Actes du Colloque portant sur l'émergence de l'algèbre

10 avril 1992

CIRADE - UQAM
Novembre 1992

ISBN 2-92-1284-96-0
Dépôt légal - Bibliothèque nationale du Québec 1992

LE RAISONNEMENT ALGÉBRIQUE DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ÉCRITS: UN MODÈLE D'INTERACTION DE REPRÉSENTATIONS

Luis Radford[1]
CIRADE
Université du Québec à Montréal

1. La position du problème

La résolution de problèmes algébriques écrits -word problems- constitue un des points du programme de l'école secondaire où les élèves éprouvent des difficultés majeures. L'échec constant des modèles utilisés dans l'enseignement demande de s'arrêter sur ce problème afin de mieux comprendre les difficultés qui le sous–tendent et pouvoir mettre en place des séquences d'enseignement susceptibles de faciliter une construction correcte et efficace des connaissances par les élèves.

Notre projet se centre particulièrement sur le type de pensée algébrique qui est mise en œuvre par l'élève quand il résout un problème écrit. Ce n'est que par la connaissance des caractéristiques de cette pensée qu'on pourra arriver à mieux connaître et comprendre les difficultés que suscite cette difficile tâche qu'est la résolution algébrique d'un problème écrit.

Le texte que nous présentons à ce colloque interne vise, outre de faire le point sur les résultats que nous avons obtenus précédemment et de situer ceux-ci par rapport à d'autres travaux, la présentation d'un modèle de résolution algébrique de problèmes écrits. Le modèle reprend certains éléments issus de la théorie des représentations (pour laquelle les idées de N. Bednarz et C. Janvier m'ont été très précieuses) et certains éléments de la Linguistique, en particulier de la Pragmatique du Texte. La pertinence de notre modèle est suggérée par la possibilité qu'il fournit d'interpréter les résultats que nous avons obtenus au Guatémala dans une expérience exploratoire auprès d'élèves en apprentissage de l'algèbre (14-15 ans). Mais à un autre niveau, notre modèle ouvre aussi sur des perspectives permettant de mieux comprendre certains éléments de l'algèbre des abbaquistes, c'est-à-dire l'algèbre qui s'est développée du 12e au 16e siècles en Europe, et plus particulièrement en Italie, dans les Écoles d'Abbaco. On verra, en effet, que les productions des algébristes de cette époque cadre parfaitement dans la dynamique d'interactions entre représentations sur laquelle repose notre modèle.

2. La psychologie cognitive et la résolution de problèmes: un exemple

Ces dernières années, la psychologie cognitive a attiré l'attention sur certaines fonctions intellectuelles qui sont présentes dans la résolution d'un problème, comme la compréhension du problème, le rôle de la mémoire, la représentation interne des informations, et on a mis en place certains modèles qui essaient de rendre compte du

1 Luis Radford est maintenant professeur à l'Université Laurentienne de Sudbury. Lorsque ce texte a été produit, il était chercheur postdoctoral au CIRADE.

fonctionnement des processus cognitifs présents dans la résolution d'un problème. Néanmoins, les modèles existants se limitent en général aux problèmes écrits d'arithmétique élémentaire (cf. Greeno; 1985).

Dans la perspective de la psychologie cognitive, une emphase particulière a été donnée au type de connaissances préalables qu'il est nécessaire qu'un individu possède pour résoudre avec succès un problème. Greeno (1980) affirme qu'il est indispensable que l'individu ait une connaissance spécifique au domaine dans lequel le problème se situe (arithmétique, algèbre, ...). Il affirme aussi que l'individu doit posséder des stratégies générales capables de lui permettre l'analyse de la situation. En suivant cette idée, Mayer (1983) distingue quatre phases majeures dans la résolution d'un problème algébrique: compréhension, traduction, plan et exécution, et associe à chaque phase un type spécifique de connaissances: des connaissances linguistiques et factuelles, des connaissances schématiques, des connaissances stratégiques et des connaissances algorithmiques, respectivement. Or, bien que ces connaissances soient nécessaires d'un point de vue cognitif, pour pouvoir comprendre réellement les difficultés qu'éprouvent nos élèves, il faut considérer aussi la façon dont ces connaissances sont reliées et mises en action. C'est pourquoi la seule «possession» des catégories de connaissances de Mayer ne saurait être que nécessaire et non suffisante.

3. Sur certains de nos résultats précédents

La résolution algébrique d'un problème écrit peut être vue, dans un premier temps, comme la transformation d'un texte problème en une représentation algébrique externe (souvent sous forme d'équation) sur laquelle on agit en vue de répondre à la question posée.

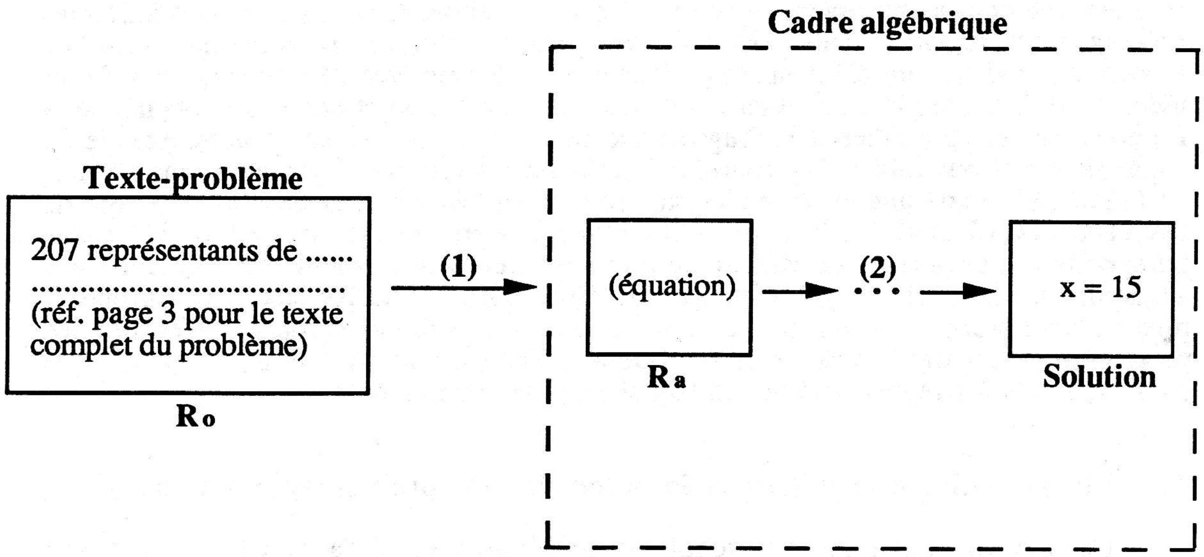


Figure 1

Le problème didactique indiqué au point 1 (c'est-à-dire la détection et compréhension des difficultés rencontrées par l'élève quand celui-ci résout algébriquement un problème écrit) pourrait se reformuler en termes de la connaissance et du fonctionnement des éléments cognitifs qui sont à la base de:

(a) la transformation (1) qui permet de transformer la représentation initiale R_0 en une représentation algébrique R_a;

(b) les transformations (2) qui agissant sur la représentation R_a [souvent appelée la «traduction»: équation(s), inéquations(s),...] permettent de trouver la réponse au problème posé[2].

