Actes du Colloque

Élève, école, société: pour une approche interdisciplinaire de l'apprentissage

7 février 1992

CIRADE, UQAM, mai 1993

Éditeurs:
Luis Radford
Ana Lobo Mesquita

Responsable:
Catherine Garnier

ISBN 2-921558-04-1
Pour dépôt légal - Bibliothèque nationale du Québec, 1993

LE RAISONNEMENT ALGÉBRIQUE
UNE RÉFLEXION ÉPISTÉMOLOGIQUE

Luis Radford
CIRADE, Université du Québec à Montréal

Résumé

*Nous abordons ici le problème du raisonnement algébrique sous un angle épistémologique à intérêt didactique, en examinant de près une **forme de pensée** qui est à la base d'une partie importante de l'activité mathématique ancienne en relation avec l'algèbre, à savoir la pensée analytique. Nous contrastons celle-ci à une autre **forme de pensée** (antérieure à celle-là), la pensée proportionnelle. Pour pouvoir mener notre analyse nous avons élaboré un cadre théorique qui prend en compte les relations entre les problèmes, les concepts et les méthodes de résolution.*

Introduction

Depuis quelques années, on observe un intérêt croissant, dans le cadre des recherches en enseignement des mathématiques, à comprendre ce qu'est le raisonnement algébrique. Cette question se veut un préalable ou un point de départ face à des actions à entreprendre sur le plan didactique, afin de faciliter aux élèves la construction des connaissances algébriques.

Pour Kieran (1991), la caractérisation de la pensée algébrique est liée à l'acte de généralisation, sans toutefois rester à ce niveau: pour elle, «*a necessary component is the use of algebraic symbols to reason about and to express that generalization*». Filloy et Rojano (1985) ont posé le problème en termes de la construction et de la structuration de ce nouveau langage algébrique, dont l'évolution est vue -entre autres choses- en fonction de l'apparition de nouveaux objets, des nouvelles opérations et d'une relation entre la sémantique et la syntaxe du nouveau langage, le symbolisme y jouant un rôle important. Un concept fondamental est ici celui du *Système Mathématique de Signes* (cf. Kieran et Filloy, 1987). Lins (1989), donne par contre moins d'importance au rôle joué par les symboles et distingue, dans le cadre de la résolution de problèmes, le champ numérique de référence et le champ analogique de référence (celui-ci constituant un terrain d'observation qui privilégie l'analyse qualitative de la résolution du problème). Nadine Bednarz et Bernadette Janvier ont développé une approche très intéressante face au problème de l'émergence du raisonnement algébrique, et ce en termes des sauts conceptuels qui marquent le passage à un mode de pensée algébrique et en termes des représentations que se fait le sujet du traitement des relations contenues dans l'énoncé du problème (cf. Bednarz et al., 1991, 1992).

Colloque Élève, école, société. CIRADE, UQAM, 1993, pp. 33-45.

Dans cet article, nous nous proposons de faire quelques considérations d'ordre épistémologique relativement au raisonnement algébrique dans la résolution de problèmes. Dans un premier temps, nous essaierons d'esquisser un cadre théorique -dont le but est de fournir une plate-forme d'observation et d'analyse de théories (ou corpus de connaissances) mathématiques- qui privilégie l'idée de *problème* et de *méthode de résolution*. Bien que ce cadre théorique se trouve encore à l'état embryonnaire, il suffira aux besoins de cette étude. Puis, à partir de certains exemples tirés de l'histoire des mathématiques, vue ici à la lumière de notre cadre théorique, nous allons tenter de repérer de près certains changements qui surviennent à l'intérieur de la théorie quand celle-ci atteint un niveau algébrique.

Le cadre théorique:

D'un point de vue épistémologique, nous nous proposons de considérer une *théorie* ou un *système* τ comme étant composé d'un ensemble (structuré) Ω de concepts (ou cadre conceptuel), d'un ensemble Π de problèmes, et d'un ensemble Σ de méthodes de résolution de problèmes[1].

Un problème ne se pose jamais *in vacuo*: il signifie problème par rapport à quelque chose, en particulier par rapport à un certain cadre conceptuel Ω. Ainsi, par exemple, les problèmes sur les nombres premiers, chez Euclide, relèvent du concept de diviseur d'un nombre. Il y a donc une relation de type Ω—>Π («Π *dépend de* Ω»).

