*a priori* è ciò che è necessariamente usato nel concettostesso e che *riappare* nella figura concreta. In un passaggio della *Disciplina della Ragion Pura*, Kant dice:

> Così costruisco un triangolo presentando l'oggetto corrispondente a questo concetto sia con la semplice immaginazione nell'intuizione pura, sia anche, seguendo questa, sulla carta nell'intuizione empirica, ma nei due casi totalmente a priori, senza averne dedotto il modello da alcuna esperienza. La figura singola tracciata qui è empirica e comunque serve a esprimere il concetto senza portare pregiudizio alla sua universalità, perché in questa intuizione empirica, non si guarda nient'altro che l'atto della costruzione del concetto… (A 713-4/B 741-42)

Allora, in che modo Kant affronta, nella sua teoria della conoscenza, la relazione che esiste tra generale e particolare? Nell'esempio precedente, Kant parla di una corrispondenza tra concetto e figura, dunque tra generale e particolare. Ma qual è esattamente la natura di questa relazione?

Kant risponde che se la conoscenza filosofica considera il particolare unicamente nel generale, la conoscenza matematica, per contro, considera «il generale nel particolare, anche nel singolare, ma a priori e per mezzo della ragione». (A 714/B 742)

La risposta di Kant si trova già insinuata nell'esempio del triangolo; sarà sviluppata nel corso dell'*Analitica trascendentale*, particolarmente nel denso capitolo consacrato allo schematismo, cioè nel posto stesso dal quale, più tardi, partirà l'epistemologia genetica di Piaget. La relazione tra generale e particolare è assicurata dallo schema, cioè (continuando col nostro esempio) la *regola di costruzione* del triangolo che, durante la sua esecuzione, ci svela il concetto sotto un aspetto particolare senza peraltro mettere in pericolo la sua generalità.

È per questo che lo schema in Kant è sia intellettuale sia sensibile. È intellettuale nel senso che è generale; è sensibile nel senso che si svolge nel tempo e nello spazio. Nel capitolo sullo schematismo, Kant indica che

> i nostri concetti puri [fra i quali quelli matematici] non hanno per fondamento immagini di oggetti, ma schemi. Non esiste immagine di triangolo che sia adeguata al concetto di triangolo in generale. In effetti, essa non raggiungerebbe la generalità del concetto, che lo rende valido per ogni triangolo (rettangolo, scaleno, ecc.), ma sarebbe sempre limitata a una sola parte di questa sfera. Lo schema di triangolo non può mai esistere se non nel pensiero. (A 140-41/B 179-80)

La risposta di Kant alla domanda precedentemente posta è dunque la seguente: è lo schema che assicura la relazione tra generale e particolare. Il concetto «discende» per così dire dal mondo intellettuale e, schematizzandosi, si iscrive nell'esperienza umana: assume una forma particolare che, nonostante le sue particolarità (il triangolo costruito nel mondo concreto può essere piccolo, grande, rosso, ecc.), riveste lo stesso i tratti della sua generalità.

Con il suo concetto di schema, che ha giocato un ruolo centrale nell'elaborazione delle epistemologie del XX secolo[5], Kant respinge l'attacco lanciato da George Berkeley contro l'esistenza delle idee astratte o generali. Secondo Berkeley, l'idea di triangolo generale è impossibile, perché quando si pensa a un triangolo, si pensa sempre a un triangolo particolare. Un triangolo generale dovrebbe essere simultaneamente rettangolo, scaleno, equilatero, isoscele, ecc. Niente di più facile, dice Berkeley alla fine della sezione 13 dell'introduzione al

---

[5] Certamente, l'esempio più conosciuto è quello di Piaget, che abbandonerà l'apriorismo kantiano e farà dello schema il motore che costruisce il concetto. Un esempio forse meno conosciuto è quello di Cassirer e della sua teoria della concettualizzazione, tematizzata secondo le linee della scuola kantiana di Marburg (Radford, in stampa-1)

suo *Trattato concernente i principi della conoscenza umana*, di rovistare nei nostri pensieri e di vedere se un tale triangolo può essere veramente pensato. L'errore di Berkeley, direbbe Kant, consiste nel confondere regola e immagine, o schema e prodotto dello schema.

La teoria del concetto matematico in Kant si basa dunque sui seguenti principi:

1. I concetti matematici sono concetti a priori; essi non trovano la condizione di possibilità nell'esperienza umana; la trascendono, ma, a differenza dei concetti empirici che sono sempre filtrati dai sensi, i concetti matematici possono effettivamente essere conosciuti.
2. I concetti matematici sono universali.
3. La loro universalità è nell'ordine dell'esprimibile; si esprime come regola: «Ogni conoscenza esige un concetto e questo concetto, quanto alla sua forma, è sempre qualcosa di generale e che serve da regola» (A 106). Nel caso dei concetti puri, la regola è precisamente quella che ci è data dallo schema.

