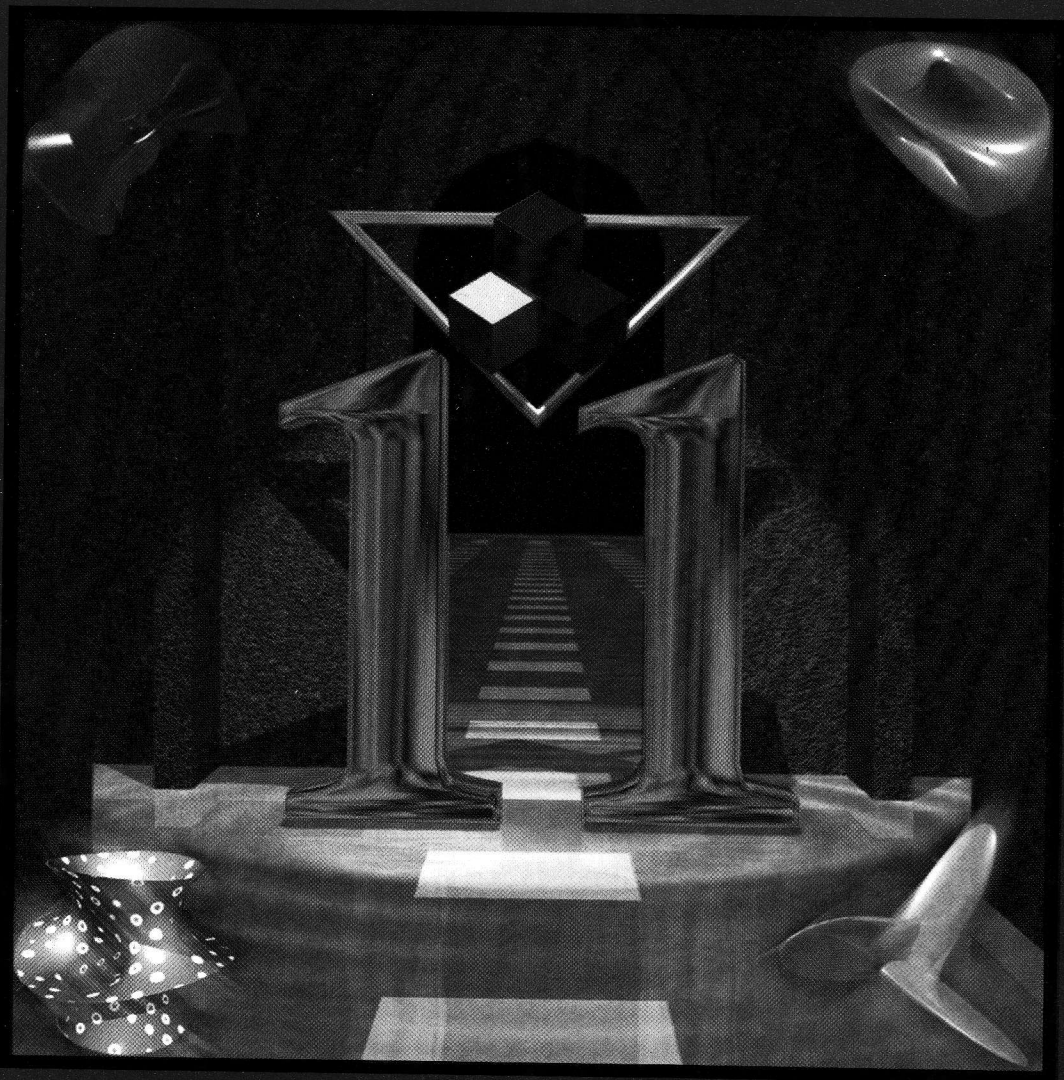

Educación Matemática

Vol. 11 • No. 3 • Diciembre 1999



Grupo Editorial Iberoamérica

S.A. de C.V.



El aprendizaje del uso de signos en álgebra

Una perspectiva post-vigotskiana¹

Fecha de recepción: Febrero, 1999

ARTICULOS
DE
INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 11 No. 3 Diciembre
1999 pp. 25-53

Luis Radford

Université Laurentienne, Ontario, Canada

Lradford@nickel.laurentian.ca

Resumen: *Este artículo describe un programa de investigación en curso acerca del aprendizaje del álgebra escolar. En dicho programa, el aprendizaje del álgebra se concibe como la adquisición subjetiva de un sistema de signos socialmente objetivado e históricamente constituido cuyo sentidos y reglas de uso son ontogenéticamente elaborados como resultado de la participación diferenciada del alumno en actividades matemáticas específicas. Dentro de este contexto, los procesos de uso de signos y elaboración de significados son conceptualizados como procesos a la vez individuales y sociales que emergen en relación a otros sistemas de signos (por ejemplo, sistemas de gestos u otros más característicos tales como el lenguaje y los sistemas de representación gráfica) que ofrece la sala de clase vista ésta como espacio semiótico. En la primera parte del artículo se presenta un marco teórico en el que se sugiere una nueva conceptualización de la idea de signo diferente a la que ofrece el cognitivismo y la teoría de la información. La reconceptualización que se propone, que toma como punto de partida la semiótica Vygotskiana, incorpora ciertos elementos antropológicos que justifican, a nivel metodológico, el interés que toma el discurso y la acción mediada en el diseño, análisis e interpretación de actividades de sala de clase. En la segunda parte se presenta el análisis de un episodio en el que alumnos de 14 años de edad resuelven un problema de generalización algebraica de patrones numérico-geométricos. Se muestra que las acciones y verbalización de acciones emprendidas anteriormente a nivel numérico concreto ofrecen un soporte crucial al uso emergente de signos algebraicos y al sentido con que dichos signos son dotados. De forma más precisa, el análisis del episodio sugiere que la forma que toma la abstracción requerida en el acto de generalizar el patrón queda imbricada en la semiótica de las acciones concretas.*

Abstract: *This article describes an ongoing research program dealing with the learning of algebra. In this research program the learning of algebra is conceived as the subjective acquisition of a socially objectified and historically produced sign system whose meanings and rules of sign use are ontogenetically elaborated as students participate in specific mathematical activities. Within this context, the*

¹ Este artículo, que ha sido posible gracias a una subvención otorgada por *The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada*, grant # 410-98-1287, intersecta dos trabajos anteriores de corte teórico (Radford 1998a, Radford 1998b), y extiende un corto trabajo experimental (Radford 1999). Deseo agradecer al Dr. José Guzmán Hernández del CINVESTAV del Instituto Politécnico Nacional de México, por sus comentarios a una versión anterior del presente artículo. Deseo también agradecer a mis asistentes de investigación Rossella Dorigo, Chantal Filion y Lynn Landry por su valiosa colaboración y participación en este proyecto.

processes of symbolizing and meaning production are conceptualized as both individual and social processes emerging in relation to other sign systems (for instance, gesture systems or other more characteristic ones such as language and graphical systems) offered by the classroom itself seen as a semiotic space. In the first part of the article we focus on some of the points underlying our theoretical framework. We discuss the idea of signs according to Cognitivism and Processing Information Theory and suggest a different conceptualization of signs taking the Vygotskian semiotics as the starting point. At the methodological level, the insertion of some anthropological elements in our discussion leads us to pay attention to the students' and teacher's discourse in the design, analysis and interpretation of classroom activities. In the second part we present the analysis of an episode in which some students in Grade 8 (14 years old) solve a problem about the algebraic generalization of a numeric-geometric pattern. The episode suggests that actions and the verbalization of actions previously undertaken at a concrete numerical level offer a crucial support to the emergent use of signs and the production of meanings. More specifically, it is suggested that, in light of the analysis, the form taken by the abstraction required in the pattern generalizing act remains imbricated in the semiotics of the concrete actions.

Introducción

Es muy bien sabido que uno de los tópicos curriculares más difíciles de la matemática enseñada a principios del nivel secundario es álgebra. En particular, resulta muy difícil para el alumno alcanzar una competencia y maestría adecuada del complejo lenguaje simbólico. Refiriéndose a la inmensa dificultad que los alumnos suelen encontrar en tareas de traducción de problemas del lenguaje natural al lenguaje algebraico, Clement *et al.* decían, hace más de quince años:

Nos dimos cuenta de este problema en una serie de entrevistas filmadas [1] en las cuales pedíamos a estudiantes de college hablar en voz alta mientras trabajaban en problemas simples. (1981, p. 287)

A raíz de esta constatación y muchas otras, una intensa línea de investigación ha sido llevada a cabo desde entonces, lográndose, en particular, detectar muchos de los errores que los estudiantes cometen al tratar de utilizar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones (ver, por ejemplo, Matz 1980, Filloy y Rojano 1989, Gallardo y Rojano 1988). Sin embargo, quedan todavía por entender los procesos que permiten a los alumnos dotar de significados a los símbolos y a las letras del lenguaje algebraico. Poco se conoce de la influencia que tiene el discurso de los profesores en las discusiones de los alumnos y las ideas que éstos se van formando sobre el uso de símbolos.

El problema que estamos mencionado adquiere una importancia fundamental dentro del contexto educativo actual de Ontario. En efecto, el Curriculum de Matemáticas de Ontario cambió en septiembre de 1997. Como consecuencia, algunos tópicos curriculares son nuevos, mientras que otros ahora empiezan antes. Álgebra (un tema que tradicionalmente ha pertenecido al programa de estudios de la escuela secundaria), empieza en este nuevo curriculum en primer grado de primaria. Este

cambio conlleva ciertas dificultades, pues no es posible enseñar el complejo lenguaje algebraico en primer o segundo grado, cuando los alumnos todavía no saben cómo leer y escribir. En términos generales, en lo que respecta al álgebra, el curriculum de primero a octavo grado ha sido dividido en dos grandes temas: (a) patrones y sucesiones y (b) ecuaciones. Del primero al sexto grado, el énfasis es hecho en el estudio de patrones y sucesiones. El estudio sistemático de las ecuaciones empieza en octavo grado. Dentro de este esquema educativo, dos de los problemas más urgentes que los profesores están enfrentando son:

- (i) cómo enseñar álgebra sin usar letras y
- (ii) cómo introducir el uso de signos-letras en octavo grado, dada la experiencia algebraica sin símbolos que los alumnos han ganado en los años previos.

Concomitantemente con este cambio de contenidos en el curriculum de Ontario de matemáticas aparece un cambio de naturaleza metodológica que se traduce por un énfasis marcado en el aspecto de la comunicación en el aula y que es sostenido por una visión más social del aprendizaje, esto es, una visión en la que el alumno es llamado a participar junto con otros alumnos y el profesor en tareas y proyectos en los que la parte discursiva adquiere una dimensión explícita en la elaboración del conocimiento.

En lo que sigue, vamos a describir un programa de investigación en curso en el que unos 120 alumnos y seis profesores se encuentran participando y que tiene como propósito general entender, desde una perspectiva post-vigotskiana, la forma en que los alumnos adquieren el uso de signos.

Primero presentaremos el marco teórico del programa de investigación. Luego presentaremos la metodología que hemos adoptado y en la última parte discutiremos un episodio que proviene de una de nuestras sesiones experimentales en sala de clase sobre el uso de signos en un problema relativo al estudio algebraico de patrones.

