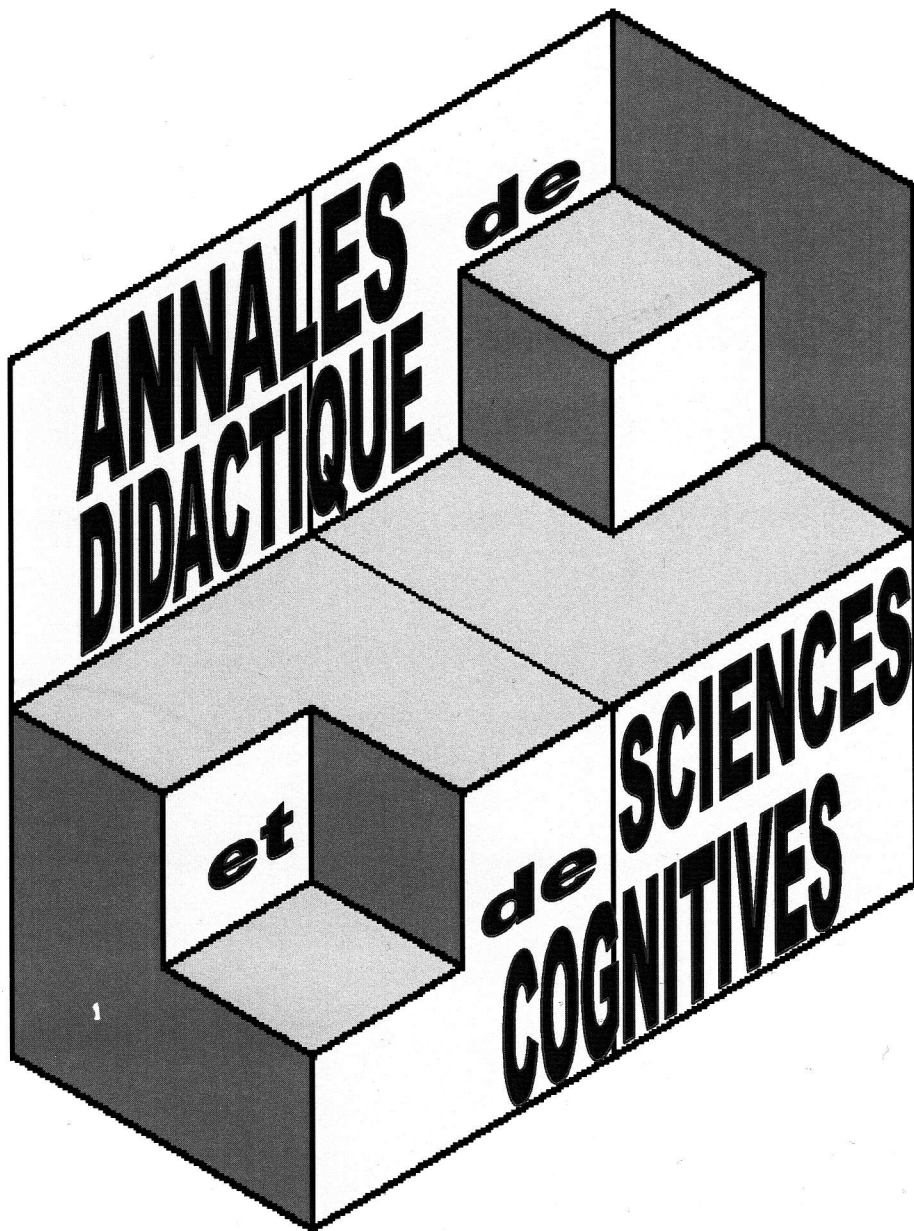


ISSN 0987 - 7576



*ULP*

*IREM de Strasbourg*

Volume 8

2003

*Annales de Didactique et  
de Sciences Cognitives*

**Publication de travaux du séminaire  
de didactique des mathématiques de Strasbourg**

Responsable de la publication : **François PLUVINAGE**

Université Louis Pasteur,

IREM de Strasbourg  
7, rue René Descartes  
F - 67084 STRASBOURG Cedex

**Volume 8**

**2003**

LUIS RADFORD

NARRATIVES, EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES  
ET CALCUL FORMEL :

DE LA CONSTITUTION À LA TRANSFORMATION DU SENS\*

**Abstract.** This article deals with two problems that students encounter when they start learning algebra. The first one is the problem of the constitution of meaning of a symbolic expression. The second one is related to the transformation that the students have to accomplish of this meaning in order to perform syntactic formal operations on the symbolic expressions. Our discussion is based on a classroom observation of three groups of 15-year-old students during video-taped sequences devoted to the teaching of algebra. The semiotic theoretical framework and the analysis of students' interaction draw from Husserl's phenomenology.

**Résumé.** Le but de cet article est de discuter deux problèmes qui se posent chez les élèves en début d'apprentissage de l'algèbre. Le premier problème est celui de la *constitution* du sens d'une expression symbolique. Le deuxième problème est celui de la *transformation* à laquelle on doit soumettre le sens précédent afin de pouvoir effectuer, sur l'expression symbolique en question, des traitements de type syntactico-formel. Dans ce qui suit nous discutons ces problèmes à partir d'observations en salle de classe portant sur l'activité mathématique de trois groupes d'élèves de 9<sup>e</sup> année (15 ans.) L'analyse est conduite à l'intérieur d'une perspective sémiotique s'inspirant de la phénoménologie de Husserl.

**Mots clés :** Sémiotique, sens, symboles, algèbre, mise en équation.

---

## 1. Introduction et cadre théorique

L'utilisation de symboles en mathématiques pose d'emblée deux problèmes différents. Le premier, celui de la *référence*, concerne la nature de l'objet mathématique lui-même. Le deuxième, celui de la *désignation* des objets, concerne la manière que se donnent les individus pour rendre ces objets des *objets de connaissance*. Alors que le premier problème relève de l'ontologie, le deuxième relève de l'épistémologie.

Les deux problèmes mentionnés sont, bien sûr, interreliés. Une ontologie réaliste munit les objets mathématiques de certains attributs. Elle autorise certaines pre-suppositions (qui restent toutefois souvent implicites) et privilégie certains types de discours pour thématiser les objets du savoir (on y parle, par exemple, de

---

\* Cet article fait partie d'un programme de recherche subventionné par le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada/ Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (CRSH/SSHRC.)