Si potrebbe ancora porre a Kant la questione dell'adeguatezza tra il concetto matematico -che secondo lui è un'entità universale o generale- e il particolare nel quale finisce lo schema spiegandosi nel mondo sensibile. Si potrebbe chiedergli di precisare da dove la Ragione trae questo potere di adeguarsi quando si china sugli oggetti matematici e che sembra invece mancargli quando si volge al mondo empirico. La risposta non è molto lunga. Se il matematico ha il diritto di vedere il generale nel particolare, è, come osserva Daval (1951, p. 110), «perché è certo della fedeltà del segno. Il segno è la rappresentazione adeguata del significato».

In sintesi, il particolare e il generale si collegano, in Kant, grazie al credo nella fedeltà del segno. Kant non esita a mettere in questione l'adeguatezza del segno in generale. Ma ne fa un'eccezione quando si tratta della matematica. Si può essere sicuri che, nel caso della matematica, si può contemplare il generale nel particolare e che anche se si ragiona su figure concrete, «le proposizioni della geometria sono conosciute sinteticamente a priori e con una certezza apodittica». (A 46/B 64)

Riassumiamo le idee precedenti. Kant si iscrive in una lunga tradizione secondo la quale il concetto generale dev'essere allo stesso tempo universale. Generale e universale significano, al di là dell'esperienza, dunque al di là dello spazio e del tempo, ciò che conduce Kant a sposare la teoria classica di verità della tradizione *essenzialista*:

> Il concetto di verità in Kant –e questo è profondamente legato al pensiero borghese- è quello di verità al di là del tempo (timeless truth)... Il concetto di verità al di là del tempo, cioè il concetto secondo il quale solo ciò che è al di là del tempo può essere realmente vero... è una delle forze direttrici più profonde della filosofia kantiana (Adorno, 2001, p. 10).

Si deve diffidare della relazione tra generale e particolare, salvo in matematica dove il particolare e il generale si incontrano in questo luogo di sicurezza costituito dal segno. Il generale e il particolare sono tematizzati da Kant secondo i canoni di una tradizione essenzialista che vede il generale e la sua verità come ciò che resta, una volta che si è tolto tutto ciò che cambia, tutto ciò che è effimero. Si tratta di una tradizione essenzialista le cui origini risalgono all'ontologia di Platone, un'ontologia che veicola i valori agonizzanti di un'aristocrazia ateniese che, confrontata con la disfatta nella guerra del Peloponneso e con l'emergenza concomitante di un potere popolare che essa teme, si oppone a tutto ciò che porta cambiamento.

3. La generalizzazione del punto di vista antropologico

Dal punto di vista antropologico, il fallimento di Kant non consiste nel potere che conferisce al segno di rappresentare il generale. Uno dei maggiori contributi di Kant è in effetti di aver insistito sul ruolo epistemologico del segno. L'errore di Kant si trova nella sua concezione dell'idealità del concetto matematico: nel postulare l'*a priori* del concetto matematico, Kant colloca quest'ultimo al di là dell'esperienza umana. Nell'approccio semiotico antropologico (ASA) del quale stiamo parlando, l'idealità del concetto dell'oggetto concettuale è direttamente collegata al contesto storico-culturale. L'idealità degli oggetti matematici –cioè ciò che li rende generali- è del tutto tributaria dell'attività umana. Come indica il filosofo E. V. Ilyenkov:

> L'idealità è come un timbro impresso sulla sostanza della natura dall'attività sociale, una forma di funzionamento della cosa fisica nel processo di questa attività. Così, tutte le cose che fanno parte del processo sociale acquistano nuove "forme di esistenza" che non sono incluse nella natura fisica della cosa e che si distanziano da essa in

modo completo. Questa nuova forma è la loro forma ideale. (Ilyenkov, 1977a, p. 86)

In termini più precisi, nell'ASA, il sapere matematico è visto come il prodotto di una *prassi* riflessiva, cognitiva, mediata.

Il sapere in quanto prassi cognitiva (*praxis cogitans*) sottolinea il fatto che ciò che conosciamo e il modo col quale giungiamo a conoscerlo sono sottesi da posizioni ontologiche e da processi culturali di produzione del senso che danno forma a un certo tipo di razionalità all'interno del quale sono posti certi tipi di domande e di problemi.

La natura riflessiva del sapere dev'essere capita nel senso di Ilyenkov, cioè in quanto componente distintiva che rende la cognizione una riflessione intellettuale del mondo esterno secondo le forme dell'attività degli individui (Ilyenkov, 1977b p. 252). La natura mediata del sapere fa riferimento al ruolo che giocano gli strumenti e i segni in quanto mezzi di oggettivazione del sapere e in quanto strumenti che permettono di portare a termine la *prassi* cognitiva.