1. El marco teórico

1.1 La conceptualización de signos

► La búsqueda del lenguaje universal

El primer problema que hemos encontrado es el de la necesidad de reconceptualizar lo que queremos entender por signos. En efecto, a menudo los signos han sido concebidos como las vestimentas que portan las ideas. La concepción de signo como vestimenta está de hecho sumergida en una perspectiva más general que postula, desde el inicio, una clara dicotomía entre lo espiritual y lo material y que fue un pilar fundamental en la búsqueda, en los siglos 16 y 17, de un *lenguaje universal* que debía, por un lado, salvar al signo de las vicisitudes del efímero y ruidoso lenguaje hablado y, por el otro lado, colocarlo en ese lugar privilegiado contiguo al pensamiento. V.-David (1965) describe muy bien como el contacto Europeo con las “escrituras exóticas” que llegaron tanto de China como de México fueron estudiadas y entendidas

en el marco de la búsqueda del “lenguaje universal” -proyecto que dichas escrituras ayudaron al mismo tiempo a definir mejor. Así, los misioneros jesuitas, que habían sido enviados detrás de las expediciones de descubrimiento y colonización, plasmaron los primeros resultados del estudio de esas lenguas en obras que se propagaron rápidamente en Europa, permitiendo comparar las escrituras europeas que traducen la lengua hablada con, por ejemplo, las pinturas o figuras mexicanas que, dado su carácter icónico, daban cuenta solamente de lo que en Europa se interpretó como “la substancia de las concepciones”.

Siguiendo su propio camino, la idea de un lenguaje universal fue tomada por Frege dos siglos más tarde. Así, en un artículo publicado en 1882, Frege subrayó la importancia de un lenguaje capaz de escribir los conceptos sin pasar por el lenguaje natural, que él consideraba no lógico. Frege reconocía en la palabra escrita una permanencia que la palabra hablada no alcanza. No obstante dicha permanencia, Frege argüía, la palabra escrita hereda desafortunadamente el carácter ilógico de la palabra hablada, en particular, a causa de la ambigüedad que proviene de cierta variabilidad en la aceptación de diferentes sentidos que una misma palabra puede tener. Muy diferente es, según Frege, el caso de las fórmulas de la aritmética, un lenguaje en el que éste veía un claro ejemplo de lenguaje que enfrenta los conceptos y las ideas directamente -un lenguaje que llamó “*Begriffsschrift*” (de Begriff, concepto y Schrift, escritura), y que podría ser traducido como “*ideografía*”. Frege dijo: “El lenguaje basado en las fórmulas matemáticas es una ideografía, pues expresa inmediatamente la cosa sin pasar por los sonidos” (del lenguaje hablado) (Frege 1971, p. 68).

Una de las ideas de base que caracteriza la búsqueda del lenguaje universal de la época es, pues, el supuesto ontológico de un lenguaje que extermina todas las ambigüedades del discurso y que es capaz de ser sometido a los implacables cánones de la lógica formal.

En su obra *De la grammatologie*, una obra que examina con detenimiento la idea de signo en la tradición occidental, Jacques Derrida dice:

La escritura, la letra, la inscripción sensible, ha sido siempre considerada por la tradición occidental como el cuerpo y materia externa del espíritu, del aliento, del discurso y del logos. (Derrida 1976, p. 35.)

Dentro de las perspectivas teóricas (como las que ofrece el cognitivismo o la teoría de la información) en la que las ideas son concebidas como el resultado de procesos intracerebrales íntimos que ocurren dentro de los confines de la caja craneana y que el signo es visto como canal de comunicación o vestimenta de esas ideas, el signo queda confinado a un papel de poca (si acaso alguna) importancia epistemológica. Efectivamente, en dicho caso, el signo puede solamente ser visto como el *medio* que permite arrojar o expeler hacia el mundo externo los resultados de los procesos intracerebrales privados.

Sin embargo, si se toma una perspectiva diferente, en la que las ideas y las conceptualizaciones humanas son concebidas como el resultado de una empresa conjunta, multi-individual, entonces; la comunicación, el lenguaje, las palabras y los signos en general adquieren un papel epistemológico de primera importancia. Esta es la perspectiva que estamos adoptando en nuestro programa de investigación. De

forma más específica, nuestro programa de investigación está sustentado por una perspectiva sociocultural post-vigotskiana que hemos desarrollado en un artículo previo (Radford 1998a) y una de cuyas premisas es que las conceptualizaciones del individuo son concebidas en inextricable relación con su modo concreto de vida, así como con los conceptos y modos de conocimiento (o *epistemes*, para usar la expresión de Foucault 1966) que la cultura pone a disposición de sus miembros.

Si la concepción de signo como vestimenta de la idea aparece pues claramente inadecuada a nuestra forma de ver el individuo y sus ideas, necesitamos, para poder seguir adelante, reconceptualizar el signo y decir cuál puede ser el papel que éste desempeña en una aproximación socio-cultural del pensamiento. A esta altura de nuestra discusión, debemos detenernos un momento y recordar rápidamente la idea del signo en Vygotsky.

► La idea de signo en Vygotsky

En este orden de ideas, se sabe muy bien que, inspirándose de la categoría marxista de labor, Vygotsky concibió el signo como una herramienta (ver, por ejemplo, Wertsch 1991, p. 28; Kozulin 1990, p. 115; Zinchenko, 1985) sugiriendo que así como los seres humanos usan herramientas de labranza para dominar la naturaleza, de la misma manera estos usan herramientas psicológicas para pensar y dominar el comportamiento.

La idea de signo como herramienta psicológica fue sugerida a Vygotsky por ciertos estudios llevados a cabo con animales, en particular en chimpancés, y el uso que los chimpancés hacen de las herramientas para resolver ciertos problemas. Uno de los investigadores que tuvo mucha influencia en Vygotsky a este respecto fue Köhler².

Köhler había observado reiteradamente que los chimpancés tienden a utilizar palos u otros instrumentos para alcanzar ciertos objetivos siempre y cuando dichos instrumentos queden dentro del campo de visión del objetivo mismo. Por ejemplo, en uno de sus experimentos, Köhler colocó un banano fuera de la jaula de un chimpancé. Tschege —el chimpancé en este experimento— alargó su brazo para alcanzar el banano; el intento fue infructuoso, pues el banano quedaba fuera del alcance del brazo. Köhler había colocado un palo en la jaula de forma que el palo y el banano podían ser vistos al mismo tiempo por Tschege. En este caso, el chimpancé tomó el palo y con el mismo alcanzó el banano. Sin embargo, cuando el palo fue colocado en una posición tal que el chimpancé no podía ver el banano y el palo al mismo tiempo, el palo no fue usado. Köhler dice:

He usado todos los medios a mi disposición para atraer la atención de Tschege sobre los palos colocados en la parte trasera de la jaula (...) y ella ha visto directamente los palos; pero al hacer esto, ha girado y el objetivo le ha quedado a su espalda, y de esa forma los palos han permanecido sin sentido para ella. Incluso aun cuando la hemos iniciado, en uno de los tests

² La traducción al ruso del libro *Intelligenzprüfungen an Menschenaffen* de Köhler fue precedida por un prefacio del mismo Vygotsky; el prefacio se encuentra ahora traducido en el volumen 3 de *Collected Works of L. S. Vygotsky* (1997a).

de esta mañana, a la forma de tomar y utilizar los palos, parece perdida en la tarde, a pesar que los palos no han sido movidos de su posición inicial y ella misma ha marchado sobre ellos en el curso de sus movimientos hacia adelante y hacia atrás y ha visto directamente hacia ellos. (1951, p. 37)

Refiriéndose a la estrategia de los chimpancés en los trabajos de Köhler, Vygotsky subrayó el hecho observado por Köhler que el proceso entero de resolución de problemas es esencialmente determinado por la percepción (Vygotsky 1978, p. 31). Por el contrario, Vygotsky observó que durante el proceso de resolución de problemas, niños de cuatro y cinco años hacen uso del lenguaje, y que en vez de ser superfluo o ser simplemente una "invaluable ayuda técnica", como Köhler (1951, p. 267) había sugerido, el lenguaje penetra el estrato de las acciones y se "amarra" a éstas. El lenguaje, Vygotsky notó, sirve primero para organizar las acciones de los niños, y luego adquiere un papel de anticipación que eventualmente resulta en el remplazo de las acciones concretas mismas. Así, Vygotsky tomó metafóricamente las palabras y el lenguaje (y otros objetos físicos) como herramientas psicológicas. Dichas palabras y objetos físicos son al ser humano lo que los palos y otros instrumentos son a los chimpancés en las tareas de alcanzar objetos lejanos.

Esto lo llevó a investigar cómo la percepción (así como la memoria y la atención) resulta profundamente modificada por el uso de herramientas, y lo llevó a la conclusión que mientras el chimpancé queda sujeto al campo sensorial, el niño percibe el mundo no sólo a través de sus ojos y manos sino a través del lenguaje también (Vygotsky 1978, p. 26; Vygotsky y Luria 1994, p. 109). En uno de los varios párrafos consagrados a la percepción, Vygotsky y Luria dicen:

Las leyes naturales de la percepción mejor observadas en los procesos receptivos de los animales superiores atraviesan cambios básicos debido a la inclusión del lenguaje en la percepción humana (la que) adquiere así enteramente un carácter nuevo. (1994, p. 126.)

La idea de signo en Vygotsky (una idea claramente influenciada por la tradición von humboldtiana del lenguaje, y de pensadores como A. Potebnya y G. Shpet, como ha sido puesta en evidencia por van der Veer 1996) fue sostenida por dos eventos históricos mayores. Por un lado, el punto de vista evolucionista que fue frecuentemente adoptado a principios de siglo en las discusiones sobre la mente y la conducta humana que dio lugar a una aproximación comparativa entre cognición humana y animal.

Por otro lado, el papel predominante que desempeñó la tecnología de la época en el dominio y transformación de la naturaleza y los drásticos cambios que la tecnología indujo en los niveles sociales y económicos.

Mientras que el primero de los eventos mencionados indujo un paradigma de investigación en el que el individuo se define en términos de su especie y de su comparación con especímenes que se sitúan cerca de él en el proceso evolutivo, el segundo evento, que fue de hecho un elemento clave en la reflexión ofrecida por el marxismo, compromete a Vygotsky con una idea de ciencia (y de lo que son los conceptos científicos) propia al cientifismo marxista y al pensamiento moderno en general.

Aunque el contexto histórico brevemente mencionado explica las raíces de lo que podría llamarse un concepto tecnológico de signo en Vygotsky -y en general de lo que van der Veer y Valsiner (1991, p. 221) han llamado "psicotecnología"- Vygotsky

pudo brindar dos aspectos sobre los signos que quisiéramos retener en nuestro programa de investigación. Dichos aspectos son los siguientes:

- (1) los signos nos brindan un panorama del mundo que es en realidad más rico que el mundo mismo;
- (2) los signos *no* son cognitivamente neutros.

Mientras que el primero de los dos puntos mencionados aparece claramente en la cita que hemos hecho arriba de Vygotsky y Luria, el segundo punto significa que, contrario a lo que asume la teoría de la información y su idea de signos como canales neutros de comunicación, al usar signos, los procesos cognitivos del individuo se modifican.

Al poner juntos los dos puntos mencionados y al llevarlos a una de sus últimas consecuencias, nos encontramos con que, en las perspectivas vygotkianas, la realidad puede coherentemente ser descrita como una construcción social (lo que sociólogos fenomenologistas como Berger y Luckmann (1967) que habían argüido ya) que (y es esto lo que aparece como completamente nuevo), a su vez, moldea nuestro funcionamiento mental.