La plupart des modèles d'enseignement considèrent la résolution d'un problème écrit comme une séquence d'étapes qui se suivent de façon linéaire. C'est le modèle le plus répandu dans l'enseignement. Mathématiques Soleil (collection la plus utilisée au secondaire), par exemple, le divise en 4 étapes et fait correspondre à chaque étape un ensemble de stratégies (7 en moyenne). Les étapes sont: (1) comprendre le problème; (2) faire un plan; (3) exécuter le plan et (4) analyser la solution obtenue. Le bon fonctionnement de ce modèle suppose, entre autres, que l'élève soit en mesure de faire un plan de sa procédure avant de s'engager dans la résolution du problème. Les professeurs savent très bien que dans la pratique, cette étape est inaccessible, surtout aux élèves débutants.

Dans ces modèles d'enseignement, on donne priorité à l'utilisation des transformations de type (2), envisagées dans une perspective de l'algèbre comme discipline autonome. Et on conçoit que la transformation (1) est directe: la lecture du texte amène la compréhension du problème et la compréhension amène l'équation. Une étude précédente (Radford, 1991) nous laisse voir qu'en fait la représentation algébrique R_a n'est pas construite directement mais que l'élève a recours à une série de représentations externes intermédiaires (que nous avions appelées *structures de surface intermédiaires*) sur lesquelles il construit la représentation R_a. Cette même étude met en évidence un rôle spécifique des représentations externes intermédiaires, à savoir, un rôle référentiel, joué particulièrement lorsque l'élève se trouve en situation de compréhension du problème. La figure 2 ci-bas illustre cette situation: on y distingue trois représentations externes. La première se veut un premier *portrait* du Texte-Problème: cette représentation externe est incomplète (elle ne prend pas en compte les 207 représentants, par exemple); elle permet de dégager une certaine classe d'informations et est exprimée dans un **système symbolique** particulier (langage naturel abrégé, symboles mathématiques,....). Cette représentation a un rôle de compréhension. La deuxième représentation externe essaie d'exprimer la même chose que la première mais dans un autre système symbolique. Elle est une transition entre la première représentation et l'équation. Enfin, la troisième représentation est constituée par l'équation elle-même.

---

2 Nous distinguons entre les transformations (1) et (2) parce que la *nature cognitive* de ces transformations est fort différente.

PREMIÈRE REPRÉSENTATION

3 fois + Amé. que Asia.
16 Européens — Amé.
Africains > 7 à 2 fois Asiatiques.

1-1 A

207 représentants de plusieurs régions du monde étaient présents au dernier congrès international sur l'usage des drogues anabolisantes chez les sportifs. Il y avait trois fois plus d'Américains que d'Asiatiques et 16 Européens de moins que le nombre d'Américains. Le nombre d'Africains était supérieur de sept au double du nombre d'Asiatiques. Peux-tu trouver combien chaque déléguation comportait de représentants ?

<u>Montre-moi comment tu fais pour résoudre</u>.

TROISIÈME REPRÉSENTATION

207 p.

représentants de régions du monde : x

DEUXIÈME REPRÉSENTATION

américain : 2x.
Européens : 16 - 2x.
Asiatique : 2x ÷ 3.
Africains : x > 7.

Réponse.
amé ⇒ 76,4
uro. ⇒ 60,4.
siA ⇒ 25,4
Afri ⇒ 44.8.

76,4 + 60,4 + 25,4 = 162,2
207 - 162,2 = 44

207 = 5x + 16 - 3x
2x + x > 7.

207 = 5x + 16 > 7.
5x = 16 - 207 > 7.
5x = -191 > 7.
x = 38,2 > 7.

Figure 2

Outre le fait que la transformation (1) n'est pas directe mais qu'elle se décompose en sous-transformations intermédiaires, nos résultats suggèrent que les transformations ne vont pas en «sens unique», i.e. directement vers la représentation R_a: la représentation visée R_a *conditionne* aussi les représentations externes intermédiaires (ainsi que les représentations internes), et donne lieu à une démarche en forme de réseau (cf. notre modèle plus loin).

Par exemple, en vue d'exprimer les relations contenues dans le problème de la figure 2, un de nos élève a eu recours à la représentation externe (intermédiaire) suivante:

Américains:	3x
Asiatiques:	x
Européens:	x - 16
Africains:	2x>7

L'inégalité qui apparaît dans la dernière relation ne peut pas être transportée telle quelle dans une équation (car on aurait quelque chose du type: $3x + x + 3x - 16 + 2x>7 = 207$). Ainsi, le mot /être supérieur/, qui dans un premier temps a été lu par l'élève comme un comparateur, est repensé au niveau de la représentation interne et il puise dans sa *base de connaissances* une autre signification plausible dans le contexte du problème (c'est-à-dire dans ce que nous appelerons au point 4 le *cadre de signification*), et il substitue «2x>7» par une relation additive et écrit:

$$3x + x + 3x\text{-}16\ (+7)2x$$

Ensuite, pour obtenir l'équation (c'est-à-dire la représentation algébrique visée R_a), l'élève place (d'après un précepte très utilisé dans l'enseignement) les termes à inconnue d'un côté de l'égalité et les termes constants de l'autre côté:

$$3x + x + 3x + 2x = -16 + 7$$

Bien que l'équation soit abandonnée à la fin (car elle conduit à la solution impossible $x = -1$), cet exemple illustre bien comment l'idée de la représentation algébrique cherchée, R_a, peut conditionner les représentations externes intermédiaires, ainsi que les représentations intermédiaires. On voit donc que la démarche intellectuelle de l'élève quand celui-ci résout algébriquement un problème écrit ne peut plus être vue comme une suite d'étapes franchies linéairement, i.e les unes après les autres.

En fait l'influence mutuelle entre les représentations intermédiaires et la représentation visée R_a peut être observée au long de l'histoire de l'algèbre. Notre travail sur l'émergence de l'Algèbre dans l'Arithmétique de Diophante met en évidence que le processus de résolution, en particulier les choix des paramètres et le choix des relations qui lient les nombres cherchés à l'arithme, est guidé par le type d'équation auquel on va aboutir (Radford, 1992, point 4.3). Ainsi, la résolution progresse, sans perdre de vue la représentation (l'équation) vers laquelle on veut arriver. Ce phénomène historique n'est pas isolé: on peut le voir dans l'algèbre de Leonardo Pisano et de Paolo Gerardi (cf. point 5).

4. Le modèle

La lecture d'un texte amène le sujet à se faire une représentation interne (RI) du texte et celui-ci devient une représentation externe (RE) de cette représentation interne RI. La suite de caractères qui constituent le texte T renvoie donc à un ensemble de signifiés qui, se structurant, contribuent à une RI de T, rendant possible l'égalité T = RE.

Or, la représentation RI n'apparaît pas d'emblée à la fin de la lecture. La lecture est, en effet, interactive; on lit en surface en fonction de plusieurs éléments, dont certains mécanismes de lecture, et d'après la base de connaissances du sujet (cf. à ce sujet Duval; 1991). De plus, nous considérons, dans notre modèle, que la «lecture» de ce qui suit dans le texte n'est pas indépendante de ce qui le précède. En effet, la lecture permet de générer à partir d'une *phrase* un *cadre de signification* (CS) où la phrase (en tant qu'élément de la représentation externe) acquiert un sens[3]. C'est donc dans un tel cadre que les phrases suivantes vont être interprétées. C'est justement l'accommodation et la structuration des cadres de signification successifs qui donnent lieu aux représentations internes RI_1, RI_2, ...