Mais les problèmes Π qu'on envisage dépendent eux aussi des méthodes Σ dont on dispose: il y a ainsi une relation: Σ—>Π.[2] Autrement dit, les ensembles Ω et Σ sont liés à l'ensemble Π, par le fait que justement les concepts de Ω et les méthodes de Σ sont censés apporter des solutions aux problèmes contenus dans l'ensemble Π. On peut représenter cela par l'expression:

$$\Omega, \Sigma \longrightarrow \Pi$$

D'autre part, les méthodes Σ d'une théorie dépendent des concepts, Ω, et des problèmes, Π, qu'on se pose:

$$\Omega, \Pi \longrightarrow \Sigma$$

Par exemple, les méthodes générées pour résoudre le problème du calcul des zéros d'une fonction dépendent des concepts qu'on utilise (continuité de la fonction, dérivabilité, comportement de la dérivée dans un intervalle ...)

1 On prend ici le mot *théorie* dans un sens très général.

2 Souvent la *présentation* des problèmes Π de la théorie τ se fait en fonction de la méthode de résolution: c'est le cas du *Libro di Ragioni*, de Paolo Gerardi, par exemple (cf. Van Egmond, 1978).

Naturellement, il y a aussi une relation de type:

$$\Sigma, \Pi \longrightarrow \Omega$$

Ainsi, par exemple, quand Lagrange se trouve confronté au problème π de la résolution de l'équation du cinquième degré, en utilisant les méthodes Σ de l'époque (basées essentiellement sur les opérations élémentaires de l'algèbre), il se voit obligé d'introduire de nouveaux concepts, comme celui de *fonctions semblables* (celles qui restent invariantes par le même groupe de permutations) ou celui d'*équation réduite* (cf. Radford, 1990).

Notre cadre théorique suppose que les *formes de pensée* C_τ qui permettent la construction cognitive d'une théorie $\tau = (\Omega, \Pi, \Sigma)$ sont liées aux relations X-->Y («Y *dépend de* X») qui s'établissent entre les composantes de τ, de sorte que l'*évolution* d'une théorie pourrait être mieux comprise, comme le suggèrent les exemples que nous venons de voir, justement à travers l'interaction des composantes de τ, donc à travers la relation «-->» («...*dépendre de*...») qui opère sur τ[3]. Autrement dit, l'étude de l'ensemble C_τ des *formes de pensée* qui sont à la base de la construction de la théorie t pourrait être abordée à l'aide du couple (τ, -->).

Bien sûr, il n'est pas question dans cet article, de nous occuper d'une étude minutieuse de l'évolution de l'algèbre: l'étude de la théorie algébrique τ et de ses composantes s'avère un travail d'une complexité majeure. Ainsi, à la place d'une étude longitudinale exhaustive, nous allons nous contenter ici, comme nous l'avons dit ci-dessus, de tenter de repérer certains changements qui surviennent quand une théorie atteint un niveau algébrique.

Nous allons analyser certaines procédures de résolution de problèmes qui proviennent des mathématiques babyloniennes et les comparer à la méthode que nous avons appelée méthode de l'*inconnue opérationnelle* de Diophante (cf. Radford, 1992). Il ne s'agit pas ici d'entrer dans la polémique -toujours ouverte- de la présence ou de l'absence d'une «algèbre» chez les babyloniens[4]: ce qui nous intéresse est de voir, à partir de segments fiables de l'activité mathématique d'autrefois que l'histoire met à notre disposition, quelle est la *différence* au niveau des *théories*, quand on passe de méthodes de résolution non analytiques aux méthodes de résolution analytiques[5].

3 Évidemment, il y a aussi d'autres relations qui peuvent faire qu'une théorie change, par exemple, les relations de la théorie avec la société dans laquelle la théorie se trouve placée.

4 Polémique qui glisse souvent dans le piège d'aller voir cette possible algèbre à la lumière de notre algèbre actuelle!

5 L'analyse est prise ici au sens de Pappus: on part de la supposition que la chose cherchée est déjà obtenue afin d'en dégager une suite de conséquences. Une discussion sur l'analyse comme méthode en algèbre se trouve dans Charbonneau et Lefebvre (1991) ou Lefebvre (1992).