Pero los signos, en la perspectiva de Vygotsky, desempeñan otro papel que tiene implicaciones fuertes en el estudio de la mente. Los signos son los artefactos que aseguran la construcción (o internalización) de la actividad interna sobre la base de la actividad externa, previa del individuo:

La internalización de formas culturales de comportamiento conlleva la reconstrucción de la actividad psicológica sobre la base de operaciones con signos. (Vygotsky 1978, p. 57)

► Una reconceptualización del signo

La discusión anterior nos permite ahora describir, de manera más precisa, la forma en que en nuestra aproximación estamos conceptualizando el signo. Los signos no son vestimentas, ni meras herramientas auxiliares para pensar “mejor” o para superar convenientemente las limitaciones de nuestra memoria:

Concebimos a los signos como el resultado de la contracción semiótica de acciones previamente realizadas en el plano social.

Evidentemente, con esto no queremos decir que la acción ocurrió necesariamente en la inmediatez temporal de la producción misma del signo. El signo es, en general, el signo de otros signos. Por ejemplo, la acción pudo haberse originado con el gesto que señala el objeto (primer signo) y que luego se reemplaza por una palabra sonora (segundo signo) que se convierte luego en palabra del lenguaje articulado (tercer signo) y que termina, al final de un largo ciclo, en un signo escrito. Tomemos como ilustración el caso de los signos numéricos utilizados en Mesopotamia en el período “arcaico” (un estudio más detallado lo hemos realizado en un trabajo anterior³).

³ Radford, 1998b.

Entre los primeros signos utilizados se encuentran las llamadas “fichas” (*tokens*) de barro. Dichos signos provienen visiblemente de acciones de conteo previamente ejecutadas sobre los objetos mismos (ganado, por ejemplo) y que sin duda reemplazaron a otros signos como los de señalar el objeto (*pointing*) y las palabras del lenguaje de la época. Dentro del sistema semiótico de las fichas de cómputo, dos fichas corresponden al resultado de la acción sensorial de contar dos objetos. Estos signos dieron origen, más tarde, a otros signos, cuando las fichas fueron frotadas contra la superficie todavía húmeda de pequeñas vasijas de barro. El “signo impreso” aparece así como la contracción de las acciones concretas de conteo de bienes (ganado, en nuestro ejemplo) que luego es substituido por otros signos “escritos” (de tipo icónico respecto a los anteriores) con la ayuda de un cálamo con punta y que luego dan paso a un lenguaje escrito que reproduce el lenguaje hablado (el sumerio y luego el akkadiano).

Siguiendo con esta idea, los signos que un individuo utiliza cuando resuelve un problema no son pues, en nuestra perspectiva, accesorios a través de los cuales el pensamiento interno se manifiesta en el mundo exterior, sino *el pensamiento mismo materializado*. Dichos cálculos son pensamiento mediatizado, el único pensamiento posible, pues sin signos es imposible pensar. Piaget y Inhelder (1966, p. 21) decían que el pensamiento, “en tanto que sistema de significaciones manipulables independientemente de la percepción presente, tiene necesidad de significantes”, y veían en el lenguaje la fuente principal (aunque no exhaustiva) de esos significantes en que el pensamiento queda anclado.

Lo anterior nos lleva a ver signos e ideas como las dos caras de la misma moneda -una “moneda de Moëbius” donde los lados se confunden y se vuelven uno solo.

Queremos insistir en que en nuestra aproximación el signo y la idea no aparecen enmarcados por la diferencia entre lo espiritual o etéreo, por un lado, y lo material o tangible, por el otro, sino como hilos entrecruzados en el tejido de una misma tela. Con esto abandonamos la diferencia tanto terminológica como conceptual entre significado (*signified*) y significante (*signifier*) que conlleva toda la carga teórica de oposición entre los polos de ideas y sus representaciones a la que nos hemos referido anteriormente. Tratando de seguir en la línea de nuestro trabajo anterior mencionado arriba, distinguimos entre signo y significante, entendido este último no como el *eidos* griego sino como la conexión genética de la actividad externa que retiene el signo (volveremos sobre este punto más adelante, en la Sección 4).

Una de las consecuencias de esta aproximación semiótica es que en vez de concebir las ideas como entidades moviéndose en los rincones internos de la cabeza, las ideas resultan *ser* y *estar* en el signo, de suerte, pues, que el signo no es el artefacto que repara una ausencia sino el artefacto a través del cual la idea es engendrada en el marco de la actividad y de las acciones en las que signo e idea adquieren vida y sentido.

1.2 Mediación semiótica

Ilyenkov es quizás quien ha expresado de la forma más clara la naturaleza propia del pensamiento como lo estamos concibiendo aquí cuando dijo que “El pensamiento no es el producto de la acción sino la *acción misma*” (Ilyenkov 1977, p. 35; las cursivas son del original).

Pero, añadamos, la acción (entendida como elemento co-substancial de la actividad en sentido de Leontiev 1984) es mediatizada de una u otra forma por signos

(Wertsch 1991, p. 19, 29 *passim*), por ejemplo, a través de objetos o de la palabra del propio lenguaje, pronunciadas para otros o para nosotros mismos (esto es, el lenguaje 'interno'). De allí que el pensamiento aparezca como acción mediatizada a través de, por y en el signo⁴.

Dos importantes tipos de acciones que nos interesan particularmente en nuestro programa de investigación son:

- (1) diálogo y
- (2) escritura.

Diálogo y escritura aparecen como unidades de investigación para entender los procesos de simbolización y elaboración de sentidos en álgebra. Dichas unidades nos parecen constituir nodos potenciales para identificar convenientemente las configuraciones de las interacciones estudiante/estudiante y estudiante/profesor⁵ y poder situar la manera en que los patrones de discurso⁶ (como solicitudes, elicitaciones, invitaciones, consenso, acuerdos y desacuerdos) se *amarran* con los instancias de comprensión de profesores y alumnos (Edwards 1997) que, articuladas con las creencias que se tienen respecto a las formas aceptadas de conocimiento (Greeno 1989) y de la normatividad del discurso científico, dan lugar a configuraciones específicas de uso de signos.

1.3 El aprendizaje del uso de signos

El tercer elemento de nuestro marco teórico se refiere a la forma en que concebimos el aprendizaje del uso de signos.

Es claro que cuando entramos al mundo, nos enfrenta no sólo con un mundo de objetos y personas sino también con un mundo de signos e ideas, con sus propios esquemas y organizaciones (algo que Voloshinov y Bakhtin llamaban "ideologías"⁷). Como Leslie White dijo:

El hombre crea con palabras un nuevo mundo, un mundo de ideas y filosofías. En este mundo, el hombre vive tan auténticamente como en el mundo físico de sus sentidos. (1942, p. 372)

Además, en este mundo, signos no son utilizados aleatoriamente sino de acuerdo con reglas implícitas o explícitas. Dichas reglas, por supuesto, están más allá del entendimiento del recién nacido. Vygotsky fue muy claro respecto a que los signos tienen primero que todo una dimensión social:

⁴ Una pregunta que se plantea cuando se discute este tema, es la de saber si *toda* acción es mediatizada. Wertsch (1998, p. 25) parece suavizar su posición en su último libro, diciendo que "casi toda acción humana es acción mediatizada." Nosotros sostendremos que *toda* acción perteneciente a una actividad (y por tanto con objetivos sociales específicos) es mediatizada, de allí nuestra referencia a Leontiev y a su teoría de la actividad.

⁵ Algunos formatos de interacción entre profesores y alumnos han sido puestos en evidencia por Voigt 1985, 1989, 1995 y por Bartolini Bussi (1995). Mencionemos, por ejemplo, formatos de interacción estudiados por Bartolini Bussi, inducidos por los profesores con el fin de apropiarse y reinventar nuevos problemas que sugieren los niños en el aula.

⁶ "languaging" como dice Bauersfeld (1995) para subrayar el curso interactivo del discurso cuyos significados están siempre sometidos a una negociación por los propios participantes.

⁷ Ver, por ejemplo, Voloshinov 1973.

Al inicio, el signo es siempre un medio de contacto social, un medio para afectar a otros y solamente más tarde el signo se convierte en un medio para afectarse a uno mismo. (Vygotsky 1997b, p. 103.)

¿Cómo entonces aprendemos a utilizar los signos? Como sugirió Wittgenstein, viendo a otros usarlos⁸.

Sin embargo, para disipar malos entendidos, conviene aclarar que lo anterior no quiere decir que aprendemos con solamente ver a los otros. Tenemos que aprender el juego, esto es, tenemos que participar. Los signos y las reglas de uso se adquieren a través de participación activa: "Aquí el término 'juego de lenguaje' significa enfatizar el hecho que hablar un lenguaje es parte de una actividad o de una forma de vida." (Wittgenstein 1967, § 23).

Desde su propia perspectiva, Mikhailov expresó la idea anterior diciendo que "El sentido real del símbolo es determinado por su uso, por la relación que la regla de uso guarda con otros símbolos del sistema" (1980, p. 212) e insistió en que "Los símbolos en sí, sin el sistema no tienen sentido; el sentido del sistema existe no sólo en el sistema sino también para el sistema." (*op. cit.* pp. 212-123).

Sin embargo, viendo el "sistema" o el "juego de lenguaje" de más cerca, nos damos cuenta que en realidad el mundo alberga diferentes juegos y sistemas semióticos, y el uso como el aprendizaje de muchos de éstos guardan relaciones mutuas. Así, por ejemplo, el complejo uso y aprendizaje de los signos aritméticos está supeditados al lenguaje hablado. La lengua natural, desempeña un papel privilegiado de sostén para la elaboración ontogenética de los otros sistemas semióticos (Duval 1995). Respecto al papel del lenguaje hablado en la adquisición del lenguaje escrito, Vygotsky notaba que:

La comprensión del lenguaje escrito se realiza a través del lenguaje oral, pero gradualmente la trayectoria es acertada, el lazo intermedio en la forma de lenguaje oral se desvanece y el lenguaje escrito se convierte en un símbolo directo tan comprensible como el lenguaje oral. (1997b, p. 142)

La palabra se vuelve un elemento semiótico clave en el desvanecimiento del lazo previamente mencionado que permite la emergencia de cierto grado de autonomía de los otros sistemas semióticos. De nuevo, Vygotsky notaba que:

la palabra que significa el concepto aparece efectivamente primero desempeñando el papel de un indicador que aísla ciertos rasgos de un objeto, llama la atención sobre esos rasgos; sólo luego la palabra se convierte en un signo que representa esos objetos (...). El nombre o la palabra es un indicador de atención y una forma de acercamiento hacia la formación de nuevas ideas. (1997b, p. 172)

Baxandall enfatizó también el papel de las palabras y los nombres diciendo que "Todo nombre se vuelve un indicador selectivo de atención." (1971, p. 48)

Sin embargo, el nombre solo no es suficiente. Por ejemplo, en su libro *The Practice of Mathematics*, Solomon se opone a la idea que el aprendizaje ocurre como

⁸ "Se aprende el juego viendo a otros jugarlo." Wittgenstein 1967, § 54.

consecuencia de la exposición del individuo al nombre de las cosas y a definiciones ostensivas. Refiriéndose a los supuestos implícitos en dicha idea de aprendizaje, Solomon dice:

El proceso de aprendizaje mismo es asumido ser uno de definiciones ostensivas, esto es, se aprende un concepto como resultado de una exposición directa y repetida del objeto; por ejemplo, se aprende el concepto de "rojo" a través de la experiencia que consiste en etiquetar recurrentemente objetos rojos con "rojo" al señalarlos, etc. Sin embargo, este argumento es problemático; no hay una razón necesaria por qué una persona debería singularizar la particular cualidad de ser rojo y no otra". (Solomon 1989, p. 72)

La objeción de Solomon reposa en la idea que un objeto presenta, en general, diferentes cualidades a la vez; por ejemplo, si muestro un cubo rojo al alumno y luego otro más grande, no hay razón para que el alumno se detenga en la cualidad "rojo" en vez de la cualidad "cubo" (o "forma geométrica", si en vez de un cubo más grande le muestro, digamos, una esfera). Suponer la adquisición ostensiva del concepto "rojo", de acuerdo con Solomon, presupone, en efecto, la posesión previa de dicho concepto.