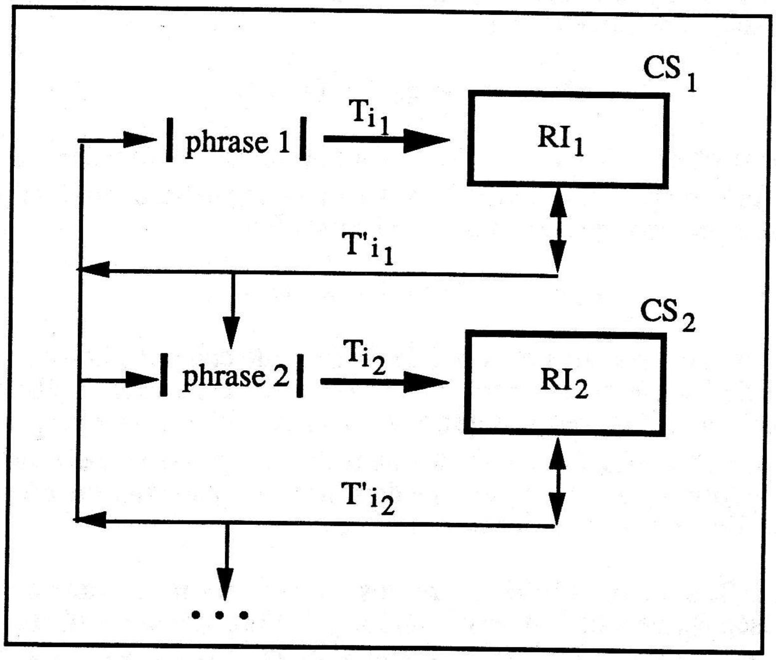


Figure 3

Les T_{i_j} de la figure 2 sont des *transformations d'intériorisation.*

Les T'_{i_j} sont des *fonctions de contrôle*: Une fois la représentation RI_1 construite, on décide si on «relit» la phrase 1 ou si l'on passe à une autre phrase.

Jusqu'ici nous avons abordé, dans un cadre de représentations, le cas de la lecture d'un texte en général. Notons, au passage, que la *compréhension* d'un texte peut être envisagée dans les termes de notre modèle comme la construction d'une représentation interne. Il est clair que la compréhension peut intervenir à plusieurs niveaux de profondeur, les niveaux les plus profonds correspondant à des représentations mieux structurées des cadres de signification[4], la question que nous devons nous poser maintenant est celle de la lecture d'un texte problème (T-P).

---

3 Ainsi, la phrase p=/soit f une fonction polynômiale quadratique/ génère un CS (évidemment non nécessairement le même pour deux lecteurs différents) qui donne du sens aux termes /fonction/, /fonction polynômiale/ et où l'on pourrait trouver une parabole, l'équation de deuxième degré, etc. La lecture d'une phrase p' postérieure permettra au lecteur de s'arrêter sur telle ou telle facette de la phrase p.

4 Évidemment, la compréhension est un état subjectif. De plus, en fonction des mécanismes de lecture, une représentation peut être favorisée au détriment d'une autre: c'est pourquoi deux personnes peuvent avoir *compris* deux choses différentes sur un même texte.

À la différence de la seule attitude de compréhension qu'on demande au sujet quand celui-ci lit un texte, dans un T-P, il doit *agir* en vue de répondre à la question posée. Et nous avons vu que lors de l'organisation des cadres de signification des phrases (c'est-à-dire lors de la construction de représentations internes), le sujet peut avoir recours à des représentations externes intermédiaires (REI), comme celles montrées dans la figure 2: le sujet peut écrire certaines choses en cours de lecture pour s'orienter dans l'idée qu'il se fait du texte. Mais ces représentations externes intermédiaires peuvent émerger aussi dans le but de construire la représentation algébrique R_a à partir de laquelle il peut trouver la solution au problème posé. Dans ce dernier cas, l'élève construit une représentation algébrique intermédiaire REI dans un certain système symbolique SS (par exemple, celui où il envisage d'«écrire» l'équation). L'exemple suivant illustre cette situation. Il s'agit de la production d'un élève à propos du problème du congrès (fig.2).

L'élève écrit les relations dans un premier système symbolique:

américains	3x
asiatiques	
européens	-16
africains	2x + 7

Ensuite il construit l'équation:

$$3x - 16 + 7 + 2x = 207$$

Dans (Radford, 1991) nous avons souligné que justement la non distinction de la part de l'élève du rôle référentiel (plus proche de la compréhension) et du rôle opérationnel (plus proche de la construction de la représentation Ra, i.e. l'équation) des représentations intermédiaires, constitue un obstacle pour l'élève dans la résolution du problème. C'est justement ce qui arrive à l'élève qui a produit le texte ci-haut: il transporte directement sa production intermédiaire (à rôle référentiel) dans une équation (où cette production joue un rôle opératoire).

La figure suivante complète la figure 3 en y insérant les éventuels systèmes symboliques et les représentations externes intermédiaires (REI) correspondantes.

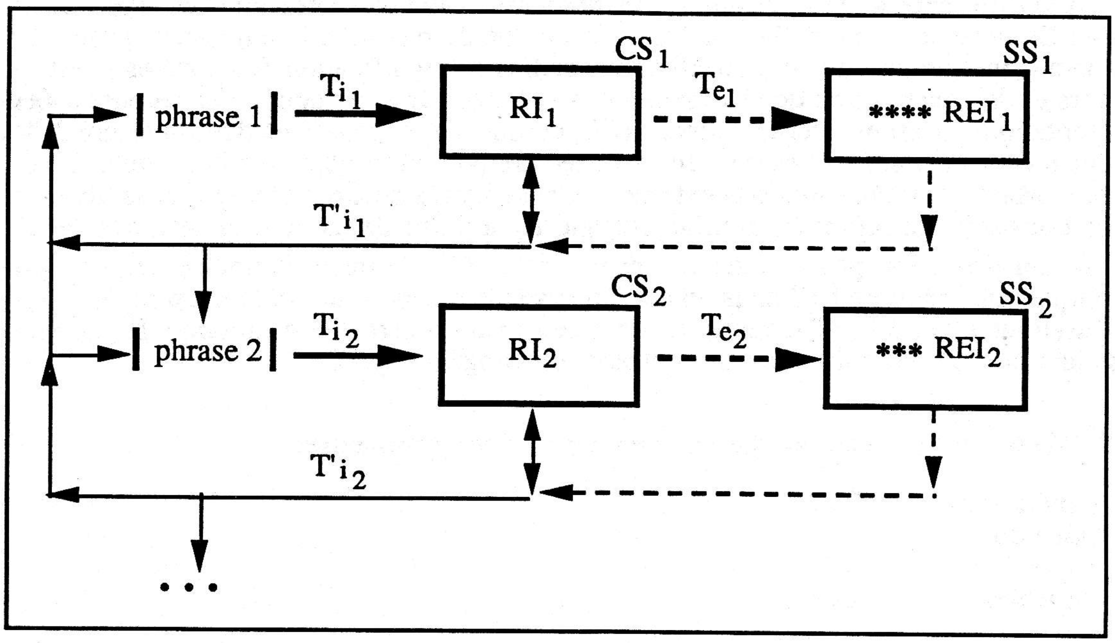


Figure 4

Légende:

T_{i_j}: transformation d'intériorisation

T_{e_j}: transformation d'extériorisation

T'_{i_j}: fonction de contrôle

RI_i: représentation interne

RE_i: représentation externe

CS_i: cadre de signification

SS_i: système symbolique

N.B.

