



Università
degli Studi
di Bologna

ISSN 1120-9968

La matematica e la sua didattica

n. 1 - 2004



PITAGORA EDITRICE BOLOGNA

La matematica e la sua didattica

Comitato scientifico

Direttore: Bruno D'Amore

Comitato di redazione: Gianfranco Arrigo (Svizzera), Ferdinando Arzarello (Italia), Giulio Cesare Barozzi (Italia), Guy Brousseau (Francia), Umberto Bottazzini (Italia), Ricardo Cantoral (Messico), Encarnacion Castro Martinez (Spagna), Miguel de Guzmán (Spagna), Raymond Duval (Francia), Rosa Maria Farfán (Messico), Fulvia Furinghetti (Italia), Athanassios Gagatsis (Cipro), Colette Laborde (Francia), Hermann Maier (Germania), Carlo Marchini (Italia), Consolato Pellegrino (Italia), Piero Plazzi (Italia), Luis Rico Romero (Spagna), Alan Rogerson (Australia), Maria Luisa Schubauer Leoni (Svizzera), Gérard Vergnaud (Francia), Rosetta Zan (Italia).

Istruzioni per chi invia articoli proponendoli per la stampa. Gli articoli proposti per la stampa devono essere inviati in triplice copia al prof. Bruno D'Amore, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Piazza di Porta San Donato 5, 40127 Bologna. La pagina in Word va impostata con i seguenti margini: superiore 5,5 cm; inferiore 5,5 cm; sinistro 4,3; destro 4,3. Deve essere composto utilizzando preferibilmente il carattere TIMES corpo 12 interlinea automatica e fornito su carta e supporto informatico. Nel caso il proponente non fosse in grado di realizzare queste condizioni, deve mettersi in contatto con la Tecnoprint s.n.c., Via del Legatore 3, 40138 Bologna, tel. 051 531159/533311, fax 051 535301. Sotto il titolo, eventuale sottotitolo, Autore/i, ecc. va inserito un riassunto dell'articolo in lingua inglese, di non oltre 10 righe a 60 battute. Gli articoli inviati al di fuori di queste norme non verranno presi in esame e non verranno restituiti al proponente.

I dattiloscritti ricevuti dalla redazione sono sottoposti ad un primo parere di alcuni membri del Comitato Scientifico e poi inviati a tre referee le cui decisioni sono definitive ed inappellabili.

Redazione scientifica: Berta Martini, presso Mathesis Bologna, Dipartimento di Matematica dell'Università, Piazza di Porta San Donato 5, 40127 Bologna, Tel. 051 2094446

Redazione amministrativa: presso Pitagora Editrice s.r.l.,
Via del Legatore 3, 40138 Bologna, Tel. 051 530003 • Fax 051 535301

Direttore Responsabile Bruno D'Amore

Direzione Redazione Amministrazione Pitagora Editrice s.r.l., Via del Legatore 3, 40138 Bologna, Tel. 051 - 530003

Periodico trimestrale

Autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/9/1993 - ISSN 1120-9968

I manoscritti non richiesti non vengono restituiti.

Per qualsiasi comunicazione si prega di allegare la fascetta con stampato l'indirizzo al quale viene recapitata la rivista.

Abbonamento anno 2004

per l'Italia e paesi UE € 25,00 - Paesi extra-UE € 40,00 - copia singola € 9,00

da versarsi sul c.c.p. 20264404 intestato a Pitagora Editrice s.r.l., Via del Legatore 3, 40138 Bologna

Finito di stampare nel mese di febbraio 2004

presso Tecnoprint s.n.c., Via del Legatore 3, 40138 Bologna

Questa rivista è realizzata con il contributo dell'Università di Bologna

Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità¹

Luis Radford²

Université Laurentienne
Ontario, Canada

Summary. *The least that we can say is that mathematical objects are mysterious objects. Some argue that they are the product of the mind. Others contend that they are pre-existing transcendental entities. And many do not understand how one can get to know something about them if we suppose that they are beyond human experience. Historically speaking, conceptualizations of mathematical objects rest on two major long-standing and opposing categories of Western thought, namely the realm of sensual things, on the one hand, and the realm of essences, concepts and the like, on the other hand. In this paper, I discuss, against the background of Greek philosophy, the way in which Kant attempted to resolve the distinction between essences and the sensible. In the last part of the article, I sketch a view of mathematical objects within a cultural theory of signification where mathematical objects are seen as fixed patterns of activity embedded in the always changing realm of reflective, semiotic- and artefact-mediated social practice.*

1. Introduzione

Durante il mio viaggio aereo in Italia, conversavo con una giovane donna seduta accanto a me circa il pittoresco autunno canadese. Il discorso, ad un certo punto, si spostò sul suo lavoro. Seppi così che era un avvocato. «E lei? Di che cosa si occupa?», mi domandò. Quando le dissi che ero un docente di matematica, aggiunse: «A proposito dei matematici, sono sempre stata curiosa circa il loro lavoro. Che cosa mi può dire?». La sua domanda mi ricordò il recente libro di Enrico Giusti intorno agli oggetti matematici nel quale Giusti afferma: «Una delle

¹ Questo è il testo di una conferenza tenuta all'Università di Modena e all'Università di Palermo nell'ottobre 2002. Nel preparare il testo scritto ho deciso di mantenere lo stile colloquiale della conferenza. Sono grato a Filippo Spagnolo e a Nicolina Malara ed ai loro colleghi e studenti per i loro interventi e le loro osservazioni.

² Lradford@laurentian.ca, <http://www.laurentian.ca/educ/lradford/>

domande più imbarazzanti che possano venire rivolte a un matematico è chiedergli di che cosa si occupa» (Giusti, 2000, p. 15).

Il problema non è soltanto che gli oggetti matematici sono astratti, perché anche giustizia e diritto sono concetti astratti; ciononostante, parlando comparativamente, possiamo dire che la matematica è l'unico campo nel quale gli oggetti possono essere chiaramente definiti. Per esempio, noi possiamo definire il cerchio nel modo consueto e nessun essere umano ragionevole potrà dissentire. Non ho mai trovato nessuno in disaccordo con la nostra definizione di cerchio, neanche tra i miei studenti più polemicisti. Al contrario "i giuristi", come Kant ha rilevato nella sua *Critica della Ragion Pura*, «sono tuttora senza una definizione del loro concetto di diritto» (A 731 / B 759, p. 588 n. a, p. 728 nota 1)³. La differenza, come ha dimostrato Kant, è che per definire il concetto di diritto avrei bisogno di usare altre parole e poi avrei bisogno di altre parole per definire le precedenti, e così via. La matematica, ha detto Kant, è l'unica scienza che ha definizioni esatte (A 729 / B757, p. 587, p. 726) e con questo egli ha voluto dire che possiamo stabilire definizioni che non necessitano una regressione all'infinito. Le definizioni matematiche, egli ha detto, «presentano il concetto originale, completo di una cosa dentro i limiti del suo concetto» (A727 / B755, p. 586, p. 724-725). In termini attuali noi possiamo dire, conformemente a Kant, che gli oggetti matematici hanno la proprietà di essere semioticamente intelligibili.

