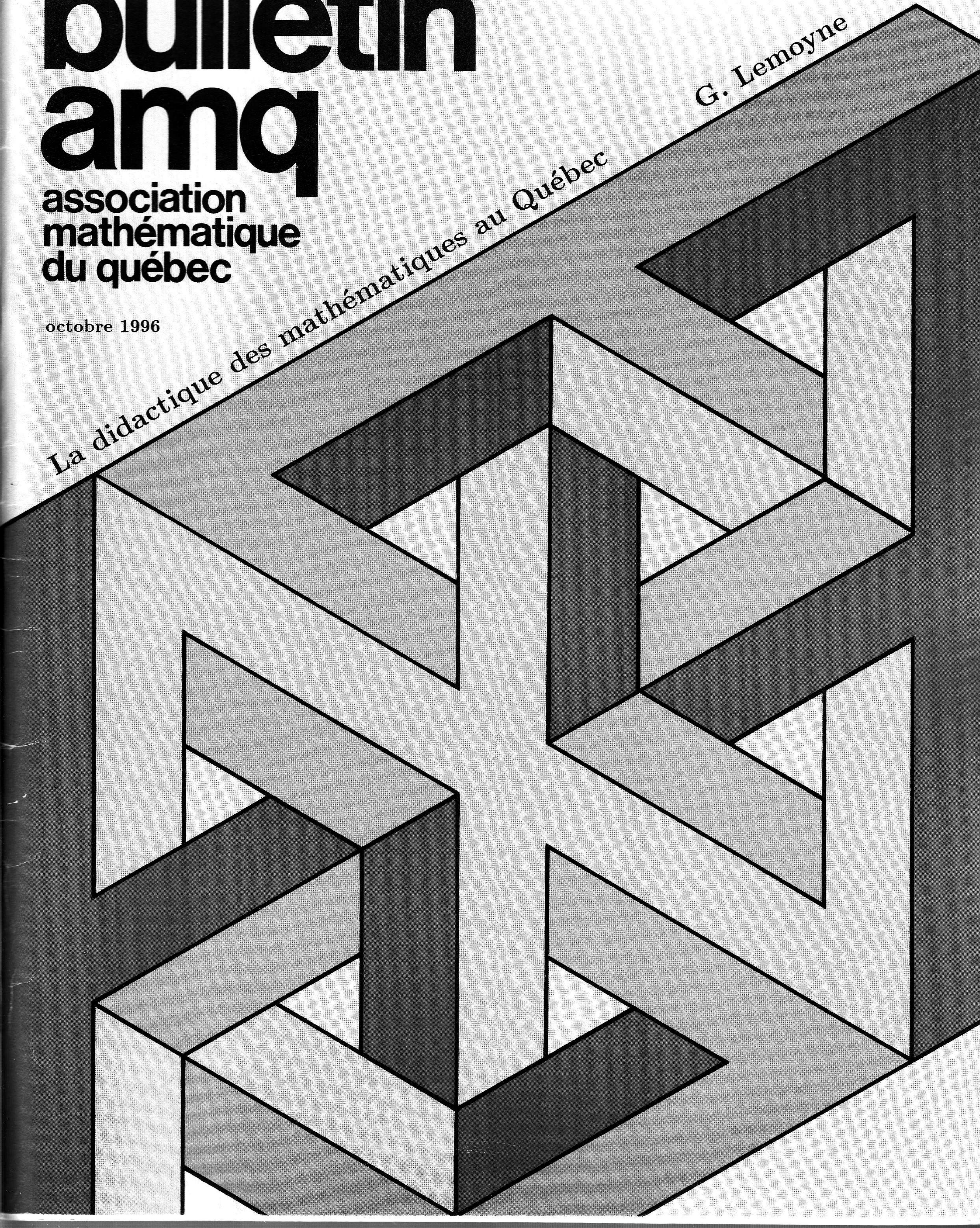
bulletin amq

association mathématique du québec

octobre 1996

La didactique des mathématiques au Québec

G. Lemoyne



Association mathématique du Québec

Centre 7400,
7400 boul. St-Laurent, suite 257
Montréal (Québec), H2R 2Y1
Téléphone : (514) 278-4263
Télécopieur: (514) 948-6423
a.é.: amq@dms.umontreal.ca

Le *Bulletin AMQ* (ISSN 0316-8832) est publié quatre fois l'an (15 mars, 15 mai, 15 octobre et 15 décembre). Mise en page et édition par *Fractimage R&D Corp.*, C.P. 171 - succ. CDN, Montréal (Québec), H3S 2S5. Couverture par *Urbain Desrochers*, graphiste, (514) 277-5613. Envois de publications canadiennes, contrat de vente n° 0467073. Port de retour garanti.

Dépot légal - 3e trimestre 1996
Bibliothèque Nationale du Québec

Politique de rédaction du *Bulletin AMQ*

Dans chaque numéro du *Bulletin AMQ* on retrouve un éditorial circonstancié, des chroniques de nature mathématique, des articles d'information et des articles de fond comprenant trois volets : mathématiques, didactique des mathématiques et informatique reliée à l'enseignement des mathématiques.
Tous les articles de fond ont été soumis à l'arbitrage de la façon suivante :

- Deux personnes se sont prononcées sur chaque article : un rédacteur et un arbitre externe.
- Le rédacteur et l'arbitre ont accepté l'article ou suggéré quelques modifications.
- Parfois, s'il y a eu divergence de vue entre le rédacteur et l'arbitre, on a alors fait appel à un deuxième arbitre.

En général, les articles ne doivent pas avoir été publiés dans une autre revue ou en processus de l'être. Toutefois, il pourrait y avoir des exceptions qui seront étudiées par le comité de rédaction. Les personnes intéressées à publier un article de fond doivent le faire parvenir au rédacteur en chef au moins trois (3) mois avant la date de parution.
Les auteurs auront à suivre les directives suivantes :

- La longueur maximale d'un article normal est de 20 pages dactylographiées. Les cas d'exception seront étudiés par le Comité de rédaction et la direction du *Bulletin AMQ*.
- Les articles doivent normalement se situer à l'intérieur de l'un des trois (3) thèmes du *Bulletin AMQ*: mathématiques, didactique des mathématiques et informatique appliquée à l'enseignement ou à l'apprentissage des mathématiques. Les cas d'exception seront étudiés par le Comité de rédaction.
- Les auteurs doivent faire parvenir au Comité de rédaction quatre (4) copies de leur projet d'article ou de leur article, accompagnées si possible d'une disquette au format PC ou Macintosh.
- Les articles peuvent être édités avec LaTeX et soumis par courrier électronique à `amq@graf.polymtl.ca` ou par ftp anonyme à `amq.graf.polymtl.ca`.

Les articles parus dans le *Bulletin AMQ* peuvent être reproduits avec la mention de la source. Le prix Roland Brossard sera attribué au meilleur article publié dans le *Bulletin AMQ*.

La résolution de problèmes: comprendre puis résoudre ?

Luis Radford

> La compréhension d'un texte est dans ce glissement imperceptible et spontané du contenu présenté par le texte au contenu des situations présentées.
>
> R. Duval, 1991, p. 166.

