nº 18

1996

L'ÉDUCATION EN ONTARIO FRANÇAIS

REVUE
DU
NO

Revue du Nouvel Ontario, Numéro 18

1996

La REVUE DU NOUVEL ONTARIO est une publication de l'Institut franco-ontarien (IFO). Les auteurs des articles assument seuls la responsabilité de leurs idées.

ISSN 0708-1715

SUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DANS LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES[1]

Luis Radford

INTRODUCTION

Les modèles de résolution de problèmes qu'on rencontre dans les manuels scolaires reposent sur plusieurs hypothèses : l'une d'elles consiste à supposer que la résolution d'un problème peut être divisée en *étapes*. En suivant une classification donnée par G. Polya (1945), ces étapes sont distinguées en fonction de la nature de la tâche: compréhension du problème, élaboration d'un plan de résolution, etc. Dans la plupart des cas, les manuels scolaires favorisent l'enseignement d'une démarche de résolution de problèmes dans laquelle l'élève est amené à franchir les étapes de façon *séquentielle*, c'est-à-dire une étape après l'autre. De plus, ces étapes sont présentées à l'élève comme étant *indépendantes* les unes des autres.

L'objet de cet article est de discuter la validité des hypothèses de « séquentialité » et d'« indépendance » que nous venons de mentionner, en nous concentrant plus particulièrement sur la compréhension du problème. Nous suggérons que, en général, dans le cas des problèmes mathématiques verbaux, la résolution du problème passe par des étapes qui ne sont ni séquentielles ni indépendantes; ceci nous amène à proposer d'envisager l'enseignement de la résolution de problèmes non pas comme une suite d'étapes que l'élève doit franchir mais comme un réseau de processus interreliés. Un exemple de résolution de problème, tiré d'une expérience menée auprès

1 Ce travail se place dans le cadre d'une recherche en cours subventionnée par FCAR 95ER0716 (Québec) et des Fonds de Recheche de l'Université Laurentienne (Ontario).

d'une douzaine d'élèves d'une école du district de Sudbury, sert de fil conducteur de notre discussion. Quelques retombées pour l'enseignement et la recherche sont abordées dans les deux sections.

1. LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ET L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

La résolution de problèmes constitue une des composantes les plus importantes dans les programmes contemporains de mathématiques tant au niveau primaire qu'au niveau secondaire. En Ontario, par exemple, celle-ci constitue un des six domaines dans lesquels le nouveau programme scolaire de mathématiques (mis en place en 1995) se trouve divisé[2]. D'autre part, outre le fait d'être « un domaine propre » des mathématiques à enseigner à l'école, les Normes provinciales de mathématiques (pp. 14-15) lui reconnaissent le statut d'un « élément essentiel de l'apprentissage des mathématiques ».

Il convient de rappeler ici que l'insertion de la résolution de problèmes aux programmes d'études scolaires a été le résultat d'un mouvement international, ayant fleuri il y a une vingtaine d'années, qui s'est présenté comme une voie alternative au mouvement dit d'« enseignement moderne » des mathématiques qui, lui, était devenu, dans les années soixante, le paradigme d'enseignement, en prônant un apprentissage basé sur la théorie des ensembles et qui avait, à son tour, déplacé un mouvement d'enseignement inspiré du courant philosophique positiviste.

Comme on le sait, l'idée pédagogique de base de l'« enseignement moderne » était celle de faire reposer l'enseignement

2 En effet, tel qu'il est indiqué dans les Normes Provinciales de Mathématiques (Ministère de l'Éducation et de la Formation, 1995a), les six domaines des mathématiques retenus (et ce de la 1ère jusqu'à la 9^{e})sont les suivants : (1) résolution de problèmes, (2) numération et sens du nombre, (3) géométrie et sens de l'espace, (4) mesure, (5) modélisation et algèbre, (6) traitement des données et probabilités.

sur la structure scientifique des mathématiques. Bien qu'avec des variantes et des intensités différentes, dépendant du pays en question, ce mouvement de transposition didactique (au sens de Chevallard, 1985), mettait à la base de l'enseignement un contenu de logique — base de la structure scientifique mathématique — à partir de laquelle les structures mathématiques (par exemple, structures numériques, géométriques, topologiques) étaient enseignées. Un bon exemple de cette transposition est le livre *Modern Mathematics for Young Children*, de Z. Dienes, publié en 1966 (voir bibliographie). L'esprit de l'« enseignement *moderne* » est clairement exposé dans l'introduction de ce livre, où l'auteur dit :

> « The old point of view is to regard mathematics as a set of mechanical processes to be learned. The new one is to regard these processes as parts of an interlocking set of more and more complex structures: children are led to discover what these structures are, what they are made of and how they relate to each other... » (*Op. cit.*, p. 10).