Naturalmente non ho fatto menzione alcuna di ciò che Kant disse circa i giuristi alla signora seduta accanto a me; temevo di rovinare la conversazione. Non ero sicuro che ella sarebbe stata interessata ad ascoltare i presupposti epistemologici di base di Kant, anche se forse mi sbagliavo

³ Seguendo la tradizione, i riferimenti alla *Critica della Ragion Pura* di Kant vengono forniti in base alla prima edizione del 1781 (annotata "A" seguita dal corrispondente numero di pagina) e l'edizione del 1787 (annotata "B" seguita dal corrispondente numero di pagina). Ho anche aggiunto il numero di pagina della traduzione inglese di Kemp Smith del 1929).

Nella traduzione delle citazioni e per i riferimenti bibliografici relativi a Platone ed Aristotele, ci si è attenuti ai testi e alle edizioni in lingua inglese proposti dall'Autore. Per comodità del lettore italiano si sono aggiunte le numerazioni delle indicizzazioni a margine solitamente riportate nelle edizioni delle opere degli autori suddetti. Per le citazioni dalla Critica della Ragion Pura di Kant, oltre ai riferimenti dell'autore, si è aggiunto un ulteriore riferimento, con indicazione di pagina, alla traduzione italiana curata da Giorgio Colli, edita da Adelphi, Milano 1976 (terza edizione). [N.d.T.]

del tutto dato che, considerata nel suo complesso, l'opera di Kant mira a fornire una base per la distinzione tra "essere" e "dover essere" al fine di risolvere il problema centrale dell'Illuminismo, cioè il problema della libertà, un problema che da allora è al centro delle attività dei giuristi. Forse fu un semplice pregiudizio senza fondamento ed io persi l'occasione per un fruttuoso scambio intorno al punto di vista kantiano sugli oggetti concettuali. Tutto considerato non voglio mancare questa possibilità per la seconda volta, così oggi vorrei sviluppare il mio discorso su alcune concezioni che hanno tenuto desta l'attenzione circa gli oggetti matematici. Sono certo che i vostri input e le vostre reazioni alla mia rassegna di queste concezioni mi aiuteranno a migliorare il mio punto di vista e favoriranno uno scambio proficuo.

Prenderò come punto di partenza la seguente osservazione. Si può sopravvivere bene facendo matematica senza adottare alcuna esplicita ontologia, cioè una teoria che tratti della natura degli oggetti matematici. Questo perché è per lo più impossibile inferire da una relazione tecnica in matematica la posizione ontologica del suo autore. La situazione è diventata profondamente diversa quando parliamo di *conoscenza matematica*. Probabilmente ciò ha a che fare con l'evoluzione dell'educazione matematica come disciplina accademica. Mi sembra che la ragione sia da porre in relazione con l'emergere in questo campo di nuovi paradigmi e con l'affinamento dei precedenti. Le questioni teoriche circa i contenuti della conoscenza ed il modo in cui un contenuto viene trasmesso, acquisito o costruito ci ha condotto al punto in cui non possiamo più a lungo evitare di prendere in seria considerazione l'ontologia.

Comunque il mio scopo qui non è quello di discutere le principali ontologie che hanno fortemente influenzato la matematica. Piuttosto io desidero trattare di uno specifico problema ontologico, vale a dire il problema della distinzione tra cose sensibili ed essenze. Considero questo problema come uno dei maggiori problemi ontologici non solo perché incide profondamente su ciò che noi riteniamo essere oggetti matematici ma, molto più importante per noi, perché da esso dipende il nostro atteggiamento da insegnanti. Consentitemi di proporvi un esempio che mi è accaduto un paio di settimane fa. Nell'ambito del corso di Didattica della matematica per la scuola primaria che io tengo ad allievi insegnanti, stavamo osservando un videotape nel quale dei bambini imparavano ad eseguire sottrazioni con piccoli numeri. Uno dei

miei studenti era impressionato dall'uso frequente che i bambini stavano facendo delle dita. Ne approfittai per parlare del corpo come mezzo di oggettivazione della conoscenza (Radford, 2002, 2003a). Lo studente commentò che quando frequentava la scuola il suo insegnante di matematica non gli consentiva di usare le dita: i calcoli devono essere eseguiti mentalmente. Atteggiamenti insegnante come questi sono caratterizzati da prese di posizione che equiparano il pensare ad un processo rigorosamente immateriale (che ha a che fare presumibilmente con le pure essenze). Il corpo viene qui equiparato a controparte esterna del "vero" e genuino processo mentale.

Per comprendere le ambiguità che stanno attorno alla distinzione tra cose sensibili, essenze e oggetti matematici riandrò a Platone ed Aristotele, ma non parlerò subito di loro. Spenderò molta parte del mio tempo parlando di Kant. Intendo studiare con cura il modo con il quale Kant tenta di risolvere la distinzione dei Greci tra le essenze ed il sensibile e poi vedere come questo tentativo possa trovare una soluzione nella teoria culturale del significato che abbraccia il fare e il conoscere.

2. Il platonismo in Matematica

Come ha scritto Brown nel suo recente libro sulla filosofia della matematica, «la matematica è sempre stato il punto forte del platonismo» (Brown, 1999, p. 24). Non sorprende allora che, nel 1934, Bernays abbia osservato che «non è esagerato dire che in matematica oggi regna il platonismo» (Bernays, 1964). E se crediamo a Patras che, neanche due anni fa, disse che «non c'è quasi alcun matematico di professione che non si riconosca come platonista» (Patras, 2001, p. 35), dovremmo concludere che le cose non sono mutate molto⁴.

Certamente la grande quantità di straordinari successi dell'ontologia platonica è ciò che facilmente spiega perché, per esempio, l'asserzione $2+2=4$ è vera in ogni luogo ed in ogni tempo. Lo stesso si ritiene per tutte le asserzioni contenute negli *Elementi* di Euclide e per l'intero complesso dei testi greci. Pertanto il teorema di Pitagora era, è e sarà sempre vero. Per un platonista era vero anche prima della nascita di Pitagora. La sua verità si situa al di là delle stravaganze dell'umana esperienza e dei capricci delle culture. Per un platonista gli oggetti

⁴ Vedi Bernays, 1964 e Patras, 2001, p. 35.

matematici sono oggetti immutabili, cioè *eidos* o *forme* senza alcuna modifica in ogni caso, in ogni luogo e in ogni tempo.