1. Introduction[1]

La plupart des manuels scolaires nord-américains (c'est notamment le cas des manuels qui circulent en Ontario) sont clairs en ce qui concerne le choix de modèles de résolution de problèmes en mathématiques. Il y a un consensus sur l'utilisation d'un modèle, que nous appellerons «modèle par étapes», dérivé de celui de Georges Polya (1965), qui suppose que la résolution d'un problème peut être divisée en une suite d'étapes[2]:

- compréhension du problème
- élaboration d'un plan
- exécution du plan
- obtention de la solution
- vérification de la solution.

Le «modèle par étapes» est celui qui est favorisé par le programme-cadre ontarien, mis en place en 1995 (Ministère de l'éducation et de la formation, 1995a, 1995b), programme dans lequel la résolution de problèmes prend une des premières places (pour ne pas dire la première)[3].

Or, les manuels scolaires procèdent très souvent à une simplification extrême du modèle précédent, en adoptant l'hypothèse suivante:

la compréhension d'un problème est une étape du processus de résolution qui découle de la seule *lecture* de l'énoncé.

En effet, dans maints manuels scolaires, l'accent est mis sur les autres étapes du processus de résolution et on fait comme si la compréhension est un problème qui ne relève que des compétences linguistiques du sujet. En suivant des méthodes propres à la lecture et la compréhension de textes non-mathématiques, on invite donc l'élève à bien lire (et relire autant de fois que nécessaire) l'énoncé du problème, et même à souligner les mots «clef».

Or, nous savons très bien que la compréhension par un élève de ce que *dit* l'énoncé d'un problème ne mène pas nécessairement à une résolution réussie (voir figure 1).

J'ai compris le problème mais
je ne sais pas qu'elle demarche
faire.

Figure 1 : *Production d'élève*

Au niveau de l'enseignement, l'étape de compréhension du problème s'avère fondamentale car, comme

1. Ce travail se place dans le contexte d'une recherche en cours subventionnée par FCAR 95ER0716 (Québec) et le Fonds de Recherche de l'Université Laurentienne (Ontario).

2. «Pour résoudre un problème –disait Polya (1965)– vous devez successivement: 1. Comprendre le problème; 2. Concevoir un plan; 3. Mettre le plan à exécution et 4. Examiner la solution obtenue».

3. En effet, la résolution de problèmes constitue un des six domaines dans lesquels le nouveau programme scolaire de mathématiques de la 1ère jusqu'à la 9e se trouve divisé, ces six domaines étant les suivants: (1) résolution de problèmes, (2) numération et sens du nombre, (3) géométrie et sens de l'espace, (4) mesure, (5) modélisation et algèbre, (6) traitement des données et probabilités. Voir les *Normes Provinciales de Mathématiques* (Ministère de l'Éducation et de la Formation de l'Ontario, 1995a).

certaines études l'ont mis en évidence, une non-compréhension du problème peut déboucher sur un blocage chez l'élève et l'abandon de toute tentative de résolution (voir, par exemple, McLeod, 1989). Un problème pratique est donc celui de savoir comment aider l'élève à aborder de façon fructueuse la compréhension d'un problème.

Pourquoi une bonne compréhension textuelle de l'énoncé d'un problème s'avère-t-elle souvent insuffisante pour le résoudre?

Une des raisons qu'on peut invoquer c'est que la compréhension d'un problème nécessite d'aller plus loin que l'énoncé lui-même en assurant à l'élève une vue d'ensemble des données du problème. En outre, cette partie «supplémentaire» exigée dans la compréhension de problèmes mathématiques ne relève pas entièrement des compétences linguistiques de l'élève. Ainsi, un élève peut être très bon en lecture sans pour autant être bon dans la compréhension de problèmes mathématiques.

C'est que la compréhension d'un *problème* met en oeuvre des fonctions cognitives différentes de celles qui sont nécessaires à la compréhension d'un *texte*. En effet, contrairement à ce qui se passe dans la compréhension d'un texte, dans le cas de la compréhension d'un problème mathématique, on demande au sujet de trouver une réponse précise pour laquelle la seule information contenue littéralement dans le texte est insuffisante. La lecture de l'énoncé d'un problème possède une «intentionnalité» (qui se traduit en partie par les calculs à faire en vue de répondre aux questions posées dans le problème) qui n'est pas présente dans le cas de la lecture d'un texte.

Bien que le problème général de la compréhension en situation de lecture ait été l'objet d'un bon nombre de recherches (on trouvera un recensement en Fayol, 1992) et qu'une certaine attention ait été donné à ce problème dans le cas des recherches issues de l'intelligence artificielle (voir Hayes and Simon, 1974), les études concernant la compréhension de textes et de problèmes *mathématiques* sont encore assez rares. Parmi les recherches portant non pas sur des *problèmes* mais sur des *textes* mathématiques (par exemple, un paragraphe d'un manuel scolaire) on peut citer celle de A. Gagatsis (1984), et, plus récemment, dans le domaine de la démonstration, celle de Furinghetti et Paola (1991) ou, encore, dans le cas de la compréhension en mathématiques en général, celle de Sierpinska (1995).

Néanmoins, les phénomènes liés à la compréhension en situation de résolution de problèmes mathématiques demeurent encore mal connus, probablement parce que la compréhension a été essentiellement vue comme un phénomène linguistique[4]. Il en résulte que nous avons peu de renseignements sur une des questions de fonds, à savoir, celle qui concerne la connaissance des mécanismes spécifiques du processus à travers desquels l'élève actualise mentalement l'énoncé du problème et s'empare du sens *mathématique* de celui-ci.

2. Compréhension et résolution d'un problème en mots

Nous nous proposons ici de discuter certains résultats expérimentaux que nous avons obtenus concernant la compréhension de problèmes mathématiques. Plus spécifiquement, nous nous intéressons aux relations entre la compréhension de l'énoncé d'un «problème en mots» (*word problem*) et sa résolution. Notre recherche a porté sur 13 élèves provenant de classes de la 9e à la 12e année (secondaire 3 à 5) d'une école du district de Sudbury, Ontario. Ces élèves -dont le rendement en mathématiques se situait autour de la médiane de leur classe (70/100)- ont été vus en entrevues cliniques où ils ont été confrontés à deux problèmes:

problème 1:

> On peut acheter 3 kg de bananes pour le même prix que 2 kg de pêches. Si le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes, combien coûte un kg de bananes?

problème 2:

> On prend un nombre, on lui ajoute 0,40 et ce qui en résulte est multiplié par 2. Cela donne le triple du nombre pris au départ. Quel était ce nombre?

Analyse *a priori* des problèmes 1 et 2.

Un problème peut être vu comme un réseau de relations mathématiques de base (qualitatives et quanti-

4. «Tout d'abord –dit Polya, en se référant à l'étape de la compréhension du problème– l'énoncé verbal doit être compris» (Polya, 1965, p. 12). Plus récemment, les études psychologiques proches du paradigme de la théorie de l'information ne semblent guère faire mieux (voir, par exemple, Mayer et Larkins, et Kahane, 1983).

tatives) entre certains objets. Dans le cas du premier problème, les relations (que nous désignerons par r_1 et r_2) sont:

r_1: prix de 3 kg de bananes = prix de 2 kg de pêches
r_2: le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes.