Résolutions non analytiques: quelques témoignages

Les textes que nous allons étudier dans cette section proviennent des mathématiques qui ont fleuri en Mésopotamie, cette plaine bordée par les montagnes arméniennes, le massif montagneux du Zagros et le désert de Syrie, et parcourue par les eaux du Tigre et de l'Euphrate et sur laquelle se sont érigées des villes telles que Babylone, Sumer et Suse. Ces mathématiques ont attiré l'attention d'un certain nombre d'historiens et de mathématiciens, surtout à partir de la période entre les deux guerres, grâce aux possibilités offertes par le développement de l'archéologie. Les travaux de traduction et d'analyse des tablettes contenant des textes en relation avec les mathématiques (Neugebauer, 1935, Neugebauer et Sachs, 1945, et Thureau-Dangin, 1934, entre autres), ont permis d'avoir une idée des méthodes et des problèmes utilisés dans la région de Mésopotamie au cours de la période qui s'étend jusqu'avant la conquête de Babylone par Alexandre Le Grand, soit vers 311 av. J.-C.

Parmi les textes mésopotamiens qui nous sont parvenus -inscrits sur des tablettes en argile qui ont en général la taille d'une main- certains présentent des problèmes qui sont résolus par des méthodes non analytiques, qu'on peut appeler des méthodes par ajustement. Voici quelques exemples.

Les méthodes par ajustement

Dans la méthode par ajustement, on part d'une «solution» numérique ***a priori* fausse.** On voit quel est le résultat et on le compare avec ce qu'on aurait dû obtenir. L'ajustement peut se faire de plusieurs façons, dépendant du problème en question.

Ajustement par proportionnalité

L'exemple suivant, qui provient d'une tablette de Suse, écrite probablement vers 1300 av. J.-C., montre que l'ajustement se fait sur la base d'un raisonnement proportionnel. Aux yeux des mathématiques actuelles, le problème met en oeuvre une expression qui n'est pas linéaire, mais cela n'empêche pas d'utiliser avec succès l'idée d'ajustement[6].

Nous avons laissé les nombres en base 60, c'est-à-dire dans la base utilisée en Mésopotamie à l'époque. Ainsi, a;b signifie a + (b/60). De même, a;b;c signifie a+ (b/60) + $c/(60)^2$.

---

6 Il s'agit en fait du calcul de la diagonale d'un rectangle; la solution se base sur la relation dite de Pythagore: la diagonale est donnée par la relation: $(x^2 + y^2)^{1/2}$. Si on appelle f(x,y) cette expression, on voit que $f(\lambda x, ly) = \lambda f(x,y)$: cela assure le succès du raisonnement proportionnel dans le problème.

Énoncé du problème[7]:

Supposons que la largeur [du rectangle] mesure un quart de moins que sa longueur. 0;40 [est] la dimension de la diagonale. Quelles sont les dimensions du rectangle?

La solution (les nombres sont donnés en base 60) se fait ainsi:

«Toi pose 1, la longueur, pose 1 le prolongement.
0;15, le quart[8], soustrais de 1. Tu trouves 0;45.
Pose 1 comme longueur, pose 0;45 comme largeur, carré 1, la longueur, 1 tu trouves.
Carré 0;45, la largeur, 0;0;2025 tu trouves.
De 1 et 0;0;2025 [fait] la somme: 1;0;2025
Quelle est la racine carrée? 1;15 est la racine carrée.
Attendu que 0;40 la diagonale t'a été indiquée, dénoue l'inverse de 1;15 la diagonale, 0;48 [tu trouves]».

Ensuite, le scribe fait le rapport entre la mesure de la diagonale qu'il vient de trouver (1;15) et celle qui est dite dans l'énoncé (0;40):

Porte 0;48 à 0;40 la diagonale qui t'a été dite, 0;0;1920.
Porte 0;0;1920 à 1 la longueur que tu as posée: 0;0;1920 tu trouves, 0;0;1920 est la longueur.
Porte 0;0;1920 à 0;45 la largeur que tu as posée, 0;24 tu trouves, [c'est la largeur].

Ajustement par compensation

L'exemple suivant, qui provient de la tablette VAT 8389, laisse voir un type de résolution que nous pouvons appeler *par compensation.* Il s'agit de trouver deux grandeurs dont on connaît la somme. On suppose au départ ces grandeurs égales à la moitié de leur somme, puis à la fin on compense de façon à obtenir les grandeurs correctes.

Énoncé du problème:

«J'ai récolté 4 gur de grains par bùr[9]. Dans un deuxième terrain, j'ai récolté 3 gur de grains par bùr. La production du premier terrain a été de 8,20 de plus que le deuxième. Les aires des deux terrains font ensemble 30,0 [SAR]. Quelle est l'aire de chacun des terrains?»