L'ontologia platonica dei matematici ha tuttavia qualche problema intrinseco. Come rileva Resnick (1981, p. 529): «poiché gli oggetti matematici platonici non esistono nello spazio o nel tempo, la nostra reale possibilità di acquisire conoscenza e convinzioni intorno ad essi viene messa in discussione... Quindi i platonici sembrano trovarsi nella posizione paradossale di pretendere che una teoria matematica data sia relativa a certe cose e, nello stesso tempo, di essere incapaci di affermare precisamente che cosa queste cose siano».

Ciò che qui io chiamo l'ontologia platonica non coincide esattamente con l'ontologia propria di Platone. Sebbene in entrambe le ontologie le entità matematiche vengono considerate come non aventi alcun legame con il regno dei sensi, nello stesso tempo i matematici trovano difficile avallare la considerazione platonica della reminiscenza – una considerazione che afferma una teoria della reincarnazione. Questa non è l'unica differenza. Nel paragrafo 6 mi occuperò dell'ontologia di Platone. Ora ritorno ad Aristotele.

3. L'aristotelismo

«Per oggetti matematici noi intendiamo, dice Aristotele, le cose a cui perveniamo attraverso l'astrazione» (*De Caelo*, 299a, 16-17, citato in Heath, 1998, p. 11).

Come Platone, egli considera gli oggetti matematici come idee o oggetti non sensibili. Nel *De Anima* Aristotele dice che «non è la pietra che è presente nell'anima, ma la sua forma (immateriale)» (Aristotele, *De Anima*, libro III, parte VIII, 432a, 1). Tuttavia, contrariamente a Platone, egli attribuisce agli oggetti matematici una origine nel mondo sensibile. Nella *Fisica B2*, Aristotele dice: «Il matematico è in grado di studiare superfici, volumi, lunghezze e punti isolati dalle loro istanziazioni fisiche in quanto [...] egli è in grado di scindere le due cose nel pensiero [...]. Avendoli separati attraverso il pensiero, gli oggetti matematici sono liberi dai cambiamenti cui sono soggetti gli oggetti fisici» (Aristotele, *Fisica B2*, 193b, 33-34).

In tal modo, una delle più importanti differenze tra le ontologie di Platone e di Aristotele è che, nel primo, i sensi non giocano alcun ruolo epistemologico; sono addirittura trascurati quali mezzi per conseguire la vera conoscenza. Nel secondo, invece, essi hanno un ruolo importante.

Nel *De Anima* Aristotele arriva ad affermare che «nessuno può apprendere o capire nulla senza i sensi» (*De Anima*, libro III, parte VIII, 432a, 7-9). E questa affermazione resta vera anche nel caso di oggetti concettuali poiché, per pensare, noi abbiamo bisogno di immagini e le immagini – dice Aristotele – «sono simili a contenuti sensuosi, ad eccezione del fatto che esse non contengono alcuna materia» (Aristotele, *De Anima*, libro III, parte VIII, 432a, 10-11).

In un senso molto importante, a partire da Platone ed Aristotele, le concezioni degli oggetti matematici equivalgono ad uno straordinario confronto tra il tangibile e l'intangibile, il materiale e l'ideale. La dicotomia tra questi due poli è stata fonte di differenti atteggiamenti in filosofia. A volte sono stati compiuti sforzi per conciliare questi poli mettendo in rilievo i principi chiave dell'uno e mutuando elementi dell'altro. In questo modo, nel 16° secolo, Giuseppe Biancani e Pietro Catena elaborarono due diverse ontologie che combinarono in diverso modo platonismo e aristotelismo. Nel prossimo paragrafo parlerò brevemente delle posizioni ontologiche di Biancani e Catena.

4. La discussione italiana sugli oggetti matematici nel '500

Non era insolito tra gli eruditi del '500, in particolare tra gli insegnanti di Filosofia della Natura, affermare che gli oggetti matematici non esistono. Poiché la natura ci dà solo triangoli e cerchi imperfetti, questi eruditi sostenevano con grande vigore che gli oggetti matematici non potevano essere ritrovati in alcun luogo. In risposta ai suoi contemporanei, il professore gesuita Giuseppe Biancani, un discepolo di Clavio, seguendo Platone, sostenne che gli oggetti matematici sono *puro intelligibile* e che non era possibile coglierli attraverso un processo di astrazione della realtà sensibile, ma che essi si manifestavano piuttosto come universali preesistenti. In altre parole ciò che egli intendeva è che è vano cercare linee, punti e piani matematici nel bosco, nella strada o al mercato poiché essi non sono oggetti del mondo visibile, cioè del mondo dei sensi. Biancani pose la questione dell'esistenza degli oggetti matematici nel suo *De Mathematicarum Natura Dissertatio*. Per difendere l'esistenza degli oggetti matematici contro le calunnie dei suoi rivali, Biancani, nel capitolo terzo del suo libro, stampato in Bologna nel 1615, dice che: «anche se queste [figure matematiche perfette] non esistono nella natura delle cose, se non nella mente dell'Autore della Natura, così come nella mente umana, le loro idee esistono come esatti

archetipi di tutte le cose, per meglio dire, come esatte entità matematiche, il matematico indaga le loro idee le quali sono principalmente intese *per se* e sono le vere entità» (Biancani, 1615; citato in Mancosu, 1996, p. 180).

Nel precedente brano noi vediamo Biancani adottare una posizione 'mentalista' poiché egli situa gli oggetti matematici *nella* mente. Tuttavia, seguendo una delle interpretazioni rinascimentali di Aristotele, egli mantiene una posizione astrattista.⁵ Questo lo conduce dritto al cuore dello straordinario problema dell'intangibile (le essenze) e del sensibile: «un triangolo disegnato su un foglio non è un vero triangolo, ma il vero triangolo è quello che è nella mente di Dio» (*op. cit.*, p. 181).⁶ Pietro Catena (1501-1576) – lettore di matematica all'Università di Padova dal 1547 al 1576, che occupava la cattedra che più tardi sarà di Galileo – elaborò una concezione degli oggetti matematici che era anti-astrattista. Catena asserì che gli oggetti matematici erano entità ideali ed innate.⁷

Per contraddire la tesi aristotelica secondo la quale la conoscenza si basa sull'apprensione dei dati sensibili (una tesi che l'Aquinate sintetizzò nella massima scolastica: «nihil in intellectu quod non prius in sensu»), Catena fece ricorso all'esempio dell'anima. L'intelletto, egli argomentò, può concepire l'anima. Eppure noi non l'abbiamo mai vista con i nostri occhi né toccata con le nostre mani. Gli uomini, egli disse, hanno una precedente conoscenza intellettuale dei concetti grazie ad un'autonoma attività della mente, indipendentemente dal mondo concreto.⁸ In tale

⁵ Per cui, discutendo l'opposizione tra cose intelligibili e cose sensibili egli dice: «come risultato dell'astrazione matematica dalla materia sensibile, questa materia astratta acquista una certa perfezione, che è chiamata perfezione matematica» (*ibid.*, p. 180).