Deux autres relations, présentes dans notre problème de façon implicite, sont les suivantes:

r_3: prix de 3 kg de bananes = 3 fois le prix de 1 kg de bananes.
r_4: prix de 2 kg de pêches = 2 fois le prix de 1 kg de pêches.

La relation r_1 est une relation d'égalité. La relation r_2 est une transformation additive: elle met en relation deux «états»: d'une part, le prix d'un kg de pêche et, d'autre part, le prix d'un kg de bananes. Les deux autres relations sont des relations multiplicatives.

On peut associer au problème son schéma de structure relationnelle (cf. Bednarz *et al.* 1992a, 1992b). Ce schéma nous fournit, pour le problème 1, le graphe des relations présenté à la figure 2.

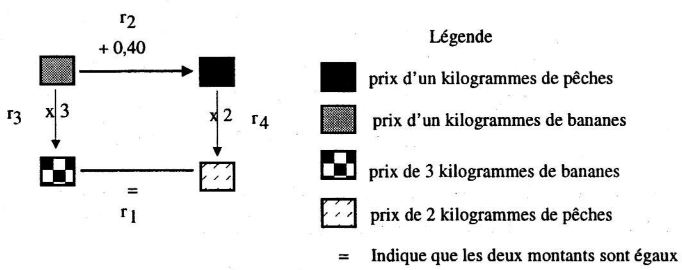


Figure 2 : *Structure relationnelle du problème*

La flèche horizontale, en haut, indique que le prix d'un kilogramme de pêches s'obtient en ajoutant 0,40$ au prix d'un kilogramme de bananes, tel qu'il est indiqué dans l'énoncé du problème. La flèche verticale, à gauche, indique que le prix de 3 kilogrammes de bananes s'obtient en multipliant par 3 le prix d'un kilogramme de bananes, etc.

Une résolution algébrique peut être la suivante:

Soit x le prix d'un kg de bananes. Le kg de pêche coûte donc $x + 0,40$. Donc on a: $2(x + 0,40) = 3x$. Donc $2x + 0,80 = 3x$ et $x = 0,80$.

Cependant, les élèves n'étaient pas contraints de résoudre le problème par l'algèbre: ils avaient la liberté de choisir leur démarche (arithmétique, algébrique, ...).

Du point de vue de la structure mathématique, le problème 2 est isomorphe au problème 1. En effet, les deux problèmes se traduisent par la même équation, à savoir, $2(x + 0,40) = 3x$. Le schéma de structure relationnelle est aussi le même. Mais, bien sûr, la signification des relations change: alors que la relation r_2 du problème 1 renvoie à une comparaison de prix, dans le problème 2 la relation r_2 renvoie à la transformation qu'on fait subir au nombre initial en lui ajoutant 0,40.

Nous avons décidé d'inclure le problème 2 afin de pouvoir détecter d'éventuelles différences au niveau de la compréhension entre un problème mathématique (problème 2) sans correspondance à une situation réelle et un problème similaire mais contextualisé (donc pouvant correspondre à un problème «réel[5]»). Nous voulions obtenir des renseignements expérimentaux sur une hypothèse qui circule dans les milieux d'enseignement qui veut que les problèmes réels soient plus faciles à comprendre, du fait même qu'ils renvoient à des «vécus» de l'élève (c'est-à-dire, à des expériences de la vie réelle de celui-ci).

L'expérimentation s'est déroulée ainsi:

Tâche 1: lecture et écriture du problème.

Chaque élève se présentait individuellement dans une salle tranquille qui avait été préparée pour l'expérimentation. On commençait par expliquer à l'élève qu'on allait lui donner une feuille blanche avec l'énoncé d'un problème. L'élève pouvait lire pendant quelques minutes l'énoncé du problème, suite à quoi on lui enlevait l'énoncé et on lui donnait une feuille verte pour qu'il puisse y écrire l'énoncé du problème tel qu'il l'avait compris (on lui expliquait que ce n'était pas nécessaire de le réécrire par coeur, mais qu'il devait le réécrire de sorte que si on le donnait à un autre élève, celui-ci devrait être capable de le comprendre et éventuellement de le résoudre).

5. Il faut ici être très prudent dans l'utilisation de l'adjectif «réel», car, en fait, la plupart des problèmes donnés en salle de classe ne sont pas réels, en ce sens qu'ils ne renvoient pas à une situation réelle (dans notre problème 1 on suppose qu'on est au supermarché ou au dépanneur, mais on n'y est pas physiquement). En général, l'apprentissage scolaire ne se fait pas dans un environnement naturel, mais dans un environnement complétement pré-structuré: l'école.

Tâche 2: la résolution.

Quand l'élève avait fini de réécrire l'énoncé, on lui enlevait la feuille et on lui donnait une feuille orange, où il devait résoudre le problème. On disait à l'élève que s'il voulait revoir sa feuille verte, il pouvait la demander, ce qui nous permettait d'avoir un contrôle sur les retours en arrière sur l'énoncé du problème.

Tâche 3: la réécriture de l'énoncé du problème.

Ensuite, on enlevait la feuille orange et on donnait à l'élève une feuille rose, sur laquelle il devait réécrire encore une fois l'énoncé du problème, ce qui devait nous permettre de voir si la procédure de résolution employée était cohérente avec la compréhension du problème. La réécriture de l'énoncé du problème pourrait aussi nous permettre de voir si la résolution a provoqué un changement de la compréhension du problème.

Il faut souligner qu'on s'est permis de poser des questions à l'élève pendant l'étape de résolution du problème, à la fin de celle-ci ou à la fin de l'étape de dernière réécriture de l'énoncé du problème (feuille rose), afin d'avoir des éclaircissements sur la démarche de résolution et la compréhension du problème.

Un enregistrement vidéo de ce que les élèves écrivaient nous a permis de repérer assez bien le cheminement que ceux-ci ont suivi dans la résolution du problème.

3. Quelques résultats:

> Les procédures de résolution suivies par les élèves laissent voir un phénomène très intéressant: confronté à un problème pour lequel l'élève n'arrive pas à trouver facilement une solution, l'élève tend à *déformer* la compréhension qu'il s'était faite précédemment du problème, de sorte que la «nouvelle version» qui en résulte corresponde bien à des procédures de résolution dont il dispose.

Ce phénomène peut apparaître «caché» ou «visible». Il est «caché» quand l'élève est capable de réécrire l'énoncé du problème lors des deux rappels (tâches 1 et 3); la déformation de la compréhension arrive lors de la résolution. Le phénomène de déformation est «visible» quand l'élève déforme l'énoncé lors d'au moins un des rappels. Pour le problème 1, les résultats sont les suivants:

Catégorie	Cachée	Visible	Autre
Problème 1	8	2	3
Problème 2	1	1	10

N.B.: La catégorie «Autre» désigne des procédures qui ne déforment pas les relations données dans l'énoncé du problème (ces procédures peuvent échouer ou réussir).

En termes de réussite-échec, les deux problèmes donnent lieu au tableau suivant:

		Problème 2 échec	**Problème 2** réussite	
Problème 1	réussite	0	0	0
Problème 1	échec	9	4	13
		9	4	

Le premier tableau suggère que le phénomène de déformation est beaucoup plus fréquent dans le problème 1 que dans le problème 2, en dépit du fait que les deux problèmes se traduisent par la même équation. Le dernier tableau suggère que le problème à contexte mathématique (problème 2) est mieux réussi que le problème à contexte «réel» (problème 1).

