

A cura di Gianfranco Arrigo

**Atti
del Convegno
di didattica
della
matematica
2004**

Quaderni
Alta Scuola Pedagogica

Centro
didattico cantonale



**Q
ASP**

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

© 2004
Divisione della Scuola
Centro didattico cantonale

ISBN 88-86486-51-0

1. La généralisation mathématique comme processus sémiotique¹

Luis Radford

École des sciences de l'éducation. Université Laurentienne

Ontario, Canada

Siccome in una generalizzazione un fatto non può rinviare a sé stesso, ogni atto di generalizzazione presuppone il ricorso a qualcosa d'altro. Questa «altra cosa» è attinente al campo della rappresentazione. Il passaggio a generalizzazioni simboliche complesse pone difficoltà precise agli allievi che iniziano l'apprendimento dell'algebra. I nostri risultati ci mostrano che questo passaggio necessita della messa in atto di un sistema di significati che si trova in contrasto con i significati del linguaggio naturale e con una gamma di gesti ostensivi e iconici che, agendo insieme, permettono di situare l'esperienza matematica dell'allievo nel tempo e nello spazio. La messa in atto del nuovo sistema di significati obbliga allora l'allievo a situarsi all'esterno di questi riferimenti spazio-temporali.

1. Introduction

Le thème que j'aborderai ici porte sur la généralisation en mathématiques. Il s'agit d'un thème auquel j'ai commencé à m'intéresser il y a plusieurs années, en observant quatre classes d'enfants de 13 ans dans un programme longitudinal de recherche portant sur l'algèbre. Naturellement, on ne peut pas s'intéresser aux mathématiques sans s'intéresser en même temps à la généralisation, car, comme dit Mason (1996), la généralisation est le moteur des mathématiques. Mais, avant de conduire ce programme longitudinal de cinq ans, je ne m'étais pas occupé de la généralisation en tant que problème spécifique de recherche. C'est en remarquant les difficultés éprouvées par les élèves que je me suis aperçu des problèmes complexes entourant la généralisation. Ces problèmes m'ont apparu en premier lieu comme problèmes cognitifs. Cependant, pour pouvoir les formuler en tant que problèmes de recherche, il me fallait les conceptualiser en profondeur. Ce constat m'a amené à entreprendre une réflexion sur la généralisation sous l'angle de l'ontologie et de l'épistémologie. Comme il deviendra clair au cours de mon exposé, il est pratiquement impossible de travailler sur la généralisation sans entrer dans des considérations ontologiques et épistémologiques.

Au fur et à mesure que la réflexion théorique avançait, elle me permettait de mieux saisir les phénomènes cognitifs concrets que j'observais en salle de classe. En contrepartie, la production de nouvelles données concrètes exigeait souvent une interprétation plus fine de ces données et un approfondissement de la réflexion théorique. C'est à l'intérieur de ce processus dialectique entre réflexion conceptuelle et analyse de situations d'apprentissage que j'ai pu peu à peu formuler certains principes qui servent de fondement à une approche théorique qui se veut anthropologique par le rôle que joue le contexte historico-culturel dans la conceptualisation de la pensée mathématique.

1. Les résultats présentés ici dérivent d'un programme de recherche subventionné par le Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada / The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (CRSH/SSHRC).

Mon approximation anthropologique s'est développée, en partie, comme résultat du besoin de reconceptualiser l'activité cognitive. Kant nous a appris que tout savoir est le produit d'une activité cognitive. Si on veut comprendre la nature de ce savoir, il faut bien étudier l'activité cognitive qui l'a produit. Bien sûr, la tâche n'était pas mince. Mais il me semblait important d'aller au-delà de la conception cartésienne qui conçoit l'activité cognitive comme un processus intellectuel qui se déroule exclusivement à l'intérieur du sujet².

Dans un texte publié en 1997, je proposais de concevoir la pensée mathématique comme une pensée de nature intrinsèquement sociale, ancrée dans des modes de signification culturelle (Radford, 1997a). Mais, pour aller plus loin, il me fallait préciser davantage cet ancrage. Il m'était apparu évident, suite aux travaux de Lizardo (1993) sur les mathématiques chinoises et à ceux de Høyrup (1990) sur les mathématiques babyloniennes, que la généralisation n'est pas un processus qui se développe de façon naturelle. Il y a une multitude de directions possibles à chaque étape du développement. Comprendre la généralisation revient à comprendre la manière dont s'effectuent les choix de développement à la lumière de la pensée culturelle qui les sous-tendent. À l'époque, je ne pouvais formuler la question que de façon très large. Aujourd'hui, donc quelques 8 ou 9 années plus tard, je pourrais la reformuler de manière plus précise en utilisant, de façon métaphorique, un des concepts les plus profonds élaborés par Vygotski. Je pourrais dire que, à chaque époque, chaque culture crée des *zones proximales de développement* à l'intérieur desquelles s'effectuent les choix qui déterminent la direction qui suivra son développement.

C'est justement en m'inspirant de l'école socio-historique de Vygotski que j'ai été amené à examiner la relation entre signe et objet et à m'écarter du courant traditionnel qui considère les signes comme des indices de l'activité mentale et comme de simples «aides» à la pensée (Radford, 1998, 1999). Certains courants de la linguistique et de la psychologie qui s'inspirent du structuralisme, par exemple, distinguent entre deux plans: celui de la pensée proprement dite, qui, selon ces théories, se trouve gouverné par des «structures profondes» enfouies dans la tête et celui des «structures de surface» où l'on trouve les signes qui, toujours selon ces théories, ne sont que des *vestiges* des structures profondes. À l'opposé de l'approche cartésienne de l'activité mentale et des courants structuralistes, je me rangeais du côté des philosophes et des psychologues culturels (comme Wertsch, 1991, Kozoulin, 1990 et Zinchenko, 1985) qui insistent sur le rôle cognitif du signe. À la fin des années 1990, il m'a semblé que la réponse à la question que je cherchais au sujet des processus de généralisation pouvait se trouver en étudiant les mécanismes d'objectivation médiatisée du savoir culturel. C'est de ce côté que je me suis tourné ces dernières années dans mes recherches.

Voilà, donc, un court aperçu du cheminement qui m'a conduit à m'intéresser au problème de la généralisation. Je voudrais présenter ici deux «moments» particuliers de ce cheminement.