“découverte de l’objet”). Du côté épistémologique correspondant, le rôle des symboles y apparaît, en général, comme ce qui permet un accès aux objets. Par exemple, c’était une telle ontologie qui permettait à Frege de comparer l’activité du mathématicien à celle du géographe explorateur. Celui-ci, disait Frege, découvre une rivière qui était déjà *là*. De manière similaire, le mathématicien découvre un théorème qui a toujours été vrai. C’est pourquoi, soutenait-il, les théorèmes de l’arithmétique incarnent des vérités éternelles. « Nous pouvons dire par conséquent que ces objets sont en dehors du temps ». (Frege, 1895/1970, p. 482.) Dans l’épistémologie fregéenne les symboles donnent présence à ces réalités conceptuelles préexistantes à l’activité des individus. Les symboles, disait-il, « donnent présence à ce qui est absent, invisible, et le cas échéant inaccessible aux sens. » (Frege, 1971, p. 63.) Le rôle des symboles est tout à fait autre dans une ontologie formaliste. Ainsi, en parlant au sujet des nombres, Hein disait: « j’appelle nombre certains symboles numériques tangibles. Donc l’existence de ces nombres n’est pas en question. » (Heine, cité dans Frege, 1960, p. 183.) C’est pourquoi les axiomatiques formelles des mathématiques introduisent les objets comme une suite de lettres et réduisent le problème de la désignation des objets à une simple correspondance entre variables et ces objets donnés en soi<sup>1</sup>. Mais dès qu’on se place dans le contexte de l’enseignement, le problème ontologique de la référence et le problème épistémologique de la désignation prennent une allure tout à fait différente. C’est surtout le problème de la désignation qui va nous occuper ici. Nous retiendrons en particulier deux aspects.

(1) Le premier concerne les mécanismes sémiotiques de constitution du sens quand des expressions symboliques sont construites à partir d’un certain contexte.

(2) Le deuxième est celui de la transformation du sens afin de pouvoir mener des opérations sur les symboles désignant les objets. Ces aspects ne sont pas indépendants –du moins ils ne le sont pas pendant certaines phases de l’activité mathématique. Mais ils sont sous-tendus par des exigences sémiotiques et cognitives différentes.

On sait très bien que Duval caractérise ces aspects de l’activité sémiotique comme relevant de la *conversion* et du *traitement* entre registres sémiotiques, respectivement (Duval, 1993.) Bien qu’essentiellement juste, en faisant intervenir *deux* registres dans la conversion et *un* seul registre dans le traitement, cette classification laisse de côté néanmoins le rôle d’autres systèmes sémiotiques dans

---

<sup>1</sup> Dans ce contexte, la problématique de l’objet disparaît, ainsi que celle de sa désignation. Comme note Nichanian, « la difficulté apparue il y a un instant concernant la détermination originaire de l’objet, et donc l’apparaître de cet objet en tant que tel, a disparu ; mais elle a disparu tout simplement parce qu’on se pose aucune question concernant la constitution du « domaine d’objets » dont on vient de parler. » (Nichanian, 1979, p.17.)



la constitution du sens, notamment le système du langage parlé et celui des gestes. Or, la prise en compte et l'élucidation du rôle des autres systèmes sémiotiques assurant la conversion et le traitement sont des éléments fondamentaux pour une étude de l'ontogenèse des significations mathématiques. Il ne s'agit pas d'affirmer que Duval a minimisé le rôle du langage comme pivot d'articulation entre registres. C'est lui-même qui nous a rappelé que le rôle du langage en tant que pivot d'articulation fût pertinemment souligné par Jakobson. Il s'agit, pour moi, d'insérer le langage au sein de l'activité sémiotique des individus pour retracer la constitution du sens et la transformation de celui-ci. Toutefois, il convient de noter, avant de continuer, qu'en prêtant attention à la « voix » des élèves, je ne me place pas dans la foule de travaux contemporains qui réduisent la construction du savoir au discours ou à l'interaction (pour une critique des approches discursives voir Radford 2002a.) Je me rapproche plutôt du constat que Marx exprimait dans son *Grundrisse* selon lequel les idées n'existent pas séparées du langage.

Puisque ma position théorique vis-à-vis du langage est cruciale pour situer l'analyse que je ferai du sens que les élèves attribuent aux expressions algébriques, il me faut apporter une nuance ici. En soutenant que les idées n'existent pas séparées du langage, je ne prends pas parti pour la position subjectiviste qui voit dans le langage le *véhicule* d'expression des idées. Je ne prends pas parti non plus pour la position (adoptée par plusieurs post-modernistes) qui confère au langage le rang d'un demiurge tout-puissant constructeur de la réalité. Il s'agit plutôt, pour moi, de concevoir le langage (et les autres systèmes sémiotiques) comme des moyens de réflexion (dans les deux sens, celui de reflet et celui de prise de conscience) se mouvant dans un horizon d'objectivation selon des modes de fonctionnement culturellement constitués (Radford, 1998.) Dans cette dernière conception, où la réflexion est une des formes de la praxis sociale, conception proche à plusieurs égards de celle que Marx énonçait dans le *Grundrisse*, le langage apparaît en tant que porteur de significations et des « modes d'action (opérations) socialement élaborés, dans la pratique desquels les hommes modifient et connaissent la réalité objective » (Leontiev, 1984, p. 155.)

Cet article fait suite à d'autres articles, que nous avons publiés précédemment, concernant le problème de la désignation des objets *mathématiques*. Il se veut une *exploration additionnelle et nécessaire* d'un des résultats auxquels nous sommes parvenus sur l'apprentissage de l'algèbre symbolique chez des élèves débutants. Ce résultat peut être résumé de la manière suivante. Suite aux travaux de Filloy et Rojano (1984, 1989), dans une vaste partie de la littérature sur l'apprentissage de l'algèbre, on parle des difficultés