Les difficultés rencontrées par ce mouvement (donc nous n'allons pas discuter ici, nous contentant de mentionner le best seller de Morris Kline (1973) qui a le titre suggestif *Why Johny cann't add : the Failure of the New Math*) a amené les éducateurs à se pencher sur la recherche de nouvelles approches. Un besoin pressant (de nature sociale, en particulier) de changement d'orientation dans l'enseignement des mathématiques à l'école a débouché sur un intérêt pragmatique qui a trouvé dans la résolution de problèmes une justification *ad hoc*. La résolution de problèmes a donc remplacé, au cours des années 80, l'orientation précédente de la « théorie des ensembles ». Cependant, l'insertion de la résolution de problèmes posait un problème d'ordre méthodologique: comment va-t-on l'intégrer dans le programme de mathématiques ? Plusieurs écoles de tendances différentes ont donné différentes réponses, la plus orthodoxe étant celle qui fît de la résolution de problèmes un domaine propre aux mathématiques. On enseignait alors aux élèves comment résoudre des problèmes, ceux-ci n'ayant souvent aucune relation avec le contenu mathématique lui-même. Il a fallu un certain temps pour reconnaître la fausseté de l'hypothèse sous-jacente sur laquelle reposait la résolution de problèmes, à savoir que le transfert à d'autres domaines mathématiques et extra-mathématiques des habiletés ainsi développées ne pose pas de difficultés aux élèves. Les échecs rencontrés en cours de route ont amené les éducateurs à reposer le problème de l'enseignement de la résolution de problèmes et sa pertinence pour l'apprentissage.

Un renouveau, par la suite, dans les réflexions sur la nature de la connaissance, amena l'émergence de nouvelles théories — dont le constructivisme, dérivé des théories néo-piagétiennes. Ces réflexions conduisirent à de nouvelles descriptions de la relation « sujet-connaissances ». Il fut alors possible d'envisager, sous une nouvelle optique, la place des questions qu'on se pose et qu'on essaie de résoudre dans le développement de la pensée scientifique en général (Hintikka, 1981) et chez l'élève en particulier (pour le cas précis des mathématiques, qui est celui qui nous intéresse ici, voir, par exemple, Larochelle et Bednarz, 1994).

Au niveau de l'éducation, il convient de souligner ici que le centre d'attention dans l'acte éducatif s'est déplacé du professeur à l'élève, ayant comme conséquence le besoin de redéfinir le contenu à enseigner[3]. En particulier, il a fallu redéfinir le rôle de la résolution de problèmes et faire des choix au sujet des modèles d'enseignement de la résolution de problèmes à privilégier en salle de classe.

2. QUELS SONT LES MODÈLES UTILISÉS DANS L'ENSEIGNEMENT ?

La plupart des manuels scolaires qui circulent en l'Ontario français et Le programme d'études commun (Ministère de

3 Le système éducatif ne fonctionnant pas de façon hermétique dans une société, il faudrait situer ce glissement d'attention du professeur à l'élève comme étant le résultat de l'interaction du système éducatif avec les autres systèmes sociaux.

l'éducation et de la formation, l995a, l995b) sont clairs en ce qui concerne le choix de modèles de résolution de problèmes en mathématiques. Il y a un consensus sur l'utilisation d'un modèle, dérivé de celui de Georges Polya, qui suppose comme nous l'avons mentionné auparavant que la résolution d'un problème peut être divisée en une suite d'étapes :

— compréhension du problème
— élaboration d'un plan
— exécution du plan
— obtention de la solution
— vérification de la solution.

Dans le contexte de l'enseignement, ainsi que nous l'avons indiqué dans l'introduction, les manuels scolaires procèdent très souvent à une simplification extrême du modèle précédent (que nous appellerons « modèle par étapes »), en le considérant *séquentiel*. Les efforts didactiques sont alors dirigés à faire en sorte que l'élève transite d'une étape à l'autre, dans l'ordre indiqué par le modèle, qui devient ainsi un « modèle séquentiel ». (Pour une analyse de l'impossibilité du « modèle séquentiel » à rendre compte des démarches de résolution de problèmes des élèves, voir Radford, 1992).

D'autre part, il convient de souligner que la mise en fonctionnement du « modèle par étapes » (celui-ci considéré comme séquentiel ou non) présume, très souvent, deux hypothèses :

a. la première hypothèse est que la compréhension du problème est une étape du processus de résolution qui découle de la seule lecture de l'énoncé. En effet, dans maints manuels scolaires, l'accent est mis sur les autres étapes du processus de résolution et on fait comme si la compréhension est un problème qui ne relève que des compétences linguistiques du sujet. En suivant des méthodes propres à la lecture et la compréhension de textes non-mathématiques, on invite donc l'élève à bien lire (et relire autant de fois que nécessaire) l'énoncé du problème, et même à souligner « les mots clés ».

b. la deuxième hypothèse du « modèle par étapes » est qu'on suppose que la compréhension d'un problème est indépendante du reste de la résolution de celui-ci.

En ce qui concerne la première hypothèse, il convient de rappeler que la faisabilité (ou la possibilité) de réduire la compréhension d'un texte à la compréhension de ce que le texte énonce littéralement a été contestée de façon justifiée par R. Duval (1991), ouvrant ainsi la voie à une révision en profondeur du statut donné à la compréhension de l'énoncé d'un problème *mathématique* dans une tâche de résolution. Bien que le problème général de la compréhension en situation de lecture ait fait l'objet d'un bon nombre de recherches (cf. Fayol, 1992), les études concernant les textes et les problèmes *mathématiques* sont encore assez rares. Parmi les recherches portant non pas sur des *problèmes* mais sur des *textes* mathématiques (par exemple, un paragraphe d'un manuel scolaire) on peut citer celle de A. Gagatsis (1984), et, plus récemment, celle de Furinghetti et Paola (1991). Dans sa recherche, Gagatsis a mesuré la compréhension à travers la technique dite *de closure*, proposée par W. L. Taylor dans les années 1950[4]. Or, il semble que la technique de closure s'adapte mal à l'étude de la compréhension d'un *problème*. Une des raisons qu'on peut invoquer est que la compréhension d'un *problème* met en oeuvre des fonctions cognitives différentes de celles qui sont nécessaires à la compréhension d'un *texte*. En effet, contrairement à ce qui se passe dans la compréhension d'un texte, dans le cas de la compréhension d'un problème mathématique, on demande au sujet de trouver une réponse précise pour laquelle la seule information contenue littéralement dans le texte est insuffisante. La lecture de l'énoncé d'un problème possède une « intentionnalité » (qui se traduit en partie par les calculs à faire en vue de répondre aux questions posées dans le problème) qui n'est pas présente dans le cas de la lecture d'un texte. Il devient donc important de se munir d'autres instruments méthodologiques permettant de saisir les particularités que pose la compréhension des problèmes mathématiques.