1) *Il est nécessaire de remarquer ici qu'un retour d'une REI vers la RI qui la précède peut signifier une amplification (un enrichissement) de cette RI. Mais cela peut conduire aussi à une modification de la RI en question. Dans les deux cas, il ne s'agit plus de la même RI. Notre dessin n'arrive pas à rendre compte de cette situation ainsi que des éventuelles boucles dans le cheminement.*

2) *Un SS peut être différent d'un SS' par la nature connotative des symboles: la seule nature dénotative peut ne pas être suffisante pour les distinguer.*

Les T_{i_j} forment un **système de lecture T_i** qui rend possible une compréhension du texte, et son fonctionnement dépend, outre les facteurs déjà signalés auparavant (i.e. les mécanismes de lecture proprement dits et la base de connaissance du sujet) de la familiarité du sujet avec le contenu traité (Duval, 1991). Le **système d'extériorisation Te** constitué des T_{e_j} dépend en particulier de la possibilité qu'a l'individu d'exprimer le contenu des RI dans un certain système symbolique.

Les chances d'aboutir à une équation (non nécessairement exprimée de manière externe en termes de x, y, ...) vont alors êtres liées à la possibilité de construire des représentations externes de plus en plus complexes, articulées sur les représentations précédentes, ce qui exige un réinvestissement du symbole présent dans une certaine représentation externe intermédiaire, REI_k, dans une autre représentation externe REI_m.

Si on revient à notre distinction entre les transformations de type (1) et les transformations de type (2) de la figure 1, on voit que le modèle précédent est centré sur une description de la construction et de l'évolution de représentations internes et externes depuis la lecture du texte jusqu'au moment où l'élève produit la représentation visée R_a. Les transformations de type (2) qui permettent de transformer la représentation Ra (imaginons Ra comme étant une équation, pour fixer les idées) ont à la base des représentations internes différentes de celles qu'on rencontre dans la transformation de type (1). Les représentations internes perdent, en particulier, leur référentiel de signification (Bednarz *et al.*, 1992) et se centrent sur l'*ειδοσ*, c'est-à-dire l'*eidos*, la *forme*, la *figure*, l'*allure* des équations qui sont en surface et les actions qui permettent de les «simplifier» de plus en plus jusqu'à ce qu'on aboutisse à la solution[5].

5. Le fonctionnement de notre modèle

Nous allons étudier maintenant quelques productions d'élèves guatémaltèques à la lumière de notre cadre théorique. Ces productions proviennent d'une expérimentation que nous avons menée, à titre exploratoire, en octobre 1990 avec des étudiants qui débutaient en algèbre. L'enseignement qu'ils ont suivi est très similaire au type d'enseignement qu'on rencontre normalement dans une classe de secondaire 2 au Québec.

Voici les énoncés de trois des cinq problèmes que nous avons présentés:

Problème 3:
L'âge de Maria est cinq ans de plus que celui de Juan et la somme de leurs âges est 25. Quel est l'âge de chacun d'eux?

Problème 4:
Pedro a trois fois l'âge de Juan. Si la différence entre leurs âges est de 20 ans, quel âge a chacun?

Problème 5:
Julio a 3.40$ en pièces de monnaie de 5 et 10 cents. Si en tout il a 47 pièces de monnaie, combien de pièces de monnaie de chaque sorte a-t-il?

Les problèmes 3 et 4 sont généralement bien réussis, alors que le problème 5 a donné lieu à un échec complet sur notre échantillon de 28 élèves.[6]

À la lumière de notre modèle, les deux premiers textes–problèmes ont une même **organisation rédactionnelle** (Duval, 1991). En effet, on y reconnait trois phrases subordonnées de la même façon, de sorte que les textes-problèmes peuvent être représentés par la suite:

$$P_1, P_2, P_3.$$

---

5 C'est en fait de cette manière qu'on peut comprendre les règles de transformations d'équations que donne Diophante au début de son *Arithmétique* (cf. Radford, 1992).

6 Le même questionnaire a été donné à une classe de 32 élèves de première année de notre programme de Formation de Professeurs, et ce problème a été réussi seulement par la moitié des élèves.

Pour le problème 3, par exemple, on aurait:
P_1 = *L'âge de Maria est cinq ans de plus que celui de Juan*
P_2 = *la somme de leurs âges est 25.*
P_3 = *Quel est l'âge de chacun d'eux?*

La construction de la première représentation interne RI contiendrait l'*organisation* du cadre de signification que l'élève extrait de P_1 par la transformation de lecture T_{i_1}. Dans ce cadre référentiel on trouve les significations que l'élève accorde aux termes /âge/, /Maria/, /Juan/, mais aussi à la relation de comparaison /...de plus que.../.

La transformation de lecture T_{i_2} est conditionnée par le résultat de la transformation de lecture T_{i_1}. On pourrait dire que T_{i_2} est fonction de T_{i_1}. Ou mieux encore, on pourrait dire que le système de lecture T_i fonctionne par *composition* de ses éléments: T_{i_k} o ... oT_{i_2} o T_{i_1}. Une composition du type précédent peut devenir un **schéma de lecture**[7].

La résultat de la composition T_{i_2} o T_{i_1} amène le sujet à modifier la première représentation interne RI_1, et on obtient ainsi une deuxième représentation RI_2.

En ce qui concerne le **système d'extériorisation** T_e, la plupart de nos élèves arrivent à représenter correctement la phrase P_1 du problème 3 dans un langage algébrique: ils écrivent:

âge de Maria: x + 5
âge de Juan: x [8]

Ainsi, la «compacité» de P_1 éclate et donne lieu à deux expressions p_1 et p'_1 dans le système symbolique algébrique usuel[9]. Mais ces deux expressions sont tout de suite reprises à la phrase suivante, P_2, qui amène avec elle l'équation:

P_2 = *la somme de leurs âges est 25* permet, en effet, d'écrire tout de suite:

$$\mathbf{x + 5 + x = 25} \qquad \mathbf{(R_a)}$$

Bien que par la méthodologie expérimentale suivie, il soit impossible de dire à quel moment de la lecture ont eu lieu les écriture des représentations externes, on peut s'arrêter sur deux cas possibles:

---

7 L'idée de **schéma de lecture** m'a été suggérée par Claude Janvier dans un de nos courts entretiens habituels. Cette idée permettrait de revoir et de comprendre les résultats de Mayer sur la représentation en mémoire de certaines catégories de problèmes à partir de schémas (Mayer, 1982).

8 On remarquera que, pour ce problème, l'écart entre le rôle référentiel et le rôle opérationnel des représentations intermédiaires est minimal.

9 p_1 désigne l'expression x+5 et p'_1 l'expression x.