2. Pour être plus précis, cette idée d'activité cognitive trouve son inspiration dans la philosophie austère de St. Augustin. Si, par exemple, on veut retracer l'idée contemporaine très populaire selon laquelle les objets mathématiques sont *dans* notre tête, c'est St. Augustin et non pas Descartes ou Platon qu'on trouve en remontant la généalogie des idées (voir Radford, 2004).

D'une part, je voudrais montrer quelques éléments de la réflexion conceptuelle qui questionnent la généralisation sous un angle ontologique et épistémologique. Sans prétendre être exhaustif, je vais examiner les rapports qui peuvent exister entre le général et le particulier dans la théorie de la connaissance de Kant. Elle est importante pour notre discussion ici car elle s'inscrit dans une critique de la Raison qui n'hésite pas à soumettre au doute tout ce que la pensée occidentale avait tenu pour acquis jusqu'au XVII^e siècle, mais qui, curieusement, épargne les mathématiques. Il s'agit d'une critique qui, du point de vue anthropologique, échoue, mais qui en échouant s'ouvre sur une tentative de «sémiotisation» de l'objet mathématique.

D'autre part, je voudrais montrer quelques résultats concrets de ma recherche en salle de classe. Il ne faudrait pas perdre de vue que, comme je l'ai mentionné précédemment, ces deux volets sont interreliés et que la séparation que je fais ici à des fins d'exposition est tout à fait artificielle.

2. Quelques considérations théoriques sur la généralisation

Une des caractéristiques des mathématiques est que ses objets sont des objets «généraux». Quand nous énonçons une propriété sur les triangles ou sur les fonctions continues, ce n'est pas d'un triangle particulier ou d'une fonction continue particulière dont nous parlons, mais de l'objet général correspondant. La nature générale des objets mathématiques pose d'emblée deux problèmes différents. Un problème ontologique et un problème épistémologique. Le problème ontologique a trait à la façon d'être de cette généralité. On peut, par exemple, considérer que les objets mathématiques sont des réalités transcendantales. On peut, par contre, considérer que les objets mathématiques sont produits par la pensée humaine. Le problème épistémologique peut se résumer par la question suivante: comment arrivons-nous à connaître ces objets généraux, vu que nous n'avons accès à ces objets qu'à travers de représentations que nous nous faisons d'eux?

Dans une célèbre lettre écrite le 21 février 1772, Kant met en doute le pouvoir de nos représentations. Dans cette lettre, envoyée à Herz, Kant dit: «sur quel fondement repose le rapport de ce qu'on nomme en nous représentation à l'objet?»³ Dans cette lettre, Kant questionne la légitimité qu'auraient nos représentations à présenter ou représenter fidèlement les objets. En termes sémiotiques, Kant questionne l'adéquation du signe. Or, quelles sont les raisons de Kant pour douter ainsi? La nature du doute kantien est d'ordre épistémologique. Du côté ontologique, Kant ne nie pas la transcendance des objets en soi. Kant doute que nous puissions connaître la véritable réalité des objets parce que tout ce qui se livre à nous dans l'expérience du monde est inéluctablement filtré par nos sens. Il faut distinguer entre l'objet en soi et l'objet tel qu'il nous apparaît au cours de l'expérience. Le premier est l'objet tel qu'il est réellement; le deuxième c'est juste une apparence.

Mais cela ne veut pas dire que toute connaissance nous reste inaccessible, car les connaissances des objets mathématiques constituent une exception. En effet, pour Kant, il y a des connaissances qui sont possibles: ce sont des connaissances *a*

3. Kant dans (Zweig, 1970); ma traduction.

priori. Et l'exemple paradigmatique est justement celui des mathématiques: «La mathématique fournit l'exemple le plus éclatant d'une raison pure qui réussit à s'étendre d'elle-même et sans le secours de l'expérience» (A 712/B 740)⁴.

Or, qu'est-ce qu'une connaissance *a priori*? Kant dit:

On nomme *a priori* des connaissances indépendantes de l'expérience et même de toutes les impressions des sens, et on les distingue des connaissances *empiriques*, qui ont leur source *a posteriori*, c'est-à-dire dans l'expérience. (B 2)

Il ne faut pas confondre *a priori* et *inné*. Pour Kant l'*a priori* est une catégorie logique; l'*inné* est une catégorie psychologique. Comme Kant le souligne dans le passage précédent, est *a priori*, tout ce qui ne trouve pas ses conditions de constitution dans l'expérience. Où peut alors l'*a priori* trouver ses propres conditions? Il le trouve dans les concepts de l'entendement et la logique implacable qui les gouverne.

Pour Kant, le théorème qui affirme que la somme des angles internes d'un triangle est 180° est vrai, ne trouve pas sa vérité dans l'expérience, mais dans le concept de triangle lui-même. Il en va de même du théorème de l'égalité des angles de la base d'un triangle isocèle. Dans l'introduction de la *Critique de la Raison Pure*, Kant dit:

Le premier qui démontra le *triangle isocèle* (qu'il s'appelât *Thalès* ou de tout autre nom) eut une illumination; car il trouva qu'il ne devait pas s'attacher à ce qu'il voyait dans la figure, ou même au simple concept qu'il en avait, pour en apprendre en quelque sorte les propriétés, mais il devait produire cette figure par ce qu'il y pensait et présentait (par construction) *a priori* d'après les concepts eux-mêmes, et que, pour connaître sûrement une chose *a priori*, il ne devait attribuer à cette chose que ce qui résultait nécessairement de ce qu'il y avait mis lui-même, conformément à son concept. (Kant, B XI-BII)

Bien sûr, vu sous cet angle, Kant apparaît terriblement rationaliste. Il l'est, c'est certain. Mais, il s'oppose au rationalisme sur deux points importants: (1) les vérités mathématiques ne peuvent pas se restreindre à la non-contradiction des énoncés. Pour Kant cela ne peut faire que prouver leur *possibilité logique* et non pas leur *possibilité réelle*; (2) l'autre point concerne le rôle épistémologique du sensible. Dans la théorie de la connaissance de Kant, le sensible ne joue pas simplement un rôle accessoire. Pour Kant toute cognition comporte un élément conceptuel et un élément sensuel. L'élément sensuel est en relation avec ce que Kant appelle l'*intuition*. «L'intuition est une représentation dépendant immédiatement de la présence de l'objet» (*Prolégomènes*, § 8). Dans la terminologie moderne, l'intuition revient à ce que nous appelons usuellement une représentation particulière ou encore un symbole (Hintikka, 1980, pp. 61-62). Kant souligne avec force qu'«intuition et concepts constituent... les éléments de toute notre connaissance, de sorte que ni des concepts sans intuition qui leur corresponde de quelque manière, ni une intuition sans concepts ne peuvent donner une connaissance». (A 50/ B 74).