Vu que 4 gur= 20,0 sila et que 3 gur=15,0 sila, le problème peut s'écrire, en langage algébrique actuel, de la façon suivante:

$$(20{,}0/30{,}0)\,x - (15{,}0/30{,}0)\,y = 8{,}20$$
$$x + y = 30{,}0$$

---

7 Source: Pichot (1991, pp. 108-109).

8 Rappelons que 1/4 = 15/60; donc un quart s'écrit 0;15 en base 60.

9 Le bùr est une unité de mesure de surface. 1 bùr = 30,0 SAR (donc 30x60 SAR, en notation décimale) et 1 SAR = 12 yds. carrées). Le gur est une mesure de volume, ainsi que le sila. L'équivalence entre ces deux dernières, qui apparaîtra dans les calculs suivants est: 1 gur = 5,0 sila.

La résolution commence en supposant que les deux terrains ont 15,0 SAR chacun (donc la moitié de l'aire totale). Le scribe dit:

«Divise 30,0, la somme des deux aires, en deux parties: 15,0. Ainsi, prends 15,0 et 15,0 encore une fois.»

Ensuite la tablette présente une suite de calculs qui correspondent à la quantité de production qui reviendrait à chaque terrain, s'ils avaient une aire de 15,0 chacun: l'inverse de 30,0 est multiplié par 20,0, ce qui donne 0;40, c'est-à-dire la production de grains du premier terrain par SAR. Ensuite, le scribe calcule la production qui correspond à 15 SAR: il fait:

0;40 x 15,0 = 10,0.[10]

Le scribe fait un calcul similaire pour trouver la production du deuxième terrain: celle-ci est de 0;30 et donc la production de ce terrain (supposé de 15 SAR d'aire) est de 7,30.

Ensuite le scribe fait la différence entre les productions:

10,00 - 7,30 = 2,30

Or, d'après l'énoncé du problème, la différence devait être de 8,20.

Alors, le scribe soustrait les deux valeurs:

8,20 - 2,30 = 5,50

Le scribe dit alors: «garde 5,50 en tête» et fait le calcul suivant:

0;40 + 0;30 = 1,10

Puis, dit:

«Je ne connais pas l'inverse de 1;10. Par quoi faut-il que je multiplie 1;10 pour avoir 5,50? Prends 5,0, car 5,0 x 1;10 = 5,50.»

«Soustrais 5,0 d'une des aires et ajoute-le à l'autre. La première aire est 20,0 et la deuxième 10,0. Donc 20,0 est l'aire du premier terrain et 10,0 est celle de l'autre.»

Commentaires:

Le calcul 0;40 + 0;30 = 1,10, qui est vital dans le dénouement de la solution, peut être compris de la façon suivante[11]: vu que la somme des aires doit être 30,0 SAR, si on augmente l'aire d'un des terrains en une certaine quantité, il faut retrancher cette même quantité à l'aire de l'autre terrain. Pour chaque SAR que j'ajoute au premier terrain, il augmente de 0;40 gur sa production, alors que l'autre la réduit de 0;30. Donc la différence entre les productions des terrains augmente de 0;40 + 0:30 = 1,10 par SAR. Mais comme on ne veut pas 1,10 mais 5,50, il faudrait prendre 5,0 SAR.

Ainsi, le premier terrain aurait une aire de 15,0 + 5,0 et le deuxième une aire de 15,0 – 5,0.

10 Rappelons que 15,0 s'écrit en décimal 15x60 et que 0;40 s'écrit 40/60. Donc 0;40 x15,0 = 600 = 10x60 donc 10,0 en base 60.

11 L'interprétation que nous fournissons est basée sur celle de van der Waerden (1961; 1967).

Les deux problèmes précédents témoignent de l'utilisation de deux méthodes (arithmétiques) de résolution de problèmes chez les mésopotamiens, donc de deux éléments de l'ensemble que nous avons désigné par Σ dans l'introduction. Au niveau de l'ensemble Ω de concepts, on peut remarquer que les inconnues du problème interviennent dans les opérations en leur donnant des **valeurs artificielles**, qu'on sait a priori ne pas être les valeurs correctes. Il s'agit d'une conceptualisation *non symbolique* mais *numérique* des inconnues qui débouche sur un artifice heuristique, et qui génère des méthodes μ_1 et μ_2 dans l'ensemble Σ permettant de résoudre des problèmes de l'ensemble Π.