Pour mieux comprendre le phénomène de déformation, voyons les trois exemples suivants:

3.1 Premier exemple: Chantal (12e année)

Cet exemple appartient à la catégorie de déformation cachée.

La première tâche: la réécriture de l'énoncé du problème:

L'élève n'a aucun problème ici. Voici sa production:

«On peut acheter 3 kg de bananes pour le même prix de 2 Kg de pêches. Si le kg de pêche coûte 40¢ de plus que le kg de bananes, Combien coûte un kg de bananes?» (*sic*)

La deuxième tâche: la résolution:

Chantal commence par écrire ceci:

«3 Kg Bananes
« 2 Kg de pêches $\longrightarrow$ 1 kg = 40¢»

Puis elle écrit:

$$\begin{aligned} 1:40 &= 3:x \\ \frac{40}{1} &= \frac{3}{x} \\ 40x &= 3 \end{aligned}$$

A ce moment-là, l'élève considère que le résultat de l'équation ne peut pas satisfaire le problème (car x devrait être trop petit). Elle barre donc les deux dernières lignes et essaie une autre proportionnalité:

$$\begin{aligned} \frac{40}{x} &= \frac{1}{3} \\ 120 &= x \end{aligned}$$

Le résultat est maintenant trop grand (120$ le kilogramme de bananes!). Donc elle décide d'introduire des décimaux dans ses calculs: elle obtient:

$$\begin{aligned} \frac{.40}{x} &= \frac{1}{3} \\ 1.20 &= x \end{aligned}$$

En effet, 1.20 dollar semble plus raisonnable dans le contexte du problème...

La performance dans la première tâche montre que l'élève met en jeu des mécanismes lui permettant de reproduire l'énoncé du problème, en gardant intacte la structure linguistique originale. Un test classique de compréhension de lecture (comme celui de *closure*) aurait reflété ici une compréhension complète du problème[6]. Cependant, la démarche de résolution suivie par Chantal suggère que la compréhension reflétée par la tâche de réécriture du problème n'est que superficielle, et qu'elle ne rend compte que de ce que l'énoncé du problème dit textuellement.

En effet, lors de la résolution, l'information «le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes» est utilisée par Chantal comme étant «le kg de pêche coûte 40¢» tout court[7]. Pour pouvoir montrer que l'écart informationnel n'est pas dû à un problème de lecture hâtive et qu'il ne peut pas être imputé à un problème de type langagier, il nous faudra analyser les différentes étapes des tâches accomplies par l'élève: nous y reviendrons plus loin.

Pour l'instant, remarquons que la lecture de l'énoncé du problème débouche sur une certaine compréhension qui déclenche la recherche d'une procédure de résolution, qui, à son tour, aboutit, dans ce cas-ci, à la sélection d'une procédure basée sur le calcul de proportions.

Formellement, il s'agit de remplir les cases d'une «équation» de proportionnalité: $\square : \square = \square : \square$. L'élève esquisse alors un plan d'action. Pour être mené à terme, le plan d'action a besoin d'une sélection de données qui rempliront les cases de l'équation de proportionnalité. Dans le premier essai, l'élève prend les nombres «1», «40», «3» et une inconnue: x. Elle exclut, par exemple, le nombre «2» (qui provient de «2 kg de pêches»).

Alors, elle revient sur la première ligne qu'elle a écrite, et ajoute:

$$\text{«1 Kg} = 1.20\text{\$»}.$$

Sa production est présentée à la figure 3.

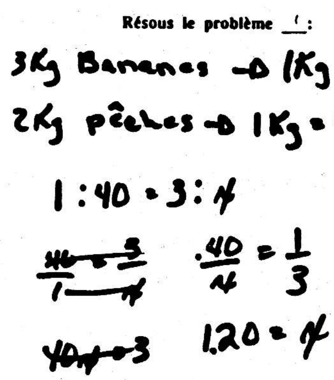


Figure 3 : *Production de Chantal*

Il est impossible de dire quelle a été l'idée qui a déclenché chez Chantal la recherche d'un modèle de résolution de problèmes basé sur les proportions. Quand nous lui avons posé la question, elle nous a répondu «je ne sais pas, c'est venu comme ça». Cet aveu met en évidence le fait que la recherche d'un plan de résolution n'est pas, chez elle (et vraisemblablement chez beaucoup d'autres élèves), un acte réfléchi, comme le suppose le modèle de «résolution de problèmes par

6. Le test de «closure», proposé par W. L. Taylor dans les années 1950, consiste, rappelons-le, à faire lire au sujet un texte, puis l'expérimentateur supprime systématiquement certains mots du texte (de façon plus précise, un mot sur cinq); le sujet doit ensuite restituer les mots manquants (voir De Landsheere, 1978).

7. C'est ce qui nous laisse voir clairement la deuxième ligne de la transcription de la résolution de l'élève: «2 Kg de pêches $\longrightarrow$ 1 Kg = 40¢».

étapes» et que ce choix a lieu au niveau de connaissances implicites. Amener les élèves à expliciter leurs choix relève des interventions didactiques que les enseignantes devraient envisager en salle de classe. Cependant, il reste encore à voir jusqu'à quel point les éventuelles interventions peuvent être efficaces...

Quoi qu'il en soit, le modèle de résolution de problèmes utilisé par Chantal est loin de prendre en compte toutes les relations contenues dans le problème. Elle utilise, au niveau explicite, juste la relation r_3 et une nouvelle relation qui dérive de l'assimilation qu'elle fait de l'information «le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes» à «le kg de pêches coûte 40¢» tout court. Au niveau de la structure relationnelle du problème (figure 2), la résolution est donc basée sur les relations montrées dans la figure 4.

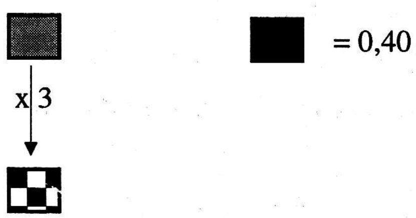


Figure 4 : *Relations prises en compte par l'élève*

Ce graphe nous laisse voir que l'élève, dans sa résolution, est loin de prendre en compte la structure relationnelle complète du problème (comparer à la figure 2)

Troisième tâche: la réécriture du problème.

On passe à la troisième étape de l'expérimentation: nous lui demandons d'écrire à nouveau l'énoncé du problème. Elle fait ceci:

> «On peut acheter 3 Kg de bananes pour le même prix que 2 Kg de pêches. Si le Kg de pêches coûte 40¢ de plus que le Kg de bananes. Combien coûte le Kg de bananes?» (*sic*)

L'intervention de l'expérimentateur:

Comme nous l'avons dit ci-dessus, l'élève a présumé, dans la résolution du problème, que le kg de pêches coûte 40¢: elle a donc changé la relation de transformation additive «le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes» en «le kg de pêches coûte 40¢».

Or, cette *simplification* provient-elle d'un problème de nature linguistique ou bien s'agit-il d'un problème conceptuel? En d'autres mots, la simplification de l'information est-elle due au fait que, pour l'élève, les deux informations sont porteuses du même contenu ou, par contre, la simplification a-t-elle des racines plus profondes qui vont au-delà de la compétence langagière de l'élève?