Come già in Kant, generalizzare significa qui «vedere» il generale nel particolare, salvo che, nell'ASA, il generale non è concepito nel senso di un'entità trascendentale, ma di un'entità generale che deriva dalla riflessione degli individui sul mondo che li circonda. Inoltre, «vedere» il generale non deriva dal tentativo di un sensualismo che riempirebbe di contenuto i recipienti del concetto. Si tratta innanzi tutto di un generale (un *ens* o essere) che si costruisce nello stesso tempo dei particolari che contiene secondo le forme della razionalità culturale[6].

Ora è tempo di occuparci di ciò che succede in classe.

4. La generalizzazione in classe

Secondo l'ASA, occorre fare un'importante distinzione tra apprendimento e produzione di sapere[7]. Mentre la produzione di nuovi

---

[6] Durante le mie ricerche epistemologiche precedenti, ho potuto fornire parecchi esempi storici a questo proposito. In (Radford, 1997b) si troverà un'analisi dell'apparizione della seconda incognita in algebra nel XIV[e] secolo. La seconda incognita appare all'interno dello spazio che apre il movimento economico, culturale e intellettuale dell'alto Medioevo e che conduce a una rottura al livello della rappresentazione fino allora puramente iconica della tradizione bizantina.

[7] Questa distinzione è stata sottolineata da altri approcci antropologici, fra i quali quello di Chevallard (1985) (vedere anche Bosch et Chevallard, 1999), che parla in particolare

saperi risulta da attività in comune, riflessive, mediate che sfociano nella creazione di concetti culturali (oggetti matematici, scientifici, artistici, estetici o altro), l'apprendimento scolastico è il processo di trasformazione attiva degli oggetti culturali in oggetti di coscienza.
La trasformazione attiva degli oggetti culturali in oggetti di coscienza è tematizzata nell'ASA in quanto processo di *oggettivazione*. L'oggettivazione dell'oggetto significa riflessione sull'oggetto secondo le forme dell'attività matematica: l'oggetto appare come ri-flessione nella coscienza individuale di ciò che è *già* iscritto nella cultura.
Ci chiediamo: come si riflette l'oggetto? È qui che entra in scena il concetto di *mezzo semiotico di oggettivazione* del sapere.

4.1. Mezzi semiotici di oggettivazione

Come ho detto nell'introduzione, la teorizzazione precedente è stata il risultato di uno sforzo volto a capire le difficoltà incontrate dagli allievi di fronte a compiti di generalizzazione legati all'introduzione dell'algebra.
Una delle prime domande che abbiamo posto agli allievi è stata la seguente: dopo aver mostrato agli allievi una sequenza di tipo molto classico (si veda la figura seguente) e dopo aver fatto loro calcolare il numero di cerchietti in figure particolari come la 25ª e la 100ª, abbiamo chiesto di trovare il numero di cerchietti nella figura n-esima.

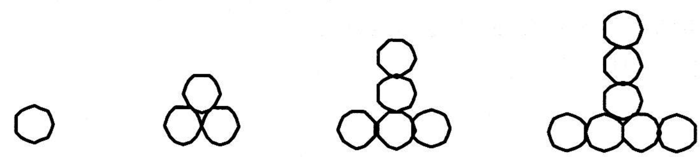


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4

Gli studenti apparivano sorpresi da questa domanda: spesso rispondevano con altre domande, come: «Come? Che cos'è la figura n-esima?», «Ma insomma, non c'è alcuna figura n-esima!», «n uguale a…?"».

---

di trasposizione del sapere; ma capita sovente che ci si dimentichi e che si finisca per far coincidere i meccanismi di appropriazione o di acquisizione del sapere con quelli della sua costruzione.

Certo, la domanda iniziale era stata posta con una terminologia che fa ricorso a simboli e concetti algebrici che gli studenti non conoscevano ancora. D'altra parte, i cambiamenti effettuati nella formulazione non hanno aiutato molto. Quando abbiamo chiesto di trovare il numero di cerchietti in una figura *qualsiasi*, gli allievi ci chiedevano che cosa intendevamo dire: «figura qualsiasi... che significa qualsiasi?» «Che roba è?». Un allievo ha persino interpretato il termine qualsiasi nel senso di figura arbitrariamente composta, dicendo: «Magari è un quadrato!».