⁶ Annoto di passaggio che, nella sua breve discussione circa le definizioni, Biancani mantiene una posizione che anticipa Kant, la posizione alla quale mi sono riferito nella Introduzione, in particolare che le definizioni matematiche sono "definizioni essenziali" vale a dire «definizioni che spiegano la natura completa (*quidditatem*) delle cose» (*op. cit.*, p. 181).

⁷ Il neoplatonismo di Catena non può comunque essere equiparato all'Idealismo del '700 che asseriva che le nostre menti o spiriti sono le sole o le fondamentali entità nel mondo, essendo le cose materiali in qualche modo irreali.

⁸ «L'intelletto umano comprende l'anima anche se gli occhi non l'hanno mai vista e toccata con mano. Perciò l'intelletto umano comprende molte cose, che non ha mai percepito attraverso i sensi» (Catena, *Universa Loca*; *ivi*, p. 16; dalla citazione latina in *De Pace*, 1993, p. 196, n. 26).

contesto gli oggetti matematici erano visti come portatori di caratteristiche intellettuali esclusive non aventi alcun legame genetico con il mondo sensibile. Andando contro le teorie rinascimentali dell'astrazione, egli si oppose alla possibilità di derivare da linee empiriche esatte, come vengono disegnate dai geometri, l'esistenza del concetto di una linea perfetta con la quale ha a che fare il geometra. Come realmente, egli si chiedeva, è possibile discriminare tra la moltitudine di accidenti che ora sono di un tipo e ora di un altro e dedurre da questi mutevoli accidenti la stabilità degli oggetti matematici? Come possiamo essere sicuri che gli accidenti che noi abbiamo sottratto ed eliminato dai corpi materiali sono gli stessi, sebbene la vera natura di questi accidenti è quella di essere sempre mutevole? L'argomentazione di Catena si basa sul contrasto tra la mutevole natura del mondo concreto e il mondo stabile degli oggetti matematici eterni ed ideali.

5. Il platonismo di Platone

Catena e Biancani si avversavano su molte questioni. Erano tuttavia d'accordo su un punto decisivo: entrambi situavano gli oggetti matematici *nella* mente. Questa è una posizione molto diversa dall'ontologia di Platone. Sebbene Platone (come Catena e Biancani) ritenesse che gli oggetti matematici di cui tratta il matematico non siano oggetti sensibili (come afferma in un passo spesso citato in *Repubblica* 510d), per lui questi oggetti non-sensibili *non* erano nella mente. Per comprendere questo punto, abbiamo bisogno di collocare la concezione di Platone circa gli oggetti matematici all'interno della sua teoria delle idee. Mi soffermerò brevemente su questo punto.

Il termine Greco *eidos* (idea) significava inizialmente "ciò che uno vede". Nel pensiero Greco antico (per esempio negli scritti di Omero) il termine *eidos* si riferiva ad "apparenza" e a "figura" o a "forma" degli oggetti visibili. Con Platone l'idea/forma comincia ad essere intesa come qualcosa di soprasensibile, o, come sottolinea Peters, come la natura costitutiva delle cose (Peters, 1967, p. 47). Parlando dal punto di vista ontologico, per Platone gli oggetti matematici sono «eterni e immutabili», come ci dice Aristotele nella parte A5, 987b della *Metafisica*, dove egli commenta la filosofia del suo maestro. Essi appartengono al regno delle essenze o forme. Ecco perché Platone disse che le procedure matematiche si muovono «esclusivamente attraverso le forme verso le

forme e terminano nelle forme».⁹ Che le essenze o forme non possono essere *in noi* viene affermato chiaramente in uno dei dialoghi di Platone dove Parmenide fa notare a Socrate che «tu o chiunque altro sostenga l'esistenza delle essenze assolute ammetterà che esse non possono esistere in noi», Socrate risponde: «No [...] perché allora esse non sarebbero più assolute».¹⁰ «Dove stanno dunque?». Nello stesso dialogo Socrate dice: «Le idee sono, come sempre furono, modelli fissi in natura».¹¹

Per comprendere meglio il modo d'essere degli oggetti matematici nell'ontologia di Platone, noi abbiamo bisogno di considerare la loro dimensione antropologica, vale a dire il modo con cui essi si pongono in relazione con gli uomini. C'è un passo illuminante nella *Repubblica* 510e dove Platone dice che gli oggetti assoluti «non possono essere visti altrimenti che con il pensiero». Naturalmente affermazioni come questa devono essere intese nel senso metaforico di conoscenza come visione che Platone eredita dagli Eleatici. Ma ciò che è importante per il nostro discorso è notare che, in questo “modo di vedere”, gli oggetti matematici stanno di fronte a noi. Il commento di Gadamer sul significato originale della parola *noein* (pensiero) e altre parole derivate che è diventato centrale nel pensiero occidentale (così come *nous* solitamente tradotto con “mente”) può aiutarci a capire la relazione tra il pensiero e gli oggetti concettuali. I commenti di Gadamer possono anche aiutarci a capire quanto i Greci fossero lontani dal concepire il pensiero come qualcosa che si trova nell'intelletto. Gadamer dice: «Noi di solito traduciamo il termine “noein” come “pensiero”, tuttavia non dovremmo dimenticare che il significato fondamentale della parola è quella di non venire assimilata a sé stessa, di non essere rispecchiamento ma, al contrario, assoluta apertura verso il tutto» (Gadamer, 1998, p. 103).

Nel pensiero greco antico il pensare era strettamente connesso al vedere. I nostri sensi ci dicono che c'è qualcosa là, nella prossimità che ci circonda. Il pensiero è una modalità di comunicazione tra noi stessi e il nostro ambiente. Questo è la ragione per cui il pensiero è assoluta apertura. Gadamer continua: «Con riferimento al *nous*, non si tratta,

⁹ *Repubblica* 511c. Non discuterò qui il problema del posto degli oggetti matematici all'interno della gerarchia delle forme (vedi Mueller, 1986).

¹⁰ Vedi il dialogo di Platone *Parmenide*, 133c (tr. B. Jowett, eBook netLibrary, p. 38).

¹¹ Vedi il dialogo di Platone *Parmenide*, 132d (tr. B. Jowett, eBook netLibrary, p. 37).

prima di tutto, del problema di chi si chiede che cosa in ogni caso si veda là, ma di osservare che là c'è qualcosa. L'etimologia della parola probabilmente ci riconduce alla sensazione dell'animale che nota la presenza di qualcosa con il suo olfatto e senza alcun'altra percezione. Questo è come noi dobbiamo comprendere la relazione tra "pensiero" ed essere in Parmenide ed anche [...] *noein* viene citato con particolare enfasi insieme ad altre caratteristiche dell'essere. È come se il testo volesse dire che questo essere è tanto direttamente là nella sua esistenza come lo è il giorno» (Gadamer, 1998, p. 103).