Les méthodes précédentes pourraient être classées aussi comme des méthodes de fausse position. En tous cas, les distinguer entre elles nous semble pertinent du fait que la démarche de correction de la solution initiale (fausse *a priori*) est différente dans chaque cas.

Maintenant, occupons-nous des *Arithmétiques* de Diophante, afin d'essayer de cerner quelques changements au niveau de la *théorie*.

Diophante D'Alexandrie

Dans les mathématiques mésopotamiennes, les problèmes étaient posés à l'intérieur d'un contexte qui leur donnait du sens; il n'y avait pas de problèmes sur des nombres (où ceux-ci étaient traités comme des objets abstraits), de telle sorte que les nombres qui étaient présents dans les énoncés de problèmes exprimaient une *mesure*. Du temps de Diophante (3e siècle ap. J.-C.), le concept de nombre avait déjà fait un long chemin et il était devenu un objet d'étude: les grecs s'étaient intéressés auparavant à certaines propriétés et relations entre les nombres (comme par exemple aux diviseurs d'un nombre, aux nombres premiers, aux propriétés des nombres pairs et impairs) cela conduisait à la construction d'un savoir dont le support de validation était souvent géométrique.

Or, Diophante porte son attention non pas sur les nombres pairs et impairs ou sur les nombres premiers, mais sur les puissances des nombres: au début du Livre I des *Arithmétiques* -une oeuvre qu'il composa vers 250 ap. J.-C. et qui comporte treize livres dont seulement 10 nous sont parvenus[12]- il commence en faisant une classification des nombres: les carrés, les cubes, les bicarrés (qui sont formés en prenant un carré qu'on multiplie par lui-même), les

12 Des treize livres, seulement six nous étaient parvenus, jusqu'à ce qu'en 1968 on découvrit un manuscrit -qui datait de la fin du XIIe siècle- d'une traduction du grec à l'arabe de quatre autres livres, dans une bibliothèque à Meshed, une ville au nord-est de l'Iran. D'après Sesiano (Sesiano, 1985), les quatre nouveaux livres trouvés (i.e., les livres arabes) s'intercalent entre les trois premiers livres grecs (Livres I, II et III) et les trois autres livres grecs, appelés jusqu'alors Livres IV, V et VI. Nous suivrons l'ordre indiqué par Sesiano, de sorte qu'on a: les trois premiers livres grecs (designés toujours par Livres I, II et III), les quatre livres arabes (designés par Livres IV, V, VI et VII) et ensuite les autres livres grecs connus, qui seront désignés par Livres «IV»,«V» et «VI».

carré-cubes (i.e., carrés multipliés par cubes, ayant même côté que ces carrés) et les cubo-cubes (ce que nous appelons la sixième puissance d'un nombre: a^6). Ainsi, les nombres 4 et 9 appartiennent à la «catégorie» des carrés, alors que 8 et 125 appartiennent à la «catégorie» des cubes. Mais le cadre conceptuel Ω, à l'intérieur duquel Diophante va poser ses problèmes, et qui contient donc ces «catégories» que nous venons de mentionner, contient aussi un autre concept qui est fondamental: celui d'***arithme***, qui relève du concept de nombre mais qui en même temps le dépasse: l'idée d'arithme *(«une quantité indéterminée d'unités»)* est en effet une idée qui réfère à une composante *logique* et à une composante *heuristique* qui va permettre de créer l'objet algébrique ***équation***. L'arithme va jouer le rôle d'***inconnue***. Sa composante *logique* est ce qui va permettre de concevoir ce «nombre» comme un *nombre caché*, sur lequel on va *opérer* comme si c'était un nombre connu -bref, comme si c'était un «vrai» nombre (comme 5, 7/8, etc., que Diophante appelle les nombres invariants déterminés[13])- dont l'identité ne sera révélée qu'à la fin des calculs. Assumer le nombre qu'on cherche comme s'il était un nombre connu, exige du sujet -entre autres choses- qu'il se place dans une situation hypothétique. Et on sait que cette démarche (qui relève du raisonnement logique) ne va pas de soi (Radford, 1987). Comme on le verra dans l'exemple, que nous allons étudier plus loin, les composantes logique et heuristique sont liées l'une à l'autre: la seule composante logique ne saurait suffire à la démarche analytique. Il en va de même pour la composante heuristique.