Pour répondre à cette question, nous avons repris la feuille rose avec la dernière réécriture de l'énoncé faite par l'élève et l'avons mise à côté de la feuille de résolution (feuille verte). Alors nous lui avons demandé d'expliquer comment elle avait trouvé que le kg de pêches coûte 40¢. L'élève a dit que c'était «marqué sur le problème». Alors l'élève a été invitée à justifier son affirmation en se référant à la feuille rose. Elle a lu «Si le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes».

Comme l'élève continuait à voir la transformation additive comme un état (c'est-à-dire «... 40¢ de plus que ...» comme «40¢» tout court), ce qui pouvait faire penser que le problème était de nature linguistique, nous lui avons fait voir que c'était écrit «40¢ *de plus*».

Pour être sûr qu'elle comprenait la différence entre les deux expressions, on a posé des questions comme celles-ci: «Si le kg de bananes coûtait 1$, combien le kg de pêches coûterait-il?» L'élève a répondu: «1.40$». À chaque fois qu'on donnait un prix hypothétique pour le kg de bananes, l'élève était capable de trouver celui des pêches, en ajoutant 40¢ au prix du kg de bananes. Ce n'était donc pas un problème langagier.

Suite à cela, nous avons invité l'élève à revenir sur la résolution du problème.

Au départ, elle a essayé de réinterpréter sa première solution (donnée ci-dessus) en y voyant la transformation additive. Mais elle n'a pas réussi. Il y a eu à ce moment-là un changement dans sa recherche. Elle a eu une nouvelle compréhension du problème, ce qui l'a amenée à chercher d'autres procédures de solution. Au bout d'un certain temps, elle a déclaré:

> «Si je savais combien coûte un kg de pêches, alors...» «Il faut que je trouve comment les pêches elles coûtent quelque part. Si je trouve comment ça coûte les pêches, alors je vais trouver comment mes bananes elles coûtent».

Après un certain temps de réflexion, elle a utilisé à la fois la relation vue comme transformation et la relation vue comme état: elle a présumé, comme auparavant, que le kg de pêches coûtait 40¢ et elle a écrit:

«2 = .80¢» (donc l'information est vue comme état).

À la ligne suivante, elle a fait intervenir le +40¢:

3 = 80¢ + .40¢ = 1.20\$
1 Kg de bananes coûte 1.20\$

Après un certain temps, elle dit:

> «Mais comment est-ce que ça fait que c'est écrit qu'on peut acheter 3 kg de bananes pour le même prix que 2 kg de pêches. Ça veut dire que c'est le même prix. Mais ici ils disent que les pêches vont coûter 40¢. . . »

La réorganisation des données qui découle du fait de rendre à la relation additive sa véritable identité semble très difficile d'accomplir par l'élève et fait émerger une contradiction apparente: des prix qui sont égaux sont en même temps inégaux. . . !

Après quelques moments d'hésitation, elle multiplie 1.20 par 2 (donc elle fait intervenir les 2 kg de pêches mentionnés dans la première relation, relation qu'elle n'avait pas utilisée lors de sa première solution: voir plus haut) et obtient 2.40. Sa réponse finale est:

3 Kg de bananes 1.20\$
2 Kg de pêches 2.40\$.

Bien sûr, cette réponse n'est pas cohérente avec la première relation du problème, qui affirme qu'on peut acheter 3 kg de bananes pour le même prix que 2 kg de pêches, relation qui a été utilisée plusieurs fois par cette élève.

Cependant, cette dernière solution témoigne d'une prise en compte plus générale des relations contenues dans le problème (voir figure 2). En effet, l'élève utilise, dans la démarche que nous venons de voir, les quatre relations. Néanmoins, la démarche n'arrive pas à faire une articulation adéquate de ces données, ce qui débouche sur l'échec que nous avons constaté.

3.2 Deuxième exemple: Susan (11e année)

L'exemple précédent montre clairement que, pour pouvoir résoudre le problème, l'élève a dû opérer une transformation au niveau de la première compréhension du problème –compréhension résultante de la lecture de l'énoncé de celui-ci. Cette transformation n'est pas due au hasard, au contraire: elle opère sur la relation additive que l'élève n'arrive pas à intégrer dans sa démarche de résolution. De plus, le phénomène de transformation est ici «caché», c'est-à-dire, il n'apparaît pas au niveau des réécritures de l'énoncé du problème. Le phénomène de transformation apparaît, chez Susan, de façon «visible». En effet, la première réécriture de l'énoncé porte déjà la transformation. Susan écrit:

3 kg de bananes est le même prix que 2 kg de pêches
1 kg de pêche=40¢
Combien coûte 1 kg de banane? (*sic*)

La résolution est maintenant aisée:

40¢ =1 kg pêches
40(2)=80¢ pour 2 kg de pêches
alors $80 \div 3 = 26,66$, alors 1 kg de bananes coûte 27¢.

La deuxième réécriture est essentiellement la même que la précédente.

Au niveau de la structure relationnelle du problème, Susan a «parcouru» le problème comme suit:

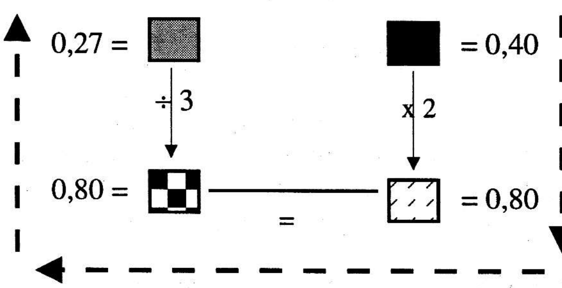


Figure 5 : *Parcours du problème par Susan*

Quand nous avons confronté sa réécriture et l'énoncé original, l'entrevue s'est déroulée comme suit:

Interviewer (I): On va revenir au problème initial. Est-ce que tu penses que c'est la même chose?

Susan (S): Mmmm . . . non. . . .

I: Qu'est-ce qui est différent?

S: Ici c'est dit que le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes et j'ai écrit le kg de pêches coûte 40¢. J'ai pas écrit le plus. . .

I: O.K. . .

S: ... Ça fait une différence?

I: On va voir. Maintenant supposons que le kg de bananes coûte 1$, supposons. Regardons uniquement ce qui est souligné en rouge (j'avais souligné en rouge la phrase de l'énoncé original: «le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes»). Si le kg de bananes coûte 1$, combien coûte 1 kg de pêches?

S: 50¢ pour un kg de pêches

I: Pourquoi?

S: Parce que c'est d'abord un problème de bananes, s'il y a 3 ça sera 3$, le kg de pêches est 0,50. (Susan a du mal à laisser de côté les relations multiplicatives 2 kg de pêches et 3 kg de bananes: en lui donnant un prix hypothétique pour le prix de bananes, elle divise par 2 pour obtenir le prix du kg de pêches).

I: Laissons tomber tout sauf ce qui est en rouge. Oublie le reste. La seule chose qu'on sait est que le kg de pêches coûte 40¢ de plus que le kg de bananes. Si je paye 1$ le kg de bananes, combien je dois payer pour le kg de pêches?

S: 1,40$

I: Si je paye 2$ le kg de bananes?

S: 2,40$ car c'est encore 40¢.