Platone perciò ha trasformato il significato originale di *eidōs* come apparenza esterna (Bailly, 1950, p. 584) nel nuovo significato di *eidōs* come essenza. Ma l'*eidōs* (le idee) rimangono concepite come qualcosa di esterno. Come dunque avviene, storicamente, che concepiamo le idee come collocate nella mente? La risposta a questa domanda ci rivela un altro aspetto del problema tra le essenze/idee e i sensi.

6. Su come le idee sono finite nell'intelletto

Per comprendere la concezione post ellenica del pensiero come qualcosa che accade dentro di noi, dobbiamo riandare ad Agostino, uno dei primi padri e filosofi della Chiesa Cristiana che visse nella seconda metà del 4° secolo e all'inizio del 5° secolo dopo Cristo. Fu Agostino, in verità, che, reinterpretando la filosofia di Platone, affermò che la verità viene dal nostro intimo, dall'anima, e delineò quello che doveva diventare il concetto occidentale del sé. Una delle famose frasi di Agostino portatrici del cambiamento radicale in atto è la seguente: «Non uscire da te stesso, ritorna dentro di te. Nell'intimo dell'uomo dimora la verità» (Agostino, *De vera Religione*, XXXIX, citato in Taylor, 1989, p. 129).

All'interno della linea di pensiero inaugurata da Agostino, Leibniz, per esempio, dirà nel 17° secolo che «le nostre idee, anche quelle relative a cose sensibili, provengono dall'interno della nostra anima (Leibniz, 1705/1949, p. 15). Taylor (1989, p. 129) riassume la distinzione tra l'ontologia di Platone e l'ontologia dell'idealismo proposta da Agostino alludendo, in entrambi, al ruolo della visione. Per Platone noi non possiamo vedere le Idee: possiamo solo vederle indirettamente. Nello stesso modo, per Agostino, Dio non può essere visto e conosciuto direttamente. In entrambi i casi l'occhio dell'anima deve essere rivolto verso la giusta direzione. Ma per Platone l'occhio spirituale si volge a ciò che va al di là della *doxa* (opinione) e dell'apparenza. Per Agostino

invece noi dobbiamo seguire la luce interiore e far sì da non doverci rivolgere al mondo esterno: il percorso è *in noi*. Quindi, sebbene entrambe le ontologie siano basate sulla metafora della visione, la direzione dello sguardo è radicalmente diversa.

L'ontologia di Agostino ha conservato la distinzione platonica tra realtà e apparenza. Ha mantenuto la distinzione greca tra spirito e materia, tra eterno e temporale, e tra sensibile e intelligibile. Ma questa dicotomia fu tematizzata come opposizione tra interiore ed esteriore. Da allora la tradizione filosofica del pensiero occidentale che ebbe inizio dall'ontologia di Agostino è tornata assai di frequente alla relazione tra l'effimero e il durevole tra ciò che è (*esse* - essere) e ciò che *non-è*. E, in un senso importante, le tradizioni ontologiche come quelle di Biancani e di Catena sono variazioni concettuali della relazione tra *sensus* ed *essentia*. La tradizione ontologica che seguì le orme della filosofia di Agostino ha reso fondamentale per la ricerca della verità la prospettiva della prima persona, sia come un processo ricettivo del senso, come in Hume e negli empiristi inglesi, oppure come un processo di ragionamento astratto che rimuove il mondo dei sensi e delle apparenze, come viene suggerito dall'orientamento razionalista di Descartes, di Leibniz e di altri.

Il punto di difficoltà con il platonismo (nel suo significato originale e contemporaneo) è che, fin dall'inizio, soggetto e oggetto (il soggetto conoscente e l'oggetto della conoscenza) appartengono a due opposte sfere. Mentre si suppone che il soggetto viva in un mondo mutevole di apparenze, le idee vivono in un mondo immutabile.

7. Kant: tra sensi e ragione

Non vi è alcun sistema filosofico nella tradizione occidentale in cui il sensibile e l'intelligibile raggiungano un tale intenso confronto come nel sistema elaborato da Kant nel 18° secolo.

Seguendo gli empiristi, Kant asserì nella *Critica della ragion pura* che le cose diventano oggetti della conoscenza in quanto esse colpiscono i nostri sensi. I sensi ci consentono di "intuire" gli oggetti attraverso ciò che Kant ha chiamato "intuizioni", un termine che nel vocabolario kantiano significa effettiva relazione diretta degli oggetti sul soggetto (ved. A19 / B33, p. 65, p. 75). Il concetto kantiano di intuizione corrisponde al concetto originale greco di *noein* in quanto entrambi comunicano l'idea di immediatezza. Tuttavia vi è un'importante

differenza: per Kant la relazione diretta tra i nostri sensi e gli oggetti dell'esperienza non appartengono al regno del pensiero.¹² Queste intuizioni sono il materiale bruto della conoscenza. Esse hanno ancora bisogno di essere riorganizzate dalla mente grazie ai concetti dell'intelletto puro che Kant chiamava le *forme* a priori della conoscenza. Senza queste forme le nostre percezioni e le nostre intuizioni resterebbero disperse. Questi concetti dell'intelletto puro non sono concetti di oggetti; essi sono schemi logici senza contenuto; la loro funzione è rendere possibile una riorganizzazione o una sintesi delle intuizioni. La sintesi è la responsabilità di ciò che Kant ha identificato come la facoltà cognitiva della conoscenza (ved. figura 1).