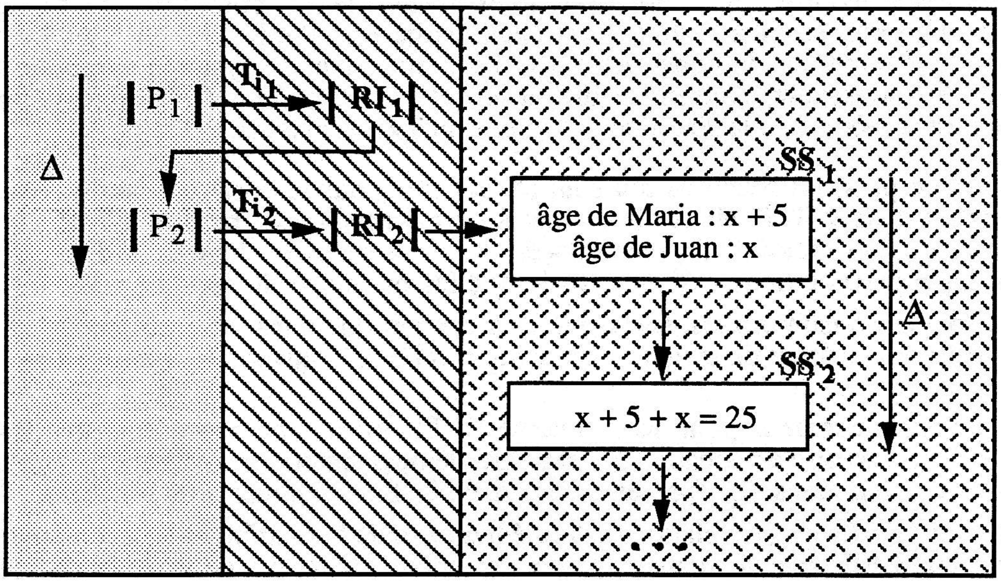
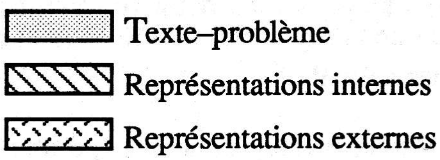


Figure 5



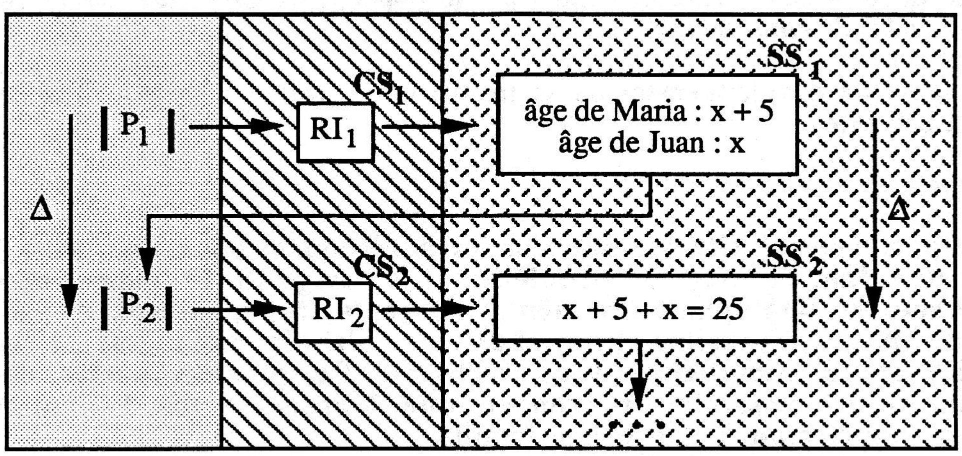


Figure 6

Dans chacun des cas on remarque que l'**ordre** des phrases dans le texte-problème induit l'ordre dans lequel se construisent les représentations externes qui permettent d'aboutir à l'équation[10].

10 On remarque, d'une part que, dans l'équation, le symbole d'égalité est utilisé dans son sens de «résultat d'opérations», et d'autre part que le symbole «+» traduit deux aspects différents des structures additives: dans le premier cas il s'agit d'un comparateur entre mesures alors que dans le deuxième il s'agit d'une opération somme entre mesures (cf. Vergaud, 1990).

Ces extériorisations sont donc possibles grâce à la «disponibilité» pertinente de symboles algébriques qu'a l'élève mais aussi parce que l'ordre des phrases du texte problème T-P «oriente» la construction de l'équation dans le système symbolique où l'équation est construite. Autrement dit, la ***direction vectorielle*** de la construction de l'équation est la même que la direction vectorielle du texte problème.

Mais de plus, les relations qui sont nécessaires pour la construction de l'équation sont données dans le T–P. Nous dirons que Ra est ***complète*** par rapport à T–P. Dans ce cas, on voit qu'il est possible de «superposer» les deux surfaces: celle de T–P et celle qui contient les représentations externes sur lesquelles on construit l'équation R_a: les deux surfaces sont donc isomorphes. Cet isomorphisme fait que dans les problèmes 3 et 4, la distance entre les surfaces du texte problème R_o et celle de l'équation R_a est minimale.

Il en va autrement pour le problème 5. En effet, une représentation Ra qui correspondrait à la mise en équation du texte-problème comporte forcément des choses qui ne se ***trouvent pas*** dans R_o (par exemple, dans le but de construire l'équation, il est nécessaire de construire des relations intermédiaires, telle la relation qui met en rapport le montant total (3,40$) avec le montant qui correspondrait aux pièces de monnaie de 5 cents).

D'autre part, les deux représentations ne se «lisent» pas dans le même sens: leur ***direction vectorielle*** n'est pas la même. Une superposition des deux représentations R_o et R_a n'est donc pas possible ici. La construction de la représentation R_a possède une ***direction vectorielle*** qui ne peut pas être induite par celle de R_o.

La discussion précédente a permis de faire émerger deux concepts qui s'avèrent prometteurs pour l'étude des difficultés que rencontrent nos élèves lors de la résolution algébrique de problèmes écrits: d'une part, le concept de ***direction vectorielle*** et d'autre part celui de ***complétude***.

Au point de développement où se trouve notre projet, nous pouvons émettre l'hypothèse suivante:

Hypothèse:

Les problèmes écrits les plus faciles à résoudre, pour un même élève et pour une famille fixe de problèmes (i.e. exigeant la même base de connaissances et impliquant les mêmes concepts (taux, vitesse, argent, ...) sont ceux pour lesquelles les conditions d'avoir la même direction vectorielle et la complétude sont vérifiées. De plus, à partir de ces conditions il est possible de trouver une hiérarchie de difficultés de problèmes appartenant à une même famille.

Par contre, il est plus difficile de se prononcer sur une éventuelle hiérarchie de problèmes où juste une des conditions précédentes est vérifiée. Toutefois, il semble plausible que le fait qu'un problème possède une des conditions rende sa solution plus facile. La suite de notre projet vise en particulier à répondre à cette question et à confirmer notre hypothèse. Pour l'instant nous allons voir que les concepts précédents, suggérés par notre modèle de résolution de problèmes écrits, permettent de jeter des lumières sur la production des premiers algébristes. Nous allons nous limiter particulièrement à Leonardo Pisano (Fibonacci) et Paolo Gerardi. Nous verrons que ce sont les problèmes qui vérifient la propriété de la direction vectorielle et de complétude qui sont largement favorisés dans leur œuvre.

5. UN REGARD DIDACTIQUE SUR L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

5.1 *Libro di ragioni de Paolo Gerardi*

Le *Libro di ragioni* (ou Livre de Problèmes) de Paolo Gerardi de Florence a été écrit à Montpellier en 1328. Le livre contient 193 problèmes ayant trait à des applications au commerce (comme l'échange de biens ou «batter», des problèmes de sociétés commerciales ou «partnerships», des calculs d'intérêts, ...), des problèmes concernant des applications à la mesure, des problèmes qu'on a appelé «récréatifs», mais aussi une partie -la dernière, constituée de 15 problèmes- où il est question d'algèbre. Le *Libro de ragioni* est un livre d'abbaco qui a l'intérêt particulier d'être un des premiers livres (le deuxième à notre connaissance) écrit en langue vernaculaire traitant de l'algèbre. De plus, il contient certains types d'équations cubiques non présents chez al–Khwarizmi.