Las observaciones de Solomon nos invitan a ver el aprendizaje de signos y el uso de éstos como una empresa humana en la intersección de diferentes sistemas semióticos. Aunque el lenguaje natural permanece a menudo la institución *par excellence* en estudios culturales sobre la cognición, también hay otros elementos que desempeñan un papel importante. De hecho, el lenguaje natural no se mueve solo, de forma aislada. Estudios sobre la cognición humana han puesto en evidencia el hecho de que el lenguaje hablado se despliega acompañado y complementado por otros sistemas semióticos, por ejemplo, los sistemas de gestos producidos con las manos y los brazos (ver, por ejemplo, Leroi-Gourhan 1964). No hablamos solamente con el lenguaje sino con todo el cuerpo. Durante el despliegue de gestos, las manos pueden servir como productores de signos formando esbozos de objetos (Kendon 1993), mientras que en algunos casos, los objetos concretos pueden ser usados como metáforas de objetos ausentes (una estrategia instrumental utilizada por personas en general y que se convierte en un punto central en el desarrollo de los sistemas de signos de personas con deficiencias auditivas). Los gestos forman un sistema de signos con su propia sintaxis y sentido que permiten la producción de "textos". Como Goldin-Meadow dice, "El lenguaje no está amarrado a la boca y al oído; (el lenguaje) puede también ser procesado por las manos y los ojos." (1993, p. 63)

1.4 Los signos y el aprendizaje del álgebra

Dentro de la perspectiva en que se sitúa nuestro trabajo, concebimos el pensamiento algebraico como un tipo particular de pensamiento matemático genéticamente ligado a una nueva forma de uso de signos cuyos significados son elaborados por los alumnos y el profesor durante su participación en actividades matemáticas. Las actividades, por supuesto, no son cualquiera. Las actividades tienen objetivos (en el sentido de Leontiev 1984) que en este caso son específicas a lo que culturalmente reconocemos ahora como 'álgebra'. Por ejemplo, el estudio de la variables, la gene-

ralización de patrones, la investigación de funciones, la resolución de problemas a través de medios analíticos. De acuerdo a lo expuesto en las sub-secciones anteriores, el pensamiento algebraico no es visto como necesariamente un proceso mental interno. Lo vemos sobre todo como un proceso discursivo amarrado a los signos (escritos y verbales) a través de los cuales ocurre. En este sentido, el lenguaje algebraico resulta ser (como todo lenguaje) una forma (y no un medio) de pensar, actuar y comunicar.

Algunos aspectos metodológicos

La metodología general de nuestro programa investigación está orientada al estudio de la formación de reglas de producción y comprensión del uso de signos en alumnos que empiezan a estudiar el álgebra. La investigación consiste, en particular, en identificar la forma en que diferentes sistemas semióticos intervienen en la formación de reglas de uso de signos. Como lo mencionamos anteriormente, de acuerdo con nuestro marco teórico, estamos interesados en estudiar el uso de signos algebraicos y los sentidos con que los estudiantes los dotan, entendido dicho uso como un proceso que resulta de la confluencia del lenguaje natural y escrito sobre acciones que se producen en el sistema semiótico en que los problemas son planteados al alumno.

Dado que el proceso de formación de las formas de simbolizaciones que se generan en el aula es entendido aquí como proceso social en el sentido amplio, hemos preferido no utilizar estrategias experimentales de tipo "laboratorio" (por ejemplo, entrevistas o cuestionarios). En contraposición a "observar", hemos preferido emplear esquemas metodológicos etnográficos de *observación participativa* (Atkinson y Hammersley 1994). De esa cuenta, el profesor, el investigador y —en ciertas ocasiones, estudiantes del profesorado en período de "práctica pedagógica" — vienen de vez en cuando a discutir con los alumnos. Como la construcción del conocimiento es vista como una co- y reconstrucción social a través de la interacción semiótica mediada de los individuos, construcción que ocurre "a flor de piel" en un sentido que aclararemos más adelante, el papel del investigador y del profesor no se ve relegado al del observador neutro que habla tan poco como puede para no influir a los alumnos⁹.

Nuestra metodología parte del diseño de secuencias de enseñanza para alumnos de 8°, 9° y 10° grado (14, 15 y 16 años de edad, usualmente). En lugar de tomar estudiantes en cada uno de esos grados, estamos interesados en un estudio longitudinal en el que seguiremos cuatro clases de 8° grado por tres años. Así, en este primer año los estudiantes se encuentran cursando el 8° grado; el próximo año, trabajaremos con esos mismos estudiantes cuando estén en 9° grado y luego, un año más tarde, cuando estén en 10° grado. En el diseño de esas secuencias intervienen los profesores, el investigador y los asistentes de investigación. En la segunda fase se procede a la implementación de las lecciones, las cuales son filmadas. En la tercera fase, las video-grabaciones son discutidas, transcritas y analizadas. El análisis de las transcripciones es llevado a cabo a través de un análisis de discurso interpretativo inspirado de los trabajos de Fairclough 1995, Moerman 1988 y Coulthard 1977. La interpretación de resultados da cabida a una retroalimentación que sirve para el diseño de las próximas unidades o secuencias de enseñanza.

⁹ El lector interesado en críticas corrientes contra el objetivismo científico podrá consultar los textos clásicos de Feyerabend, por ejemplo, "Contra el método" 1979 o "Adiós a la razón" 1989, o bien el libro de Latour y Woolgar 1979.

Las lecciones que hemos diseñado están basadas en diferentes sistemas semióticos (por ejemplo, material concreto, gráficas, fórmulas, etc. en las que los problemas que hemos escogido encuentran una formulación precisa). En cada uno de estos sistemas semióticos, los problemas y tareas son tratados a través del sistema semiótico dado o, eventualmente, otro elaborado por los propios alumnos, y esquemas discursivos generados por alumnos y profesores que originan procedimientos de uso de signos.

Uno de nuestros objetivos es el de proveer *descripciones* que muestren el encajamiento de los modos de significación empleados por los estudiantes en términos de los sistemas semióticos y los formatos discursivos con los correspondientes procedimientos de uso de signos. Que ciertos encajamientos puedan repetirse en diferentes contextos y situaciones, puede ser cierto, pero no es ese nuestro problema. No estamos buscando una realidad escondida detrás del discurso sino la realidad que el discurso construye. De esa cuenta nuestra metodología no reposa sobre la verificación experimental de hipótesis con la ayuda de tests estadísticos que asegurarían que el comportamiento de los estudiantes ante tal o tal pregunta sigue una curva normal de media μ_1 y no μ_0 . Al contrario, nuestra aproximación es interpretativa.

En la próxima sección daremos un ejemplo relativo al uso y producción que hacen los alumnos de signos en actividades centradas en la generalización de patrones geométrico-numéricos. Se trata del análisis de un episodio tomado de los discusiones que tuvieron lugar en uno de los cuatro grupos de 8° grado, durante una de las lecciones de introducción a los conceptos de patrones y sucesiones que se ubican al interior del programa de álgebra. El análisis del episodio ilustra ciertos temas generales que nos interesan en nuestro programa de investigación, como:

- (a) el aspecto asimétrico del discurso y la relación conocimiento/poder que éste induce y mantiene;
- (b) el pensamiento como proceso extra-cerebral;
- (c) los mecanismos de objetivación mediada y
- (d) los esquemas discursivos dentro de la cultura del aula.

El propósito de ofrecer el siguiente análisis no es el de derivar resultados definitivos. Se trata de ilustrar cómo los temas señalados emergen en el curso de la actividad discursiva, sensual y mental de los alumnos cuando éstos se lanzan a participar en una actividad cuyo propósito es brindar un espacio de construcción del lenguaje y pensamiento algebraico en alumnos sin experiencia algebraica previa.

3. Un ejemplo en 8° grado

Es conveniente mencionar que el curriculum de matemáticas de Ontario está dividido en cinco dominios: (1) numeración y sentido del número, (2) probabilidades y análisis de datos, (3) geometría y sentido del espacio, (4) modelización y álgebra y (5) medida. Para asegurarse que los profesores no se detengan solamente en aquellas partes del curriculum que les interesa, el consejo escolar al que pertenece la escuela de la que proviene el episodio que discutiremos, ha adoptado la política de una enseñanza cíclica, lo que significa que cada mes los cinco dominios deben ser enseñados, retomándose cada dominio en el punto en el que se dejó el mes anterior.

Nuestro episodio se sitúa en el segundo mes de clases. Los alumnos habían sido introducidos a los conceptos básicos de patrones y sucesiones el primer mes. Durante ese mes, habíamos notado que los estudiantes tenían problemas para construir fórmulas utilizando una sola letra. En efecto, siguiendo una tendencia que ha sido ya mencionada en otras investigaciones (ver, por ejemplo, Laborde *et al.* 1996), los alumnos tendían a utilizar tantas letras como variables había en el problema, sin tomar en cuenta las eventuales relaciones funcionales entre éstas.

El siguiente problema es el primero de una lista de cinco, cuyo objetivo era el de asegurarnos, desde el punto de vista del aprendizaje, que el problema del “múltiple uso de letras” había sido superado.

El enunciado del problema dado a los alumnos es el siguiente:

Observa el siguiente patrón:

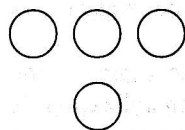


Fig. 1

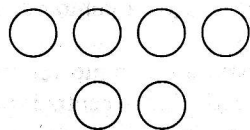


Fig. 2

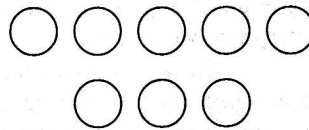


Fig. 3

- a) ¿Cuántos círculos hay
 - * en la parte superior de la figura n° 6?
 - * en la parte inferior de la figura n° 6?
 - * en total en la figura n° 6?
 - b) ¿Cuántos círculos hay
 - * en la parte superior de la figura n° 11?
 - * en la parte inferior de la figura n° 11?
 - c) * en total en la figura n° 11?
 - b) ¿Cuántos círculos hay en la parte superior de la figura n° “n”?
 - e) ¿Cuántos círculos en total hay en la figura n° “n”?
- ¡Explicar la respuesta!

Diálogo:

Tres alumnos participaron en el diálogo. Para efectos de la transcripción, los hemos identificado como alumno 1, alumno 2 y alumno 3. Conviene indicar que nuestros tres alumnos estaban ubicados de tal forma que el alumno 3 estaba frente a los otros dos. El alumno 3 muestra en general un buen rendimiento en matemáticas. Dicho alumno fue “recuperado” por la profesora de una clase de alumnos con no mucha esperanza en cuanto a rendimiento académico se refiere. En general no habla mucho y él mismo se define como una persona que le gusta pensar más que hablar. El alumno 2 le gusta

el trabajo en grupo; su personalidad es más extrovertida que los otros miembros de su grupo y, como el episodio lo mostrará, suele tomar en mano la organización y el trabajo del grupo. El alumno 1, a diferencia de sus dos colegas, no muestra mucho interés en las matemáticas. Él prefiere seguir lo que los otros dicen. Intermitentemente en este episodio dicho alumno muestra una tendencia inusual a participar.