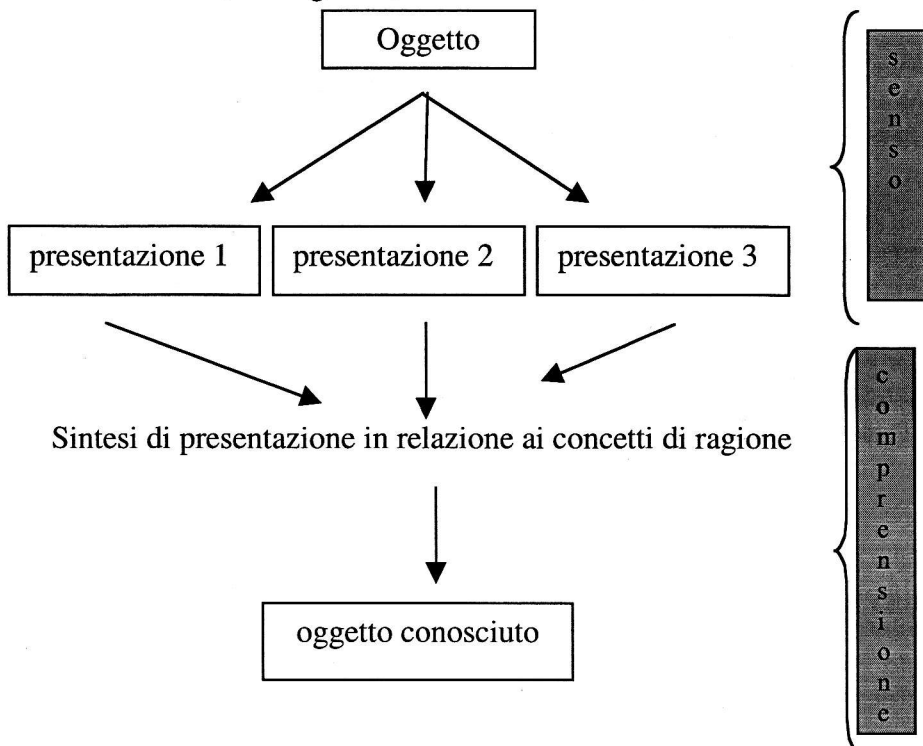


Figura 1. *La relazione tra sensibilità e ragione nell'epistemologia kantiana*

¹² Le intuizioni non sono (rap)presentazioni, ma presentazioni degli oggetti (ved. von Glaserfeld, 1987). Perciò Posy dice che «per Kant le intuizioni sono presentazioni immediate dei loro oggetti semplicemente perché esse sono non concettuali» (Posy, 2000, p. 171). Esse precedono qualsiasi rappresentazione mentale.

Troviamo quindi in Kant una divisione del lavoro molto interessante. Da una parte abbiamo l'attività dei sensi. Dall'altra abbiamo i concetti logici il cui compito è realizzare la sintesi dei particolari. Dovremmo osservare che per Kant l'attività dei sensi non è né qualcosa di puramente decorativo, né qualcosa che può essere ridotto alla pura ricettività passiva degli Empiristi; anche se gli oggetti astratti devono essere filtrati attraverso la sensibilità. In una lettera a K.L. Reinhold datata 19 maggio 1789, Kant dice: «i matematici non possono fare la più piccola asserzione intorno ad alcun oggetto quale che sia senza mostrarlo ... nell'intuizione», cioè senza renderlo intuibile attraverso una particolare rappresentazione (Zweig, 1967, p. 145). Per Kant, la nostra capacità di essere colpiti dalle cose acquista un ruolo essenziale nella cognizione: diviene un ingrediente della conoscenza. Come dice Allison, Kant presenta una concezione della mente nella quale il puro contenuto della conoscenza è determinato sia da condizioni sensibili che intellettuali (Allison, 1973, p. 76).

Ma le modalità specifiche con le quali i nostri sensi ci forniscono i mezzi per intuire le cose nel regno dei fenomeni impone anche dei limiti a ciò che può essere conosciuto. E questa è un'importante differenza tra Kant e i Razionalisti, una differenza che scandalizzò molti contemporanei di Kant quando egli disse che non possiamo conoscere le cose come sono realmente, cioè le cose-in-sé.

8. L'inconoscibilità kantiana delle cose-in-sé

I Razionalisti sostengono che, nel migliore dei casi, i fenomeni che noi osserviamo possono solo lasciare intendere qualcosa di vero. Ed essi non considerano questo un problema. Per loro, i fenomeni non erano comunque una strada per la verità. La strada giusta era la ragione. E per la ragione il modo di raggiungere la verità era quello di procedere per inferenze, inferenze basate su puri concetti di pensiero. I Razionalisti credevano che fosse possibile avere una conoscenza inferenziale di *cose vere*, di cose come erano in sé. Se siamo tentati di trovare ragionevole la posizione razionalista, è perché, come argomenterebbe Kant, stiamo adottando un principio epistemologico molto profondo. Questo principio, che risulta essere molto problematico, prevede che vi sia una *continuità* tra il mondo dei fenomeni e gli oggetti concettuali del mondo della ragione.

Ciò che Kant stava facendo era appunto mettere in discussione questa credenza. In altre parole, Kant metteva in dubbio la credenza secondo la quale noi possiamo risalire dal sensibile al non-sensibile attraverso l'astrazione e che la differenza tra le cose-in-sé e le nostre intuizioni o rappresentazioni fosse solo una questione di grado. Kant insisteva che la differenza tra *sensus* ed *essentia* non è una differenza di grado (come la maggior parte delle teorie dell'astrazione suppone). È una differenza trascendentale.¹³ Kant metteva in discussione l'idea che l'oggetto concettuale sia l'estensione dell'oggetto concreto, o che l'oggetto concettuale sia un'astrazione del particolare, cioè la particolare versione dell'oggetto, ma in una sorta di forma idealizzata come era concepita nella teoria aristotelica dell'astrazione. Kant sostiene che tra la cosa-in-sé ed il fenomeno c'è una frattura. C'è una frattura che non possiamo colmare. Questo è il problema dell'inconoscibilità delle cose-in-sé. In altre parole, Kant afferma che ciò di cui noi veniamo a conoscenza non è la realtà stessa: ciò di cui noi veniamo a conoscenza è soltanto ciò che ci è dato attraverso le sensazioni. Ecco perché egli criticò Leibniz e Locke. Egli riteneva che Leibniz, ritenendo di poter conseguire la conoscenza della natura interna delle cose attraverso unicamente un calcolo logico formale, senza prestare attenzione al contenuto delle proposizioni, aveva «eretto un *sistema intellettuale del mondo*» e si era ingannato confondendo le apparenze con la cosa-in-sé. Locke, egli diceva, limitandosi al regno dei sensi, finì con il "sensualizzare" tutti i concetti teorici.¹⁴

L'architettura della mente che Kant presentò fu un tentativo di *salvare* (per prendere in prestito un termine di Adorno) il puro stato ontologico degli oggetti concettuali dalla cattiva posizione in cui gli Empiristi li avevano collocati. È uno sforzo per salvare gli oggetti concettuali dalle

¹³ Per dettagli, ved. Allison (1973, p. 75).

¹⁴ Ved. A 270/B 326 [p. 341 nella trad. di G. Colli], – A271/B327 [p. 372 nella trad. di G. Colli], (1973, p. 75), C'è una lettera scritta il 22 marzo 1801 da Heinrich von Kleist, un contemporaneo di Kant, che ci dà una buona idea dell'impressione che la posizione ontologica di Kant produce al suo tempo. Commentando la filosofia di Kant, von Kleist dice: «Se gli uomini avessero occhiali verdi invece di occhi essi crederebbero che gli oggetti che vedono sono verdi, e non sarebbero in grado di decidere se i loro occhi mostrano loro le cose come sono. Oppure se essi non aggiungono loro qualcosa che non appartiene loro ma appartiene agli occhi. Lo stesso vale per la mente. Non possiamo decidere se ciò che noi chiamiamo verità è veramente vero, o se ci appare tale» (cit. in Adorno, 2001, p. 252).

vicissitudini e dai capricci dell'esperienza umana e dalle informazioni effimere che noi assumiamo dai nostri sensi. Per Kant, gli oggetti concettuali sono oggetti *a priori*. E ciò significa indipendenti da *tutte* le esperienze. E come tali sono al di là del regno dei sensi. Questa è l'influenza dell'eredità razionalista nel lavoro di Kant. Ma gli oggetti concettuali esistono soltanto nella loro relazione con l'esperienza, - e questa è l'influenza dell'eredità empirista nel sistema kantiano.