En fait, le rôle que Kant attribue au sensible est évident dans le passage concernant le triangle isocèle mentionné ci-dessus. D'après ce passage, Thalès forme une connaissance *a priori*; celle-ci ne résulte pas de la lecture de la figure, car cela voudrait dire que cette connaissance dépend de l'expérience. L'*a priori* c'est ce qui est né-

4. Suivant la coutume, la référence A 712 renvoie à la première édition de la *Critique de la Raison Pure*, publiée en 1781; B 740 renvoie à celle de la deuxième édition, publiée en 1787. Pour la traduction au français, je me base ici sur les *Œuvres philosophiques de Kant*, sous la direction de F. Aliqué, 1980, Gallimard.

cessairement employé dans le concept lui-même et qui *réapparaît* dans la figure concrète. Dans un passage de la Discipline de la Raison Pure, Kant dit:

Ainsi je construis un triangle en présentant l'objet correspondant à ce concept soit par la simple imagination dans l'intuition pure, soit même, d'après celle-ci, sur le papier dans l'intuition empirique, mais dans les deux cas tout à fait *a priori*, sans en avoir tiré le modèle de quelque expérience que ce soit. La figure singulière tracée ici est empirique, et pourtant elle sert à exprimer le concept sans porter préjudice à son universalité, parce que dans cette intuition empirique, on ne regarde jamais que l'acte de la construction du concept... (A 713-4/ B 741-42)

Alors, de quelle façon Kant aborde-t-il, dans sa théorie de la connaissance, la relation qui existe entre le général et le particulier? Dans l'exemple précédent, Kant parle d'une correspondance entre concept et figure, donc entre le général et le particulier. Mais, quelle est exactement la nature de cette relation?

Kant répond que si la connaissance philosophique considère le particulier uniquement dans le général, la connaissance mathématique, par contre, considère «le général dans le particulier, même dans le singulier, mais *a priori* et au moyen de la raison». (A 714 /B 742).

La réponse de Kant se trouve déjà insinuée dans l'exemple du triangle; elle sera développée au long de l'*Analytique transcendantale*, tout particulièrement dans le dense chapitre consacré au schématisme, c'est-à-dire l'endroit même qui sera, plus tard, le point de départ de l'épistémologie génétique de Piaget. La relation entre le général et le particulier est assurée par le *schème*, c'est-à-dire (en continuant avec notre exemple) cette *règle de construction* du triangle qui, lors de son exécution, nous dévoile le concept sous un aspect particulier sans pour autant mettre en péril sa généralité.

C'est pour cela que le schème chez Kant est à la fois intellectuel et sensible. Il est intellectuel en ce sens qu'il est général; il est sensible en ce sens qu'il se déploie dans le temps et dans l'espace. Dans le chapitre du schématisme, Kant indique que

nos concepts purs [dont ceux des mathématiques] n'ont pas pour fondement des images des objets, mais des schèmes. Il n'est d'image du triangle qui serait adéquate au concept d'un triangle en général. En effet, elle n'atteindrait pas l'universalité du concept, qui le rend valable pour tous les triangles, rectangles, à angles obliques, etc., mais elle serait toujours restreinte à une partie seulement de cette sphère. Le schème de triangle ne peut jamais exister ailleurs que dans la pensée (A 140-41/ B 179-80).

La réponse de Kant à la question posée précédemment est donc la suivante: c'est le schème qui assure la relation entre le général et le particulier. Le concept «descend» pour ainsi dire du monde intellectuel et, en se schématisant, il s'inscrit dans l'expérience humaine: il y prend une forme particulière qui, malgré ses particularités (le triangle construit dans le monde concret peut être petit, grand, rouge, etc.), revêt tout de même les traits de sa généralité.

Avec son concept de schème, qui a joué un rôle central dans l'élaboration des épistémologies du XX^e siècle⁵, Kant réfute l'attaque que George Berkeley avait lancée contre l'existence des idées abstraites ou générales. Selon Berkeley, l'idée de triangle général est impossible, car quand on pense à un triangle, on pense toujours à un triangle

5. Bien sûr l'exemple le plus connu est celui de Piaget, qui abandonnera l'apriorisme kantien et fera du schème l'engin qui construit le concept. Un exemple peut-être moins connu est celui de Cassirer et sa théorie de la conceptualisation, thématique selon les lignes de l'école kantienne de Marbourg (voir Radford, sous presse-1).

particulier. Un triangle général devrait être *simultanément* rectangle, scalène, équilatéral, isocèle, etc. Quoi de plus facile, dit Berkeley, à la fin de la section 13 de l'introduction à son *Traité concernant les principes de la connaissance humaine*, que de fouiller dans nos pensées et de voir si un tel triangle peut être véritablement pensé? L'erreur de Berkeley, dirait Kant consiste à confondre règle et image, ou schème et produit du schème.

La théorie du concept mathématique chez Kant repose donc sur les principes suivants:

1. Les concepts mathématiques sont des concepts *a priori*: ceux-ci ne trouvent pas leur condition de possibilité dans l'expérience humaine; ils la transcendent, mais, à la différence des concepts empiriques qui sont toujours filtrés par nos sens, les concepts mathématiques peuvent effectivement être connus.

2. Les concepts mathématiques sont universels.

3. Leur universalité est de l'ordre de ce qui est exprimable: elle s'exprime en tant que règle: «Toute connaissance exige un concept (et) ce concept est toujours, quant à sa forme, quelque chose de général et qui sert de règle» (A 106). Dans le cas des concepts purs, la règle est précisément celle qui nous est donnée par le schème.

On pourrait encore poser la question à Kant de l'adéquation entre le concept mathématique, qui est donc d'après lui, une entité universelle ou générale, et le particulier auquel aboutit le schème en se déployant dans le monde du sensible. On pourrait lui demander de nous préciser d'où la Raison tire ce pouvoir d'adéquation quand elle se penche sur les objets mathématiques et qui semble lui manquer quand elle se penche sur le monde empirique? La réponse n'est pas très longue. Si le mathématicien a le droit de voir le général dans le particulier, c'est, comme le note Daval (1951, p. 110), «parce qu'il est certain de la fidélité du signe. Le signe est la représentation adéquate du signifié».