qu'éprouvent les enfants à opérer sur l'inconnue<sup>2</sup>. Ces travaux mettent en évidence la difficulté qu'ont les élèves pour passer de la résolution d'équations du type  $ax+b=c$  à la résolution d'équations du type  $ax+b=cx+d$ . Alors que le premier type ne demande pas une opération sur l'inconnue (car la solution se fait en opérant sur les nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$ ), le deuxième type exige bel et bien une opération sur l'inconnue. Or, dans notre programme de recherche longitudinale en salle de classe (Radford 2000a), nous avons trouvé que, sous certaines conditions, l'opération sur l'inconnue dans des problèmes du type  $ax+b=cx+d$  ne pose pas de problèmes aux élèves débutants. Ainsi, après un travail sémiotique à partir de la manipulation d'objets concrets, nos élèves ont pu facilement passer au symbolisme et résoudre des équations telles que  $14+2e = 2+4e$  (voir Radford, 2002b.) Par contre, ces mêmes élèves n'ont pas réussi à reconnaître, dans des tâches de généralisation de patrons géométrico-numériques, que les expressions ' $(n+1) + n$ ', ' $(n+n)+1$ ' et ' $2n+1$ ' réfèrent à une même situation ou objet (Radford 2000b ; Radford, sous presse.) Le problème n'est donc pas celui de la possibilité ou impossibilité de l'élève à opérer sur l'inconnue car cette question ne peut pas être tranchée par un oui ou par un non (ou plutôt elle peut être répondue par oui *et* non à la fois, mais alors la question perd tout son intérêt.) La question devient celle-ci : comment se fait-il que dans certains cas l'opération sur l'inconnue est possible alors que, pour les *mêmes* sujets, dans d'autres cas l'opération sur l'inconnue est impossible ? Pour répondre à cette question, nous voulons suggérer, il faut regarder les problèmes de la désignation des objets et de la constitution du sens. Pour ce faire, il faut regarder comment la désignation des objets à travers les expressions symboliques algébriques est reliée aux intentions des individus et à l'évolution de ces intentions au cours de l'activité contextuelle. Il nous faut voir comment, dans les actes donateurs de sens, les intentions se cristallisent en s'exprimant dans les expressions symboliques que les élèves retrouvent au cours de leur immersion dans la pratique de l'algèbre.

L'intention à la base du sens mathématique à laquelle nous faisons référence ici ne doit pas être réduite à la subjectivité de l'individu. S'il est vrai que pour qu'il y ait intention il doit y avoir un individu, il n'est pas moins vrai que pour que l'intention soit accomplie elle doit être *exprimée*. Son expression se trouve ainsi cernée par la parole ou le geste historiquement et culturellement constitué, c'est-à-dire, par un système de significations qui vont au-delà de l'individu lui-même (c'est ce que Merleau-Ponty appelait l'expressivité du langage mais qui vaut bien

---

<sup>2</sup> Voir par exemple le texte de Carragher *et al.* (2001) discuté récemment dans le Forum sur l'algèbre tenu lors de la 25<sup>e</sup> rencontre du PME aux Pays Bas et les commentaires et réactions à ce texte par Linchevski, Radford, Tall, Teppo, Warren et Cooper, Vol. 1, pp. 141-159.

pour d'autres systèmes sémiotiques également.) Les intentions ont lieu à l'intérieur d'expériences culturelles que Husserl appelait *noesis*. Il appelait *noema* le contenu conceptuel de ces expériences. Ainsi, le noema correspond à la manière selon laquelle les objets sont saisis et deviennent connus par les individus. Noesis correspond aux catégories culturelles qui rendent possible que les objets du savoir soient l'objet d'attention (Husserl, 1931.)

En poursuivant ma recherche au sujet des processus sémiotiques de construction du sens et d'utilisation de signes chez des élèves débutant l'apprentissage de l'algèbre symbolique, la question que cet article tente d'examiner est celle de la manière dont les expressions symboliques sont munies de sens lors de la désignation des objets et de ce qui arrive au sens quand des opérations sur ces expressions sont nécessaires. L'analyse présentée ci-dessous portera sur une tâche concernant la résolution d'un problème en mots. En termes du cadre théorique esquissé précédemment, la question de recherche est d'étudier la manière (la noesis) dans laquelle les élèves utilisent des signes pour exprimer des facettes particulières (les noemata) des objets du discours. Après quelques commentaires sur la méthodologie, je vais proposer une distinction entre problème en mots (*story-problem*) et *narrative symbolique*. Cette distinction me permettra de fournir des interprétations de certaines expressions algébriques produites par les élèves et qui, à première vue, semblent dépourvues de sens. Je vais en suite discuter le concept de *nominalisation*. L'intérêt théorique de ce concept n'est pas tout simplement d'expliquer comment les inconnues d'un problème sont introduites dans la phase de symbolisation algébrique. Sa fonction est plutôt celle d'un outil théorique pour examiner comment se fait la construction du sens des expressions symboliques dans ces limbes où on n'a pas tout à fait quitté l'histoire originelle (celle du problème en mots) et on n'a pas encore complètement atteint le domaine de la narrative symbolique (c'est-à-dire, la narrative racontée en signes.) La dernière section présente une discussion courte du problème de l'utilisation abstraite ou formelle des signes une fois que l'équation associée avec le problème en mots a été produite.

## 2. Méthodologie

Les données présentées ci-dessous proviennent d'un programme de recherche longitudinal qui a débuté l'année 1998-1999 et auquel participent 4 classes appartenant à deux écoles différentes. Un des objectifs de ce programme est d'assurer un accompagnement à ces quatre classes pendant plusieurs années. Lors de cet accompagnement, nous participons conjointement avec les professeurs des écoles dans l'élaboration des activités mathématiques reliées à l'algèbre. Les activités de salle de classe sont élaborées de sorte que les élèves travaillent selon une structure de petits groupes (2 à 3 élèves par groupe.) Usuellement, après le travail en petits groupes, le professeur conduit une discussion générale qui permet

de discuter les acquis des élèves, de les comparer et de les affiner quand c'est nécessaire. L'objectif et le contenu des activités sont circonscrits par le programme d'études de la province de l'Ontario, Canada. Ces activités s'insèrent dans le fonctionnement normal de la salle de classe et ont lieu selon la programmation des écoles. Nous enregistrons les activités sur vidéo à l'aide de plusieurs caméras. Ensuite, nous procédons aux transcriptions et à l'analyse des activités. L'analyse permet une rétroaction pour les activités à venir. Il ne s'agit donc pas d'une recherche de type « expérimentale classique » (passation de questionnaires, analyse de ceux-ci et obtention des conclusions) mais d'un accompagnement qui nous permet de voir, *de près et sur le terrain*, l'évolution des mécanismes sémiotiques de construction du sens et d'utilisation de signes.

Je me limiterai ici à mentionner quelques extraits provenant de trois petits groupes d'une des activités autour de la mise en équation et de la résolution d'un problème en mots<sup>3</sup>. Ces données ont été recueillies quand les élèves se trouvaient en 9<sup>e</sup> année. Comme il découle de ce qui a été dit au sujet de la position théorique adoptée ici vis-à-vis du langage, en faisant du dialogue des élèves un point central de notre méthodologie, la question n'est point celle de tenter de voir les jeux de sens que *chaque* individu peut vivre dans sa tête à un moment donné fixé par un problème particulier, mais d'explorer l'accès des élèves à une pratique mathématique qui passe par la construction d'un sens à travers un langage symbolique complexe, historiquement constitué.