Il problema consiste nel fatto che non è possibile mostrare concretamente la figura generale. Occorre vederla diversamente. Gli allievi sono stati messi di fronte a una situazione nella quale l'insegnante vedeva l'oggetto culturale in questione; ma loro non potevano ancora vederlo. Per poterlo vedere, occorreva lanciare gli allievi in un processo di *oggettivazione.*

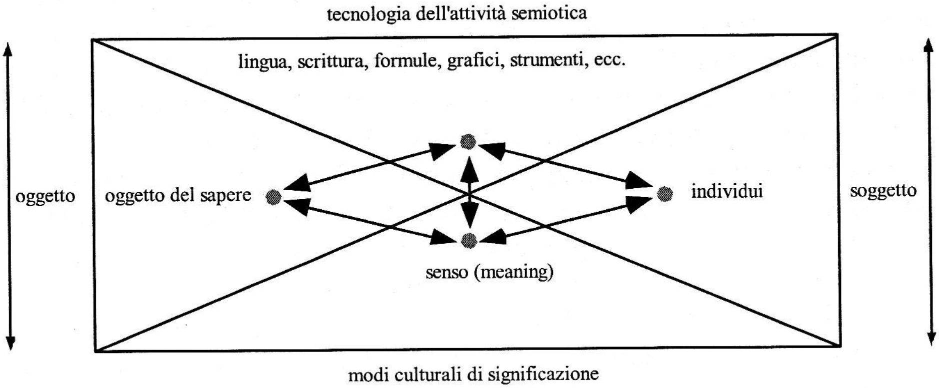
Il termine oggettivazione è composto di due parole*: ogget+tivazione*. La prima viene da *obietare*, che significa «mettere qualche cosa davanti a qualcuno». *Facere* significa «fare», di modo che, etimologicamente, oggettivazione significa «far mettere qualche cosa davanti a qualcuno in modo che lo possa percepire». Nel nostro contesto, oggettivazione indica un processo che ha per scopo di mostrare qualche cosa (un oggetto) a qualcuno. Quali sono i mezzi per mostrare l'oggetto? Sono quelli che chiamo *mezzi semiotici di oggettivazione*. Sono oggetti, artefatti, termini linguistici, in generale segni che si utilizzano per rendere visibile un'intenzione e per condurre a termine un'azione.

Devo qui insistere sul senso fenomenologico che dò ai termini «vedere», «mostrare», «far apparire», ecc. Questi termini non si riferiscono all'attitudine passiva di chi solamente «vede». Come dice Davidov, *«gli oggetti e la realtà sono dati all'uomo sociale, non attraverso la contemplazione passiva, ma unicamente nella forma della sua attività pratica sensoriale-oggettuale»*[8]. Ogni atto percettivo è attivo ed estremamente complesso. Riposa su azioni, su un'interpretazione-reinterpretazione continua e un'attribuzione di senso a ciò che è percepito da parte di chi lo percepisce secondo categorie culturali di cui dispone per afferrare ciò che c'è da percepire. Nel caso degli oggetti concettuali, il percepito è di fatto non percepibile, nel senso che è

---

[8] «Objects and reality are given to social man, not through passive contemplation, but only in the forms of his practical, *sensory-object* activity» (Davydov, 1990, p. 244).

accessibile solo indirettamente, attraverso mezzi semiotici di oggettivazione. Tornerò su questo punto più avanti.
Da quanto abbiamo detto, la generalizzazione matematica appare legata all'attività semiotica che spinge l'allievo verso l'atto di «prendere coscienza» di una «oggettività» concettuale (Husserl) che fino ad allora sfuggiva alla sua intenzione. Ora, i mezzi semiotici di oggettivazione offrono possibilità diverse per svolgere un compito per designare oggetti ed esprimere intenzioni. È per questo che l'attività semiotica si produce in un luogo di incontro tra una soggettività che cerca di esprimersi e un sistema sociale di significazioni già presente (Merleau-Ponty). L'attività semiotica si trova così all'intersezione di ciò che Aristotele chiama *technè* cioè come lavoro riflesso su oggetti e segni concreti e una *poiesis*, intesa come promozione del senso.
La figura seguente rende conto dell'oggettivazione del sapere come è concepita nell'ASA.



Questa figura mette in evidenza il fatto che l'oggetto del sapere non è filtrato solamente dai nostri sensi, come è il caso per Kant, ma soprattutto da modi culturali di significazione[9]. La figure mette ugualmente in evidenza che l'oggetto del sapere è filtrato dalla tecnologia dell'attività semiotica. L'assenza della freccia che collega

[9] Due esempi di modi culturali di significazione sono: l'opposizione simmetrica yin/yang nella Cina antica (che rende possibile la concettualizzazione di numeri negativi) e l'opposizione non simmetrica dell'essere e del non-essere del pensiero greco classico (che esclude i numeri negativi dal mondo dell'esistenza). Vedere Radford 1997a, 2003a.

direttamente gli individui e l'oggetto del sapere esprime chiaramente l'idea vygotskiana secondo la quale il sapere è culturalmente mediato.