4 Cette technique consiste, rappelons-le, à faire lire au sujet un texte, puis l'expérimentateur supprime systématiquement certains mots du texte (de façon plus précise, un mot sur cinq); le sujet doit ensuite restituer les mots manquants (voir De Landsheere, 1978).

En ce qui concerne l'hypothèse (b), rappelons que Hayes et Simon (1974) ont mis en évidence, à travers certaines études expérimentales, le caractère interactif de la compréhension d'un problème et la résolution de celui-ci. En effet, l'analyse des protocoles de recherche des individus étudiés montre clairement comment la compréhension se modifie au fur et à mesure que le sujet avance dans la résolution du problème. Même si les problèmes qu'ils ont utilisés dans leur recherche (une recherche qui se situe dans le cadre de l'Intelligence Artificielle) ne sont pas des problèmes mathématiques, ce résultat laisse planer des doutes sur la validité de l'hypothèse adoptée en pratique par les manuels scolaires, c'est-à-dire que la compréhension d'un problème mathématique est indépendante de sa résolution.

On devine sans peine les conséquences importantes pour l'enseignement des mathématiques qui découleraient de la prise de conscience que la compréhension ne peut pas être vue *seulement* comme une étape suite à laquelle l'élève a ou n'a pas cette compréhension, et que, dans l'heureux cas où l'élève l'ait, la compréhension ne se fait pas indépendamment de la résolution du problème.

Dans une recherche précédente, nous nous sommes proposés d'aborder le problème du statut de la compréhension d'un problème *mathématique* sous une optique expérimentale (Radford, 1993). Nos résultats suggèrent qu'effectivement les hypothèses (a) et (b) mentionnées et discutées ci-dessus sont loin de refléter la démarche réelle de résolution de problèmes chez les élèves. En outre, nos résultats laissent voir un phénomène très intéressant : confronté à un problème pour lequel l'élève n'arrive pas à trouver facilement une solution, l'élève tend à *déformer* la compréhension qu'elle s'était faite précédemment du problème, de sorte que la « nouvelle version » qui en résulte corresponde bien à des procédures de résolution dont elle dispose[5].

3. UN EXEMPLE DE COMPRÉHENSION D'UN PROBLÈME MATHÉMATIQUE

Nous allons donner ici un exemple de compréhension d'un problème mathématique tiré d'une recherche expérimentale (mentionnée ci-dessus) que nous avons menée auprès de 15 élèves provenant de classes de la 9e à la 12e année d'une école secondaire du district de Sudbury.

L'expérimentation s'est déroulée ainsi :

Tâche 1 : la lecture et l'écriture du problème.

Chaque élève se présentait individuellement dans une salle tranquille qui avait été préparée pour l'expérimentation. On commençait par expliquer à l'élève qu'on allait lui donner une feuille blanche avec l'énoncé d'un problème. L'élève pouvait lire pendant quelques minutes l'énoncé du problème, suite à quoi on lui enlevait l'énoncé et on lui donnait une feuille verte pour qu'elle puisse y écrire l'énoncé du problème tel qu'elle l'avait compris (on lui expliquait que ce n'était pas nécessaire de le réécrire par coeur, mais qu'elle devait le réécrire de sorte que si on le donnait à une autre élève, celle-ci devrait être capable de le comprendre et éventuellement de le résoudre).

Tâche 2 : la résolution.

Quand l'élève avait fini de réécrire l'énoncé, on lui enlevait la feuille et on lui donnait une feuille orange, où elle devait résoudre le problème. On disait à l'élève que si elle voulait revoir sa feuille verte, elle pouvait la demander, ce qui nous permettait d'avoir un contrôle sur les retours en arrière sur l'énoncé du problème.

5 Pour ne pas alourdir la rédaction de notre article en gardant le masculin et le féminin, nous avons opté, dans ce qui suit, pour la féminisation.

Tâche 3 : la réécriture de l'énoncé du problème.

Ensuite, on enlevait la feuille orange et on donnait à l'élève une feuille rose, sur laquelle elle devait réécrire encore une fois l'énoncé du problème, ce qui devait nous permettre de voir si la procédure de résolution employée était cohérente avec la compréhension du problème.

Il faut souligner qu'on s'est permis de poser des questions à l'élève pendant l'étape de résolution du problème, à la fin de celle-ci ou à la fin de l'étape de dernière réécriture de l'énoncé du problème (feuille rose), afin d'avoir des éclaircissements sur la démarche de résolution et la compréhension du problème.

Un enregistrement vidéo de ce que les élèves écrivaient nous a permis de repérer assez bien le cheminement que celles-ci ont suivi dans la résolution du problème.

L'exemple qui suit provient d'une étudiante de la 12^{e} année, dont la performance en mathématique se situe autour de la médiane de sa classe (70/100).