L'activité mathématique que je vais discuter était basée sur le scénario suivant : « Kelly a deux bonbons de plus que Manuel. Josée a 5 bonbons de plus que Manuel. Les trois enfants ensemble ont 37 bonbons »<sup>4</sup>. Le même scénario a été

---

<sup>3</sup> Considérées sous un certain angle, nos observations peuvent être vues comme une micro-étude de cas. Or, l'étude du sens en algèbre est un phénomène nouveau et on peut se poser la question de la validité, l'heure actuelle, d'une approche par questionnaires pour l'explorer méthodologiquement auprès d'une population plus grande. La vaste recherche menée dans le domaine de la didactique de l'algèbre a été occupée, jusqu'à récemment, par un intérêt sur l'acquisition de la syntaxe du langage algébrique (on consultera à ce sujet la critique intéressante de Nemirovsky, 1994.) Le questionnaire semble un outil approprié pour élaborer des catalogues d'erreurs d'élèves, etc. Mais étant donné la nature *contextuelle* de la catégorie sémiotique du sens, il semble difficile que les questions que nous nous posons en ce moment puissent être étudiées et cernées par d'autres moyens que ceux que nous fournissons les observations en direct sur le terrain, c'est-à-dire, la salle de classe (ces observations peuvent toutefois être complétées par des questionnaires ; nous l'avons fait d'ailleurs, mais avec des intentions différentes : voir Radford 2000a.)

<sup>4</sup> Des problèmes de ce type ont été l'objet d'une recherche menée par Bednarz et Janvier (1994) en termes de l'effet qu'ont les relations (par exemple relations additives versus multiplicatives) sur les stratégies suivies par les élèves.

utilisé pour générer *trois* problèmes. Dans le premier problème, on demandait aux élèves de désigner le nombre de bonbons de Manuel par  $x$  ; ensuite ils devaient trouver une expression algébrique pour le nombre de bonbons de Kelly et de Josée, produire une équation associée au problème et la résoudre. Les problèmes 2 et 3 comprenaient des questions similaires. La différence se trouve dans le point d'ancrage de la désignation des objets. Alors que dans le problème 2, on a demandé aux élèves de désigner par  $x$  le montant de bonbons de Kelly, dans le problème 3 la lettre  $x$  devait désigner le nombre de bonbons de Josée.

### 3. Résultats et discussion

#### 3.1. De Héros aux *Objectités*<sup>5</sup>

Une des difficultés auxquelles les élèves doivent faire face dans des problèmes incluant des phrases comparatives telles que :

(Comp) « *Kelly a 2 bonbons de plus que Manuel* »

consiste à en dériver des phrases assertives (c'est-à-dire des phrases qui éliminent la relation de comparaison) du type : « *A (ou B) a C* ».

Si, par exemple, Manuel a 4 bonbons, la phrase assertive dérivée de (Comp) prendra la forme :

(Asser) « *Kelly (sujet) a (verbe) 6 (adjectif) bonbons (nom)* ».

Dans le cas de l'algèbre, l'adjectif n'est pas connu (on ne sait pas combien de bonbons A a.) Comme résultat, l'adjectif doit être désigné *d'une certaine façon*. Il doit devenir « *prédicable* ». En utilisant une lettre (disons ' $x$ ') un nouvel espace sémiotique est ouvert<sup>6</sup>. Dans ce nouvel espace, l'histoire originale doit être racontée à nouveau, débouchant sur ce qu'on appelle souvent (bien que de façon trop simpliste, comme Duval (sous presse) nous le rappelle) la « *traduction* » en équation du problème donné. À la place de traduction, je préfère parler de *narrative symbolique*. Ce terme cherche à souligner deux éléments essentiels. Le premier élément consiste à remarquer que, dans ce nouvel espace sémiotique, on raconte encore une histoire, mais cette fois-ci en symboles mathématiques. Le deuxième élément met en évidence le fait que, bien qu'il y ait de ressemblances entre l'histoire originale et la narrative symbolique, les personnages changent. Ce changement est caractérisé comme un glissement noématique qui met en avant

<sup>5</sup> Pour faire référence non pas seulement à des choses individuelles mais aussi à des choses complexes, à des catégories ou à des états d'affaires, Husserl (1961, 44) utilisait le terme *Gegenständlichkeit* (*objectité*.) C'est dans ce sens que nous le prenons ici.

<sup>6</sup> Le nouvel espace sémiotique ne doit pas forcément être celui de l'algèbre symbolique. Les abaquistes italiens du 14<sup>e</sup> siècle ont construit des espaces sémiotiques complexes à l'aide de mots dotés d'une technicité très subtile. Voir Radford, 1997.



certains aspects de l'histoire originale et qui place en arrière-plan d'autres aspects. Les « héros », pour ainsi dire, de l'histoire originale ne sont plus Kelly, Manuel ou Josée. Ce sont maintenant les relations numériques entre les montants de bonbons qui constituent les objectités exprimées dans le nouvel espace sémiotique (c'est-à-dire dans celui de l'algèbre symbolique en émergence.)

Les difficultés qu'accompagnent le glissement noématique ou glissement d'attention peuvent devenir un obstacle dans l'apprentissage de l'algèbre. Montrons un exemple dans lequel on voit les élèves du groupe 1 en train de produire une expression symbolique sans pour autant pouvoir accomplir ce changement noématique<sup>7</sup>.

### 3.2. Signes en tant que marques dans des actes narratifs

Dans ce groupe, un calcul (erroné) avec des phrases comparatives a amené les élèves à la situation suivante :

*Stacey: Kelly a 2 bonbons de plus que Manuel. Josée a 5 bonbons de plus que Manuel, ensemble elles [Kelly et Josée] ont 7 bonbons de plus que Manuel.*

À la place de transformer les phrases comparatives en phrases assertives, les élèves ont changé le terme comparatif en forme adverbiale. Plus précisément, la formule 'plus que' est remplacée par 'plus', ce qui leur a permis d'établir une hiérarchie chez les héros de l'histoire originale selon le nombre de bonbons:

*Stacey: Josée en a 5 [de plus]. Josée en a plus, Kelly est deuxième, Manuel le troisième. Ok so on met  $x$  qui représente ... non  $x$  qui représente 7, Ok ? 12 (en tant que résultat de  $7+5$ ), 9 (vu comme résultat de  $7+2$ ) mais j'sais pas comment trouver ... [...]. Il [Manuel] en a 7 moins que ces deux-là mis ensemble (elle écrit)  $x - 7$  [...] Il faut que ça (indiquant avec le doigt 37) égale à  $x-7$  (en suggérant  $37=x-7$  ou  $x-7=37$ .)*

La transformation des phrases comparatives en phrases assertives est reliée à la possibilité de prendre en compte de façon explicite le nombre inconnu de bonbons. Toutefois, l'introduction claire, dans l'activité mathématique, d'une lettre pour désigner le nombre inconnu n'arrive pas à régler le problème. Ceci est montré dans l'extrait suivant (Ligne 2.) Quand le professeur vient voir le travail des élèves, il se rend compte que ceux-ci n'ont pas pris en compte que  $x$  représente le nombre de bonbons de Manuel. Afin d'aider les élèves, il dit :

1. *Professeur: Manuel est  $x$ .*
2. *Stacey: Ouin, Josée a 5 bonbons de plus que Manuel et les trois ensemble ont 37 bonbons.*

<sup>7</sup> Dans les extraits suivants, on observera que les élèves s'expriment en français, parfois en anglais et parfois dans les deux langues.