Les 15 problèmes qui constituent la partie destinée à l'algèbre (*Regolla della chose*) vérifient la propriété de la direction vectorielle alors que 13 des 15 problèmes vérifient la propriété de complétude.

Voyons quelques exemples. Mais premièrement indiquons que les problèmes commencent toujours par énoncer un type d'équation, suivi d'une règle qui permet de résoudre l'équation et ensuite un problème dont la résolution amène à une équation du type étudié. Les constituantes d'une équation sont le **nombre**, la **cosa** (la chose, l'inconnue), le **censo** (le carré de la cosa) et le **cubo** (le cube de la cosa)[11].

Problème 1:

Quand la cosa est égale au nombre, vous divisez le nombre par la cosa, et le nombre qui en résulte est la valeur [quantité] de la cosa.

Partager
~~Divisez~~ 10 en deux parties telles qu'en divisant l'une par l'autre on obtienne 5.

Faites donc comme ceci. Supposez qu'une partie est la cosa, l'autre partie est nécessairement 10 moins la cosa. Maintenant, vous devez diviser 10 moins la cosa par une cosa et ceci donne 5. Donc vous devez multiplier 5 fois la cosa, ce qui fait 5 cose. Donc nous savons que 5 cose est égal à 10 moins la cosa. Maintenant donnez une cosa à chaque part. Alors le 10 est un tout et nous aurons 6 cose d'une part et exactement 10 d'autre part. Alors vous devez diviser 10 par 6 ce qui donne 1 et 2/3 et cette quantité est égale à la cosa. Et vous dites qu'une part était une cosa. Par conséquent une part est 1 2/3; l'autre part est le reste, c'est-à-dire 8 1/3.

Commentaires:

L'équation qu'on vise ici est ax = b.

D'autre part, le texte-problème peut se diviser en trois phrases:
P1: Divisez 10 en deux parties
P2: en divisant l'une par l'autre
P3: on obtient 5.
(La particule /telle que/ du T-P est une particule de subordination)
La phrase P_1 renvoie donc à:

11 La traduction au français que j'ai faite des problèmes présentés par la suite est basée sur un texte de Van Egmond (1978) qui contient en italien et en anglais les 15 problèmes algébriques du *Libro de Ragioni.*

p_1: une partie est la cosa

p'_1: l'autre partie est nécessairement 10 moins la cosa

La référence à la phrase qui suit P_1 dans le T-P (i.e. la phrase P_2) permet de continuer la construction des représentations externes qui aboutiront à l'équation dans le système symbolique vernaculaire: en effet, P_2 permet d'écrire tout de suite après:
p_2: «*Maintenant vous devez diviser 10 moins la cosa par une cosa*». L'expression p_3: «*et ceci donne 5*» est amenée par la phrase P_3 «on obtient 5»

On voit donc que la **direction vectorielle** D du T-P, c'est-à-dire la direction vectorielle de p_1, p_2, p_3, induit celle de la surface $p = p_1, p'_1, p_2, p_3$. Mais, de plus la propriété de **complétude** est vérifiée: tous les liens et relations nécessaires à la construction de la surface p étaient présents dans le T–P.

Une analyse similaire permet de voir que les problèmes 2 et 3 vérifient aussi les deux propriétés mentionnées. Par contre, les problèmes 4 et 5 vérifient la condition de la direction vectorielle mais non pas celle de la complétude.

Problème 2:

Quand le censi est égal au nombre, si vous divisez le nombre par la cosa et la racine de ce qui en résulte est égale à la cosa.

Trouvez-moi un nombre tel qu'en lui enlevant 1/3 et 1/4 et en multipliant le résultat par lui-même, on obtienne 12.

Supposez qu'un nombre est une cosa; 1/3 et 1/4 de la cosa est 7/12 de la cosa et le reste de la cosa est 5/12 de la cosa. Maintenant dites 5/12 de la cosa fois 5/12 de la cosa est 25/144 du censo, et ceci doit être 12. Ainsi, nous savons que 25/144 du censo est égal à 12. Nous devons diviser le nombre par le censi, c'est-à-dire 12 par 25/144 du censo. Changez ceci en nombre entier en multipliant 144 fois 25/144, ce qui fait 25 censi, et dites 12 fois 144 font 1728 en nombre. Maintenant vous devez diviser 1728 par 25 censi, ce qui donne 69 et 3/25, et la racine de 69 3/25 est égale à la cosa. Et vous avez supposé que le nombre était une cosa. Changez-le en racine. Dites une cosa fois 1 fait 1. Et dites, 1 fois 69 3/25 font 69 3/25 en racine. Par conséquent, le nombre est la racine de 69 3/25.

Problème 3:

Quand les cose sont égales aux censi, vous divisez les cose par les censi et ce qui en résulte est un nombre, et cette quantité est égale à la cosa.

Trouvez-moi deux nombres tels qu'ils soient partie l'un de l'autre, comme 2 et 3, et tels qu'ils fassent autant en multipliant l'un par l'autre qu'en les ajoutant ensemble.

Supposons qu'un nombre est 2 cose et l'autre doit être nécessairement 3 cose. Maintenant vous dites 2 cose fois 3 cose font 6 censi, et 2 cose et 3 cose font 5 cose. Nous avons que 5 cose sont égaux à 6 censi. Vous devez diviser les cose par les censi, c'est-à-dire diviser 5 par 6, ce qui donne 5/6 et cette quantité est égale à la cosa.

Et vous avez supposé 2 cose et 3 cose. Alors nous disons 2 fois 5/6 font 1 2/3 et cette quantité est l'un des nombres. Et vous dites, 3 fois 5/6 font 2 1/2 et cette quantité est l'autre nombre. Et c'est fait.

Problème 4:

Quand les censi est les cose sont égaux au nombre, nous devons diviser par les censi et ensuite diviser les cose à la moitié et multiplier cette moitié par elle-même et ajouter ceci au nombre, et la racine de cette somme moins la moitié des cose est égale à la cosa.

Un homme prête 20 lires à un autre pendant deux ans à intérêt composé. À la fin des deux années, le deuxième donne au premier 30 lires. Je vous demande à quel taux (rate, ragione) la lire a été prêtée par mois?

Supposons que la lira a été prêtée à une cosa par mois. La lira gagne 12 cose par an. Prenez 1/20 des 12 cose et j'ai pour la première année 20 lires et une cosa(12). Maintenant faites la deuxième année et dites 1/20 de 20 lires est aussi une cosa et 1/20 d'une cosa de la première année est 1/20 d'un censo, et vous avez maintenant 20 lires et 2 cose et 1/20 d'une censo(13). Et nous savons que 20 lires et 2 cose et 1/20 d'un censo sont égaux à 30.(14)

Prenons 20 lires de 30 et il nous en reste 10. Alors nous avons 2 cose et 1/20 d'un censo égale à 10 lires. Nous devons diviser par les censi. Nous devons les changer en un censo, en multipliant par 20 et dites 20 fois 1/20 d'un censo font 1 censo, et 20 fois 2 cose font 40 cose, et 20 fois 10 font 200. Maintenant nous savons que 40 cose et un censo est égal à 200. Nous devons diviser par 2 la cosa. Nous disons que la moitié de 40 est 20. Nous disons 20 fois 20 font 400. Ajoutons ceci à 200 et nous obtenons 600. Alors nous disons que la racine de 600 moins 20, qui est la moitié de la cosa, est égale à la cosa. Et vous avez supposé que la lira a été prêtée à une cosa par mois. Vous dites 1 cosa fois 1 cosa font une racine de 600 moins 20. Ainsi, la lira a été prêtée à cette quantité par mois, c'est-à-dire au taux de racine de 600 moins 20 denari.