Avant de voir un exemple de fonctionnement de l'arithme, arrêtons-nous un moment sur les problèmes contenus dans les 10 livres que nous possédons des *Arithmétiques*. Ce sont des problèmes qui se réfèrent à des nombres et/ou des triangles rectangles. De plus les énoncés des problèmes reflètent la structure de l'arithmétique en termes de «catégories» d'après la conception de Diophante, et une caractéristique des énoncés de problèmes est l'absence de nombres particuliers (ou spécifiques) donnés.

On est donc en présence d'un exemple très clair d'une des relations qu'il y a entre l'ensemble Π des problèmes et l'ensemble Ω des concepts: une relation de type Ω-->Π.

Voici trois exemples de problèmes:

Livre I, problème 27:

Trouver deux nombres dont la somme et le produit forment des nombres donnés[14].

---

13 Diophante considère uniquement les nombres rationnels positifs.

14 Il s'agit donc d'un problème que nos notations actuelles permettent d'écrire ainsi:

$$x + y = a$$
$$xy = b$$

Livre V, problème 5:

Trouver deux nombres, l'un, un cube et l'autre un carré, tels que si on multiplie le cube du cube par deux nombres donnés et qu'on ajoute chacun de ces produits au carré du carré, le résultat est dans chaque cas un nombre carré[15].

Livre VI, problème 6:

Trouver un triangle rectangle tel que le nombre de son aire, augmenté du nombre de l'une des perpendiculaires, forme un nombre donné[16].

On peut ajouter que, contrairement à ce qui se passe dans les mathématiques mésopotamiennes, dans les problèmes chez Diophante tout rapprochement à une situation «réelle» est exclu: on ne trouve pas de problèmes appliqués au commerce, à l'agriculture ou à une autre situation concrète.

Occupons-nous maintenant de la façon dont Diophante résout les problèmes qu'il se pose.

Voici le problème 27 du Livre I:

Trouver deux nombres dont la somme et le produit forment des nombres donnés.

La solution est donnée comme suit:

«Proposons, dit Diophante, que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités. Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes. Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes. En conséquence, posons que le plus grand nombre est 1 arithme augmenté de 10 unités qui est la moitié de la somme des nombres; donc le plus petit nombre sera 10 unités moins 1 arithme, et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités et que leur excédent est 2 arithmes.

Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est 100 unités moins un carré d'arithme, ce que nous égalons à 96 unités, et l'arithme devient 2 unités. En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités et le plus petit sera 8 unités, et ces nombres satisfont la proposition.»

(Ver Eecke, 1926; pp. 36-38)

Comme on le voit, Diophante pose $10+a$ pour le premier nombre, et $10-a$ pour le deuxième nombre, de sorte que la somme des nombres est 20, comme exigé dans l'énoncé. Du fait que le produit des nombres est 96, il déduit que $100-a^2$ est égal à 96. Il s'agit donc là d'une

15 C'est-à-dire, en notation moderne:

$$(x^2)^2 + a(y^3)^3 = u^2$$
$$(x^2)^2 + b(y^3)^3 = v^2$$

16 C'est-à-dire, en notation moderne:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$bc/2 + b = u$$

équation dont la solution (égale à 2) nous révèle la valeur de l'arithme (que nous avons désigné ici par *a*). De là, on trouve les nombres cherchés: 10+2 et 10-2, c'est-à-dire 12 et 8.

La méthode de résolution utilisée par Diophante diffère de celles que nous avons vues ci–dessus, dans les résolutions non analytiques: quelques témoignages, en ceci qu'il ne s'agit pas d'introduire un nombre *a priori faux*, pour le corriger à la fin, mais de partir de *la valeur exacte d'une quantité qu'on ne connaît pas, en faisant comme si on la connaissait.*

Cette façon de «penser» le problème et sa résolution -qu'on peut appeler analyticité- se manifeste, au plan de l'ensemble des *concepts*, Ω, par l'introduction d'une **inconnue** qui ne sera pas juste le point d'aboutissement des calculs effectués sur les données numériques du problème, comme cela arrive dans les procédures arithmétiques, mais un point de départ. L'analyticité se manifeste aussi au plan Ω en permettant l'émergence du concept d'équation.

Au plan de l'ensemble des *méthodes*, Σ, la pensée analytique se projette dans la création d'une **méthode spécifique** de résolution de problèmes: cette méthode consiste à mettre en scène une quantité inconnue sur laquelle on **opère**, au même titre que les nombres, d'après l'énoncé du problème[17]. Mais la pensée analytique se projette aussi sur le plan Π des problèmes, en permettant de formuler de nouveaux problèmes.