4.2 Generalizzazioni fattuali

L'estratto seguente proviene da una delle prime osservazioni fatte durante il nostro programma longitudinale di ricerca. Nell'estratto vediamo uno dei gruppi di tre allievi che abbiamo seguito durante cinque anni. Gli allievi dovevano trovare il numero di stuzzicadenti necessari per costruire la figura 25ª in una successione molto classica di triangoli fatti con stuzzicadenti, come mostra la figura seguente.

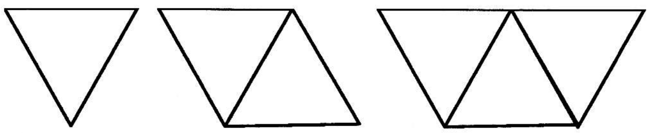


fig. 1 fig. 2 fig. 3

1. Judith: La prossima figura ne ha due di più.che… guarda! [La figura] 6 è 13, 13 più 2. Devi continuare. Momento (*prende una calcolatrice*) OK. OK. è più…
2. Anik: Beh, non puoi fare sempre più 2, più 2, più 2,…
3. Judith: Beh, sì. Questa è figura 7, più 2 uguale figura 8.
4. Josh: Va troppo per le lunghe! […] È sempre il prossimo. Guarda! (*Con la sua matita, indica le figure parlando; vedere foto 1*) 1 più 2, 2 più 3, […].
5. Anik: Allora 25 più 26…
6. Josh: Aspetta un momento. Sì, 3 più 4, fa 7; 4 più 5… dunque, è 27 più 26.
7. Anik: Beh, perché fai sempre… come… guarda (indica la figura 3

direttamente con l'indice; vedi foto 2 [figura] 3 più […] è 25 più 26.

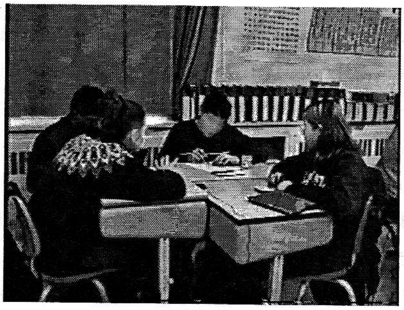
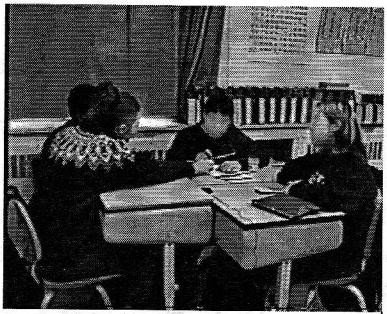



Foto 1 (a sinistra). Con la sua matita, Josh indica le figure (riga 4 del dialogo).
Foto 2 (a destra) Anik indica la figura 3 con l'indice (riga 7 del dialogo).

Gli allievi hanno trovato la risposta per ciascuna figura senza contare il numero di stuzzicadenti: hanno effettuato una generalizzazione. Ora, di che tipo di generalizzazione si tratta? Alla riga 1, Judith imposta una relazione di ricorrenza, che in simboli scriveremmo in questo modo: $u_{n+1} = u_n + 2$. Josh, dando seguito a un'idea di Anik, alla riga 2 mette in evidenza il carattere poco pratico della relazione e propone una nuova strategia che è subito capita da Anik. Ma, alla riga 6, Josh non sa se è 27+26 oppure 25+26. La questione è risolta da Anik alla riga 7. In questo momento gli allievi hanno impostato uno *schema* (nel senso kantiano del termine) che permette loro di trovare il numero di stuzzicadenti corrispondente a ogni figura. Sono riusciti a oggettivare ciò che chiamiamo una generalizzazione fattuale, cioè una generalizzazione di azioni sottoforma di uno schema operazionale che rimane confinato a livello numerico.
A dire il vero non c'è un gran mistero dietro la generalizzazione fattuale. La si può ritrovare frequentemente anche negli allievi più giovani. Interessante è vedere come queste generalizzazioni vengono oggettivate, cioè determinare i mezzi semiotici di oggettivazione utilizzati dagli allievi per rendere queste generalizzazioni «oggetti di coscienza».

Il termine «prossimo»

Tornando all'estratto precedente, si vede che il termine linguistico «prossimo» gioca un ruolo centrale. Questo termine appartiene a ciò che in semiotica è detto deittica spaziale. Suggerisce un modo di apprendere le figure e apre una possibilità di far emergere una struttura matematica dietro la successione. Per mezzo di termini come «prossimo», «qui», «là», «questo qui», «quello là», la lingua assume una funzione centrale nel processo di oggettivazione, una funzione che abbiamo chiamato *funzione deittica* (Radford, 2000).