Tiempo línea alumno

diálogo / observación

- 0:00 (1) alumno 2 *(lee el problema)* Observa el patrón siguiente. O.K. Es *(muestra las figuras con su lápiz)* siempre menos ... *(refiriéndose a que hay menos círculos en la fila de abajo que en la de arriba)*
- 0:05 (2). Alumno 1: *(interrumpiendo al alumno 2 y mostrando las figuras con su lápiz dice)* Más uno en cada uno *(haciendo referencia al círculo que se añade la fila superior de cada figura).*
- 0:06 (3) Alumno 2: No, es más dos. Mira *(muestra las figuras con su lápiz)* uno más dos es tres, dos más dos es cuatro, tres más dos es cinco ...
- 0:17 (4) Alumno 1: O. k. Hazlo tú.
- 0:21 (5) Alumno 2: *(leyendo en voz alta la pregunta):* ¿Cuántos círculos hay en la parte inferior de la figura 6? Es más ...
- 0:27 (6) Alumno 1: *(interrumpiendo)* Es más ... Es más dos cada vez. *(El alumno hace notar que cada figura tiene, en total, dos círculos más que el anterior).*
(El alumno 2 es inaudible pero parece intentar resolver el problema)
- 0:38. (7) Alumno 2: Euh ... No... O.K. Empecemos. *(El alumno 2 no entiende el razonamiento del alumno 1 y decide leer la pregunta de nuevo).* ¿Cuántos círculos hay en la parte inferior de la figura 6? ...*(pausa)* Habríaummmm..... 6 círculos.
- 0:46 (8) Alumno 1: *(interrumpiendo)* Más dos.
- 0:48 (9) Alumno 2: ¿De qué estás hablando?
- 0:50 (10) Alumno 1: 6 círculos *(y gira el papel hacia él)*
- 0:52 (11) Alumno 2: *(Interrumpiendo y mostrando con su lápiz las figuras sobre el papel)* Sí, ¡pero mira! Figura 1, un círculo, figura 2, dos círculos, figura 3, tres círculos ... figura 6, seis círculos.
- 0:59 (12) Alumno 1: *(No convencido, pone su lápiz sobre la figura 1, 2 y 3 y cuenta los círculos con su lápiz, repitiendo la explicación del alumno 2)* uno, dos, tres, ¡hey! *(descubriendo el patrón en la parte inferior de las figuras).*
- 1:01 (13) Alumno 2: *(continúa su explicación)* ¡El número de la parte de abajo! *(enfaticando con un tono de voz que sugiere que lo que está mostrando es trivial).*

1:03 (14) Alumno 1: (*interrumpiendo*) ¡Ah! ¡El número de la parte de abajo! O.K. tienes razón.

1:04 (15) Alumno 2: (*hablando al mismo tiempo que el alumno 1 y pasando ahora a responder la última parte de la pregunta a*) ...En la fila de abajo del 6 habría más dos, lo que haría 8 círculos. En total en la figura 6 tendrías ...Uhh, veamos, 8 más 6 ...(*y sarcásticamente añade*) ¡No sé cuánto hace! ... (*escribe la respuesta en el papel*) 14.

(*pausa*)

Comentarios

► Conocimiento, discurso y poder

En este pasaje vemos a los alumnos 1 y 2 discutir sobre patrones. Al inicio, los dos hablan de cosas diferentes (líneas 1-3): mientras que el alumno 2 está centrado en encontrar una relación entre la fila superior e inferior de una misma figura (lectura vertical *intra-figural*), el alumno 1 centra su atención en la búsqueda de una relación entre las filas superiores de las figuras (lectura horizontal *inter-figural*), como lo requiere la primera parte de la pregunta *a*.

Como lo muestra la transcripción anterior, los alumnos no logran explicarse ni entenderse mutuamente. Sin haber aclarado el punto en discordia, pasan a la segunda parte de la pregunta, luego que el alumno 1 cede parcialmente su posición al decir "O.K. hazlo tú" (línea 4).

En este momento el alumno 1 no sólo cede sino adopta una nueva estrategia de investigación (línea 6). En efecto, dicho alumno abandona la investigación de las filas superiores de las figuras y se centra en las figuras completas (es decir, fila superior e inferior, guardando, sin embargo, la lectura horizontal *inter-figural*) y llega a proponer el *mismo* resultado al que había llegado el otro alumno en su análisis *intra-figural* de filas superior/inferior en una misma figura, esto es, la regla: "es más dos cada vez". Sin embargo, el estudiante 2 está ya tratando de responder *otra* pregunta (línea 5), de suerte que la regla que anuncia el alumno 1 en la línea 6 es rechazada (a pesar de que dicha regla coincide con la que el mismo alumno 2 había producido en su investigación inicial, investigación que queda implícita todo el tiempo¹⁰).

Es posible que la solución proporcionada por el estudiante 2 (la regla: "es más dos", línea 3) haya inducido intencionalmente en el alumno 1 una lectura de los patrones que acepta como solución la solución anterior del alumno 2. Es posible que sea eso lo que haya llevado al alumno 1 a abandonar la lectura por filas que mostró al inicio y a interesarse solamente en la estructura numérica del patrón y "ver" cada figura como una entidad numérica global (aproximación al problema que contrasta con la del alumno 2, que "ve" cada figura como una entidad geométrica compuesta de dos filas).

¹⁰ En la línea 3, el alumno 2 ha dicho "es más dos"; en la línea 6 el alumno 1 dice "es más dos cada vez".

En todo caso, es importante notar que la discordancia entre los resultados (es decir, las reglas propuestas) no logra resolverse a través de una búsqueda de comprensión de los objetivos de dichas investigaciones. Si, como hemos dicho anteriormente, los alumnos no solamente no se entienden ni buscan entenderse, es cierto también que se niegan mutuamente la posibilidad de estar en lo cierto (por ejemplo, el alumno 2 dice claramente “No”, en la línea 3; y si en la línea 11 dice “Sí” a la explicación del otro, el “sí” no puede ser tomado como una aceptación del razonamiento que le es propuesto sino como pivote en su estrategia discursiva para vencer al otro). En otros términos, las voces no logran articularse y se pierden en una polifonía sin reconciliación. La única forma que encuentran para salir del doble embrollo (el primero ocurre en las líneas 1 a 3 y el otro en las líneas que van de 5 a principios de 7) es empezando de nuevo desde la lectura de la pregunta misma (línea 7). Pero cuando el alumno 1 insiste de nuevo en que es “más dos”, su solución es rechazada. El tono en que la pregunta “¿De qué estás hablando?” es hecha (línea 9) vuelve difícilmente dicha instancia discursiva una pregunta. En efecto, el tono insinúa otra cosa (como “deja de decir tonterías y presta atención”).

Las palabras tienen un patrón que crea, induce y mantiene las instituciones sociales de poder y jerarquía en cuyas avenidas el conocimiento transita en una forma y no en otra. En este caso, la estructura de poder es tal que el alumno 1 es relegado a un papel en el que debe conformarse con las explicaciones de los otros. Este punto es hecho aún más claro, más adelante, cuando los alumnos están tratando de resolver la siguiente pregunta (pregunta b). En este caso, el alumno 3 interviene por primera vez y menciona exactamente *la misma regla* que el estudiante dio en las líneas 6 y 8, esto es: “más dos”. Esta vez, sin embargo, la recepción de la misma frase (de la misma *utterance*), es diametralmente opuesta. Estas son las líneas:

1:30 (16) Alumno 2: (*leyendo la pregunta en voz alta*) ¿Cuántos círculos hay en ... (*la lectura se prosigue mentalmente*) ...11 círculos. Arriba (*refiriéndose a la figura*)...

1:37 (17) Alumno 3: más dos

1:38 (18) Alumno 2: ¿Qué?

El alumno 2 reconoce el talento del alumno 3. Su actitud hacia él es la opuesta a la que él tiene hacia el alumno 1. Ahora la pregunta “¿Qué? De la línea 18 es realmente una pregunta, esto es, una expresión del lenguaje que requiere una explicación de parte de la persona a la que la pregunta es dirigida.

Las estructuras de poder en las que transita el conocimiento dependen, por supuesto, de la cultura y, en particular, de la cultura de la sala de clase. Esta última hereda ciertos moldes de la cultura general de la cual forma parte. La cultura de la sala de clase crea las condiciones de emergencia y funcionamiento de esquemas discursivos diferentes.

En el extracto anterior vemos cómo ciertos esquemas de conflicto que provienen de estrategias de investigación diferentes quedan sin solución, mientras que otros se resuelven según el papel que los alumnos adoptan y la idea que se han hecho de lo que es la respuesta a un problema de matemáticas. Los conflictos no logran llevar a *impases*, gracias a esquemas diversos como el de empezar de nuevo la tarea (lo que

da la impresión de un regreso a un punto de partida con un balance en la negociación igual a cero, o de dar provisionalmente la razón al otro por medio de fórmulas discursivas como “sí, pero...”.

El papel que los esquemas discursivos desempeñan en el plano cognitivo puede ya verse en el extracto anterior a nivel de la forma en que las estrategias de investigación se van conformando y negociando; sin embargo, esto quedará más claro cuando nos discutamos elementos relativos a los procesos de objetivación mediada. Pero para poder explicar esto, necesitamos aclarar previamente algunos aspectos adicionales acerca de la concepción que estamos empleando respecto al conocimiento. Digamos, para cerrar esta parte de nuestra discusión, que no estamos adjudicando al diálogo una naturaleza exclusiva de combate. De hecho, en otros grupos, el diálogo adquiere un tono epistemológico completamente opuesto, en el que los alumnos son llevados tranquilamente por el discurso del alumno o alumna que logra realizar mejor o más rápido las tareas presentadas. En ese caso, la relación poder-conocimiento transita por diferentes estructuras¹¹.

► El pensamiento afuera del organismo

Regresemos una vez más a las líneas anteriores para poner en evidencia otro fenómeno interesante. En la línea 11, el alumno 2 coloca su lápiz sobre la fila inferior de las figuras. El lápiz (un artefacto cultural) se convierte en una herramienta de pensamiento para centrar la atención y efectuar un examen minucioso (diríamos un “scanning”) del patrón geométrico dado. El lápiz se convierte, junto con los signos-figuras, en uno de los agentes mediadores de las acciones-pensamientos. Observemos, sin embargo, que el lápiz y los signos-figuras no agotan el conjunto de agentes mediadores en este episodio. Tenemos palabras también. Con la ayuda de palabras (“figura 1, un círculo, figura 2, dos círculos, figura 3, tres círculos Figura 6, seis círculos...”) el alumno descompone las figuras. Como lo sugería ya la cita de Baxandall dada previamente, los nombres (“figura 1, un círculo”, “figura 2, dos círculos”, etc.) se convierten en un indicador selectivo de atención, una herramienta (en el sentido de Vygotsky) para desensamblar la realidad e investigarla.

Queremos sugerir que, en esta precisa ocasión, el pensamiento no está *dentro* de la mente o *debajo* del cuero cabelludo, sino que el pensamiento está externamente distribuido en el diálogo, en los signos-figuras sobre el papel y en el lápiz.