Par ailleurs, le problème 27 du Livre I que nous venons de voir nous éclaire aussi sur la relation qu'il y a entre concepts et méthodes au niveau de la *théorie* qui nous intéresse: l'arithme et la méthode de résolution sont liées de façon indissociable: on est en présence d'une relation à double sens:

$$\Omega \longleftrightarrow \Sigma$$

La pensée analytique se projette aussi sur le plan Π de problèmes: une lecture attentive des *Arithmétiques* de Diophante ne peut pas laisser échapper le fait que les problèmes, énoncés en termes de «catégories» au sens de Diophante, s'actualisent en problèmes de plus en plus précis (dans lesquels les catégories cèdent la place à des «nombres concrets» appartenant à ces catégories), l'actualisation se faisant en termes de l'obtention d'une équation reconnue résolvable par les méthodes analytiques de la théorie: la projection de la pensée analytique sur le plan des problèmes amène, en particulier, une relation de type:

$$\Sigma \longrightarrow \Pi$$

17 Dans notre perspective, il n'est donc pas requis, pour qu'une méthode soit considérée comme algébrique, que les inconnues soient désignées par des symboles spécifiques (comme x, y, z ...).

Remarques finales

La discussion précédente a tenté de mettre en évidence que certains concepts clés de l'algèbre élémentaire, comme ceux d'équation et d'inconnue, sont liées à un type de raisonnement très particulier, à savoir, le raisonnement analytique.

Nous avons comparé des procédures de résolution de problèmes basées sur des raisonnements non analytiques à des procédures basées sur des raisonnements analytiques, ces procédures étant tirées de l'histoire des mathématiques. On a pu remarquer que dans les premières procédures les concepts d'équation et d'inconnue (au sens algébrique) sont absents, alors que ces concepts deviennent fondamentaux dans les procédures basées sur un raisonnement analytique.

Pour mieux comprendre la portée du raisonnement algébrique, nous avons été amenés à élaborer un cadre théorique susceptible de prendre en compte et les objets mathématiques et les *formes de pensée* (ou du moins certaines d'entre elles) qui sous-tendent la construction de ces objets. L'ensemble de ces *formes de pensée* que nous avons désigné dans l'introduction par C_t peut être détecté, d'après nous, ne serait-ce que partiellement, à travers l'interaction des composantes Ω, Σ, Π de la théorie τ, c'est-à-dire à travers le couple (τ, -->).

Dans ce contexte, la *pensée proportionnelle* serait justement un des éléments de l'ensemble C_τ, qui permet la construction de la théorie babylonienne τ présentée ici[18]. Chez Diophante, par contre, ce n'est pas la pensée proportionnelle qui est à la base de la construction de la théorie, mais la *pensée analytique*: c'est à partir de cette forme de pensée qu'on comprend les relations entre les composantes de la théorie: la pensée analytique serait donc, dans ce deuxième cas, un élément de C_τ[19].

Sur le plan didactique, la question qui se pose est de savoir si un travail au niveau de la pensée proportionnelle permettrait de contribuer à l'émergence de la pensée analytique[20].

Remarquons, enfin, que nous nous sommes occupés ici d'une des parties seulement du

---

18 Naturellement, on n'est pas en train d'affirmer ici que toute la mathématique babylonienne est basée sur un raisonnement proportionnel.

19 Cela ne signifie pas que les éléments de $C\tau$ restent à l'extérieur de la dynamique des relations X-->Y, entre les composantes de la théorie; il y a aussi un mouvement en ordre inverse qui permet aux éléments de C_τ de se nourrir de cette dynamique: le développement d'un langage symbolique algébrique à la Renaissance (lié, en particulier, aux aspects méthodologiques, donc à l'ensemble Σ), a amené le développement d'une pensée symbolique capable de contrôler ce nouveau langage.