3. *Professeur: Ici ils te demandent, là, d'écrire l'expression algébrique pour le nombre de bonbons représentés par Kelly. Donc si lui est  $x$ , elle est quoi ? C'est ça [ce qu'il] faut que tu figures.*
4. *Stacey: (en même temps qu'elle regarde le professeur, elle dit)  $x-2$ .*

Même si l'intervention du professeur a pris une forme elliptique (il dit: Manuel est  $x$ ), cette intervention vise à faire en sorte que les élèves centrent leur attention sur le nombre de bonbons de Manuel. L'effort du professeur pour produire un glissement noématique chez les élèves se voit, cependant, sans succès : il est accueilli par une phrase qui ne fait que répéter les informations (Ligne 2) et dont l'intonation exprime une réponse du type : « Oui, oui, nous savons tous cela ».

La construction d'une narrative symbolique pour l'histoire donnée exige une nouvelle approche : alors que l'histoire originale se déploie selon une lecture linéaire de gauche à droite (avec des éventuels retours en arrière), le point d'entrée dans la narrative symbolique n'a pas un emplacement permanent. Le point d'entrée reste dans un espace qui est impossible à définir *a priori*. Et même si on arrivait à le détecter, il resterait encore un autre problème : il n'y a pas de congruence (au sens de Duval) entre l'histoire originale et la narrative symbolique. Le langage naturel servant de base à l'activité sémiotique des élèves ne suffit ni à cerner le point d'entrée, ni à offrir un contrôle : c'est que dans la narrative symbolique, l'*ordre du discours* (pour reprendre le terme de Foucault) est différent et ce que ce discours thématise porte sur d'autres choses.

Quel est alors le rôle des signes dans l'expression symbolique produite par les élèves ? Nous verrons maintenant que les signes des élèves constituent des scripts racontant des parties remarquables de l'histoire *originale*. Arrêtons-nous aux expressions " $x-7$ " et " $x-2$ " produites par Stacey. Chacune de ces expressions est faite à partir de trois signes. Dans la deuxième expression, ces signes sont ' $x$ ', ' $-$ ' et ' $2$ '. Le sens de ces expressions n'est pas, bien sûr, celui qu'on s'attendrait dans la pratique de l'algèbre. Mais nous ne pouvons pas dire pour autant que ces expressions n'ont pas de sens. L'expression «  $x-2$  », qui fusionne l'intervention du professeur (Ligne 1) et la compréhension que Stacey élabore de celle-ci (Ligne 4), peut être lue comme une expression qui dit que Manuel a un certain nombre de bonbons (' $x$ ') et qu'il a deux (' $2$ ') bonbons de moins (' $-$ ') que Kelly. Ainsi, le signe ' $-$ ' n'est pas en train d'indiquer une soustraction sur l'inconnue  $x$  mais c'est une marque d'orientation d'un court script au sujet de l'histoire originale. De façon similaire, le signe ' $7$ ' dans l'expression «  $x-7$  » n'exprime pas l'expression «  $x$  moins 7 ». Tel qu'indiqué par Stacey dans le dialogue, le nombre 7 vient former part de l'expression symbolique avec un sens importé de sorte que chaque signe dans l'équation nous raconte une partie de l'histoire originale.

Quelques minutes plus tard, le professeur est revenu voir le travail des élèves. Le dialogue a pris alors la tournure suivante :



*Professeur: x c'est Manuel, oui ?*

*Caroline: Oui.*

*Stacey: (elle interrompt) So, x moins...*

*Professeur: (en continuant sa phrase) Kelly a 2 bonbons de plus que Manuel. Supposons que Manuel a 20 bonbons, combien de bonbons est-ce que Kelly aura ?*

*Stacey: 22 ?*

*Professeur: 22. (Il regarde Caroline) Si Manuel avait 30 bonbons, combien*

...

*Stacey: (elle interrompt) 32.*

*Professeur: (Il regarde Jessica.) Donc, euh, comment est-ce qu'ils ont fait pour trouver Kelly ?*

*Stacey: Tu mets le 2.*

*Professeur: (il corrige) Tu ajoutes 2.*

*Stacey: (ayant compris comment exprimer algébriquement les relations, dit, en se référant à Josée) Là tu ajoutes 5. [...] Donc c'est x plus 5. (Les élèves écrivent 'x+2' et 'x+5')*

*Professeur: Pis, ça (il indique la question portant sur l'équation correspondant au problème donné sur la page de l'activité) serait égal à quoi ? Ça c'est une équation donc il faut que ça soit égal à quelque chose (à ce moment-ci, le professeur est appelé par un autre groupe d'élèves. En considérant que le groupe de Stacey est sur la bonne piste il part)*

*Caroline: (elle ajoute les trois expressions algébriques) Donc si j'ai  $3x + 7$ , (Elle regarde à Stacey)  $3x + 7$  ? [...] Ça veut dire 3, non,  $3x + 7$  ça égale à 37 ?*

*Stacey: (elle reconnaît le nombre 7 dont il a été question auparavant et dit) I don't believe that !  $3x + 7$  est égale à 37 ! ... oh !*

Nous voyons comment en utilisant la formule elliptique « x est Manuel » et à travers un calcul sur des nombres (qui fonctionnent ici comme le support de la noésis, c'est-à-dire de l'acte donateur de sens), le professeur déplace l'attention des élèves sur les relations entre les nombres de bonbons. Ce qui est important à souligner n'est pas le fait que les élèves arrivent par-là à écrire l'expression symbolique. Ce qui est important est, en fait, l'émergence de la prise de conscience que, dans les expressions symboliques, les héros, sans être jetés à l'extérieur du champ d'attention, sont placés maintenant dans un deuxième plan et que les prédications que se font dans le nouvel espace sémiotique où gîte la narrative symbolique portent sur d'autres choses : elles se font sur des *objectités*. Il se peut bien que des formules elliptiques basées sur le verbe être du genre « x est Manuel » ne soient pas les meilleurs pour forger la distance inévitable entre l'histoire originale et la narrative symbolique. Il se peut que l'utilisation du verbe « avoir » aurait été plus appropriée (nous avons pris conscience de ceci après que les vidéos de l'activité ont été analysés.) Cependant, dans le contexte de la salle de classe, le

choix des formules elliptiques a fait possible que les élèves commencent à comprendre le très lourd sens que portent les expressions algébriques, même si elles sont composées à partir d'un nombre incroyablement limité de signes.