Por supuesto, esta idea es contraria a la idea tradicional que afirma que que el funcionamiento mental es algo que ocurre privadamente dentro de la cabeza. Pero como el antropólogo Geertz ha notado:

La idea corrientemente aceptada según la cual el funcionamiento mental es un proceso intracerebral que puede ser sólo secundariamente asistido o amplificado por los varios dispositivos artificiales que dicho proceso ha permitido al hombre crear, resulta estar completamente equivocada. Al contrario, siendo imposible una definición adaptativa, completamente específica de los procesos neuronales en términos de parámetros intrínsecos, el cerebro humano es completamente dependiente de recursos culturales

¹¹ Nuestro recurso al término de estructuras discursivas no debe ser entendido en el sentido del estructuralismo relacional clásico, sino como arquitecturas que surgen de procesos discursivos locales y contextuales.

para su propia operación; y esos recursos no son, en consecuencia, [objetos] añadidos a la actividad mental sino constituyentes de ésta. (1973, p. 76)

Precisamente, otro antropólogo —Gregory Bateson— se pronunciaba igualmente contra la idea del pensamiento como algo interno. Bateson decía que no hay fronteras en el pensamiento. Lo que piensa es el *sistema total* que es el hombre más la naturaleza. Y su ejemplo más conocido es el del hombre ciego y su bastón:

Supongamos que soy un hombre ciego que voy con un bastón. Voy tap, tap, tap. ¿Dónde empiezo? ¿Está mi sistema mental acotado por el mango del bastón? ¿Está acotado por mi piel? ¿Empieza a la mitad del bastón? ¿Empieza en la punta del bastón? (...) Si lo que Ud. está tratando de explicar es el una pieza dada de comportamiento, como el movimiento del hombre ciego, entonces, para ese propósito, Ud. necesitará la calle, el bastón, el hombre (Bateson 1973, p. 434)

► Procesos de objetivación mediada

Prosiguiendo con nuestros comentarios, detengámonos ahora en la línea 12.

Vemos aquí al estudiante 1 haciendo eco al estudiante 2. En efecto, en la línea 12, el alumno 1 toma su lápiz y examina con la ayuda del artefacto 'lápiz', como lo hizo su compañero en el momento anterior, el patrón dado. Con el lápiz y con las palabras el alumno 1 abre a la percepción las figuras en dos filas, superior e inferior. La expresión "¡Hey!" aparece como testimonio de la comprensión que comienza a alcanzar el alumno 1 y que, a través de este proceso de *mimesis*, es objetivada en la línea 14, donde el alumno hace suyas las *mismas* palabras pronunciadas por su compañero en la línea 13. Como este último, el alumno 1 dice: "¡El número de la parte de abajo!"

Los procesos de imitación constituyen uno de los recursos más poderosos con que disponen los alumnos en la co-construcción del conocimiento. El ejemplo anterior lo muestra claramente. Desafortunadamente, en nuestra sociedad en general y en el terreno de la educación en particular, la imitación ha sido peyorativamente considerada como un procedimiento de poca profundidad. Como vemos en el ejemplo anterior, es el alumno 1 el que, en un proceso de objetivación mediada del conocimiento, repite las palabras del alumno 2. Dicha objetivación le permite luego abordar las siguientes preguntas con una mejor comprensión del patrón. Como veremos más adelante (línea 80), en el momento crucial del episodio (crucial desde el punto de vista del desencadenamiento que permite encontrar la fórmula matemática de la pregunta "c" planteada en este problema) no es el alumno 1 sino el alumno 2 el que objetiva según el esquema de *mimesis* del que estamos hablando, haciendo suya, en forma interrogativa, la solución que propone el alumno 3. Quizás Baldwin tenía razón cuando decía que

a través de la imitación el niño adquiere las riquezas almacenadas de los movimientos sociales de la historia; a través de la imitación aprende a usar las herramientas de la cultura, el lenguaje, la escritura, habilidades manuales de manera que a través del uso independiente de esas herramientas se puede convertir en un individuo más fructífero y competente; finalmente, es imitando en el curso de variados y esforzados intentos que [el niño] logra convertirse en original e inventivo. (Baldwin 1911, p. 21)

► Interpretando “el número cualquiera”

Detengámonos ahora en el diálogo que originó la búsqueda de la solución a las preguntas c y d. Uno de los objetivos de la lección era, como lo hemos señalado previamente, el de introducir a los alumnos a la construcción de un nuevo objeto matemático que usualmente se caracteriza a través de un proceso de *generalización* y que encontramos en nuestro programa de estudios bajo el nombre de “término general de una sucesión”.

Como los propios alumnos mostrarán en el diálogo que sigue, el problema fundamental con este concepto de “término general” es que no es en sí un elemento de la sucesión. De hecho, en un trabajo previo sobre la generalización en álgebra hicimos notar que dicho concepto no es expresable en el sistema semiótico en el que se expresa la propia sucesión (Radford 1996). Para plantear la pregunta misma acerca del término general se requiere “salir” del primer sistema semiótico.

¿Cómo, entonces, en este caso en particular, la construcción del nuevo objeto es posible? ¿Cuáles son los recursos semiótico-discursivos que se ponen en marcha en el proceso de construcción del objeto?

Para intentar aportar algunos elementos de respuesta, veamos la parte siguiente del diálogo.

- 1:41 (21) Alumno 2: Wow! (*refiriéndose a la pregunta anterior*) Esa era fácil. (*Lee ahora la otra pregunta*) ¿Cuántos círculos hay en la parte superior de la figura ...? (*el alumno viene de toparse con la expresión “... la figura n”*) ¿Qué? (*enviando el papel con un gesto hacia los otros dos alumnos*). O.K. ¡Esto que lo haga otro!
- 1:59 (22) Alumno 1: (*Lee la pregunta*) ¿Cuántos círculos ...?
- 2:01 (23) Profesor: (*acercándose a la mesa de trabajo de los alumnos*) ¿Están despiertos esta mañana?
- 2:03 (24) Alumnos: ¡Sí!
- 2:05 (25) Alumno 1: ¿Qué significa esto? (*refiriéndose a la pregunta del problema*)
- 2:07 (26) Alumno 2: No sé (*y golpea la hoja con su lápiz*)
- 2:13 (27) Alumno 1: ¿Cuál es la figura n?
(inaudible)
- 2:22 (28) Alumno 1: Shut up (*dirigiéndose al alumno 2*) I'm going to kill you (*expresiones idiomáticas que dejamos sin traducir*)
¿No es qué letra en el alfabeto?
- 2:33 (29) Alumno 2: (*dirigiéndose al alumno 1*) pregúntale al profesor

Comentarios:

En un lapso de menos de un minuto el panorama se ha ensombrecido. Mientras que la pregunta b fue respondida rápidamente por el alumno 2 (menos de 20 segundos)

sin ninguna objeción por parte de los otros, la pregunta c les resulta ininteligible. El fracaso de un plan de acción en el curso de la resolución de un problema y su impacto en el aspecto emocional del individuo (visible aquí en el cambio emocional que acusa en particular el alumno 2) ha sido estudiado, entre otros, por McLeod 1989, de manera que no nos detendremos en ello en estos comentarios. No obstante, señalemos, antes de continuar que, al abandonar, como lo estamos haciendo aquí, las perspectivas que postulan que la Razón (con mayúscula) es ajena a las emociones, o que éstas sólo pueden ser dañinas al cálculo frío, el papel de las emociones se convierte en un problema digno de todo interés. Tikhomirov y Vinogradov (1970), en una serie de experimentos han encontrado que la heurística en la que se inserta la búsqueda de una solución es en cierta forma monitoreada por las propias emociones y que la solución "intelectual" a un problema suele ser precedida por lo que estos autores llamaron una "solución emotiva" (p. 210). Mientras que el alumno 2 queda bloqueado ante el problema, el alumno 1 se lanza a la búsqueda de otro plan:

2:48 (30) Alumno 1: *(contando las letras del alfabeto que ha escrito sobre el escritorio)* Catorce. Entonces, *(reformulando la pregunta en términos del nuevo plan)* ¿cuántos círculos en total tendrá ...

2:53 (31) Alumno 2: *(interrumpiendo)* No, no en total *(haciendo ver que no es la pregunta d sino c la que se está discutiendo)*

2:54 (32) Alumno 1: *(retomando la palabra)* ¿Cuántos círculos tendrá la fila superior de la figura 14. N es 14.

3:00 (33) Alumno 2: ¡No! ¡No es 14!

3:01 (34) Alumno 1: ¡Sí! ¡Sí es!

(en ese preciso momento de casualidad el profesor se aproxima al grupo)

3:02 (35) Alumno 3: ¿Qué es n?

3:04 (36) Alumno 2: *(dirigiéndose al profesor)* ¿Qué es n? No lo sabemos...

3:08 (37) Profesor: *(girando la hoja hacia él, lee en voz alta)* ¿Cuántos círculos hay en la parte superior de la figura número n?

3:13 (38) Alumno 3: *(repitiendo su pregunta)* ¿Qué es n?

3:15 (39) Alumno 1: N es 14 pues es la catorceava letra del alfabeto ¿no es cierto?

3:20 (40) Alumno 2: *(adoptando el plan del alumno 1 que había rechazado anteriormente, cuenta las letras escritas por éste)* uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce.

3:28 (41) Profesor: *(mientras que el alumno 3 examina de nuevo la pregunta, viendo que el profesor no proporciona una respuesta)* n es un número cualquiera.

3:32 (42) Alumno 2: O.K.

3:33 (43) Alumno 1: ¿Qué es n?

3:35 (44) Profesor: Un número cualquiera *(mientras tanto el alumno 3 regresa a la pregunta a)*

- 3: 39 (45) Alumno 1: No entiendo
 3:41 (46) Profesor: ¿No entiendes?
 3:42 (47) Alumno 1: No.
 3:43 (48) Alumno 3: (*inaudible; tiene la hoja del problema y empieza a hablar al profesor cuando éste le hace una pregunta*)
 3:44 (49) Profesor: ¿Entiendes qué es n?
 3:45 (50) Alumno 3: ¿Para cuál? (*refiriéndose a las figuras*) ¿éste, éste o éste? (*y muestra las figuras con el lápiz*)
 3:46 (51) Profesor: No importa cuál.
 3:50 (52) Alumno 3: O.K. (*inaudible*) El término multiplicado por... (*muestra las figuras sobre la hoja*)... estos tres aquí (*indicando la parte inferior de la figura 3*)... Ud. tiene dos más aquí (*refiriéndose a la parte superior de la figura 3*) (*silencio*)
 4:10 (53) Profesor: (*dirigiéndose al alumno 2*) ¿Y tú? ¿Tienes una idea de qué es n?
 4:12 (54) Alumno 1: (*interrumpiendo*) 14.
 4:13 (55) Profesor: Puede ser 14 ...
 4:14 (56) Alumno 2: (*interrumpiendo*) ¿No importa qué número?
 4:15 (57) Profesor (*continuando la frase anterior*) ... puede ser 18, puede ser 25...
 4:18 (58) Alumno 1: ¡Ah! ¿Puede ser cualquier número?
 4:19 (59) Alumno 2: (*interrumpiendo*) El número que decidamos
 4:20 (60) Alumno 1: O.K. entonces (*tomando la hoja*) O.k, n puede ser euhh...
 4:26 (61) Alumno 2: Doce
 4:27 (62) Alumno 1: Sí
 4:28 (63) Profesor: Pero... sí. ¿Qué ibas a escribir?
 4:31 (64) Alumno 1: 12
 4:32 (65) Alumno 2: 12

Comentarios:

El extracto anterior muestra cómo el profesor lanza la construcción del objeto en una dirección que es interpretada por los alumnos en un forma inesperada. En la parte que sigue del diálogo veremos la acción prácticamente desesperada que el profesor despliega con el fin de recuperar el sentido que quiere dar a la frase "un número cualquiera". Por el momento veamos cómo ese sentido indeseado se "filtra" en el diálogo.