Somme toute, le particulier et le général se lient, chez Kant, par la croyance en la fidélité du signe. Kant n'hésite pas à remettre en question l'adéquation du signe en général. Mais il est fait une exception quand il s'agit des mathématiques. On peut être assuré que, dans le cas des mathématiques, on peut contempler le général dans le particulier et que même si on raisonne sur des figures concrètes, «les propositions de la géométrie sont connues synthétiquement *a priori* et avec une certitude apodictique». (A46/B 64)

Résumons les propos précédents. Kant s'inscrit dans une longue tradition selon laquelle le concept général doit être en même temps universel. Général et universel veulent dire au-delà de l'expérience, donc au-delà de l'espace et du temps, ce qui amène Kant à épouser la théorie classique de vérité de la tradition *essentialiste*:

Le concept de vérité chez Kant – et ceci est profondément lié à la pensée bourgeoise – est celui d'une vérité au-delà du temps (timeless truth)... Le concept de vérité au-delà du temps, (c'est-à-dire) le concept que seulement ce qui est au-delà du temps peut être réellement vrai... est une des plus profondes forces directrices de la philosophie kantienne (Adorno, 2001, p. 10).

On *doit* se méfier de la relation entre le général et le particulier, sauf en mathématiques où le particulier et le général se rencontrent dans ce lieu sécuritaire qui est le lieu du signe. Le général et le particulier sont thématés par Kant selon les canons d'une tradition *essentialiste* qui voit le général et sa vérité comme ce qui reste, une fois tout ce qui change, tout ce qui est éphémère, lui est enlevé. Il s'agit d'une tradition *essentialiste* dont les origines remontent à l'ontologie de Platon, une ontologie qui

véhicule les valeurs agonisantes d'une aristocratie athénienne qui, confrontée à la défaite de la guerre du Péloponnèse et à l'émergence concomitante d'un pouvoir populaire qu'elle craint, s'oppose à tout ce qui porte au changement.

3. La généralisation du point de vue anthropologique

Du point de vue anthropologique, l'échec de Kant ne se trouve pas dans le pouvoir qu'il confère au signe de représenter le général. Une des plus grandes contributions de Kant est en fait d'avoir insisté sur le rôle épistémologique du signe. Son échec se trouve dans la conception qu'il se fait de l'idéalité du concept mathématique: en postulant l'*a priori* du concept mathématique, Kant place celui-ci au-delà de l'expérience humaine. Dans l'approche sémiotique anthropologique (ASA) dont il est question ici, l'idéalité de l'objet conceptuel est directement liée au contexte historico-culturel. L'idéalité des objets mathématiques – c'est-à-dire, ce qui les rend généraux – est tout à fait tributaire de l'activité humaine. Comme l'indique le philosophe E. V. Ilyenkov,

L'idéalité est comme un tampon imprimé sur la substance de la nature par l'activité sociale, une forme du fonctionnement de la chose physique dans le processus de cette activité. Ainsi, toutes les choses qui font partie du processus social acquièrent de nouvelles 'formes d'existence' qui ne sont pas incluses dans la nature physique de la chose et qui en diffèrent complètement. Cette nouvelle forme est leur forme idéale. (Ilyenkov, 1977a, p. 86)

En termes plus précis, dans l'ASA, le savoir mathématique est vu comme le produit d'une *praxis* réflexive cognitive médiatisée.

Le savoir en tant que *praxis* cognitive (*praxis cogitans*) souligne le fait que ce que nous connaissons et la manière dont nous arrivons à le connaître sont soutenus par des positions ontologiques et par des processus culturels de production du sens qui donnent forme à un certain mode de rationalité à l'intérieur duquel certains types de questions et de problèmes sont posés.

La nature *réflexive* du savoir doit être comprise au sens d'Ilyenkov, c'est-à-dire en tant que composante distinctive qui rend la cognition une réflexion intellectuelle du monde externe selon les formes de l'activité des individus (Ilyenkov 1977b, p. 252). La nature médiatisée du savoir fait référence au rôle que jouent les outils et les signes en tant que moyens d'objectivation du savoir et en tant qu'instruments qui permettent de mener à terme la *praxis* cognitive.

Comme c'était le cas chez Kant, généraliser revient ici à «voir» le général dans le particulier, sauf que, dans l'ASA, le général est conçu non pas au sens d'une entité transcendantale, mais d'une entité générale qui dérive de la réflexion que font les individus du monde qui les entoure. De plus, «voir» ce général ne relève pas de la démarche d'un sensualisme qui viendrait remplir de contenu les récipients du concept. Il s'agit avant tout d'un général (un *ens* ou être) qui se construit en même temps que les particuliers qu'il subsume selon les formes de la rationalité culturelle⁶.

Il est temps maintenant de nous tourner du côté de la salle de classe.

6. Lors de mes recherches épistémologiques précédentes, j'ai pu fournir plusieurs exemples historiques à ce sujet. Dans (Radford, 1997b) on trouvera une analyse de l'émergence de la deuxième inconnue en algèbre au XIV^e siècle. La deuxième inconnue ap-

4. La généralisation en salle de classe

D'après l'ASA, une distinction importante doit être faite entre apprentissage et production du savoir⁷. Alors que la production du nouveau savoir résulte d'activités communales, réflexives, médiatisées débouchant sur la création de concepts culturels (que ce soit des objets mathématiques, scientifiques, artistiques, esthétiques ou autres), l'apprentissage scolaire est le processus de transformation active des objets culturels en objets de conscience.

La transformation d'objet conceptuel culturel en objet de conscience est thématifiée dans l'ASA en tant que processus d'*objectivation*. L'*objectivation* de l'objet signifie une réflexion sur l'objet selon les formes de l'activité mathématique: l'objet apparaît comme *réflexion* dans la conscience individuelle de ce qui est *déjà* inscrit dans la culture.

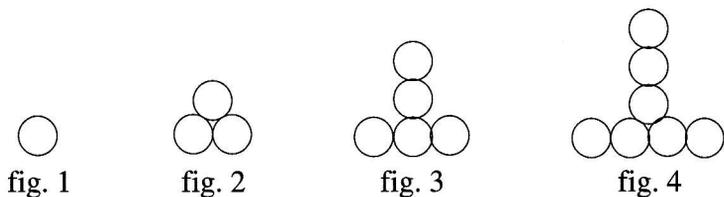
Or, comment l'objet se réfléchit-il? C'est ici qu'on doit faire intervenir le concept de *moyens sémiotiques d'objectivation* du savoir.