### 3.3. Nominalisation

Les groupes 2 et 3 n'ont pas rencontré les mêmes difficultés que le groupe 1. Voici un extrait du groupe 2 :

*Anik : OK. ... Manuel ça va être la variable x (elle montre un endroit sur le page d'activité) comme...comme s'ils veulent...trouve l'équation là ... l'équation pour Kelly c'est ... à cause euh elle en a 2 de plus que Manuel. Manuel il en a ... en a le montant x. So x plus two parce qu'on sait pas, x c'est combien Manuel a. Right. So, elle [Kelly] en a (elle montre un endroit sur le page d'activité) en a comme whatever Manuel a plus two.*

Nous voyons comment la phrase comparative a été transformée en une phrase assertive (« elle en a comme whatever Manuel a plus two ».) En introduisant la lettre x (dans « Manuel ça va être la variable x » et « Manuel il en a ... en a le montant x »), Anik, en utilisant d'abord le verbe 'être' et ensuite le verbe 'avoir', ouvre la porte qui mène à la narrative symbolique. Nous pouvons voir comment, malgré la reformulation à la fin de l'intervention, les héros commencent à disparaître de la scène principale. Mais essayons de voir les mécanismes sémiotiques qui rendent ceci possible de plus près.

L'insertion de 'x' comme une désignation du nombre de bonbons de Manuel prépare le terrain pour une *nominalisation*. Par nominalisation je veux dire un processus linguistique à travers duquel quelque chose est transformée en sujet ou en objet d'un verbe. En le nommant, on dégage cette « quelque chose » de ce que Hjelmslev appelait la masse amorphe de l'horizon du discours (Hjelmslev, 1969, pp. 51-52) et on la place en avant, devenant ainsi objet d'attention<sup>8</sup>.

En disant « whatever Manuel a », l'expression peut maintenant devenir le nom dans la phrase assertive « Kelly a (nom) +2 ». Il est en effet intéressant de noter que, sans aide, le groupe 1 n'aurait pas pu offrir de nominalisation. Les groupes 2 et 3, par contre, ont effectué des nominalisations. Voici un exemple, provenant du groupe 3, au sujet du problème 3 (où x désigne le nombre de bonbons de Kelly.)

1. *Michelle: Kelly...(inaudible)..Là le x is all moved around. They're trying to trick us. So if Kelly has deux bonbons de plus que Manuel, then Manuel a*

<sup>8</sup> La nominalisation est, de manière plus générale, un des mécanismes d'objectivation sémiotique. Le thème de l'objectivation est traité en détail dans Radford (sous presse) et Radford 2002c.

*deux bonbons de moins que Kelly, right ? [...] But now that Kelly is x, moins deux...*

2. *Jessy: (il interrompt) Ouain, ouain.*

3. *Michelle: I'm thinking... Josée a cinq bonbons de plus que Manuel. So Manuel a x moins deux puis Josée en a plus cinq que ça, right ? So x moins deux parenthèse... plus cinq.*

La ligne 1 montre un changement de sens, Bien que les phrases « Kelly has deux bonbons de plus que Manuel » et « Manuel a deux bonbons de moins que Kelly » réfèrent au même état d'affaires, le sens n'est pas le même<sup>9</sup>. Le sens change à cause de la manière dans laquelle l'objet est saisi –le contenu noématique n'est pas le même. Dans la dernière partie de la ligne 1 et dans la première partie de la ligne 3, Michelle produit une expression symbolique pour le nombre de bonbons de Manuel. L'insertion du signe 'x' permet une première nominalisation qui rend possible la phrase « Manuel a x moins deux ». Cette phrase est très importante pour notre analyse. Il s'agit, en effet, d'une *phrase hybride* qui illustre clairement comment le sens passe de l'histoire originale à la narrative symbolique par l'entremise du langage naturel. Dans la deuxième partie de la ligne 3, l'attention est portée sur l'expression « x moins deux » seulement. À la place de voir cette expression comme expression d'un des sens contextuels possibles (par exemple, 'le nombre de bonbons de Kelly moins deux' ou encore 'le nombre de bonbons de Manuel'), Michelle produit une suspension subtile et fondamentale de ces sens. Pour ce faire, elle utilise le déictique « ça ». La procédure sémiotique utilisée par Michelle, basée donc sur un recours aux déictiques, rend possible une deuxième nominalisation. Le référent est formellement nominalisé et peut, par là, devenir le nom du verbe « avoir » dans « Josée en a plus cinq que ça ».

Tel qu'indiqué dans l'introduction, l'intérêt théorique du concept de nominalisation est de nous renseigner au sujet de la manière dans laquelle les expressions symboliques deviennent dotées de sens. La nominalisation nous permet de scruter l'activité sémiotique dans ces limbes où l'on n'a pas tout à fait quitté l'histoire originale et on n'a pas encore atteint la région de la narrative symbolique. En particulier, la nominalisation nous permet d'étudier la constitution des sens d'ordre supérieur nécessaires aux nouvelles prédications requises dans l'élaboration d'expressions symboliques. Il est temps maintenant de discuter le problème didactique des opérations avec les signes menant à l'équation.

### 3.4. Le collapse des narratives

Voici un extrait du dialogue du groupe 2 portant sur le problème 1.

---

<sup>9</sup> On se rappellera ici du fameux exemple de Frege, discuté également par Husserl : le vainqueur de Jena et le vaincu de Waterloo.