9. Soggetto e Oggetto

Kant concepiva un oggetto di conoscenza come una relazione tra (rap)presentazioni o intuizioni come ci viene data dai nostri sensi o sintetizzata dall'individuo attraverso i concetti logici a priori della facoltà di conoscere.

Dal punto di vista epistemologico, introducendo l'idea della sintesi della conoscenza, il sistema di Kant realizza qualcosa di nuovo rispetto ai sistemi precedenti. In verità, gli individui non giocano un ruolo ricettivo (come nell'empirismo), né esemplificano soltanto le regole logiche di una ragione innata che, attraverso un atto di generosità, Dio presumibilmente ci ha concesso (come nel razionalismo). Nel costruttivismo di Kant, gli individui sono concepiti come attivamente sintetizzanti le intuizioni e le impressioni. Essi ora giocano un ruolo dinamico: sono diventati i produttori della loro propria conoscenza. Ma il modo in cui Kant ha elaborato questo punto ci conduce ad una concezione del mondo che appare come un mondo *soggettivizzato*, cioè un mondo costruito dalla prospettiva della prima-persona che esce dal filtro dell'attività di sintesi dell'individuo.

Dal lato opposto, in contrasto con la soggettivizzazione del mondo, c'è un processo di *reificazione*. Deriva dal fatto che la soggettivizzazione conduce ad attribuire al mondo un punto unico di riferimento, quello della sintetizzazione della coscienza. La reificazione deriva dal "non-Io" (ciò che non è me) concepito come uno scialbo "Altro" scartato dalla prospettiva onnicomprensiva della prima-persona e che conduce ad una visione nella quale il mondo appare come sottratto al suo contesto culturale, un mondo che finisce come un mondo-per-me-stesso. La reificazione giunge al punto che anche la conoscenza completa del soggetto è impossibile: l'inarrestabile macchina della sintesi può soltanto sintetizzare ciò che è intuibile nel regno dei fenomeni e il soggetto diventa inconoscibile come le cose-in-sé.

Adorno collega l'apparire della filosofia kantiana e dei fenomeni di soggettivizzazione e reificazione alla componente borghese che afferma che il mondo dell'esperienza è il prodotto del lavoro degli individui. Assumendo la parola "borghese" come una categoria sociologica la cui etimologia significa "coloro che vivono nelle città" come opposto a "coloro che vivono nelle campagne", Adorno dice che la «crescita di soggettivismo e di reificazione esprime [...] la principale antinomia della società borghese in generale [...] gli esseri umani sempre più hanno reso il mondo a loro immagine e il mondo è diventato progressivamente loro. Allo stesso tempo il mondo è diventato sempre più un mondo che li domina» (Adorno 2001, p. 115).

Naturalmente il concetto kantiano di oggetto ha anche implicazioni sul modo in cui l'oggettività è definita. Poiché la conoscenza ora appare come definita in termini di risultati di una coscienza di sintesi, risulta impossibile raggiungere l'oggettività come viene intesa dal programma razionalista. Tuttavia il lavoro di Kant deve essere collocato all'interno del grandioso paradigma platonico che ha opposto il mondo della verità, delle cose immutabili, il paradigma che ha opposto il mondo di ciò che è sempre stato al mondo dei sensi e dei fenomeni, cioè il mondo dell'illusione e dell'inganno. Seguendo Descartes, Leibniz e altri razionalisti, Kant assume la teoria della verità secondo la quale «la verità è tutto ciò che rimane una volta che qualsiasi cosa sensoriale, qualsiasi cosa effimera e quindi fallace, è stata sottratta» (Adorno, 2001, p. 25). Kant ha adottato questa concezione della verità eterna e ciò perché il concetto del tempo rimarrà centrale nella sua filosofia. Siamo pervenuti qui ad una seconda tensione nell'opera di Kant. La prima concerneva la tensione tra il sensibile e l'intelligibile o tra i sensi e la ragione. La seconda concerne la verità. Deriva da una Ragione che cerca di raggiungere una verità che si sottrae alle proprie possibilità. Io spesso penso che se attraverso una procedura ingegnosa fosse possibile tradurre perfettamente la *Critica della Ragion Pura* in musica, la *Critica* kantiana assomiglierebbe al tormentato secondo movimento della *Quinta Sinfonia* di Gustav Mahler.

10. Note conclusive: la demistificazione degli oggetti matematici

Voglio concludere questo discorso fornendo un abbozzo approssimativo di ciò che io stimo necessario sia tenuto in conto qualora gli oggetti matematici dovessero essere considerati dal punto di vista di una epistemologia antropologica. Siccome questo discorso ha per lo più riguardato tensioni e scandali, oso pensare che non traumatizzerò il mio uditorio dicendo che, per formulare una teoria degli oggetti matematici da una epistemologia antropologica, si deve procedere innanzi tutto ad una demistificazione degli oggetti matematici. Questo perché una tale epistemologia dovrebbe iniziare riconoscendo che, nonostante Agostino, Platone aveva ragione. Platone aveva assolutamente ragione quando affermava, nel *Parmenide*, che le idee non erano nella mente. E aveva ancora ragione nel concepire le idee come “modelli fissi”. Ma invece di vedere questi modelli “come fissi in natura”, noi dovremmo dire: come fissi nelle *pratica sociale*.