4.1. Moyens sémiotiques d'objectivation

Comme j'ai dit dans l'introduction, la théorisation précédente a été le résultat d'un effort pour comprendre les difficultés auxquelles se trouvaient confrontés les élèves devant des tâches de généralisation lors de l'introduction à l'algèbre.

Une des premières questions que nous avons posée aux élèves était la suivante: nous avons montré aux élèves une séquence de type très classique (voir ci-dessous) et, après leur avoir fait calculer le nombre de cercles dans des figures particulières telles que la figure 25 et la figure 100, nous leur avons demandé de trouver le nombre de cercles dans la figure n .

Les étudiants s'étonnaient de la question: ils répondaient souvent par d'autres questions comme: «Quoi? C'est quoi la figure n ?», «Mais voyons! Il n'y a pas de figure n !» « n égale quoi?».



paraît à l'intérieur de l'espace qu'ouvre le mouvement économique, culturel et intellectuel du haut Moyen-Âge, et qui amène à une rupture au niveau de la représentation jusqu'alors purement iconique de la tradition byzantine.

7. Cette distinction a été soulignée par d'autres approches anthropologiques, dont celle de Chevallard (1985) (voir aussi Bosch et Chevallard, 1999), qui parle en particulier de *transposition* du savoir; mais il arrive souvent qu'on l'oublie et qu'on finisse par considérer que les mécanismes d'appropriation ou d'acquisition du savoir sont les mêmes que ceux de sa construction.

Certes, la question était posée d'emblée dans une terminologie qui avait recours à des symboles et des concepts algébriques que les étudiants ne connaissaient pas encore. Mais des changements dans la formulation n'ont pas beaucoup aidé. Quand nous leur avons demandé de trouver le nombre de cercles dans une figure *quelconque*, ils nous demandaient ce que nous voulions dire par là: «figure quelconque... C'est quoi quelconque?» «C'est quoi ça?». Un élève a même interprété *quelconque* comme voulant dire n'importe quel genre de figure. Il a dit: «Peut-être c'est comme un carré!».

Le problème est qu'il n'est pas possible de montrer concrètement la figure générale. Il faut la voir autrement. Les élèves étaient placés devant une situation où le professeur voyait l'objet culturel en question; mais eux, ils ne pouvaient pas encore le voir. Pour pouvoir le voir, il fallait que les élèves s'engagent dans un processus d'*objectivation*.

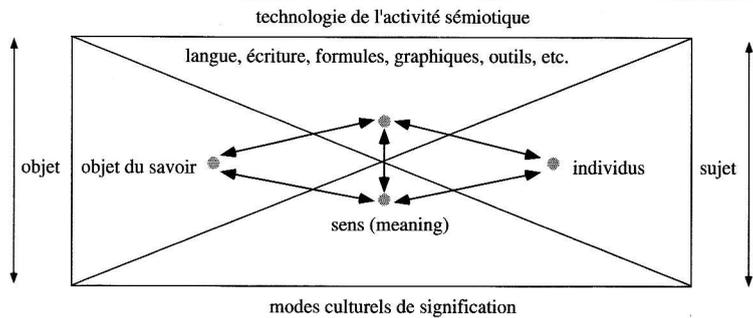
Le terme *objectivation* est composé de deux termes: *Object+ivation*. Le premier terme *object* vient de *obietare*, qui veut dire «placer quelque chose devant quelqu'un». *Facere* vient de «faire», de sorte que, dans son sens étymologique, *objectivation* veut dire «faire placer quelque chose devant quelqu'un pour qu'il le voie ou le perçoive». Dans ce contexte, *objectivation* est un processus dont le but est de montrer quelque chose (un objet) à quelqu'un. Or, quels sont les moyens pour montrer l'objet? Ces moyens sont ce que j'appelle les *moyens sémiotiques d'objectivation*. Ce sont des objets, des artefacts, des termes linguistiques et des signes en général qu'on utilise afin de rendre apparente une intention et de mener à terme une action.

Il me faut insister ici sur le sens phénoménologique dans lequel je prends les termes «voir», «montrer», «faire apparaître», etc. Ces termes ne renvoient pas à une attitude passive de celui qui voit. Comme Davydov dit, «les objets et la réalité sont donnés à l'homme social, non pas à travers la contemplation passive, mais uniquement sous la forme de son activité pratique sensori-objectuelle»⁸. Tout acte de perception est un acte actif extrêmement complexe. Il repose sur des actions, sur une interprétation-réinterprétation continuelle et une donation de sens de ce qui est perçu par celui qui perçoit selon les catégories culturelles dont il dispose pour saisir ce qu'il y a à percevoir. Dans le cas des objets conceptuels, le perçu est en fait non perceptible de sorte qu'il n'est accessible qu'indirectement, à travers les moyens sémiotiques d'*objectivation*. J'aurai l'occasion de revenir sur ce point ci-dessous.

D'après ce qui a été dit, la généralisation mathématique apparaît reliée à l'activité sémiotique que déploie l'élève en vue de «prendre conscience» d'une «*objectivité*» conceptuelle (Husserl) qui échappait à son attention jusqu'à alors. Or, les moyens sémiotiques d'*objectivation* offrent des possibilités différentes pour effectuer une tâche, désigner des objets et exprimer des intentions. C'est pour cela que l'activité sémiotique se produit dans le lieu de rencontre d'une subjectivité qui cherche à s'exprimer et d'un système social de significations déjà en place (Merleau-Ponty). L'activité sémiotique se trouve ainsi à l'intersection de ce que chez Aristote apparaît comme *techn_*, c'est-à-dire comme travail réfléchi sur des objets et signes concrets, et une *po_sis*, entendue comme l'avènement du sens.

La figure suivante rend compte de l'*objectivation* du savoir telle qu'elle est conçue dans l'ASA.

8. «Objects and reality are given to social man, not through passive contemplation, but only in the forms of his practical, *sensory-object* activity». (Davydov, 1990, p. 244).



Cette figure met en évidence le fait que l'objet du savoir n'est pas filtré seulement par nos sens, comme c'est le cas chez Kant, mais surtout par des modes culturelles de signification⁹. La figure met également en évidence que l'objet du savoir est filtré par la technologie de l'activité sémiotique. L'absence de flèche directe reliant les individus et l'objet du savoir exprime clairement l'idée vygotkienne selon laquelle le savoir est culturellement médiatisé.