1. Anik: Ouin. Gars bein. (Elle prend les feuilles) ce qu'on essaye de faire c'est de mettre [les expressions symboliques] avec les personnes, Ok ? Kelly en a deux de plus que Manuel, Manuel en a  $x$ , plus two c'est ce que Kelly en a [elle] a n'a whatever que lui a plus deux. Ok. Ça va être  $x$  plus two, ça c'est entre parenthèse, plus  $x$  plus cinq, qui va faire ce que Josée en a, plus  $x$  qui va faire ce que Manuel en a [elle vise l'expression '(x+2)+(x+5)+x']
2. Luc: Égale à quoi ? 30, 37 ? (Chantal écrit  $2x+5x+x$ )
3. Anik: (en regardant l'expression symbolique de Chantal, elle dit)  $2x$ , je pense pas
4. Chantal: pourquoi pas ?
5. Anik: (elle pointe à un endroit sur le papier) parce que là t'es t'après faire deux fois  $x$
6. Chantal: Non.
7. Anik: Icite on est après faire deux plus  $x$  (Anik écrit  $(x+2)+(x+5)+x$ )
8. Luc: (en regardant l'expression écrite par Anik, dit) Tu les regroupe, les regroupe tous les  $x$  (Chantal efface ce qu'elle avait écrit)
9. Anik: (En s'adressant à Luc) Non, non !
10. Luc: Ouin ! tu regroupe tous les  $x$
11. Anik: non ! Gars bein, gars bein, (elle pointe encore vers un endroit sur le papier)
12. Luc: Oh my God !
13. Anik: Je veux juste te l'expliquer, gars bein. Lui y'a en a, elle en a  $x$  plus deux, right ?

À la ligne 2, Chantal utilise une syntaxe basée sur le critère de juxtaposition de signes. La phrase est structurée à la manière des narratives où les signes sont codés en tant que *termes clés*. Il s'agit d'une stratégie similaire à celle utilisée par les scribes babyloniens dans la construction des tablettes pictographiques de la période proto-littéraire (ca. 3300-2900 Av. J.-C.) précédant l'apparition du cunéiforme où, par exemple, un ensemble de pictogrammes représentant « mouton », « 2 » et « temple » pouvait signifier « deux moutons ont été remis (ou reçus) du Temple » (voir Radford 2001, 28-33.) L'expression  $2x$  ne signifie pas 2 fois  $x$  ou deux  $x$ . Pour Chantal,  $2x$  exprime l'idée que Kelly a 2 bonbons de plus que Manuel, et c'est pourquoi elle est surprise (ligne 6) qu'Anik ait pu interpréter ceci différemment. Mais le dialogue montre également une autre facette de la lutte que livrent les élèves dans leur essai de signification à travers le langage algébrique : à la ligne 8, Luc regroupe les termes similaires. Anik s'oppose radicalement à cette action. La question est: pourquoi ? La raison en est que le regroupement des termes similaires signifie une rupture avec le sens original. Tous les efforts accomplis lors de la désignation des objets afin de produire la narrative symbolique doivent être mis à l'écart. La narrative symbolique au complet doit

maintenant s'effondrer. Il n'y a pas, dans l'histoire originale, de segment possible qui puisse correspondre au résultat du regroupement des termes. Rien, en effet, dans l'histoire originale ne peut être corrélé à l'expression  $3x+7$ . L'effort désespéré d'Anik pour ne pas perdre la piste du sens de la narrative apparaît clairement à la ligne 13.

#### 4. En guise de conclusion

Plusieurs travaux en didactique des mathématiques se sont intéressés aux problèmes de mise en équation. Cordier (1991), par exemple, a étudié le problème de la mise en équation en tant que problème de conversion de registres. Bien qu'elle s'intéresse, comme nous le faisons ici, à la désignation des objets, elle ne le fait pas dans une perspective sémiotique de la signification. De ce compte, les problèmes liés à la microgenèse du sens en algèbre, d'une part, et les problèmes concernant la transformation du sens des objets désignés, d'autre part, n'apparaissent pas au centre de ses préoccupations<sup>10</sup>.

En nous situant dans une perspective de la signification qui emprunte certains éléments à la philosophie du langage de Husserl, dans la première partie de cet article nous avons suggéré que le problème de l'opération sur l'inconnue à intérêt à être repensé comme un problème lié aux actes donateurs du sens. C'est dans cette optique que nous avons abordé deux problèmes sémiotiques :

(1) celui de la désignation des objets du discours lors de la construction de narratives symboliques et le sens des expressions symboliques ;

(2) celui des difficultés présentes quand des opérations doivent être menées sur des signes qui racontent une narrative symbolique.

En ce qui concerne le premier point, l'analyse de quelques extraits d'une activité de salle de classe suggère que la réussite des élèves dans la construction de la narrative symbolique dépend de leur possibilité de se déplacer à travers différentes couches de contenu noématique. Nous avons vu, en effet, l'interaction entre les différents sens et la dynamique requise pour enrichir, déplacer et abandonner ces sens. Nous avons également vu comment ceci se fait par des processus de nominalisation où interviennent plusieurs mécanismes sémiotiques, en particulier celui basé sur des déictiques. La nominalisation, en tant que procédure linguistique, permet une objectivation d'objets qui existaient jusqu'alors à l'état potentiel seulement. Elle extrait de l'horizon amorphe sur lequel se meut le discours des

---

<sup>10</sup> Les intérêts de Cordier sont, en effet, plutôt liés aux types d'intervention pédagogique qui pourraient permettre d'éviter certaines erreurs de symbolisation chez les élèves et à aider les élèves à sélectionner les informations contenues dans l'énoncé du problème. Le travail de Damm (1991) se situe dans cette même perspective.

objets qui, de ce fait, deviennent prédicables. Elle assure qu'un « quelque chose » devienne accessible à l'activité intellectuelle des élèves et que ce « quelque chose » soit converti en sujet ou en objet d'un verbe.

En ce qui concerne le deuxième point, en comparant des procédures arithmétiques et algébriques, Vergnaud (1989, p. 37) avait insisté, il y a plusieurs années, sur le changement de sens que les élèves doivent effectuer : « le contrôle du sens des opérations faites ne se fait plus avec les mêmes moyens », disait-il, en se référant aux opérations formelles de l'algèbre. Mais malgré avoir vivement insisté sur le rôle fonctionnel de la représentation et sur le rôle du langage<sup>11</sup> –rôle qu'il a souligné même dans l'apprentissage de l'algèbre (Vergnaud, 1988)–, Vergnaud ne s'est pas arrêté à étudier la genèse du sens et de sa transformation dans l'*action* à travers le *langage*. En étudiant la microgenèse du sens et de sa transformation, dévoilées à travers le langage des élèves, nos observations de salle de classe se placent dans l'interaction de plusieurs systèmes sémiotiques (ou « registres ») – dont la parole et l'écriture dans cet article-ci– et nous laissent voir certaines difficultés qui se présentent dès qu'un calcul formel doit être effectué sur des expressions symboliques élaborées préalablement sous forme de narrative symbolique.