Comme dans le cas précédent, il ne s'agit point d'un problème linguistique mais d'un problème d'impossibilité d'utiliser dans une démarche de résolution de problème la relation additive r_2.

L'échec du modèle «par étapes»

Nos résultats suggèrent que, dans la compréhension d'un problème, il y a participation de certains éléments spécifiques qui vont au-delà des compétences linguistiques des élèves et de l'énoncé littéral du problème. De plus, les entretiens cliniques menés auprès de nos élèves suggèrent que la compréhension d'un problème n'est pas quelque chose qui se fait en une «étape» (la première étape de la résolution), suite à laquelle l'élève a ou n'a pas cette compréhension. Au contraire, il semble qu'il faudrait plutôt considérer la compréhension comme un *processus*. Ainsi, la lecture de l'énoncé du problème amène une première compréhension, une compréhension que nous appellerons *textuelle*, qui permet à l'élève de reproduire le texte, souvent de façon exacte, mais qui s'avère souvent insuffisante pour la résolution. Au moment où l'élève s'engage dans la résolution, la compréhension textuelle peut se modifier donnant lieu à une compréhension que nous appellerons *relationnelle*.

La compréhension relationnelle dépend, en particulier:

(a) des procédures de résolutions dont dispose l'élève et

(b) de la *gestion* qu'il peut faire des relations liant les données du problème.

Le problème de la *gestion* comprend, à son tour, deux volets:

(b_1) la prise en compte de toutes les relations contenues dans le problème et

(b_2) l'articulation de celles-ci.

Or, le problème de la gestion n'est pas seulement un problème mathématique: c'est aussi un problème qui relève de la *pensée logique* de l'élève. Dans l'exemple de Chantal, on voit, au début, une simplification du problème; il y a omission de certaines relations. On a vu comment cela a été difficile pour elle de prendre en compte *toutes* les relations.

Cependant, la prise en compte de toutes les relations ne saurait suffire. Encore faut-il *articuler* les relations dans un plan logico-mathématique cohérent. Par exemple, dans le problème 1, suite à nos questions, nous avons vu, dans le meilleur des cas, les élèves prendre conscience de *toutes* les relations. Toutefois, dans aucun cas cela n'a débouché sur une articulation logico-mathématique fructueuse des relations, de sorte que l'échec au problème 1 a été total, même après notre intervention dans l'entretien.

3.3 Troisième exemple: Yvan (12^e^ année)

Un exemple d'élève ayant pu considérer toutes les relations sans pouvoir les articuler correctement est celui d'Ivan (12e année):

Après avoir réussi la tâche 1 de réécriture du problème, il commence la résolution (tâche 2) ainsi:

(1) $\frac{3}{?} = \frac{2}{40}$

(2) $120 = 2x$

(3) $\frac{120}{2} = \frac{2x}{x}$

(4) $60 = x$

Au moment où il écrit «60» il s'arrête: il se rend compte qu'il n'a pas pris en compte la transformation additive «...40¢ de plus...». Il revient alors sur (4) et il y ajoute «+40», donc l'expression (4) se voit modifiée ainsi:

(4*bis*) $60 = x + 40$

Il écrit ensuite:

(5) $60 - 40 = x$

Il «corrige» (3), (2) et (1) en y ajoutant «+40». Puis, il écrit sur une autre ligne:

(6) $x = 20$

Sa réponse finale est alors trouvée:

(7) *20¢ coûtent un kg de bananes* (sic)

Remarquons que la gestion des relations suppose, d'une part, une *vue d'ensemble* des relations du problème et, d'autre part, une certaine *intuition* (Vasquez, 1994) dans la manière où les relations vont être articulées entre elles. On voit que la compréhension relationnelle, la seule susceptible de déboucher sur une véritable réussite dans la démarche de résolution, se situe à mi-chemin entre l'information textuelle et l'élaboration d'un plan de résolution. Dans ce sens, elle est à la fois prospective et rétrospective.

La discussion et les exemples présentés laissent voir comment il est faux de vouloir différencier compréhension et plan de résolution: en effet, ces deux éléments se trouvent entremêlés dans le processus de résolution d'un problème. En particulier, sans avoir encore eu lieu dans le temps, la compréhension se trouve déjà enracinée dans la démarche de solution que l'on va décider de suivre...

4. Les mécanismes de compréhension

Pour mieux expliquer les propos précédents, revenons à la discussion que nous avons amorcée précédemment sur la signification de ce qu'on entend par comprendre.

D'après Fayol (1992, p. 75), comprendre consiste à construire progressivement un modèle mental de ce qui est décrit. Il y a un consensus assez général sur le rôle que jouent dans cette construction la base des connaissances conceptuelles et la base de connaissances linguistiques. Ainsi, par exemple, Fayol, en commentant certains résultats de Birkmire (1985), met l'accent sur le rôle des connaissances antérieures, qui permettent de «décoder» le message écrit, en disant que «la connaissance conceptuelle antérieure et son organisation conditionnent la compréhension de textes, notamment la prise d'informations et l'intégration en une représentation *globale cohérente*» (Fayol, 1992, p. 77) (C'est nous qui soulignons)[8]. Dans ce contexte, la déformation de la compréhension *textuelle* en compréhension *relationnelle* mise en évidence au long de nos entretiens cliniques, peut être vue comme le besoin de rendre cohérente la première compréhension globale (cohérente du point de vue linguistique) avec une procédure de résolution. Bien sûr, pour ce faire, l'élève doit renoncer à certains faits compris lors de la première lecture: pour pouvoir résoudre le problème, et afin de chercher une certaine cohérence lui permettant de s'engager dans une résolution du problème, il faut qu'il transgresse la première compréhension. Ce phénomène est d'autant plus intéressant que les élèves n'en sont pas conscients!

Or, comment l'information contenue dans l'énoncé d'un problème est intégrée dans une représentation à la fois *globale* et *cohérente* par l'élève?

Pour répondre à cette question, nous devons nous placer dans le contexte plus large de la construction même de modèles de résolution de problèmes par l'élève. Il convient de rappeler que, dans le cadre de la psychologie cognitive on considère que, devant la tâche de résolution de problèmes, l'individu mobilise ses connaissances en vue de résoudre les problèmes posés. Ces connaissances finissent par s'accommoder et se structurer en réseaux plus complexes, permettant en quelque sorte de constituer des modèles de résolution qui rendent possible la résolution de problèmes «reconnaissables» par l'individu comme relevant de la classe ou famille du modèle en question. Ackermann-Valladao *et al.* (1983) considèrent que devant un certain problème, l'élève peut faire appel à un modèle (cognitivement) formé au préalable. Deux cas

8. Voir aussi la notion de *contenu cognitif* d'un texte, introduite par Duval (1991, p. 166)

peuvent se présenter:

(a) le problème s'applique au modèle (et la résolution du problème devrait mener normalement à une réussite) ou

(b) le problème ne s'applique pas au modèle et l'élève aboutit à un échec.

C'est dans le cas (b) que nous retrouvons Susan, qui ramène le problème à un problème pour lequel elle a un modèle à sa disposition.