4.2. Généralisations factuelles

L'extrait suivant provient d'une des premières observations faites pendant notre programme longitudinal de recherche. Dans l'extrait, nous voyons un des groupes de 3 élèves que nous avons suivi pendant cinq ans. Les élèves devaient trouver le nombre de cure-dents qu'il y a dans la figure 25 dans une suite très classique – celle de triangles faits à l'aide de cure-dents.

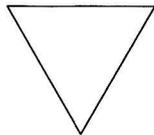


fig. 1

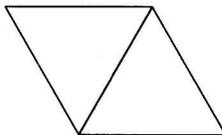


fig. 2

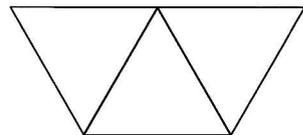


fig. 3

1. Judith: La prochaine figure en a deux de plus que... regarde! [La figure] 6 est 13, 13 plus 2. Il faut que tu continues là. Minute (*elle prend une calculatrice*) OK. OK. C'est plus...
2. Anik: Ben, tu peux pas toujours faire plus 2, plus 2, plus 2,...
3. Judith: Ben oui. Ça, c'est figure 7, plus 2, égale figure 8.
4. Josh: Ça va être trop long! [...] C'est toujours le prochain. Regarde! (*Avec son crayon, il pointe les figures en parlant; voir photo 1*) 1 plus 2, 2 plus 3, [...].

9. Deux exemples de modes culturels de signification sont: l'opposition symétrique yin/yang dans la Chine antique (qui rend possible la conceptualisation de nombres négatifs) et l'opposition non symétrique de l'être et le non-être de la pensée grecque classique (qui exclut les nombres négatifs du monde de l'existence). Voir Radford 1997a, 2003a.

5. Anik: So, 25 plus 26...
6. Josh: Attends une minute. Oui, 3 plus 4, c'est 7; 4 plus 5... donc, c'est 27 plus 26?
7. Anik: Ben, parce que tu fais toujours... comme... regarde (elle indique la figure 3 directement avec son index; voir photo 2) [figure] 3 plus [...] C'est 25 plus 26.



Photo 1 (à gauche). Avec son crayon, Josh pointe les figures (ligne 4 du dialogue).
 Photo 2 (à droite) Anik indique la figure 3 avec son index (ligne 7 du dialogue).

Les élèves ont trouvé la réponse sans compter le nombre de cure-dents de chacune des figures: ils ont effectué une généralisation. Or de quel type de généralisation s'agit-il? À la ligne 1, Judith dégage une relation de récurrence, que nous écrivons, en langage symbolique, de la façon suivante: $u_{n+1} = u_n + 2$. Josh, continuant une idée d'Anik à la ligne 2, met en évidence le caractère peu pratique de la relation et propose une nouvelle stratégie qui est tout de suite comprise par Anik. Mais, à la ligne 6, Josh ne sait pas si c'est $27 + 26$ ou $25 + 26$. La question est réglée par Anik à la ligne 7. À ce moment-ci, les élèves ont dégagé un *schème* (au sens kantien du terme) qui leur permet maintenant de trouver le nombre de cure-dents dans n'importe quelle figure spécifique. Ils ont réussi à objectiver ce que nous appelons une *généralisation factuelle*, c'est-à-dire, une généralisation d'actions sous la forme d'un schème opérationnel qui reste confiné au niveau numérique.

À vrai dire, il n'y a pas de grand mystère derrière les généralisations factuelles. On les retrouve abondamment chez les élèves plus jeunes. Ce qui est intéressant, c'est de voir comment ces généralisations sont objectivées, c'est-à-dire de déterminer les moyens sémiotiques d'objectivation qu'utilisent les élèves pour rendre ces généralisations des «objets de conscience».

Le terme «prochain»:

En retournant à l'extrait précédent, on voit que le terme linguistique «prochain» joue un rôle central. Ce terme fait partie de ce qu'on appelle en sémiotique les *déictiques spatiaux*. Il suggère une façon d'appréhender les figures et ouvre une possibilité pour faire émerger une structure mathématique derrière la suite. À travers de termes tels que «prochain», «ici», «là», «celui-ci», «celui-là», la langue remplit une fonction centrale dans les processus d'objectivation, une fonction que nous avons appelé la *fonction déictique* (Radford, 2000).

L'adverbe «toujours»:

Un autre terme linguistique important est l'adverbe «toujours». Il permet de véhiculer le sens de généralité et d'exprimer cette idée centrale à la généralisation de quelque chose qui continue de façon indéfinie. Il fait partie d'une autre fonction centrale de la langue qui rend possible de décrire des procédures et des actions qui peuvent être conduites potentiellement, d'une façon imaginée. Nous avons appelé cette fonction la *fonction générative de la langue* (Radford, 2000)¹⁰.

Les gestes:

Un autre moyen sémiotique d'objectivation est constitué par les gestes que font les élèves. Les photos ci-dessus montrent comment les gestes permettent d'indiquer, avec un crayon ou avec la main, certains objets du discours afin d'attirer l'attention et de guider la perception dans l'acte donateur du sens.

Bien sûr, les moyens sémiotiques d'objectivation que nous venons de mettre en évidence n'ont pas de raison d'être dans les approches classiques cognitivistes, puisque, dans ces approches, l'activité cognitive est supposée avoir lieu *dans* la tête. On se rappellera toutefois que, précisément, à l'origine de l'ASA, se trouve cette volonté expresse d'aller au-delà de cette vue cartésienne de la cognition qui emprisonne l'activité cognitive dans la boîte crânienne. Si, donc, on élargit le spectre de l'activité cognitive et on analyse attentivement toutes les ressources mobilisées par les élèves pour rendre leurs démarches de généralisations apparentes, on s'aperçoit que les gestes et le langage s'articulent autour d'une activité perceptive d'une façon très complexe. Mais il y a encore plus. Outre le langage et les gestes, il y a aussi le rythme et le mouvement.

Rythme et mouvement:

Dans un autre groupe, une des élèves a dit:

OK, en tout cas, la figure 1 est plus 2. La figure 2 est plus 3. La figure 3 est plus 4. La figure 4 est plus 5 (*et à mesure que l'élève prononçait les mots, elle indiquait les figures*).

Dans un autre groupe, un élève a dit:

On va aller par 2 ... 3, 5, 7, 9, 11 (*et à mesure qu'elle comptait, elle indiquait les figures*).