Pour que le calcul formel ait lieu, la narrative symbolique doit s'effondrer. Et cela exige que le sens de l'expression symbolique soit transformé. Une deuxième constitution du sens doit être mise en place. La constitution du sens après le effondrement mérite encore plus de recherche. Alors que Russell (1976, p. 218) considérait la manipulation formelle de signes comme descriptions vides de la réalité, Husserl soulignait le fait que de telles manipulations de signes requièrent un glissement d'attention, un changement noématique. Sans prétendre réduire la nouvelle attention au signe *qua* signe, Husserl soutenait que le centre d'attention doit se placer sur le signe lui-même. Il disait que la manipulation abstraite de signes est possible grâce à des nouvelles significations résultant de règles qui fonctionnent à la manière des règles d'un jeu (Husserl 1961, p. 79), ce qui l'a amené à parler de signes qui ont une *signification de jeu*. Il me semble que la richesse de la métaphore de Husserl réside dans la manière de nous rappeler le rôle culturel et conventionnel des règles. Mais puisque l'arbitraire et le conventionnel sont deux choses différentes, la faiblesse de la métaphore est qu'elle ne nous aide pas à voir la justification derrière la nature du conventionnel.

---

<sup>11</sup> C'est-à-dire le langage *parlé* (Vergnaud, 1985, p. 246).



**Remarque**

Une version abrégée de cet article, dédiée à Raymond Duval, a paru dans : Anne D. Cockburn and Elena Nardi (eds.), *Proceedings of the 26<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME 26*, Vol. 4, pp. 81-88. University of East Anglia, UK.

Luis RADFORD, Ecole des sciences de l'éducation, Université Laurentienne,  
935, chemin du lac Ramsey,  
Sudbury, Ontario, P3E 2C6, CANADA

e-mail : lralford@laurentienne.ca

**BIBLIOGRAPHIE**

BEDNARZ N. et JANVIER B., The emergence and development of algebra in a problem solving context. *Proceedings of the 18<sup>th</sup> Conference of the International group for the psychology of Mathematics Education (PME 18)*, Portugal, 2, 64-71, 1994.

CARRAHER D., SCHLIEMANN A. & BRIZUELA B., Can young students operate on unknowns ? In: M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 24<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht University, The Netherlands, Vol. 1, 130-140, 2001.

CORDIER, N. Les problèmes de mise en équation, en 3<sup>ème</sup> et en 2<sup>nd</sup>. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, vol. 5, 149-176, 1993.

DAMM, W. Compréhension d'un énoncé de problème : le choix de la donnée de référence. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, vol. 4, 197-225, 1991.

DUVAL R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, Vol. 5, 37-65, 1993.

DUVAL R. L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. *Actes du séminaire Franco-italien sur l'enseignement de l'Algèbre*, IREM de Nice, sous presse.

FREGE G., The whole number. *Mind*, 79 (316), 481-486 (Traduction de l'article: Le nombre entier, publié dans: *Revue de métaphysique et de Morale*, vol. 3 (1895), 73-78), 1895/1970.

FREGE G., *Translations from Philosophical Writings of Gottlob Frege*, by Peter Geach and Max Black. Oxford: Basil Blackwell, 1960.

FREGE G., *Écrits logiques et philosophiques*, Paris: Éditions du Seuil, 1971.



- FILLOY E. et ROJANO T., From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 years old.) *Proceedings of the Sixth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, Madison, Wisconsin, 51-56, 1984.
- FILLOY E. et ROJANO T., Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra, *For the Learning of Mathematics*, Vol 9, No. 2, 19-25, 1989.
- HJELMSLEV L., *Prolegomena to a Theory of Language*. Wisconsin: The University of Wisconsin Press, 1969.
- HUSSERL E., *Ideas*. London: The Macmillan Company, 1931.
- HUSSERL E., *Recherches Logiques* (Recherches I et II.) Paris: PUF, 1961.
- LEONTIEV A. N., *Activité, conscience, personnalité*, Moscou: Éditions du Progrès, 1984.
- NEMIROVSKY R., On ways of symbolizing: The case of Laura and the Velocity sign, *Journal of Mathematical Behavior*, **13**, 389-422, 1994.
- NICHANIAN M., *La question générale du fondement: Écriture et temporalité*. Thèse de Doctorat de troisième cycle de Philosophie, Université des Lettres et Sciences humaines de Strasbourg, 1979.
- RADFORD L., L'invention d'une idée mathématique : la deuxième inconnue en algèbre, *Repères* (Revue des instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques), juillet, No. 28, 81-96, 1997.
- RADFORD L., *On Culture and Mind, a post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought*, paper presented at the 23<sup>rd</sup> Annual Meeting of the Semiotic Society of America, Victoria College, University of Toronto, October 15-18, 1998. Consultable sur le site: <http://www.laurentian.ca/educ/lradford/>, 1998.
- RADFORD L., Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, **42** (3), 237-268, 2000a.
- RADFORD L., Students' processes of symbolizing in algebra. A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks, in: T. Nakahara and M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24<sup>th</sup> Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education (PME-24)*, Hiroshima University, Japan, 4, 81-88. Consultable sur le site: <http://www.laurentian.ca/educ/lradford/>, 2000b.
- RADFORD L.b. The Historical Origins of Algebraic Thinking. In Sutherland, R. et al. (Eds.), *Perspectives in School Algebra*, 13-36. Kluwer, 2001.

RADFORD L., *Des limites épistémologiques du langage. Savoir mathématique et pratique sociale à la Renaissance*. Pre-prints 1/2002, École des sciences de l'éducation, Université Laurentienne, 2002a.

RADFORD L., Algebra as tekhnē. Artefacts, Symbols and Equations in the Classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(1), 31-56, 2002b.

RADFORD L., *The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge*. Pre-prints 2/2002, École des sciences de l'éducation, Université Laurentienne, 2002c.

RADFORD, L. On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. Dans M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger et V. V. Cifarelli (éds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa: Legas Publishing, 2003a.

RADFORD L., Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70, 2003b.

RADFORD, L. On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*. (accepté).

RUSSELL B., *An Inquiry into Meaning and Truth*. London: G. Allen and Unwin, 1976.

VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans la théorie opératoire de la représentation. *Psychologie française*, 30(3-4), 245-252, 1985.

VERGNAUD, G. Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. Dans C. Laborde (éd.), *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp. 189-199). Paris : Éditions de la pensée sauvage, 1988.

VERGNAUD, G. Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. Dans N. Bednarz et C. Garnier (éds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits* (pp. 33-40). Ottawa : Agence d'ARC, 1989.