Problème 5:

Quand les cose sont égaux au censo et au nombre, vous devez diviser par les censi et ensuite diviser par 2 les cose et multiplier ceci par lui-même et enlevez-lui le nombre, et la racine de ce qui reste plus la moitié de la cosa est égale à la cosa. Ou bien, la moitié de la cosa moins la racine de ce qui reste après avoir enlevé le nombre à la multiplication [par elle-même] de la moitié de la cosa, et cette quantité sera égale à la cosa.

---

12 Ce qui rend difficile la compréhension de cette partie c'est justement *l'incomplétude* du texte-problème: Gerardi s'appuie sur certains éléments qui ne se trouvent pas dans le T-P: l'intérêt est exprimé en denari par lira par mois. Ainsi au bout d'une année, on a 12 *cosa* denari par lira par an. Et comme il y a 12 denari en un soldus et 20 soldi en une lira, 12 *cosa* denari est égale à (1/20)*cosa* lire. Mais comme on avait 20 lire, on obtient, à la fin de l'année, un intérêt de *cosa* lire, de sorte que le capital est, au début de la deuxième année, de 20 lire plus une *cosa*.

13 On a vu que le taux d'intérêt par an était de (1/20) *cosa* lire. Gerardi applique donc ce taux au nouveau capital. Il calcule donc (1/20)x [20 + x], et cette quantité est l'intérêt qui correspond à la deuxième année.

14 C'est la somme du capital et de l'intérêt obtenu la première année avec l'intérêt obtenu la deuxième année.

Un homme fait 2 voyages. Dans le premier voyage il a gagné 12 denari. Dans le deuxième voyage il a gagné au même taux que dans le premier voyage, et à la fin il a 100 denari. Je vous demande combien de denari il avait quand il est parti.

Supposons qu'il est parti avec une cosa et qu'il a gagné 12 denari. Par conséquent il a à la fin du premier voyage 1 cosa et 12 denari. Voyons le deuxième voyage. Si dans le premier il a fait 1 cosa et 12 denari avec 1 cosa, combien fera-t-il avec 1 cosa et 12 denari? Par conséquent multipliez 1 cosa et 12 denari fois 1 cosa et 12 denari et alors divisez par 1 cosa.

Maintenant vous dites ceci: une cosa et 12 denari fois une cosa et 12 denari font 1 censo et 24 cose et 144 denari. Vous devez diviser ceci par une cosa et il en résulte 100 denari. Mais 100 fois une cosa font 100 cose. Vous savez que 100 cose sont égales à un censo et 24 cose et 144 denari. Prenez les cose des cose. Prenez 24 cose de 100 cose, il reste 76 cose, et nous avons que 76 cose sont égales à 1 censo et 144 denari.

Vous devez diviser toujours par le censi et ensuite diviser par 2 la cosa, qui est 76, dont la moitié est 38. Multipliez ceci par lui-même et cela fait 1444. Retranchez le nombre qui est 144, et il reste 1300, et la racine de 1300 plus la moitié de la cosa, qui était 38, est égale à la cosa. Et vous avez supposé que ce nombre était une cosa. Par conséquent, nous avons d'abord la racine de 1300 plus 38 en nombre. Et c'est fait, et de cette façon faites des problèmes similaires.

5.2 *Quelques problèmes du Liber Abbaci de Leonardo Pisano*[15]

Leonardo a écrit le Liber Abacci en 1202. Ce livre a servi de modèle aux autres livres d'abbaco écrits par la suite. La troisième partie du chapitre 15 de ce livre est consacré à l'algèbre et contient quelques 100 problèmes. Il commence en faisant une classification des quantités: radix, quadratus, numerus simples. Ensuite il distingue trois modes d'équations simples et trois modes composés.

Les modes simples sont:

1) $ax^2 = bx$ 2) $ax^2 = b$ 3) $ax = b$

Le second mode se lit: Secundus quando census equatur numero.
Les modes composés sont:

1') census et radices equantur numero ($ax^2 + bx = c$)
2') radices et numerus equantur censibus ($bx + c = ax^2$)
3') census et numerus equantur radicibus ($ax^2 + c = bx$)

La résolution d'une équation est donnée sous forme d'une suite d'instructions exprimées en langage naturel. Cette suite indique comment opérer sur les nombres donnés pour obtenir la solution.

Voici quelques exemples, pris au hasard. On remarquera que ces problèmes vérifient les conditions de direction vectorielle et de complétude.

15 La traduction au français que j'ai faite des problèmes présentés par la suite est basée sur le texte latin de Leonardo contenu dans (Libri ,1838-41).

Exemple 1: [16]

Je divise 10 en deux parties et je multiplie l'une de ces parties par 6 et ce qui résulte je le divise par l'autre partie, et le tiers de ceci je l'ajoute au produit de la première partie par 6 et le tout fait 39.[17]

Supposons que la première partie est une radix; tu la multiplies par 6 et tu as 6 res que tu dois diviser par la deuxième partie qui est 10 moins radix, et la troisième partie de ceci tu dois l'ajouter à 6 res pour avoir 39 (...)[18]. Or, la troisième partie de 6 res est deux res, qui divisé par 10 moins re est 39 excepté 6 rebus (...). Multiplie donc 10 moins res par 39 moins 6 rebus et il en résulte 390 denari et 6 census diminué de 99 res égale à deux rebus. Ajoute donc 99 res des deux parties, et tu obtiens six census et 390 denari égale à 101 rebus. Divise par le nombre de censum, i.e. 6, et tu obtiens census et 65 denari égale 5/6 16. Prends le carré de la moitié des radix, soustrais 65 et prends la racine de ceci et tu obtiens 2 5/12 que tu enlèves de la moitié du radix, i.e. de 8 5/12 et il t'en reste 6.

Exemple 2:[19]

Je divise 12 en deux parties et je multiplie les parties et ce qui en résulte je le divise par la différence des parties et cela fait 41/2.

Soit la plus petite partie un rem.	plus petite: x
Multiplies-la par l'autre, c'est-à-dire par 12 moins re, il vient	$x(12-x)$
12 res diminué du census divisé par la	$12x-x^2$
différence des parties, c'est-à-dire par rem et	$x-(12-x)$
12 moins re, ce qui est 12 diminué de deux	$12-2x$
rebus. Et comme la division elle-même devient	$(12x-x^2)/12-2x=41/2$,
41/2, multiplie 41/2 par 12 moins deux rebus et il	$41/2(12-2x)$
vient 54 diminué de 9 rebus égale à 12 rebus moins censu. Restaure donc dans chaque partie censum et 9 res el il vient censu et 54	$54-9x = 12x-x^2$
égale à 21 radicibus. Prends le carré de la moitié du radicum, ce qui donne 110 1/4, [...]	$x^2 + 54 = 21x$

Exemple 3:[20]

Je trouve deux nombres dont le plus grand excède le plus petit de 6, et je divise le plus petit par le plus grand et il en résulte 1/3.