Le problème

L'expérimentation comportait 2 problèmes, mais nous ne discutons ici que du problème suivant :

> On peut acheter 3 kg de bananes pour le même prix que 2 kg de pêches. Si le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes, combien coûte un kg de bananes ?

Analyse *a priori* du problème

Un problème peut être vu comme un réseau de relations mathématiques de base (qualitatives et quantitatives) entre certains objets. Dans notre cas, les relations (que nous désignerons par r_1 et r_2) sont :

r_1 : prix de 3 kg de bananes = prix de 2 kg de pêches
r_2 : le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes.

Deux autres relations, présentes dans notre probléme de façon implicite, sont les suivantes :

r_3 : prix de 3 kg de bananes = 3 fois le prix de 1 kg de bananes.

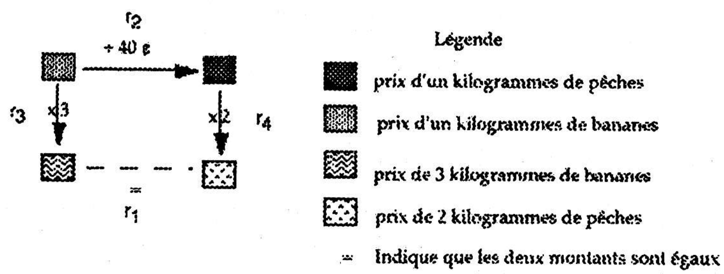
r_4 : prix de 2 kg de pêches = 2 fois le prix de 1 kg de pêches.

La relation r_1 est une relation d'égalité. La relation r_2 est une transformation additive : elle met en relation deux « états » : d'une part, le prix d'un kg de pêche et, d'autre part, le prix d'un kg de bananes. Les deux autres relations sont des relations multiplicatives.

On peut associer au problème son schéma de structure relationnelle (cf. Bednarz *et al.* 1992a, 1992b). Ce schéma nous fournit le graphe des relations que voici :

figure 1.

Structure relationnelle du problème



La flèche horizontale, en haut, indique que le prix d'un kilogramme de pêches s'obtient en ajoutant 40¢ ou 0,40 $ au prix

d'un kilogramme de bananes, tel qu'il est indiqué dans l'énoncé du problème. La flèche verticale, à gauche, indique que le prix de 3 kilogrammes de bananes s'obtient en multipliant par 3 le prix d'un kilogramme de bananes, etc.

Une résolution algébrique peut être la suivante :

Soit x le prix d'un kg de bananes. Le kg de pêche coûte donc x + 0,40. Donc on a :

$$2(x+0,40) = 3x$$
$$\text{Donc } 2x + 0,80 = 3x$$
$$\text{et } x=0,80.$$

Cependant, les élèves n'étaient pas contraints de résoudre le problème par l'algèbre: ils avaient la liberté de choisir leur démarche (arithmétique, algébrique, ...).

Voyons maintenant les réponses fournies par notre élève.

La première tâche : la réécriture de l'énoncé du problème :

L'élève n'a aucun problème ici. Voici sa production :

> « On peut acheté 3 kg de bananes pour le même prix de 2 Kg de pêches. Si le kg de pêche coûte 40¢ de plus que le kg de bananes, Combien coûte un kg de bananes ? » (*sic*)

La deuxième tâche : la résolution :

L'élève commence par écrire ceci :

« 3 Kg Bananes
2 Kg de pêches --->1 kg = 40¢ »

Puis elle écrit :

$$1:\ 40 = 3x$$
$$\frac{40}{1} = \frac{3}{x}$$
$$40x = 3$$

À ce moment-là, l'élève considère que le résultat de l'équation ne peut pas satisfaire le problème (car x devrait être trop petit). Elle barre donc les deux dernières lignes et essaie une autre proportionnalité :

$$\frac{40}{x} = \frac{1}{3}$$

$$120 = x$$

Le résultat est maintenant trop grand (120 $ le kilogramme de bananes !). Donc elle décide d'introduire des décimaux dans ses calculs : elle obtient :

$$\frac{.40}{x} = \frac{1}{3}$$

$$1{,}20 = x$$

En effet, 1,20 dollar semble plus raisonnable dans le contexte du problème...

La performance dans la première tâche montre que l'élève met en jeu des mécanismes lui permettant de reproduire l'énoncé du problème, en gardant intacte la structure linguistique originale. Un test classique de compréhension de lecture (comme celui de *closure*) aurait reflété ici une compréhension complète du problème. Cependant, la démarche de résolution suivie par l'élève suggère que la compréhension reflétée par la tâche de réécriture du problème n'est que superficielle, et qu'elle ne rend compte que de ce que l'énoncé du problème dit textuellement.

En effet, lors de la résolution, l'information « le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes » est utilisée par l'élève comme étant « le kg de pêche coûte 40¢ » tout court[6]. À ce stade de notre analyse, nous ne pouvons pas trancher la question sur les causes de cet écart informationnel: est-ce un problème de lecture hâtive ? Est-ce un problème de type langagier ? Ou bien, est-ce un problème dont les causes se situent au-delà du langage ? Pour pouvoir donner une réponse à ces questions, il nous faudra analyser les différentes étapes des tâches accomplies par l'élève : nous y reviendrons plus loin.

6 C'est ce qui nous laisse voir clairement la deuxième ligne de la transcription de la résolution de l'élève : « 2 Kg de pêches –>1 Kg = 40¢ ».