La primera ocurrencia de la frase es en la línea 41. En la línea 37 el profesor se ha limitado a responder con la pregunta misma, lo que evidentemente no aclara en nada a los alumnos. Ante la insistencia de éstos, y probablemente viendo que estos partían en una dirección equivocada (n igual a 14, dado que n ocupa la posición 14 en el alfabeto), en la línea 41 la respuesta ("n es un número cualquiera") pretende ahora aportar más información. La continuación del diálogo muestra que los alumnos entienden dicha expresión como "un número cualquiera" en el sentido del sistema semiótico de la aritmética, es decir, como un número arbitrariamente escogido, pero concreto. Por ejemplo, el alumno 3 pregunta a qué figura se está haciendo referencia (ver línea 50), mientras que los otros dos alumnos deciden que el número cualquiera será 12.

► **La misión de rescate del significado perdido**

Veamos ahora la acción de recuperación del significado que lanza el profesor.

4:33 (66) Profesor ¿Y si Uds. dejan para decir un número cualquiera? ¿Cómo podríamos encontrar... cómo podríamos encontrar el número de círculos de un término cualquiera? (*haciendo un gesto dinámico con la mano, como si tocara uno a uno los términos de la sucesión, casi creando el objeto con las manos allí mismo donde las palabras ya no le alcanzan para hablar...*).

(silencio)

4:51 (67) Alumno 2: ¿Figura n? No hay figura n.

4:54 (68) Alumno 1: (*dirigiéndose al alumno 2*) ¡Acaba de explicar que n es lo que tú quieras!

4:57 (69) Alumno 2: (*interrumpiendo al alumno 1*) ¿Qué es esto?

5:01 (70) Alumno 1: O.K. Umm... siete (*escribe sobre la hoja, luego duda*)

5:10 (71) Alumno 2: No arriba. Son siete círculos (*toma la hoja y mira*)

5:13 (72) Alumno 1: ¡Sí! Y abajo es cinco círculos

5:21 (73) Alumno 2: (*escribe la respuesta y lee la siguiente pregunta*) ¿Cuántos círculos en total ...? (*inaudible*)... 12 círculos (*escribe la respuesta*). (*el alumno 1 toma de nuevo la hoja*)

5:42 (74) Profesor : Entonces, euh... (*mira la hoja*) ¡espera, espera! Pero para un número cualquiera... esto Uds. lo han hecho para siete círculos, pero si siete ... para no importa cuál ...

5:52 (75) Alumno 2: (*indica la hoja con su lápiz*) Añades 2 al número de abajo ...restas.. ah no, añades 2 al número de arriba. Si es siete, el número que ...

Comentario:

El embrollo se resuelve no sobre un ejemplo concreto sino sobre la *toma de conciencia* de una acción concreta realizada previamente. Y queremos insistir en que se trata de una toma de conciencia, pues la acción ha aparecido en otras ocasiones con anterioridad, excepto que en este caso la acción aparece como elemento de respuesta dentro del contexto de la discusión del “número cualquiera”. En este momento, los alumnos alcanzan a formular la acción no como una acción concreta dentro de la aritmética (que daría como resultado un número concreto, es decir, un número particular) sino una *acción potencial* en el metacódigo del lenguaje natural.

Como se ve, el nuevo objeto se construye con palabras: “Añades 2 al número de abajo...”. Lo que llamamos generalidad queda aquí atrapada en la expresión “el número de abajo”—expresión que guarda toda la *sensualidad* de las figuras en el espacio— y la operación de añadir (“Añades 2”) a la que se somete ese número

impronunciable dentro de la propia aritmética. La formulación condicional que utiliza el alumno muestra claramente dos cosas: primero, que estamos en presencia de dos niveles conceptuales diferentes (uno general y el otro particular) y, segundo, cómo los niveles quedan conectados entre ellos.

Notemos que no nos parece acertado atribuir solamente al cambio, por parte del profesor, de la frase “un número cualquiera” por la frase “no importa cuál [número]” la razón que mueve al alumno 2 a concebir la acción potencialmente. Habría que incluir en la explicación el hecho que el profesor no ha aceptado las respuestas anteriores. El rechazo (a veces cortés, a veces condescendiente, pero siempre claro) del profesor mueve a los alumnos a la búsqueda de una nueva significación de la respuesta que exige el problema.

Queda todavía el trabajo de la construcción de la fórmula:

- 6:01 (76) O.K. ¿Podrías poner eso en una fórmula ...
- 6:04 (77) Alumno 3: Uhh...
- 6:05 (78) Profesor: (*completando la frase anterior*) utilizando n?
- 6:06 (79) Alumno 3: Uhh... es el término por dos más dos.
- 6:10 (80) Alumno 2: ¿El término por dos más dos?
- 6:12 (81) Alumno 3: (*mostrando con su lápiz una de las figuras sobre el papel*)
Uhhh... 2 por 6 ... 2 por 3 es 6, más 2 ...
- 6:21 (82) Profesor: ¿Puedes repetir? (*mostrando las figuras sobre la hoja*)
- 6:23 (83) Alumno 3: Sí. El término por dos más dos (*el alumno 2 escribe la explicación sobre el papel mientras que el profesor mira lo que el alumno escribe*)
- 6:28 (84) Profesor: Escribanlo, ¿eh?
- 6:30 (85) Alumno 2: (*diciendo lo que escribe*) El término por dos más dos
- 6:37 (86) Alumno 1 (*leyendo la respuesta*) O.K. El término por dos más dos
- 6:41 (87) Profesor: ¿Entiendes? (*dirigiéndose al alumno 1*)
- 6:42 (88) Alumno 1: Sí, sí, entiendo
- 6:42 (89) Alumno 2: (*respondiendo al mismo tiempo*) Sí.
-

7:38 (107) Profesor: (*señalando la hoja con el dedo*) ¿y si Uds. quisieran utilizar la letra n en la fórmula?

7:42 (108) Alumno 2: (*acercando la hoja hacia él*) n por dos más dos (*el alumno escribe la fórmula en la hoja*).

Comentario:

La palabra “término” es, desde el punto de vista de la teoría matemática, mal empleado por los alumnos en este problema. En efecto, como ya lo habrá notado el lector, hay una confusión entre “término” y “rango”. Sin embargo, el significado es claro. Quizás conviene más notar que, independientemente de la legitimidad matemática de la palabra “término”, dicha palabra viene a ser una herramienta que per-

mite un refinamiento en la construcción del objeto. El uso de palabras aparece como el uso de herramientas en el aprendiz. Primero torpemente (con relación al especialista), luego con paulatina maestría. El aprendizaje del uso de signos parece obedecer al mismo destino.

4. Síntesis y observaciones finales

En este artículo hemos presentado brevemente el marco teórico socio-cultural sobre el cual reposa nuestro programa de investigación, cuyo propósito es la comprensión del uso de signos que hacen los alumnos en álgebra y la forma en que dichos signos son dotados de significados. Una de las facetas distintivas del marco teórico reside en una diferente conceptualización de signos (y de la cognición en general) de la que se encuentra generalmente en marcos constructivistas o socioconstructivistas.

En nuestra perspectiva, los procesos cognitivos no ocurren dentro de la mente. Los procesos cognitivos son vistos como procesos que ocurren en el plano social. Las "ideas" (y el pensamiento en general) se conciben como contracciones semióticas de acciones llevadas a cabo en el exterior del individuo. Siguiendo a Vygotsky, concebimos las ideas como acciones interiorizadas a través de signos y otros artefactos culturales. Otra forma de decir esto es que las ideas son vistas como la interiorización de acciones mediadas. El episodio de sala de clase que hemos discutido y analizado aquí ilustra bien, creemos, este punto.

En efecto, el concepto de término general aparece como una acción potencial desplegada previamente en el plano social y que se interioriza en y a través de signos (en particular, en nuestro ejemplo, palabras y signos matemáticos). Dicha acción potencial que encierra la forma de una generalización es la expresión particular de las acciones concretas que encuentra cabida dentro de la actividad mediatizada (no sólo por el lenguaje sino también por el artefacto cultural "lápiz") de los alumnos durante las reflexiones de éstos en torno a un problema planteado dentro de un sistema semiótico particular. En términos de la distinción semiótica entre signo y significante que mencionamos en la sub-sección 1.1, la componente 'significante' (*signified*) relacionada al término general del patrón guarda la conexión genética de la actividad externa y los artefactos que la mediatizan. Por otro lado, las reflexiones y uso de signos (esto es la comprensión y producción de los signos) quedan inmersos en esquemas o formatos discursivos con sus avenidas propias de poder y conocimiento que prevalecen en la sala de clase, de acuerdo con la cultura de ésta.

Tal y como lo hemos visto, la acción potencial que hace posible lo que suele llamarse la generalización encuentra expresión en la semiótica de las acciones concretas y el modo de pensamiento que éstas producen (ver Diagrama). Contrario a la idea tradicional, la generalización no es la evacuación del contexto, sino otra expresión contextual de las acciones anteriores, las que explican la acción potencial (por ejemplo, simplemente dándole sentido) al mismo tiempo que ésta última, aun sin estar allí, las explica ya en su naturaleza concreta. Y es que la acción potencial está ya allí sin estar allí, haciendo posible que el sexto, séptimo u otro término cualquiera sea estudiado *de la misma forma que los anteriores*. Lo concreto y lo abstracto revisten una dimensión temporal que no es lineal sino dialéctica, en el que ambos se anticipan mutuamente, dentro de los límites que traza la racionalidad de los individuos y los sistemas semióticos que éstos van creando.

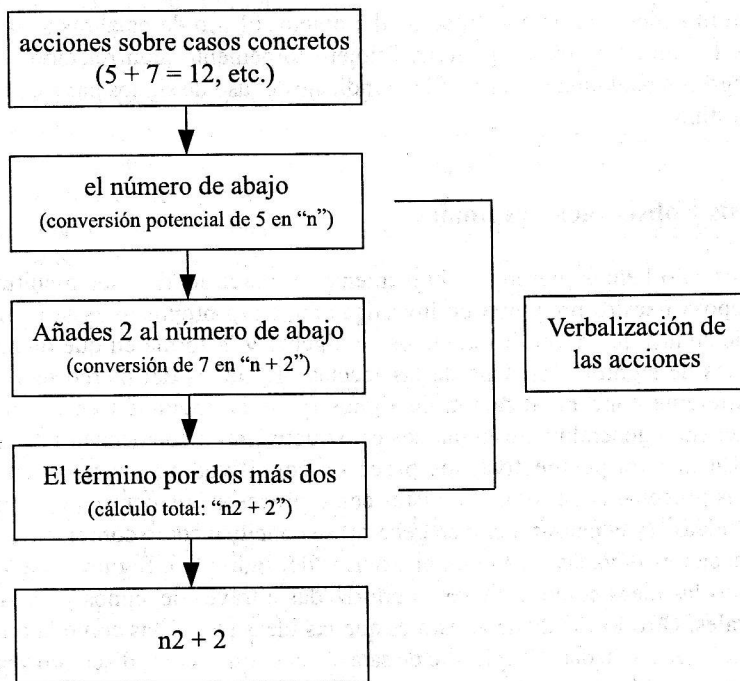


Diagrama representando, en forma de superposición, el estructura del esquema de generalización.