20 Le lecteur aura remarqué la ressemblance entre la deuxième méthode babylonienne et celle de Diophante: Gandz voit justement là une continuité entre les mathématiques babyloniennes et l'algèbre chez Diophante, et voit chez ce dernier un continuateur d'une tradition algébrique antérieure (Gandz, 1938).

domaine algébrique: celle qui concerne la résolution de problèmes. Un autre domaine -aussi important que celui-ci- qui concerne l'étude des nombres et qui s'inscrit dans une autre *tradition mathématique* serait également à considérer. Ce domaine dans lequel Diophante a exercé (cf. *Le livre des nombres polygonaux*) relève d'une autre forme de pensée qui privilégie en particulier l'action de *généralisation*, ce qui touche donc de près l'aspect soulevé par C. Kieran (cf. introduction, ci-haut). Les études épistémologico-didactiques centrées sur la forme de pensée, à la base de la généralisation en algèbre, ne sont pas très nombreuses. On peut cependant mentionner l'étude récente de Filloy sur *Le livre des nombres carrés* de Fibonacci (Filloy, 1992), laquelle permet d'entrevoir de nouvelles pistes en ce qui concerne les relations entre l'arithmétique et l'algèbre, des pistes jusqu'alors passées inaperçues.

Bibliographie

Bednarz, N., Janvier, B. (1991). *Émergence des raisonnements algébriques: un essai de caractérisation des sauts conceptuels qui marquent le passage à un mode de pensée algébrique.* Cahiers du CIRADE, Université du Québec à Montréal, 14 pages.

Bednarz, N., Janvier, B., Mary, C., Lepage, A. (1992). L'algèbre comme outil de résolution de problèmes: une réflexion sur les changements nécessaires dans le passage d'un mode de traitement arithmétique à un mode de traitement algébrique, *dans: Actes du Colloque portant sur l'émergence de l'algèbre.* CIRADE, Université du Québec à Montréal, pp. 17-31.

Charbonneau L., Lefebvre J. (1991). *Une lecture de Viète. Introduction à l'art analytique. Cinq livres des zététiques.* CIRADE, Université du Québec à Montréal.

Egmond, W. van (1978). The earliest vernacular treatment of algebra: the Libro di Ragioni of Paolo Gerardi (1328). *Physis, 20,* pp. 155-189.

Filloy, E., Rojano, T. (1985). *La aparición del lenguaje aritmético-algebraico.* Mexico: Cuadernos de Investigación, No. 1. Programa nacional de formación y actualización de profesores de matemáticas. CINVESTAV-IPN. 16 pages.

Filloy, E. (1992). *El libro de los cuadrados de Leonardo de Pisa.* Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV, PNFAPM. México.

Gandz, S. (1938). The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra. Osiris, *Vol. 3,* pp. 405-557.

Kieran, C., Filloy, E. (1987). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. España: Enseñanza de las Ciencias, 7(3), pp. 229-240.

Kieran, C. (1991). A perspective on algebraic thinking. *Proceedings of 13th P.M.E Conference. Paris,* France, *2,* pp. 163-171.

Lefebvre, J. (1992). Qu'est l'algèbre devenue? *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec, 31/32*(4/1), pp. 27-32.

Lins, R. (1989). A framework for understanding what Algebraic Thinking is. *Proceedings of 14th P.M.E Conference*. Mexico, pp. 93-100.

Neugebauer, O. (1935-1937). Mathematische Keilschrift-Text, *dans: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*. Berlin, Springer.

Neugebauer, O., Sachs, A.J. (1945). *Mathematical Cuneiform Texts*. American Oriental Society. American Oriental Series, *29*. New Haven, Connecticut.

Pichot, A. (1991). *La naissance de la Science. Vol. 1,* Mésopotamie, Égypte. France: Gallimard, Folio, essais, No. 154.

Radford, L. (1990). *Lagrange y el desarrollo conceptual de la Teoría de Galois*. Guatemala: Cuadernos de Investigación de la EFPEM. Universidad de San Carlos.

Radford, L. (1987). Interprétation d'énoncés implicatifs et traitements logiques. *Proceedings of the XI Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education, III,* pp. 392-397, Montréal.

Radford, L. (1992). Diophante et l'algèbre pré-symbolique. Bulletin de l'Association Mathématique du Québec, *31*/*32*(4/1), pp. 73-80.

Sesiano, J. (1982). *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetic*. Springer-Veerlag. New York.

Thureau-Dangin, F. (1938). *Textes mathématiques babyloniens*. Leyde, Brill. Ex Oriente Lux, *I*.

Ver Eecke, P. (1926). *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et le Livre des nombres polygones*. Liège: Desclée de Brouwer. Réimpression, Paris: A. Blanchard, 1959.

Waerden, B.L. van der (1967). *Science Awakening*. New York: Oxford University Press.