Pour l'instant, remarquons que la lecture de l'énoncé du problème débouche sur une certaine compréhension qui déclenche la recherche d'une procédure de résolution, qui, à son tour, aboutit, dans ce cas-ci, à la sélection d'une procédure basée sur le calcul de proportions.

Formellement, il s'agit de remplir les case d'une « équation » de proportionnalité :

$$\square : \square = \square : \square .$$

L'élève esquisse alors un plan d'action. Pour être mené à terme, le plan d'action a besoin d'une sélection de données qui rempliront les cases de l'équation de proportionnalité. Dans le premier essai, l'élève prend les nombres « 1 », « 40 », « 3 » et une inconnue : x. Elle exclut, par exemple, le nombre « 2 » (qui provient de « 2 kg de pêches »). Alors, elle revient sur la première ligne qu'elle a écrite, et ajoute :

« 1 Kg= ,.20$ ».

Sa production se voit donc ainsi :

Résous le problème .... :

3 Kg Bananes ---> 1 Kg = 1,20$

2 Kg pêches --> 1 Kg =40¢

1 : 40 = 3 : 4

$$\cancel{\frac{40}{1} = \frac{3}{x}} \qquad \frac{.40}{x} = \frac{1}{3}$$

$$\cancel{40x = 3} \qquad 1{,}20 = x$$

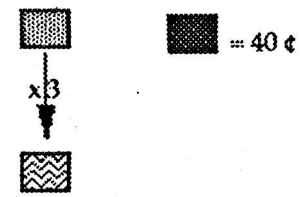
Il est impossible de dire quelle a été l'idée qui a déclenché chez l'élève la recherche d'un modèle de résolution de problèmes basé sur les proportions. Quand nous lui avons posé la question, elle nous a répondu « je ne sais pas, c'est venu comme ça ». Cet aveu met en évidence le fait que la recherche d'un plan de résolution n'est pas, chez elle (et vraisemblablement chez beaucoup d'autres élèves), un acte réfléchi, comme le suppose le modèle de « résolution de problèmes par étapes » et que ce choix a lieu au niveau de connaissances implicites[7]. Bien que cela puisse paraître paradoxal, il semble que la pensée est tellement concentrée sur la recherche de la solution que le plan de résolution se voit déplacé à un niveau de pensée inconsciente. Cela ne veut pas dire que le plan a lieu dans des circonstances hors de notre contrôle. Notre remarque vise seulement à indiquer que la prise de conscience du plan ne va pas de soi et que, sans doute, si on veut continuer à utiliser le modèle de Polya il faudra envisager des interventions explicites en salle de classe visant à ce que les élèves arrivent à apprendre à le reconnaître. Nous reviendrons sur ce point dans la section 5.

Quoi qu'il en soit, le modèle de résolution de problèmes utilisé par l'élève est loin de prendre en compte toutes les relations contenues dans le problème. Elle n'utilise, au niveau explicite, qur la relation r_3 et une nouvelle relation qui dérive de l'assimilation qu'elle fait de l'information « le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes » à « le kg de pêches coûte 40¢ » tout court. Au niveau de la structure relationnelle du problème (figure 1), la résolution est donc basée sur les relations montrées dans la figure 2.

7 Ce phénomène est aussi observé chez nos étudiantes-maîtres, En effet, très fréquemment, celles-ci avouent ne pas savoir comment elles ont trouvé le plan lors de la résolution d'un problème.

Figure 2

Relations prises en compte par l'élève



Ce graphe nous laisse voir que l'élève, dans sa résolution, est loin de prendre en compte la structure relationnelle complète du problème (comparer à la figure 1)

Troisième tâche : la réécriture du problème.

On passe à la troisième étape de l'expérimentation: l'observateur lui demande d'écrire à nouveau l'énoncé du problème. Elle fait ceci :

> « On peut acheter 3 Kg de bananes pour le même prix que 2 Kg de pêches. Si le Kg de pêches coûte 40¢ de plus que le Kg de bananes. Combien coûte le Kg de bananes ? » (*sic*)

L'intervention de l'expérimentateur :

Comme nous l'avons dit ci-dessus, l'élève a présumé, dans la résolution du problème, que le kg de pêches coûte 40¢ : elle a donc changé la relation de transformation additive « le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes » en « le kg de pêches coûte 40¢ ».

Or, cette *simplification* provient-elle d'un problème de nature linguistique ou bien s'agit-il d'un problème conceptuel ? En d'autres mots, la simplification de l'information est-elle due au fait que, pour l'élève, les deux informations sont porteuses du même contenu ou, par contre, la simplification a-t-elle des racines plus profondes qui vont au-delà de la compétence langagière de l'élève ?

Pour répondre à cette question, nous avons repris la feuille rose avec la dernière réécriture de l'énoncé faite par l'élève et l'avons mise à côté de la feuille de résolution (feuille verte). Alors nous lui avons demandé d'expliquer comment elle avait trouvé que le kg de pêches coûte 40¢. L'élève a dit que c'était marqué sur le problème. Alors l'élève a été invitée à justifier son affirmation en se référant à la feuille rose. Elle a lu « Si le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes ».

Comme l'élève continuait à voir la transformation additive comme un état (c'est-à-dire « ...40¢ de plus que ... » comme « 40¢ » tout court), ce qui pouvait faire penser que le problème était de nature linguistique, nous lui avons fait voir que c'était marqué « 40¢ de plus ».