Facendo ciò, il muro che ha diviso il mondo visibile dall'invisibile che Platone cita nel *Fedone* cade a pezzi e gli oggetti matematici perdono la loro aura eterna e la loro atemporalità. Essi diventano parte del perennemente mutevole mondo degli individui. Questo non significa che noi confonderemo il triangolo di bronzo e il triangolo matematico, per fare uno degli esempi prediletti da Aristotele. Nell'epistemologia antropologica che sto considerando gli oggetti matematici mantengono un aspetto della loro idealità platonica. Ma che cosa questa idealità sia è un'idealità che deriva dalla riflessione che gli individui compiono sul loro mondo in forma di azioni ed attività. Kant quindi aveva ragione quando mise in rilievo la natura sintetica, costruttiva della conoscenza. E Piaget era ancor più nel giusto quando diceva che l'attività costruttiva non è limitata ad una sintesi di rappresentazioni, ma include anche i concetti di ragione che Kant indebitamente riteneva come dati *a priori* e che Kant di conseguenza concepiva come già dati. Tuttavia sia Kant che Piaget avevano torto nel vedere la conoscenza come un processo che sale dal concreto all'astratto, dal mondo tangibile al mondo dell'intangibile conducendo, nel caso di Kant, ad una teoria chiusa nella quale l'oggetto sensibile è sussunto entro i concetti di ragione (ved. sopra, Figura 1, paragrafo 6) e, nel caso di Piaget, in un'enfasi sull'attività con gli oggetti concreti nella fase senso-motoria che svanisce nel nulla nei

successivi “stadi di sviluppo”. La tesi è che nella nostra ricerca della conoscenza noi ricorriamo a diversi sistemi semiotici. Per esempio, nel conoscere noi vediamo, interagiamo con le persone, parliamo, facciamo gesti, ed anche afferriamo oggetti e usiamo artefatti. Forse sarebbe più giusto vedere la conoscenza e i suoi oggetti come un processo dialettico continuo tra il tangibile e l’ideale, un processo intrinsecamente riferito ad artefatti e a segni.

In questa linea di pensiero non si può non tener conto di un approccio antropologico; io penso che il fatto che i modi nei quali noi usiamo diversi tipi di segni e di artefatti durante i nostri atti di conoscenza sono sussunti in prototipi culturali di significati mediati.¹⁵ Ciò che è rilevante e che l’uso di segni e di artefatti altera le nostre modalità di ricezione degli oggetti del mondo, vale a dire i segni e gli artefatti alterano il modo in cui gli oggetti ci sono dati attraverso i sensi.¹⁶ L’inevitabile risultato è questo: la mediazione altera la nostra capacità cognitiva di essere colpiti dalle cose e rende questa capacità cognitiva (e perciò la conoscenza) culturalmente dipendente.¹⁷

Per ricapitolare, dal punto di vista di un’antropologia epistemologica, il modo nel quale io ritengo che l’enigma degli oggetti matematici possa essere risolto è considerare gli oggetti matematici come modelli fissi di attività incorporati nel regno sempre mutevole della pratica sociale mediata e riflessiva.

Ringraziamenti

Questo articolo è il risultato di un programma di ricerca finanziato dal Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (SSHRC/CRSH). Una precedente versione dei paragrafi 8 e 9 è apparsa nel mio: *Rescuing Perception: Diagrams in Peirce’s theory of cognitive activity*.

¹⁵ In Radford (2003b) concettualizzo questo punto attraverso la costruzione di *Sistemi Culturali Semiotici di Significazione*.

¹⁶ Si veda, per esempio, Luria e Vygotskij (1998), Vygotskij e Luria (1994).

¹⁷ Sarebbe un errore, tuttavia, dire che il punto di vista antropologico sugli oggetti matematici che sto qui delineando sia in linea con il relativismo. In verità, entro la lunga lista di teorie che hanno tentato di risolvere il problema della conoscenza non ve ne è alcuna più aculturale del relativismo.

Bibliografia

- Adorno T.W. (2001). *Kant's Critique of Pure Reason*. Stanford CA: Stanford University Press.
- Allison H. (1973). *The Kant-Eberhard controversy*. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press.
- Bailly A. (1950). *Dictionnaire Grec Français*. (2nd edition 1963). Paris: Hachette.
- Bernays P. (1964). On Platonism in Mathematics. In: Benacerraf P., Putnam H. (eds.). *Selected Readings Philosophy of Mathematics*. Oxford: Basil Blackwell. (Dalla lezione tenuta da Bernays il 18 giugno 1934 per il ciclo: *Conferences Internationales des Sciences mathématiques* organizzato dall'Università di Ginevra, nella collana "Mathematical Logic").
- Brown J.R. (1999). *Philosophy of Mathematics*. London: Routledge.
- De Pace A. (1993). *Le matematiche e il mondo*. Milano: Franco Angeli.
- Gadamer H.-G. (1998). *The beginning of Philosophy*. (Trad. R. Coltman). New York: Continuum.
- Giusti E. (1999). Giusti E. (1999). *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*. Torino: Bollati Boringhieri.
- Glaserfeld von E. (1987). Preliminaries to Any Theory of Representation. In: Janvier C. (ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (215-225). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Heath T.L. (1998). *Mathematics in Aristotle*. Bristol: Thoemmes. (Ristampa della edizione del 1949).
- Kant I. (1781, 1787/ 1929). *Critique of Pure Reason*. (Trad. N. Kemp Smith dalle edizioni del 1781 e 1787. II edizione, 1965). New York: St. Marin's Press.
- Kant I. (1976). *Critica della Ragion Pura*. (Trad. Giorgio Colli, terza edizione). Milano: Adelphi.
- Leibniz G.W. (1705/1949). *New Essays concerning Human Understanding*. (Trad. A.G. Langley dal testo del 1705). La Salle, Ill: The open Court.
- Luria A., Vygotskij, L. S. (1998). *Ape, Primitive Man, and Child*. (Trad. E. Rossiter). Boca Raton: St. Lucie Press.
- Mancosu P. (1996). *Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. New York - Oxford: Oxford University Press.

- Mueller I. (1986). On Some Academic Theories of Mathematical Objects. *Journal of Hellenic Studies*, Vol. CVI, 111-120.
- Patras F. (2001). *La pensée mathématique contemporaine*. Paris: PUF.
- Peters F. E. (1967). *Greek Philosophical Terms. A Historical Lexicon*. New York: New York University Press.
- Posy C. J. (2000). Immediacy and the Birth of Reference in Kant: The Case for Space. In: Sher G., Tieszen R. (eds.). *Between Logic and Intuition* (155-185). Cambridge: Cambridge University Press.
- Radford L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*. **22**(2), 14-23.
- Radford L. (2003a). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*. **5**(1), 37-70.
- Radford L. (2003b). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. In: Anderson M., Sáenz-Ludlow A., Zellweger S., Cifarelli V. (eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (49-79). Ottawa: Legas Publishing.
- Resnik M. D. (1981). Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference. *Noûs*. **15**, 529-550.
- Taylor C. (1989). *Sources of the self*. Cambridge, Ma: Harvard University Press.
- Vygotskij L. S., Luria A. (1994). Tool and symbol in child development. In: van der Veer R., Valsiner J. (eds.). *The Vygotsky Reader* (99-174). Oxford: Blackwell Publishers.
- Zweig A. (1967). *Kant Philosophical correspondence 1759-99*. Chicago: The University of Chicago Press.

Traduzione di Giorgio Gabellini*

* Il traduttore ringrazia Lorenzo Di Giacomi per i preziosi consigli forniti in ordine alla traduzione dei termini filosofici.