Este episodio no desentraña la complejidad de los sistemas semióticos presentes, pero sugiere cómo estos se van entremezclando en el curso del diálogo, desde la partición de la figura en dos filas (superior e inferior) que permite el lápiz, visto aquí como artefacto cultural y herramienta psicológica de investigación del problema, y que viene a funcionar un poco como los palos en los experimentos de Köhler, hasta la producción de la fórmula "n2+2" que escriben al final los alumnos (fórmula que está ya cerca de la expresión matemática deseada: $2n + 2$) y que aparece como instancia de internalización de las acciones que componen la actividad del problema, algunas de las cuales remonta probablemente a los primeros años de escolarización de nuestros alumnos. Notemos a este respecto que, como sugirió Leontiev, tomamos interiorización como un proceso constructivo en el que el plano de interiorización resulta ser formado (Leontiev 1981) y no como un puente o un canal que liga dos planos formados *previamente*, uno interno y otro externo, como podría verse desde una perspectiva idealista. Y añadimos que la internalización permanece esencialmente un proceso exterior en la medida en que, como Voloshinov nos permite concebirlo, el plano interno es un plano en la intersección del exterior e interior del individuo biológico, esto es, un plano en el que su actividad discursiva interna (o mental) queda anclada en su actividad externa semiótica-discursiva.

Dentro de esta perspectiva, hemos sugerido que el pensamiento no es *acarreado* o *vestido* por signos. Al contrario, el pensamiento —conviene insistir— ocurre y existe solamente *en y a través* de signos.

Dedicatoria

Quisiera, para terminar, dedicar este artículo a un amigo cuyas penetrantes discusiones fueron siempre un manantial de inspiración para mí. Desde la calle del General Zimmer, durante las caminatas de fin de semana, en las heladas tardes de invierno o en las calurosas noches de verano, se podía ver claramente que su ventana era la única iluminada en ese austero edificio del IREM de Strasbourg en donde ambos cursábamos nuestros estudios de doctorado. Y es que Jesús Alarcón, o Papini, como lo llamábamos, nunca paraba de trabajar. Papini se había instalado en su oficina en donde pasaba más tiempo que el mismo conserje que vivía en el edificio. Recuerdo que más de una vez Raymon Duval interrumpió nuestra cita de principios de tarde para ir a ver si Papini se había recordado de ir a comer. La última vez que vi al “Maestro” -como lo solía llamar nuestro profesor Georges Glaeser- fue en Morelia, México, en 1997, durante la 11a Reunión Latinoamericana de Educación Matemática. Luego de encontrar un lugar tranquilo donde nos refugiamos para comer y discutir, Papini empezó a comentar un artículo que yo había publicado dos años antes. No era solamente la fineza y la profundidad de sus comentarios lo que me impresionó (pues aquellos que tuvimos la suerte de conocerlo estábamos acostumbrados a ello) sino constatar que recordaba el artículo mejor que yo mismo. Al día siguiente el Maestro me honró con su presencia en la conferencia que yo debía dar. La conferencia representaba, para mí, un giro respecto a la escuela de pensamiento en que ambos habíamos sido formados a principios de los años 80 y yo estaba impaciente por escuchar su opinión. En la tarde, luego de buscarlo en vano, supe que había tenido que volverse al Distrito Federal de emergencia, por problemas de salud. Que este artículo sea un modesto homenaje a su memoria.

Referencias bibliográficas

- Atkinson, P. and Hammersley, M. (1994) Ethnography and Participant Observation, in: N. Denzin and Y. Lincoln (eds.) *Handbook of Qualitative Research*, Thousand Oaks, London, New Delhi: Sage, 248-261.
- Baldwin, J. M. (1911) *The Individual and Society, or Psychology and Sociology*, Boston: The Gorham Press.
- Bartolini Bussi, M. G. (1995) Analysis of Classroom Interaction Discourse from a Vygotskian Perspective, *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, L. Meira and D. Carraher (eds.) Universidade Federal de Pernambuco, Brazil, 1, 95-98.
- Bateson, G. (1973) *Steps to an Ecology of Mind*, Frogmore: Paladin.
- Bauersfeld, H. (1995) “Languages Games” in the Mathematical Classroom: Their Function and Their Effects, in: P. Cobb & H. Bauersfeld (eds.) *The Emergence of Mathematical Meaning, Interaction in Classroom Cultures*, Hillsdale, New Jersey: Erlbaum Associates.
- Baxandall, M. (1971) *Giotto and the Orators*, Oxford: Clarendon Press.
- Berger, P. L., Luckmann, Th. (1967) *The social Construction of Reality*, New York/London/Toronto/Sidney/Auckland: Anchor Book.
- Clement, J., Lochhead, J. & Monk, G. (1981) Translation Difficulties in Learning Mathematics, *American Mathematical Monthly*, **88**, 286-289.
- Coulthard, M. (1977) *An Introduction to Discourse Analysis*, London: Longman.

- Derrida, J. (1976) *Of Grammatology*, Baltimore and London : The Johns Hopkins University Press.
- Duval, R. (1995) *Sémoisis et pensée humaine*, Bern : Lang.
- Edwards, D. (1997) *Discourse and Cognition*, London/Thousand Oaks/New Delhi : Sage.
- Fairclough, N. (1995) *Critical Discourse Analysis*, London and New York: Longman.
- Feyerabend, P. (1979) *Contre la méthode. Esquisse d'une théorie anarchiste de la connaissance*. Paris: Seuil.
- Feyerabend, P. (1989) *Adieu la raison*, Paris: Éditions du Seuil.
- Filloy, E., Rojano, T. (1989) Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra, *For the Learning of Mathematics*, Vol 9, No. 2, pp. 19-25.
- Foucault, M. (1966) *Les mots et les choses*, Paris: Éditions Gallimard.
- Frege, G. (1971) *Écrits logiques et philosophiques*, Paris: Éditions du Seuil.
- Gallardo, A. et Rojano, T. (1988). Areas de dificultad en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9, No. 2, 155-188.
- Geertz, C. (1973) *The Interpretation of Cultures*, New York: Basic Books.
- Goldin-Meadow, S. (1993) When does gesture become language? A study of gesture used as a primary communication system by deaf children of hearing parents, in: *Tools, Language and Cognition in Human Development*, K. R. Gibson and T. Ingold (eds.), Cambridge: Cambridge University Press, 63-85.
- Greeno, J. G. (1989) A perspective on Thinking, *American Psychologist*, 44 (2), 131-141.
- Ilyenkov, E. V. (1977) *Dialectical Logic*, Moscow: Progress Publishers.
- Kozulin, A. (1990) *Vygotsky's Psychology*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Kendon, A. (1993) Human gesture, in: *Tools, Language and Cognition in Human Development*, K. R. Gibson and T. Ingold (eds.), Cambridge: Cambridge University Press, 43-62.
- Köhler, W. (1951) *The Mentality of Apes*, New York: The Humanities Press / London: Routledge & Kegan Paul.
- Laborde, C., Puig, L., Nunes, T. (1996) Language in Mathematics Education, *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Luis Puig and Ángel Gutiérrez (eds.), University of Valencia, Valencia, Spain, Vol. 1, 53-84
- Latour, B., Woolgar, S. (1979) *Laboratory Life: The Social Construction of Scientific Facts*, Beverly Hills/London: Sage Publications.
- Leontiev, A. N. (1981) The Problem of Activity in Psychology, in: *The concept of activity in Soviet Psychology*, translated and edited by J. V. Wertsch, New York: M. E. Sharpe, 37-71.
- Leontiev, A. N. (1984) *Activité, Conscience, personnalité*, Moscou: Éditions du Progrès.
- Leroi-Gourhan, A. (1964) *Le geste et la parole*, Paris: Albin Michel.
- Matz, M. (1980) Towards a Computational Theory of Algebraic Competence, *Journal of Mathematical Behavior*, 3, 93-166.
- McLeod, D. (1989) The Role of Affect in Mathematical Problem Solving, dans: *Affect and Mathematical Problem Solving*, D. McLeod and V. M. Adams, eds., New York, Berlin, etc.: Springer Verlag, 21-36.
- Moerman, M. (1988) *Talking Culture, Ethnography and Conversational Analysis*, Philadelphia: University of Pennsylvania Press.
- Mikhailov, F. T. (1980) *The Riddle of the Self*, Moscow: Progress Publishers.
- Piaget, J. et Inhelder, B. (1966) *L'image mentale chez l'enfant*, Paris : Presses Universitaires de France.
- Radford, L. (1996) Some Reflections on Teaching Algebra Through Generalization, in: *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching*, N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (eds.), Dordrecht /Boston/ London: Kluwer, 107-111.
- Radford, L. (1998a) *On Culture and Mind, a post-Vygotskian Semiotic Perspective*,

- with an Example from Greek Mathematical Thought, paper presented at the 23rd Annual Meeting of the Semiotic Society of America, Victoria College, University of Toronto, October 15-18, 1998.
- Radford, L. (1998b) On Signs and Representations. A Cultural Account, *Scientia Pedagogica Experimentalis*, Vol. 35 (1), 277-302
- Radford, L. (1999) *The Rhetoric of Generalization. A Cultural, Semiotic Approach to Students' Processes of Symbolizing*, Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Haifa, Technion-Israel Institute of Technology, Vol. 4, 89-96.
- Solomon, Y. (1989) *The practice of mathematics*, London: Routledge.
- Tikhomirov, O. K., Vinogradov, Ye. E. (1970) Emotions in the Function of Heuristics, *Soviet Psychology*, 3 (4), 198-223.
- V.-David, M. (1965) *Le débat sur les écritures et l'hieroglyphe aux XVII^e et XVIII^e siècles*, Paris: Bibliothèque Générale de l'École Pratique des Hautes Études.
- Van der Veer, R. (1996) The concept of culture in Vygotsky's Thinking, *Culture and Psychology*, 2, 247-263.
- Van der Veer, R. and Valsiner, J. (1991) *Understanding Vygotsky*, Oxford Uk and Cambridge USA: Blackwell.
- Voigt, J. (1985) Patterns and routines in classroom interaction, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6 (1), 69-118.
- Voigt, J. (1989) The Social Constitution of the Mathematics Province—A Microethnographical Study in Classroom Interaction, *The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition*, 11 (1&2), 27-34.
- Voigt, J. (1995) Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms, in: P. Cobb & H. Bauersfeld (eds.) *The Emergence of Mathematical Meaning, Interaction in Classroom Cultures*, Hillsdale, New Jersey: Erlbaum Associates.
- Voloshinov, V. N. (1973) *Marxism and the Philosophy of Language*, Cambridge Massachusetts and London, England: Harvard University Press.
- Vygotsky, L. S. (1978) *Mind in Society*, Cambridge, Ma / London, England: Harvard University Press.
- Vygotsky, L. S. (1997a) *Collected Works*, Edited by R. Rieber and J. Wollock, New York and London : Plenum Press, Vol. 3.
- Vygotsky, L. S. (1997b) *Collected Works*, Edited by R. Rieber, New York and London : Plenum Press, Vol. 4.
- Vygotsky, L. S. (1998) *Collected Works*, Edited by R. Rieber, New York and London : Plenum Press, Vol. 5.
- Vygotsky, L. and Luria, A. (1994) Tool and symbol in child development, in: *The Vygotsky Reader*, R. van der Veer and J. Valsiner (eds.), Oxford: Blackwell Publishers.
- Wertsch, J. V. (1991) *Voices of the Mind. A Sociocultural Approach to Mediate Action*, Cambridge, Ma.: Harvard University Press.
- Wertsch, J. V. (1998) *Mind as Action*, New York and Oxford : Oxford University Press.
- White, L. A. (1942) On the use of tools by primates, *Journal of Comparative Psychology*, 20, 369-374.
- Wittgenstein, L. (1967) *Philosophical investigations*, Oxford : Blackwell. Leont'ev, A. N. (1981) The Problem of Activity in Psychology, in: *The concept of activity in Soviet Psychology*, translated and edited by J. V. Wertsch, New York: M. E. Sharpe, 37-71.
- Zinchenko, V. P. (1985) Vygotsky's ideas about units for the analysis of mind, in: *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*, J. V. Wertsch (ed.), Cambridge University Press, pp. 94-118.