Dans ces deux épisodes, il n'y a pas de déictique spatial comme le «prochain»; il n'y a pas d'adverbe «toujours». Ici les élèves ont recours à des versions non linguistiques de ces termes pour exprimer le sens de généralité. En fait, le schème d'abstraction n'atteint pas une couche verbale. Son matériau sémiotique est fait de rythme et mouvement. Même si on trouve déjà cette combinaison de rythme et mouvement à la ligne 4 dans l'intervention de Josh, dans les deux derniers exemples, le rythme et le

10. Remarquons que d'autres systèmes sémiotiques comme ceux de la peinture possèdent, jusqu'à un certain point, de moyens pour remplir les fonctions déictique et générative. Une tâche, ou un grand signe peut jouer le rôle du terme «ici» et indiquer quelque chose sur l'espace sémiotique de la peinture; un effet de perspective peut aussi communiquer l'idée d'une action qui se continue. Mais ces fonctions centrales, la déictique et la générative, restent beaucoup plus topiques ici que dans la langue. Il y a des systèmes sémiotiques qui n'ont pas de déictiques, comme le langage algébrique.

mouvement créent une cadence qui dispense les élèves d'avoir recours à d'autres moyens d'objectivation.

4.3. Généralisations contextuelles

Pour aider les élèves à objectiver plus profondément le schème de généralisation, nous leur avons demandé d'écrire un texte dont le but était d'expliquer, à un élève d'une autre classe, comme faire pour calculer le nombre de cure-dents dans n'importe quelle figure de la suite.

Voici un court passage des propos tenus par un des élèves:

Anik: On fait comme... ça serait comme... regarde... ici, ici quand... oops. OK. Regarde, ben. Ici la figure... OK, ça ici c'est le numéro de la figure, right? [...] On peut dire comme... c'est le numéro de la figure, right? Comme... mettons c'est 1 là (elle fait référence à la figure 1)... Si... si OK, tu additionnes... comment tu dis ça? En ordre de... Tu additionnes par lui-même... Tu fais 2 + 2, puis après ça, plus 1. Tu fais toujours ça, right? Tu ferais 3 plus 3, plus 1; 4 plus 4, plus 1; 5 plus 5, plus 1. Tu sais ce que je veux dire?

Ce court passage met en évidence la difficulté qu'ont les élèves à atteindre un niveau plus élevé de généralité. Alors que l'intention est claire, elle n'arrive pourtant pas à être exprimée de façon satisfaisante sans avoir recours à des exemples concrets, propres à la couche conceptuelle où se situe la généralisation factuelle. L'écriture du message fait appel à des moyens d'objectivation placés dans un compartiment de la technologie de l'activité sémiotique qui exclut l'utilisation d'exemples concrets et qui exige l'abandon du rythme, du mouvement et des gestes. Puisque le message est adressé à un élève absent, on ne peut pas compter sur son activité perceptive. Quelle facilité ce serait de lui expliquer le schème de généralisation, s'il était là devant le petit groupe d'Anik!

Les élèves n'ont pas réussi à objectiver le schème cherché. Ils sont alors revenus sur l'idée initiale à la base de la généralisation factuelle vue à la section 4.2.

1. Anik: Tu additionnes la première figure ...
2. Josh: (*Il interrompt*) (et) la deuxième figure.
3. Anik: [...] C'est pas la deuxième figure ... C'est pas la prochaine figure?
4. Josh: Oui, la prochaine.
5. Anik: (*En récapitulant*) Tu additionnes la figure et la prochaine figure.

Sans utiliser de lettres ou d'exemples concrets, les élèves arrivent à objectiver un schème opérationnel dont les 'arguments' ou 'variables' ne sont plus de nombres (comme 10, 25, 100, etc.). Ce sont des objets généraux. Ils sont désignés par des termes génériques tels que «la figure», «la prochaine figure». Ces termes constituent les moyens sémiotiques d'objectivation. À l'aide de ces moyens, l'objet général, qui reste toujours inaccessible directement, commence à prendre forme: il commence à devenir un «objet de conscience» pour les élèves. Bien que généraux, ces objets restent toutefois *contextuels*. Ils sont contextuels en ce sens que le mode de désignation dépend encore de propriétés spatiales qui restent très prégnantes, ici celle de *proximité*. Elles supposent ce que Bühler (1979) a appelé un *origo*, c'est-à-dire un point spatio-temporel (un centre ou point d'observation) qui permet qu'on puisse parler du «prochain», du «haut», du «bas», «avant», «après», «droite», «gauche», etc.

Dans (Radford, 2003b), ces généralisations ont été appelées des *généralisations contextuelles*. Plus précisément, une généralisation contextuelle est une généralisation qui prend la forme d'un schème dont les arguments sont des objets généraux, mais qui portent en eux les caractéristiques conceptuelles de la situation spatio-temporelle dont ils sont issus.

L'étude de ces généralisations non symboliques jette une lumière sur la *nature* des difficultés qu'ont les élèves débutants à trouver des formules algébriques dans un contexte de généralisation. En effet, la généralisation algébrique exige une rupture très profonde avec les modes de signification des objets des généralisations factuelles et contextuelles. Le langage algébrique ne possède pas d'adverbes (par exemple, «toujours») et il n'est pas assez riche pour traduire des gestes et des termes déictiques importants pour la démarche d'objectivation (des termes tels que «ça», «le prochain», «ici», etc.). Il ne peut pas inclure le rythme et le mouvement. Le langage algébrique impose une sobriété à celui qui pense et qui s'exprime, une sobriété dans les modes de signification qui a été impensable avant la Renaissance. Il impose ce que nous avons appelé ailleurs (Radford 2002) une *contraction sémiotique*. Il suppose aussi la perte de l'*origo*. Ainsi, même si certains élèves ont réussi à exprimer le nombre de cure-dents dans la figure n par la formule « $n + (n+1)$ », où « n » désigne le nombre de la figure n est « $n+1$ » celui de la figure suivante (ou «la prochaine figure»), ils n'étaient pas prêts à supprimer les parenthèses et à ajouter les lettres, car cela entraînait la destruction du sens de la désignation. À quoi pouvait bien se référer une expression comme « $2n+1$ »? (voir Radford 2000, 2002, 2003b).