Or, dans le cas des modèles en formation, c'est-à-dire des modèles qui sont en train de se former cognitivement chez l'élève, Ackermann-Valladao *et al.* considèrent que l'élève peut échouer du fait que les représentations spécifiques à la situation ne sont pas articulées entre elles: c'est justement ce qu'on observe dans le cas de Chantal, après notre intervention. C'est aussi le cas d'Ivan, à la différence près que ce dernier a pris en considération toutes les relations sans notre intervention.

Ainsi, Chantal, par exemple, a pu, grâce à nos questions, abandonner un modèle déjà formé (un modèle basé sur les proportions) pour envisager un autre modèle. Elle a échoué, on l'a vu. Toutefois, le fait de se lancer dans une nouvelle aventure intellectuelle a une signification non négligeable. Cette nouvelle aventure demande une *intuition* – c'est-à-dire une vision *globale* et *cohérente* – qu'on ne peut pas avoir atteint par l'expérience du fait que l'expérience n'a pas encore été vécue. Elle ne peut donc pas être, dans le cas des modèles en formation, extrapolée à partir des expériences précédentes. Voilà pourquoi la compréhension relationnelle – qui sous-tend cette prospection et rétrospection – semble, dans les cas des modèles en formation, ambiguë: elle accepte, au niveau opérationnel, certains faits (par exemple, que la même information donnée dans le problème signifie en même temps que le kg de pêches coûtent 40¢ et que le kg de pêches coûtent 40¢ de *plus* que le kg de bananes) qui, du point de vue de leur signification au niveau du langage, doivent être réfutés.

5. Synthèse et remarques supplémentaires

Le fait de placer nos résultats dans le cadre théorique de la psychologie cognitive nous a permis, nous pensons, de mieux comprendre la nature de la compréhension d'un problème, lors de la résolution de celui-ci, et de mieux préciser la signification du phénomène de déformation que nous avons observé.

Notre discussion suggère qu'on ne peut pas considérer la compréhension d'un problème en mots comme la première étape du processus de résolution; on ne peut pas non plus considérer la compréhension comme un problème strictement linguistique. La compréhension est conditionnée, comme l'affirment Fayol et Duval, et nous l'avons vu sur nos exemples, entre autres, par les connaissances antérieures de l'individu. De plus, le fonctionnement de la compréhension dépend du niveau de formation cognitive du modèle de résolution de problèmes auquel l'individu fera appel. Il convient de souligner à cet effet que, du point de vue de la réussite ou de l'échec, tant Chantal comme Susan se trouveraient à égalité: les deux ont échoué le problème 1. Mais en regardant leur procédures de plus près, nous avons mis en évidence une différence très importante: Chantal a été capable d'aller plus loin, d'avoir atteint une compréhension *relationnelle* plus profonde que Susan.

Le cas d'Ivan montre bien que la seule prise en compte de toutes les relations données dans le problème ne suffit pas à assurer la réussite de sa résolution. Il est nécessaire de savoir bien articuler les relations. Dans cet ordre d'idées, Ivan va plus loin que Susan et Chantal. Néanmoins, il n'arrive vas à dégager une vue d'ensemble lui permettant «de synthétiser en une unité totale la diversité d'images»[9] sur lesquelles repose la compréhension du problème, synthétisation qui est nécessaire à l'élaboration d'un plan de résolution.

D'autre part, nos résultats suggèrent que la difficulté à comprendre un problème ne peut pas être réduite à l'équation mathématique qui le traduit. Nous avons vu que le problème 2 était plus facile (bien que toujours difficile à résoudre) que le problème 1, en dépit du fait qu'ils sont tous les deux traduits par la même équation. Le contexte mathématique du problème 2 s'est avéré plus *compréhensible* que le contexte pseudo-réel du problème 1: cela se voit non seulement au niveau de la possibilité d'aboutir à de meilleurs rappels de l'énoncé, mais aussi au niveau des procédures de résolution et de la réussite. Bien sûr, les difficultés rencontrées par les élèves ne sont pas les mêmes dans un problème que

9. (Vasquez, 1995, p. 17; notre traduction)

dans l'autre. Mais en marge des différences propres aux contextes respectifs, c'est précisément le *caractère structurel* de l'*énoncé* du problème 2 qui semble permettre à l'élève (dans certains cas, du moins) d'envisager un plan de solution. En effet, il semblerait que le caractère structurel (qui, ici, décrit en forme *séquentielle* les transformations qu'on doit opérer sur le nombre pris au départ) permet de rapprocher la compréhension textuelle de la compréhension relationnelle, permettant ainsi à l'élève de plonger dans le problème: l'énoncé de celui-ci contient, si l'on fait une lecture «convenable», c'est-à-dire, si l'on est capable de connecter la compréhension textuelle à la compréhension relationnelle, des renseignements intéressants pour l'élaboration d'un plan de résolution (que celui-ci soit envisagé sous forme d'équation algébrique ou non).

Il convient maintenant que nous revenions au «modèle par étapes» dérivé de celui de Polya et utilisé fréquemment en salle de classe. Posons-nous la question des possibilités didactiques qu'il offre. Ce modèle a sans doute certains avantages. Cependant, il ne faut pas oublier qu'il propose une simplification des démarches réelles suivies par les élèves. De façon plus précise, ce modèle décrit le comportement en situation de résolution de problème non pas du novice mais de l'expert. C'est-à-dire, il peut, à la limite, décrire le fonctionnement d'un modèle cognitivement formé. Or, quand la résolution de problèmes est utilisée en salle de classe, souvent c'est dans le but de résoudre de nouveaux problèmes, des problèmes qui vont exiger de l'élève la mise en oeuvre de nouveaux concepts ou l'utilisation d'anciens concepts sous une nouvelle optique. Il faut donc être conscients qu'en général on ne peut pas demander à l'élève d'*avancer* un plan, suite à la lecture du problème. La compréhension et l'élaboration d'un plan ne sont pas des «étapes» indépendantes; ce sont des *processus interreliés.* Probablement qu'il serait plus fructueux de demander à l'élève d'essayer de *plonger* dans le problème, d'essayer des solutions possibles[10]. En d'autres mots, un travail de nature *heuristique* de sa part peut être plus bénéfique. Suite à ce travail il sera en meilleure condition d'envisager un plan de solution[11].

Pour clôturer notre discussion, il peut être utile de rappeler ici brièvement certains faits sur l'histoire de la recherche d'une formule donnant les racines de l'équation polynomiale de 5e degré[12]. Le problème lui-même se pose à l'intérieur d'un cadre très précis pour lequel il existe un modèle de résolution de problèmes; ce modèle est donné par les procédures (qui relèvent des succès de la mathématique italienne de la Renaissance) qui ont abouti à trouver, pour les équations de 3e et 4e degré, des formules donnant les racines en fonction des coefficients de l'équation en question. Il s'agit donc de chercher une formule *analogue* à celles correspondantes aux degrés 1, 2, 3 et 4. Le problème n'est pas *compris* dans le vide: sa *compréhension* est sous-tendue par un modèle de résolution de problèmes, qui fournit une façon particulière de «voir» le problème. Sans ce modèle, le problème n'est même pas formulable.