L'avverbio «sempre»

Un altro termine linguistico importante è l'avverbio «sempre». Permette di veicolare il senso di generalità e di esprimere questa idea centrale della generalizzazione di qualche cosa che continua in modo indefinito. Fa parte di un'altra funzione centrale della lingua che rende possibile descrivere procedure e azioni che possono essere condotte potenzialmente, in modo immaginato. Abbiamo chiamato questa funzione la *funzione generativa della lingua* (Radford, 2000)[10].

I gesti

Un altro mezzo semiotico di oggettivazione è costituito dai gesti che fanno gli allievi. Le foto precedenti mostrano come i gesti permettono di indicare, con una matita o con la mano, certi oggetti del discorso allo scopo di attirare l'attenzione e di guidare la percezione nell'atto di dare senso.

Sicuramente, i mezzi semiotici di oggettivazione che abbiamo appena messo in evidenza non hanno ragione d'essere negli approcci classici cognitivisti, perché, in questi approcci, si suppone che l'attività cognitiva abbia luogo *nella* testa. Tuttavia è bene ricordare che, precisamente, all'origine dell'ASA, si trova questa volontà espressa di andare al di là del punto di vista cartesiano della cognizione che inquina l'attività cognitiva del cervello. Dunque, se si allarga lo spettro dell'attività cognitiva e si analizzano attentamente tutte le risorse mobilitate dagli allievi per rendere visibili le loro tappe delle generalizzazioni apparenti, ci si accorge che i gesti e il linguaggio si articolano attorno a un'attività

---

[10] Osserviamo che altri sistemi semiotici come quelli della pittura possiedono, fino a un certo punto, mezzi per riempire le funzioni deittica e generatrice. Un compito, o un grande segno può giocare il ruolo del termine «qui» e indicare qualche cosa sullo spazio semiotico della pittura; un effetto di prospettiva può anche comunicare l'idea di un'azione che si continua. Ma queste funzioni centrali, la deittica e la generativa, restano molto più topiche qui che nella lingua. Vi sono sistemi semiotici che non hanno deittica, come il linguaggio algebrico.

percettiva in un modo molto complesso. Ma c'è di più. Oltre al linguaggio e ai gesti, c'è anche il ritmo e i movimenti.

Ritmo e movimento

In un altro gruppo, uno degli allievi ha detto:
OK, in ogni caso, la figura 1 è più 2. La figura 2 è più 3. La figura 3 è più 4. La figura 4 è più 5. (*e pronunciando queste parole l'allieva indica le figure*).
In un altro gruppo , un allievo ha detto:
si va da 2… a 3, 5, 7, 9, 11 (*e contando l'allieva indica le figure*).
In questi due episodi, non c'è deittica spaziale come nel «prossimo»; non c'è alcun avverbio «sempre». Qui gli allievi fanno ricorso a espressioni non linguistiche di questi termini per esprimere il senso di generalità. Infatti lo schema di astrazione non raggiunge alcun livello verbale. Il suo tessuto semiotico è fatto di ritmo e movimento. Anche se si trova già questa combinazione di ritmo e movimento alla riga 4 nell'intervento di Josh, nei due ultimi esempi, il ritmo e il movimento creano una cadenza che dispensa gli allievi dal far ricorso ad altri metodi di oggettivazione.

4.3 Generalizzazioni contestuali

Per aiutare gli allievi a oggettivare più profondamente lo schema di generalizzazione, abbiamo chiesto loro di scrivere un testo con lo scopo di spiegare, a un allievo di un'altra classe, come fare per calcolare il numero di stuzzicadenti in una qualsiasi figura della successione.
Ecco un breve passaggio dello scritto di un allievo:

> Anik: Si fa come… sarebbe come… guarda qui, qui quando… ops. OK. Guarda… Qui la figura … OK, questo qui è il numero della figura, giusto? […] Si può dire che… è il numero della figura, giusto? Come… mettiamo quella è 1 (*si riferisce alla figura 1*). Se… se… OK, tu addizioni… come dici tu? Nell'ordine… addizioni per sé stesso… Fai 2+2, poi, dopo di ciò, più 1. Fai sempre così, d'accordo? Farai 3 più 3 più 1; 4 più 4 più 1; 5 più 5 più 1. Capisci ciò che voglio dire?