5. Conclusion

Dans l'introduction, nous disions qu'une des motivations à la base de l'approche sémiotique anthropologique (ASA), était d'aller au-delà de la conception d'activité cognitive offerte par la tradition classique cartésienne. En nous inspirant des travaux de l'école socio-historique de Vygotski, de la phénoménologie de Husserl et de l'épistémologie kantienne, nous avons été conduits à poser le problème de l'apprentissage comme un problème de transformation des objets conceptuels culturels en objets de conscience. Apprendre, c'est prendre conscience d'un objet général selon les modes de rationalité de la culture. Les questions posées aux élèves, lors de l'activité de généralisation vue ici, nous permettent d'illustrer ces propos. Ces questions ne sont pas «naturelles». Elles ne se résolvent pas par l'entremise des *concepts quotidiens* (au sens de Vygotski, 1985). Ces questions font partie d'une tradition mathématique sophistiquée, formée au cours des siècles. La prise de conscience chez l'élève a lieu dans le cadre de cette tradition et de sa rationalité propre.

L'ASA théorise le problème de la transformation d'objets culturels en objets de conscience en relation à l'activité des individus (Leontiev) et aux moyens sémiotiques d'objectivation. Elle retient la valeur conceptuelle du concept de schème kantien, mais elle souligne la nature sémiotique de celui-ci. Le schème n'est pas seulement l'emboîtement logique d'action qu'effectue le sujet (Piaget). C'est aussi, et surtout, l'action médiatisée (Vygotski) par la technologie de l'activité sémiotique qui offre des possibilités et des limites pour exprimer ce qui est exprimable (l'*intentio* dans la ter-

minologie de Husserl)¹¹. Si, comme suggérait Kant, le schème s'exprime en tant que «règle», il ne le fait ni avec les seuls moyens de la théorie prédicative aristotélicienne ni avec les seules ressources de la tradition écrite. Le matériau sémiotique du schème est plus riche et varié: il est fait de mouvement, de rythme, de gestes, de signes écrits, de mots. Le schème est porteur d'une intention subjective qui se matérialise dans les moyens sémiotiques d'objectivation, porteurs silencieux d'une activité cognitive de générations passées et de traditions intellectuelles qui orientent nos façons de voir le monde. Cet objet général que le schème insinue, n'est pas un objet transcendant mais le produit de la réflexion des individus du monde qu'ils questionnent à l'intérieur d'une *praxis cogitans* historiquement constituée.

Du point de vue de l'enseignement, voir la généralisation mathématique comme processus sémiotique, c'est, entre autres, d'être attentif aux moyens sémiotiques d'objectivation, à leurs différentes couches conceptuelles et aux problèmes que cela pose aux élèves de passer d'une couche à l'autre.

11. Radford, sous presse-2.

Références

- Adorno, T. W.
Kant's Critique of Pure Reason. Stanford CA: Stanford University Press, 2001.
- Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999).
La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 19 (1), pp. 77-124.. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Bühler, K.
Teoría del lenguaje. Traduit par Julián Marias. Madrid: Alianza Editorial, 1979.
- Chevallard, Y.
La transposition didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985, 2^{ème} édition, 1991.
- Daval, R.
La métaphysique de Kant. Paris: Presses Universitaires de France, 1957.
- Davydov, V. V.
Types of Generalization in Instruction: Logical and psychological Problems in the Structuring of School Curricula. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 1990.
- Hintikka, J.
La philosophie des mathématiques chez Kant. Paris: Presses Universitaires de France, 1980.
- Ilyenkov, E.
The Concept of the Ideal. Dans: *Philosophy in the USSR: Problems of Dialectical Materialism*. Moscow: Progress Publishers, 1977a.
- Ilyenkov, E. V.
Dialectical Logic. Moscow: Progress Publishers, 1977b.
- Høyrup, J.
Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought. *Altorientalische Forschungen*, 17, pp. 27-69, 262-354, 1990.
- Kozulin, A.
Vygotsky's psychology. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1990.
- Lizcano, E.
Imaginario colectivo y creación matemática. Barcelona: Editorial Gedisa, 1993.
- Mason, J.
Expressing generality and roots of algebra. Dans: N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dirs.) *Approaches to Algebra* (pp. 65-86). Dordrecht/Boston/London: Kluwer, 1996.
- Radford, L.
On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 17 (1), pp. 26-33, 1997a.
- Radford, L.
L'invention d'une idée mathématique : la deuxième inconnue en algèbre. *Repères* (Revue des instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques), juillet, No. 28, pp. 81-96. (<http://www.laurentian.ca/educ/lradford/>), 1997b.
- Radford, L.
On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, Vol. 35 (1), pp. 277-302. (<http://www.laurentian.ca/educ/lradford/>), 1998.
- Radford, L.:
El aprendizaje del uso de signos: una perspectiva post-vygotskiana. *Educación Matemática*, 11(3), pp. 25-53, 1999.
- Radford, L.:
Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42 (3), pp. 237-268, 2000.
- Radford, L.
The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), pp. 14-23. (<http://www.laurentian.ca/educ/lradford/>), 2002.
- Radford, L.
On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. Dans: M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger et V. Cifarelli (dirs.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, pp. 49-79. Ottawa: Legas Publishing. (<http://www.laurentian.ca/educ/lradford/>), 2003a.

- Radford, L.
Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*. 5(1), (pp. 37-70). (<http://www.laurentian.ca/educ/lradford/>), 2003b.
- Radford, L.
Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La Matematica e la sua didattica*, no. 1 pp. 4-23, 2004.
- Radford, L.
Del símbolo y de su objeto. Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* (sous presse-1).
- Radford, L.
Kant, Piaget, and the Calculator. Rethinking the Schema from a Semiotic-Cultural Perspective. Dans: Michael Hoffmann, Johannes Lenhard, Falk Seeger (dirs.), *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education*. Festschrift for Michael Otte. Dordrecht: Kluwer. (<http://www.laurentian.ca/educ/lradford/>), (sous presse-2).
- Vygotski, L. S.
Pensée et langage. Paris: Éditions sociales, 1985.
- Wertsch, J. V.
Voices of the Mind. A Sociocultural Approach to Mediate Action. Cambridge, Ma.: Harvard University Press, 1991.
- Zinchenko, V. P.
Vygotsky's ideas about units for the analysis of mind. Dans: *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*, J. V. Wertsch (dir.), Cambridge: University Press, pp. 94-118, 1985.
- Zweig, A.
Kant Philosophical correspondence 1759-99. Chicago: The University of Chicago Press, 1967.