Euler, en 1764, a vu le problème sous le même angle que ses prédécesseurs italiens; il s'est alors engagé dans la recherche d'une formule pour le 5e degré. Il a été capable de trouver certaines formules pour des équations particulières (par exemple, $x^5 = 2625x + 61500$). L'impossibilité de trouver une formule pour toute équation de degré 5 a fait que Lagrange ait commencé à se méfier de l'existence d'une telle formule. Il a donc pris un certain recul et a étudié, dans son *Mémoire sur la résolution des équations algébriques*, présenté à l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Berlin, en 1770—71, les raisons qui avaient fait possible le succès de l'entreprise dans les équations de degré inférieur à cinq. Bien qu'il n'ait pas pu donner une réponse définitive à la question soulevée de l'existence d'une telle formule, il a ouvert la voie pour essayer de *comprendre* le problème autrement.

Ce changement d'orientation dans la recherche ne va

10. Quelques suggestions pour la salle de classe se trouvent dans Radford, 1996.

11. L'heuristique, on le sait, est le pivot central des réflexions de Polya (ainsi, par exemple, dans son fameux *Comment poser et résoudre un problème*, 1965, p. xiv-xv, il dit: «Les pages suivantes, rédigées de façon assez concise, et le plus simplement possible, résultent d'une longue et sérieuse étude des méthodes de solution. Ce genre d'étude, que certains écrivains nomment *heuristique*, n'est pas à la mode de nos jours, mais remonte loin dans le passé et a peut-être quelque avenir.»). Par la suite, des nombreux travaux sur la résolution de problèmes se sont occupés du rôle de l'heuristique dans l'enseignement –dont celui de Schoenfeld, 1985. Néanmoins, on est encore loin de pouvoir faire une utilisation convenable de l'heuristique en salle de classe (Schoenfeld dit: «attempts to teach students to use heuristic strategies have consistently produced less than was hoped for»; Op. cit., p. 70). L'heuristique –quelque chose qui, malheureusement, se fait très peu à l'école– mérite d'être repensée.

12. Pour les détails mathématiques, voir Radford, 1990.

pas sans nous rappeler (toutes distances gardées) celle de Chantal, après notre intervention. En effet, les démarches sont similaires en ce qui a trait à la prise de conscience de l'impossibilité éventuelle du modèle de résolution suivi jusqu'alors. Mais alors que Chantal avait à sa disposition, *dans* l'énoncé textuel du problème les relations qu'il lui fallait, Lagrange a dû les inventer lui-même: il a introduit alors son concept de *fonctions semblables*, qui s'est avéré fondamental par la suite. Ruffini, en continuant le travail de Lagrange, prouva plus tard qu'en effet, le problème ne peut pas être résolu en restant dans le modèle de résolution de problèmes qui avait pourtant suffi à la Renaissance à trouver des formules pour les équations de degré inférieur à cinq.

Abel, en 1862, a publié son mémoire *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré* où il donne une réponse définitive au problème en question. Mais pour ce faire, il a fallu mettre en place des nouveaux concepts et des nouvelles relations liant ceux-ci. En particulier, il a fallu comprendre le problème *autrement.*

Une différence essentielle entre cette démarche historique et celle de Chantal est que les mathématiciens ont dû inventer eux-mêmes les idées et les mots nécessaires à leurs recherches. Chantal, elle, s'est vu donner le problème avec un langage mobilisant un réseau conceptuel déjà en place (le nôtre). En décodant le problème avec ses propres moyens, elle n'a pas compris la même chose. Quoi de plus naturel alors que de *voir* le problème depuis sa propre perspective, c'est-à-dire, depuis ses propres modèles de résolution de problèmes?

Références

Ackermann-Valladao, E.; Audétat, J.; Giddey, C.; Lock, N.; Piguet-Chevalley, D.; Reith, E.; Saada-Robert, M. (1983) Formation et actualisaton des modèles du sujet en situation de résolution de problème, *Archives de Psychologie*, 51, pp. 61-70.

Bednarz, N.; Janvier, B.; Mary, C.; Lepage, A. (1992a) L'algèbre comme outil de résolution de problèmes: une réflexion sur les changements conceptuels nécessaires dans un mode de traitement algébrique. *Actes du colloque portant sur l'émergence de l'algèbre.* CIRADE-Université du Québec à Montréal, pp. 17-31.

Bednarz, N.; Janvier, B.; Mary, C.; Radford, L. (1992b) Aritmética y Algebra como útiles de resolución de Problemas: ¿transición o ruptura?. *Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* Cuernavava, México, I, pp. 112-117.

Birkmire, D. P. (1985) Text Processing: The influence of text structure, background knowledge and purpose, *Reading Research Quarterly*, 20, pp. 315-326.

De Landsheere, G. (1978) *Le test de closure*, Paris: Fernand Nathan.

Duval, R. (1991) Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* IREM de Strasbourg, pp. 163-196.

Fayol, M. (1992). Comprendre ce qu'on lit: de l'automatisme au contrôle. En *Psychologie cognitive de la lecture.* Michel Fayol *et al.* (éds.). Presses Universitaires de France, pp. 73-105.

Furinghetti, F., Paola, D. (1991) On some obstacles in understanding mathematical texts. *Proceedings of the XV PME Conference*, Assisi, Italy, vol. 2, pp. 56-63.

Gagatsis, A. (1984). Préalables à une mesure de la compréhension. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 5, no. 1, pp. 43-80.

Hayes, J.R.; Simon, H. (1974). Understanding written problem instructions. In: *Knowledge and Cognition.* Gregg, 1. (ed.). Lawrence Erlbaum Associates, pp. 167-200.

Mayer, R.; Larkin, J.H. et Kadane, J.B. (1983). A Cognitive Analysis of Mathematical Problem-Solving Ability. Dans *Advances in the Psychology of Human Intelligence*, R. Sternberg (éd), Hillsdale, NJ: Erlbaum, vol. 2, pp. 231-273.

McLeod, D. (1989) The Role of Affect in Mathematical Problem Solving, dans: *Affect and Mathematical Problem Solving*, D. McLeod and V. M. Adams, eds., New York, Springer Verlag, 21-36.

Ministère de l'Éducation et de la Formation de l'Ontario (1995a) *Normes Provinciales de Mathématiques, de la 1re à la 9e année.*

Ministère de l'Éducation et de la Formation de l'Ontario (1995b) *Le programme d'études commun, politiques et résulats d'apprentissage de la de la 1re à la 9e année.*

Polya, G. *Comment poser et résoudre un problème*, Paris: Dunod (traduction de: *How to solve It*, Princeton University Press), Réimpression: Éditions Jacques Gabay, 1989.

Radford, L. (1990) Lagrange y el desarrollo conceptual de la teoría de Galois, *Cuadernos de investigación de la EFPEM*, no. 1, Universidad de San Carlos de Guatemala.

Radford, L. (1993) Qu'est-ce que les élèves comprennent quand ils lisent un problème écrit?, Communication présentée au *XXI congrès de l'Association canadienne pour l'étude de l'éducation* (ACEE), Ottawa, Carleton University, juin 1993.

Schoenfeld, A. (1985) *Mathematical Problem Solving*, Orlando, Academic Press, Inc.

Sierpinska, A. (1995) *La compréhension en mathématiques*, Montréal: Modulo Éditeur. Traduit de l'anglais par P. Mayer.

Vásquez, R. (1994) El pensamiento simbólico y el pensamiento matemático, *Ciencia y Educación*, vol. 6, no. 1, pp. 6-26.

Luis Radford
Université Laurentienne