Pour être sûr qu'elle comprenait la différence entre les deux expressions, on a posé des questions comme celles-ci: « Si le kg de bananes coûtait 1$, combien le kg de pêches coûterait-il ? » L'élève a répondu : « 1,40 $ ». À chaque fois qu'on donnait un prix hypothétique pour le kg de bananes, l'élève était capable de trouver celui des pêches, en ajoutant 40¢ au prix du kg de bananes. Ce n'était donc pas un problème langagier. Suite à cela, nous avons invité l'élève à revenir sur la résolution du problème.

Au départ, elle a essayé de reinterpréter sa première solution (donnée ci-dessus) en y voyant la transformation additive. Mais elle n'y a pas réussi. Il y a eu à ce moment-là un changement dans sa recherche. Elle a eu une nouvelle compréhension du problème, ce qui l'a amenée à chercher d'autres procédures de solution. Au bout d'un certain temps, elle a déclaré :

> « Si je savais combien coûte un kg de pêches, alors...» « Il faut que je trouve comment les pêches elles coûtent quelque part. Si je trouve comment ça coûte les pêches, alors je vais trouver comment mes bananes elles coûtent. »

Après un certain temps de réflexion, elle a utilisé à la fois la relation vue comme transformation et la relation vue comme état: elle a présumé, comme auparavant, que le kg de pêches coûtait 40¢ et elle a écrit :

« 2 = .80¢ » (donc l'information est vue comme état).

À la ligne suivante, elle a fait intervenir le +40¢ :

« 3 = 80¢ + .40¢ = 1,20 $
1 Kg de bananes coûte 1,20$ »

Après un certain temps, elle dit :

> « Mais comment est-ce que ça fait que c'est écrit qu'on peut acheter 3 kg de bananes pour le même prix que 2 kg de pêches. Ça veut dire que c'est le même prix. Mais ici ils disent que les pêches vont coûter 40¢ ... »

La réorganisation des données qui découle du fait de rendre à la relation additive sa véritable identité semble très difficile d'accomplir par l'élève et fait émerger une contradiction apparente: des prix qui sont égaux sont en même temps inégaux... !

Aprés quelques moments d'hésitation, elle multiplie 1,20 par 2 (donc elle fait intervenir les 2 kg de pêches mentionnés dans la première relation, relation qu'elle n'avait pas utilisée lors de sa première solution : voir ci-dessus) et obtient 2,40. Sa réponse finale est

« 3 Kg de bananes 1,20$
2 Kg de pêches 2,40$ ».

Bien sûr, cette réponse n'est pas cohérente avec la première relation du problème, qui affirme qu'on peut acheter 3 kg de bananes pour le même prix que 2 kg de pêches, relation qui a été utilisée plusieurs fois par cette élève. Cependant, cette dernière solution témoigne d'une prise en compte plus générale des relations contenues dans le problème (voir figure 1). En effet, l'élève utilise, dans la démarche que nous venons de voir, les quatre relations. Néanmoins, la démarche n'arrive pas à faire une *articulation* adéquate de ces données, ce qui débouche sur l'échec que nous avons constaté.

4. QUELQUES IMPLICATIONS POUR LA RECHERCHE ET L'ENSEIGNEMENT.

On peut soulever deux questions importantes de ce qui vient d'être dit :

(a) Qu'est-ce qu'on doit entendre par comprendre un problème mathématique ?
(b) Quelle sont les limites et les possibilités du modèle de résolution de problèmes « par étapes » proposé par les textes scolaires ?

En ce qui concerne la question (a), nous avons dit que la tendance générale est de concevoir que la compréhension découle de la seule lecture du problème : c'est ainsi qu'on l'aborde, en général, lors de l'étude de la résolution de problèmes dans les écoles. L'analyse de la démarche de résolution que nous avons effectuée suggère que la véritable compréhension d'un problème mathématique ne peut être déduite de la seule lecture et écriture du problème par l'élève. Pour réellement détecter la compréhension, faut-il encore voir comment celle-ci est mise en jeu par l'élève dans la résolution du problème.

Un deuxième point important à souligner est le suivant : contrairement à l'hypothèse qu'on adopte en pratique quand on enseigne le modèle de résolution de problèmes « par étapes », hypothèse d'après laquelle la compréhension est indépendante du reste de la résolution, notre exemple laisse voir jusqu'à quel point la compréhension *dépend* étroitement de la façon dont l'information peut être intégrée dans une procédure de résolution par l'élève. Faute de procédures de résolutions convenables, l'élève peut procéder à une *déformation* de l'information. C'est exactement cela que nous avons vu, quand l'élève a fait subir une déformation à la *transformation additive* « ... 40¢ de plus que ... » pour la rendre état : « le kg de pêches coûte 40¢ ». Le fait que, quand on a isolé ladite transformation, l'élève a été capable de la traiter additivement, donc de façon correcte, fait voir que le problème n'est pas linguistique mais conceptuel.

Le phénomène de la déformation de l'information mérite, pensons-nous, d'être étudié davantage. Il y a des questions pour lesquelles nous n'avons pas à ce moment une réponse. Ainsi, par exemple, Cummins et *al.* (1988), dans une recherche menée auprès des jeunes enfants, ont repéré le même phénomène. Cependant, ils ont interprété cette déformation de l'information comme étant un problème linguistique. Le dispositif méthodologique de notre recherche nous a permis d'aller un cran plus loin et nos résultats soulèvent la question de la validité d'imputer les phénomènes de déformation détectés dans la recherche de Cummins *et al.* à la compréhension du langage. Ces phénomènes ne seraient-ils pas, eux aussi, dus à l'impossibilité pour l'élève de saisir les informations dans un cadre relationnel assez ample pour lui permettre de faire une gestion logique adéquate des relations mathématiques contenues dans le problème ?