Questo breve passaggio mette in evidenza la difficoltà che incontrano gli allievi a raggiungere un livello più alto di generalizzazione. L'intenzione è chiara, ma non viene espressa in modo soddisfacente senza far ricorso ad esempi concreti, propri del livello concettuale della generalizzazione fattuale. La scrittura del messaggio si avvale di mezzi di oggettivazione situati in un compartimento della tecnologia dell'attività semiotica che esclude l'utilizzazione di esempi concreti e che esige l'abbandono del ritmo, del movimento e dei gesti. Siccome il messaggio è indirizzato a un allievo assente, non si può contare sulla sua attività percettiva. Come sarebbe stato facile spiegargli lo schema di generalizzazione, se fosse stato lì davanti al piccolo gruppo di Anik!

Gli allievi non sono riusciti a oggettivare lo schema cercato. Sono allora tornati sull'idea iniziale alla base della generalizzazione fattuale vista nel punto 4.2.

1. Anik: Addizioni la prima figura…
2. Josh: (*interrompe*) (e) la seconda figura.
3. Anik: […] Non è la seconda figura… Non è la prossima figura?
4. Josh: Sì, la prossima.
5. Anik: (*riassumendo*) Tu addizioni la figura e la prossima figura.

Senza utilizzare lettere o esempi concreti, gli allievi giungono a oggettivare uno schema operazionale i cui "argomenti" o "variabili" non sono più numeri (come 10, 25, 100, ecc.). Sono oggetti generali. Sono designati con termini generici come «la figura», « la prossima figura». Questi termini costituiscono i mezzi semiotici di oggettivazione. Con l'ausilio di questi mezzi, l'obiettivo generale, che resta sempre inaccessibile direttamente, comincia a prendere forma: comincia a diventare un «oggetto di coscienza» per gli allievi. Anche se generali, questi oggetti restano tuttavia *contestuali*. Sono contestuali nel senso che il modo di designazione dipende ancora da proprietà spaziali che rimangono molto pregnanti, quelle di *prossimità*. Presuppongono ciò che Bühler (1979) ha chiamato *origo*, cioè un punto spazio-temporale (un centro, un punto di osservazione) che permette di parlare di «prossimo», di «alto», di «basso», «prima», «dopo», «destra», «sinistra», ecc.

In Radford (2003b), queste generalizzazioni sono state chiamate *generalizzazioni contestuali*. Più precisamente, una generalizzazione contestuale è una generalizzazione che assume la forma di schema i cui argomenti sono oggetti generali, ma che portano in sé le caratteristiche concettuali della situazione spazio-temporale dalla quale sono usciti.

Lo studio di queste generalizzazioni non simboliche fa luce sulla *natura* delle difficoltà che incontrano gli allievi debuttanti nel trovare formule algebriche in un contesto di generalizzazione. Infatti la generalizzazione algebrica esige una rottura molto profonda con i modi di significazione degli oggetti delle generalizzazioni fattuali e contestuali. Il linguaggio algebrico non possiede avverbi (per esempio «sempre») e non è abbastanza ricco da poter tradurre gesti e termini deittici importanti per l'azione di oggettivazione (dei termini come «ciò», «il prossimo», «qui», ecc.). Non può includere il ritmo e il movimento. Il linguaggio algebrico impone una sobrietà a chi pensa e si esprime, una sobrietà nei modi di significazione che è stata impensabile prima del Rinascimento. Impone ciò che abbiamo chiamato altrove (Radford, 2002) una *contrazione semiotica*. Presuppone anche la perdita dell'*origo*. Così, anche se certi allievi sono riusciti a esprimere il numero di stuzzicadenti nella figura n con la formula «n+(n+1)», dove «n» designa il numero della figura n e «n+1» quello della figura seguente (o «la prossima figura»), non erano ancora pronti a sopprimere le parentesi e ad addizionare le lettere perché ciò porterebbe alla distruzione del senso della designazione. A che cosa avrebbero potuto riferirsi un'espressione come «2n+1»? (vedere Radford 2000, 2002, 2003b).

5. Conclusione

Nell'introduzione, dicevamo che una delle motivazioni alla base dell'approccio semiotico antropologico (ASA) era di andare al di là della concezione di attività cognitiva offerta dalla tradizione classica cartesiana. Ispirandoci ai lavori della scuola socio-storica di Vygotskij, alla fenomenologia di Husserl e all'epistemologia kantiana, siamo stati condotti a porre il problema dell'apprendimento come un problema di trasformazione degli oggetti concettuali culturali in oggetti di coscienza. Apprendere è prendere coscienza di un obiettivo generale secondo i modi della razionalità e della cultura. Le domande poste agli allievi, nell'attività di generalizzazione viste in questa sede, ci permettono di illustrare queste affermazioni. Queste domande non sono «naturali». A esse non si risponde con l'introduzione di *concetti quotidiani* (nel senso di Vygotskij, 1985). Queste domande fanno parte di una tradizione matematica sofisticata, formatasi nel corso dei secoli. La presa di coscienza da parte dell'allievo avviene nel quadro di questa tradizione e della sua razionalità.