Arrêtons-nous maintenant sur la question (b) au sujet de la résolution de problèmes « par étapes ». Notre discussion suggère que la résolution d'un problème ne peut plus être considérée comme une suite d'étapes indépendantes qui se suivent dans un ordre linéaire. Chez l'élève qui est en train de construire un modèle de résolution de problèmes, il y a des retours en arrière, il y a des mises en relation entre ce qu'il comprend et ce qu'il peut faire (ou exécuter conceptuellement au niveau des calculs).

L'élaboration d'un plan d'action ou de résolution apparaît comme une activité d'ordre complexe, qui résulte, d'une part, des procédures de résolution dont dispose l'élève et, d'autre part, des possibilités *logiques* de l'élève lui permettant d'utiliser — et surtout d'articuler — les relations contenues dans l'énoncé du problème.

La problématique de la « gestion » (c'est-à-dire de la prise en compte et articulation) des relations mathématiques (dans l'exemple que nous avons étudié ici, ce sont les relations r_1, r_2,

r_3, r_4) — problématique qui s'insère dans celle du développement de la pensée logique de l'élève — est quelque chose qui n'est pas pris en compte dans l'enseignement. Pourtant, la prise en compte de ces relations et l'articulation de celles-ci constituent un problème difficile à franchir pour l'élève.

Ainsi, par exemple, notre élève commence en ne considérant que deux relations (voir figure 2). Suite à notre intervention, à la fin de l'entrevue clinique, elle prend conscience que l'énoncé du problème réfère à une transformation additive et non pas à un état. Cela l'amène à essayer de prendre en compte les quatres relations et de les articuler. On a vu qu'elle a juste réussi la première entreprise.

La prise en compte des relations est une condition nécessaire à la réussite mais elle ne saurait être suffisante. Encore faut-il savoir en faire l'articulation. Or, l'articulation des relations est loin d'être un problème évident. Au contraire, c'est un problème très délicat. Ainsi, dans son essai d'articulation des relations, notre élève cherche au début une réinterprétation de sa procédure en y incluant la transformation additive. Puis, elle cherche une nouvelle procédure de résolution et, devant l'impossibilité de s'en trouver une, elle opte pour des calculs qui sont en fait incompatibles, car ces calculs se font sur la base d'une double interprétation de la relation : comme transformation additive et comme état... Pour utiliser des termes piagétiens, la relation additive est insérée, par assimilation, dans la vielle procédure de résolution, sans qu'il y ait une accommodation[8].

Mentionnons, enfin, qu'il y a aussi des activités intellectuelles qui sont impliquées dans la résolution d'un problème et qui ne sont pas considérées suffisamment dans l'enseignement actuel : c'est le cas du contrôle sur ce qu'on doit faire ou exécuter (le contrôle qui guide les actions, les calculs, etc. : c'est le *contrôle cognitif*) et le contrôle sur ce qu'on a déjà fait (c'est le *contrôle méta-cognitif*). Le seul contrôle qui fait l'objet actuellement d'un enseignement explicite est le contrôle cognitif[9]. L'élève est encouragée à le pratiquer seulement à la fin du problème, pour donner un sens à ce qu'on a trouvé (un prix, le nombre de bonbons, l'âge de quelqu'un,...). Cependant, on voit que le contrôle cognitif est en fait mis en jeu beaucoup plus tôt par l'élève même (penser à la deuxième équation de proportionnalité qu'a écrite l'élève ou à l'introduction des décimaux, afin d'obtenir une réponse à peu près raisonnable).

8 On trouvera dans Bednarz et *al.* (1992c, p. 69) un autre exemple d'une élève qui arrive à prendre en compte toutes les relations mathématiques sans en faire une articulation fructueuse.

Le succès de la partie mathématiques du programme d'études commun de l'Ontario — un programme moderne et intéressant, il faut le dire — repose en grande partie sur sa bonne mise en pratique par les enseignantes. Mais cela suppose la prise en compte par celles-ci des limites du modèle de résolution de problèmes — le modèle « par étapes » — proposé par les manuels scolaires. Il ne faut pas interpréter ce modèle comme un modèle séquentiel. Il ne faut pas non plus le considérer comme un modèle à étapes indépendantes. C'est dans ce sens qu'il faudrait comprendre, il nous semble, les *Normes Provinciales de mathématiques* (p. 15), quand celles-ci disent :

> « La résolution de problèmes est un processus qui implique des démarrages et des arrêts, des échecs et des succès, l'étude de certaines solutions et leur rejet, des essais et des erreurs. »

5. SUGGESTIONS POUR LA SALLE DE CLASSE.

Voici, pour terminer, quelques suggestions qui peuvent être utiles en salle de classe :

9 Un des chercheurs qui s'est intéressé au rôle du contrôle dans la résolution de problèmes est A. Schoenfeld. Une bonne partie de son livre (Schoenfeld, 1985) traite de ce sujet.

(1) On devrait prendre en compte que le modèle par étapes décrit la démarche de l'experte en résolution de problèmes. Donc, il ne faut pas s'attendre à ce que l'élève, confrontée à des problèmes qui sont nouveaux pour elle, soit capable de transiter, sans hésitations, d'une étape à l'autre dès le départ.

(2) Il convient de voir la résolution d'un problème non pas comme une suite d'étapes séquentielles mais comme un réseau de processus interreliés. L'élève doit comprendre que, parfois, il est nécessaire de revenir en arrière dans la résolution.

(3) S'il est vrai que pour commencer la résolution d'un problème on doit commencer par comprendre l'énoncé du problème, il ne faut pas oublier que la compréhension n'est pas quelque chose qu'on a ou qu'on n'a pas. Il y a des degrés de compréhension. De plus, la compréhension d'un problème dépend de notre expérience et de nos connaissances. Ainsi, si l'élève n'est pas capable d'élaborer un plan suite à la lecture de l'énoncé du problème, il serait plus efficace de demander à l'élève *d'explorer* le problème.

(4) L'exploration d'un problème dépend du problème lui-même. Par exemple, on n'explore pas un problème de géométrie de la même façon qu'on explore un problème d'algèbre. Dans le cas de problèmes comme celui que nous avons étudié dans cet article, une façon d'explorer le problème consiste à demander à l'élève de deviner une réponse, puis de l'essayer. Nos observations en salle de classe suggèrent que le fait de donner une valeur numérique à l'inconnu qu'on cherche permet à l'élève de *plonger* dans le problème et d'investiguer les relations (ou conditions) du problème. L'exploration numérique permet alors à l'élève de voir le problème dans une perspective plus globale qui peut déboucher sur un plan de résolution.

(5) L'enseignante devrait faire en sorte que l'élève prenne conscience de sa procédure de résolution. Il convient, à cet effet, de discuter — dans une ambiance de travail coopératif, par exemple — des différents plans que les élèves ont utilisés pour résoudre un problème.

RÉFÉRENCES

Bednarz, N.; Janvier, B.; Mary, C.; Lepage, A. (1992a) L'algèbre comme outil de résolution de problèmes : une réflexion sur les changements conceptuels nécessaires dans un mode de traitement algébrique. *Actes du colloque portant sur l'émergence de l'algèbre*. CIRADE-Université du Québec à Montréal, pp. 17-31.

Bednarz, N.; Janvier, B.; Mary, C.; Radford, L. (1992b) Aritmética y Algebra como útiles de resolución de Problemas : ¿transición o ruptura ?. *Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Cuernavava, México, I, pp. 112-117.

Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique*, France : La pensée sauvage éditions. Deuxième édition, 1991.

Cummins, D.; Kintsch, W.; Reusser, K., Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems, *Cognitive Psychology*, 20, 405- 438.

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B., Lepage, A. (1992c) Arithmetical and algegraic thinking in problem-solving, *Proceedings of the16 PME Conference*, W. Geeslin and K. Graham (eds.), durham, U.S.A.; University of New Hampshire, Vol. I, pp. 65-72.

De Landsheere, G. (1978) *Le test de closure*, Paris : Fernand Nathan.

Dienes, Z. (1966) *Modern Mathematics for Young Children*, New York : Herder and Herder,

Duval, R. (1991) Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM de Strasbourg. pp. 163-196.

Fayol, M. (1992). Comprendre ce qu'on lit : de l'automatisme au contrôle. En *Psychologie cognitive de la lecture*. Michel Fayol et *al.* (Eds.). Presses Universitaires de France. pp. 73-105.

Furinghetti, F., Paola, D. (1991) On some obstacles in understanding mathematical texts. *Proceedings of the XV PME Conference*, Assisi, Italy, Vol. 2, pp. 56 63.

Gagatsis, A. (1984). Préalables à une mesure de la compréhension. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 5, n°. 1, pp. 43-80.

Hayes, J.R.; Simon, H. (1974). Understanding written problem instructions. In : *Knowledge and Cognition*. Gregg, I. (ed.). Lawrence Erlbaum Associates. pp. 167 200.

Hintikka, J. (1981) On the logic of an interrogative model of scientific inquiry, *Synthese*, n°. 47, pp. 69-83.

Kline, M. (1973) *Why Johny cann't add : the Failure of the New Math*, New York : St. Martin's Press.

Larochelle, M., Bednarz, N. (éds.) (1994) Constructivisme et éducation, *Revue des sciences de l 'éducation*, numéro thématique, Vol. XX, n°. 1.

Ministère de l'Éducation et de la Formation de Ontario (1995a) *Normes Provinciales de Mathématiques*, de la l^re^ la 9^e^ année.

Ministère de l'Éducation et de la Formation de l'Ontario (1995b) *Le programme d'études commun, politiques et résulats d'apprentissage de la l^re^ à la 9^e^ année.*

Polya, G. (1945) *How to Solve it*, Princeton University Press (traduit au français par C. Mesnage sous le titre *Comment poser et résoudre un problème*, Paris : Dunod 1965; Réimpression : Editions Jacques Gabay, 1989.

Radford, L (1992). Interactions between natural and symbolic languages in algebraic word problems. Paper presented at the *Annual Conference of the Canadian Society for the study of Education.* Learned Societies Conference. University of Prince Edward Island.

Radford, L. (1993) Qu'est-ce que les élèves comprennent quand ils lisent un problème écrit ? Communication présentée au *XXI congrès de l'Association canadienne pour l'etude de l 'education* (ACEE), Ottawa, Carleton University, juin 1993.

Schoenfeld, A. (1985) *Mathematical Problem Solving*, Orlando, San Diego ... : Academic Press, Inc.