L'ASA teorizza il problema della trasformazione di oggetti culturali in oggetti di coscienza in relazione all'attività degli individui (Leontiev) e ai mezzi semiotici di oggettivazione. Mantiene il valore concettuale del concetto di schema kantiano, ma ne sottolinea la natura semiotica. Lo schema non è solo la sistemazione logica dell'azione del soggetto (Piaget). è anche, e soprattutto, l'azione mediata (Vygotskij) dalla tecnologia dell'attività semiotica che offre possibilità e limiti per esprimere ciò che è esprimibile (l'*intentio* nella terminologia di Husserl). Se, come suggeriva Kant, lo schema si esprime come «regola», non lo fa né con i soli mezzi della teoria predicativa aristotelica né con le sole risorse della tradizione scritta. Il materiale semiotico dello schema è più ricco e variato: è fatto di movimento, di ritmo, di gesti, di segni scritti, di parole. Lo schema è portatore di un'intenzione soggettiva che si materializza nei mezzi semiotici di oggettivazione, portatori silenziosi di un'attività cognitiva di generazioni passate e di tradizioni intellettuali che orientano i nostri modi di vedere il mondo. Questo oggetto generale che lo schema introduce non è un oggetto trascendente, ma il prodotto della riflessione degli individui del mondo che riflettono all'interno di una *praxis cogitans* storicamente costituita.

Dal punto di vista dell'insegnamento, vedere la generalizzazione matematica come processo semiotico significa, tra l'altro, prestare attenzione ai mezzi semiotici di oggettivazione, ai loro diversi livelli concettuali e ai problemi posti agli allievi nel passare da un livello all'altro.

Bibliografia

Adorno, T. W. (2001). *Kant's Critique of Pure Reason.* Stanford CA: Stanford University Press.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol 19 (1) (pp. 77-124.). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bühler. K. (1979). *Teoría del lenguaje.* Traduit par Julián Marías. Madrid: Alianza Editorial.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage. Deuxième édition (1991).

Daval, R. (1957). *La métaphysique de Kant.* Paris: Presses Universitaires de France.

Davydov, V. V. (1990). *Types of Generalization in Instruction: Logical and psychological Problems in the Structuring of School Curricula.* Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Hintikka, J. (1980). *La philosophie des mathématiques chez Kant.* Paris: Presses Universitaires de France.

Ilyenkov, E. (1977a). The Concept of the Ideal. Dans: *Philosophy in the USSR: Problems of Dialectical Materialism.* Moscow: Progress Publishers.

Ilyenkov, E. V. (1977b). *Dialectical Logic.* Moscow: Progress Publishers.

Høyrup, J. (1990). Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought. *Altorientalische Forschungen*, 17 (pp. 27-69, 262-354).

Kozulin, A. (1990). *Vygotsky's psychology.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática.* Barcelona: Editorial Gedisa.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. Dans: N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dirs.) *Approaches to Algebra* (pp. 65-86). Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

Radford, L. (1997a). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 17 (1), (pp. 26-33).

Radford, L. (1997b) L'invention d'une idée mathématique : la deuxième inconnue en algèbre. *Repères* (Revue des instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques), juillet, No. 28 (pp. 81-96). (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/)

Radford, L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, Vol. 35 (1), (pp. 277-302). (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/)

Radford, L.: (1999). El aprendizaje del uso de signos: una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática*, 11(3), (pp. 25-53).

Radford, L.: (2000) Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42 (3), (pp. 237-268).

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), (pp. 14-23). (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/)

Radford, L. (2003a). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. Dans: M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger et V. Cifarelli (dirs.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa: Legas Publishing. (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/).

Radford, L. (2003b). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning.* **5**(1), (pp. 37-70). (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/).

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La Matematica e la sua didattica,* no. 1 (pp. 4-23).

Radford, L. (sous presse-1). Del símbolo y de su objeto. Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Radford, L. (sous presse-2). Kant, Piaget, and the Calculator. Rethinking the Schema from a Semiotic-Cultural Perspective. Dans: Michael Hoffmann, Johannes Lenhard, Falk Seeger (dirs.), *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education.* Festschrift for Michael Otte. Dordrecht: Kluwer. (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/).

Vygotski, L. S. (1985). *Pensée et langage.* Paris: Éditions sociales.

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the Mind. A Sociocultural Approach to Mediate Action.* Cambridge, Ma.: Harvard University Press.

Zinchenko, V. P. (1985). Vygotsky's ideas about units for the analysis of mind. Dans: *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*, J. V. Wertsch (dir.), Cambridge: University Press, (pp. 94-118).

Zweig, A. (1967). *Kant Philosophical correspondence 1759-99.* Chicago: The University of Chicago Press.