---

16 Libris (1838-41), p. 371-72.

17 Rursus divisi 10 in duas partes et multiplicavi unam earum per 6 et quod provenit divisi per aliant partem et tertiam eius et quod provenit addidi super summam multiplicationis primae partis in 6. et totum id quod concretum est fuit 39.

18 Il s'agit donc de l'équation $(1/3)(6x/(10-x) + 6x = 39$.

19 Libris (1838-41), p. 381.

20 Libris (1838-41), p. 391.

6. Synthèse

1) Le texte que nous avons présenté contient, dans la première partie, une mise au point des résultats que nous avons obtenus dans le cadre de notre projet en cours «*Le raisonnement algébrique dans la résolution de problèmes écrits*». Ces résultats concernent essentiellement la détection de certains systèmes symboliques et de certaines représentations utilisées par les élèves quand ceux-ci essaient de construire une équation à partir d'un texte-problème. Ces systèmes symboliques ont une fonction particulière (qu'il nous faudra mieux préciser par la suite) dans le processus de résolution. Un premier résultat est la mise en évidence que la prise de conscience des différentes fonctions des représentations et des systèmes symboliques impliqués peut constituer un obstacle pour l'élève.

2) Afin de mieux comprendre les difficultés qui sous-tendent la résolution algébrique d'un problème écrit, et devant l'impossibilité de pouvoir expliquer ces difficultés à partir du cadre théorique du problem solving, nous avons été amenés à formuler un modèle bâti à partir du cadre des représentations. Le modèle est centré sur l'interaction entre le texte-problème (T-P), les idées que l'individu se fait sur le T-P et les choses qu'il écrit au fur et à mesure qu'il s'engage dans la résolution. Le modèle nous permet de mieux exprimer un des résultats que nous avions obtenu auparavant, à savoir, que la représentation visée par l'élève -en l'occurrence l'équation cherchée- conditionne les représentations internes et externes intermédiaires (Radford; 1991, p.10). Notre travail sur Diophante permet de voir que ce phénomène est présent aussi dans les origines de l'algèbre.

3) D'autre part, notre modèle permet de mieux distinguer la nature des deux types de transformations qui sont à la base de la résolution d'un problème écrit: la transformation que nous avons appelée de type (1) -celle qui permet de transformer le T-P en équation- et les transformations de type (2) -celles qui permettent de résoudre l'équation. La transformation (1) dépend en particulier de l'interaction entre le texte, les idées qu'on structure à partir de la lecture de celui-ci et ce qu'on décide d'écrire à partir de cette lecture, en vue d'obtenir une équation. Les transformations (2) reposent sur la *forme* de cette équation: c'est la forme ou structure de l'équation, i.e. la position de la *cosa*, du *censo* et du *nombre* qui détermineront s'il s'agit de se débarrasser des termes «négatifs» (*al-jabr*) ou si on opère sur les termes semblables à l'aide de l'*al-muqabala*.

4) On peut mieux comprendre à la lumière du modèle les résultats exploratoires que nous avions obtenus au Guatémala. Le modèle permet, en effet, de mettre en évidence une structure non mathématique mais textuelle (il s'agit d'une structure pragmatico-linguistique) qui définit une catégorie de problèmes qui s'insinuent (pour un même public et pour une même classe de problèmes i.e. des problèmes impliquant dans leur résolution le même ensemble de concepts) comme des problèmes plus faciles à résoudre. Cette catégorie de problèmes est définie par deux propriétés: celle de la **complétude** et celle de la **direction vectorielle**. La première réfère au fait que le T-P n'*occulte pas* de notions ou relations qui seront nécessaires dans la construction de l'équation[21]. La deuxième réfère au fait que le T-P «oriente» la construction de représentations externes intermédiaires en vue d'obtenir l'équation.

---

21 Le problème 5 du *Libro de Ragioni* de Paolo Gerardi utilise une règle de trois pour calculer l'intêret de la deuxième année. Cette règle de trois (qui n'est pas *mentionnée*) est suggérée par l'apparition du mot /même taux/ dans le T-P. Mais cette relation ne peut être perçue qu'à travers la base de connaissances du sujet: le T-P est donc *incomplet*. Une formulation alternative du T-P peut cependant le rendre complet.

5) Il nous est apparu intéressant de voir si la catégorie de problèmes que nous avions mise en évidence était repérable au niveau de l'histoire. Nous avons décidé de nous arrêter sur certains documents mathématiques écrits dans le Haut Moyen Age et le début de la Renaissance parce que cette période s'avère intéressante pour plusieurs raisons: (1) le langage vernaculaire de l'algèbre de cette époque nous permettrait de mieux comparer le T-P et les représentations externes intermédiaires et de pouvoir mieux cerner leurs relations; (2) c'est justement dans cette période qu'on pouvait apprécier le plus la relation entre arithmétique et algèbre et la façon dont cette dernière s'affirme comme discipline scientifique.

Dans le point 5 de ce travail, nous avons donné quelques exemples de deux livres fort importants de la période en question: celui de Leonardo Pisano et de Paolo Gerardi (on s'est limité à deux mathématiciens pour ne pas alourdir le texte, mais les mêmes résultats se retrouvent chez d'autres mathématiciens, comme Maestro Jacobo, Piero della Francesca, Paolo dell'Abbaco, etc.). Il se trouve que c'est justement la catégorie de problèmes que nous avons mise en évidence à partir de notre modèle de résolutions de problèmes écrits qui est privilégiée dans ces textes.

Ces problèmes, considérés comme des «problèmes récréatifs» par van Egmond (1980), constituent en fait le matériel sur lequel l'algèbre se construit et s'affirme comme science. Ces mathématiciens n'ont pas construit ces problèmes pour le divertissement de leurs élèves mais parce que l'algèbre est en train de se faire, et l'obtention de l'équation qui permet de résoudre un problème demande un certain exercice, une certaine maturation. C'est ainsi qu'on peut comprendre que des problèmes qui ne sont pas complets au sens de notre définition ne deviendront populaires que plus tard[22].

6) La suite de notre projet vise, dans sa partie didactique, la détection à travers une expérimentation d'une hiérarchie de difficultés dans les problèmes à la lumière de notre modèle de résolution et des propriétés de complétude et de direction vectorielle, dans le but d'aboutir à la mise en place d'une séquence didactique d'enseignement.

Dans sa partie historique, notre projet continuera l'étude des conditions qui ont rendu possible l'émergence de l'algèbre au temps des abbaquistes.

22 Un problème similaire au problème 5 que nous avons posé au Guatémala (donc un problème incomplet) se trouve dans le *Trattato d'Abaco* de Piero della Francesca, publié plus d'un siècle plus tard que le *Libro de Ragioni*.

Bibliographie

Bednarz, N., Radford, L., Dufour-Janvier, B., Lepage, A. (1992). Arithmetical Thinking and Algebraic Thinking in Problem Solving. *Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (P.M.E.).* New Hampshire, August, 7-11.

Duval, R. (1991). Interaction des niveaux de représentations dans la compréhension de textes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 4,* IREM de Strasbourg, pp. 163-196.

Egmond, W. van (1978). The earliest vernacular treatment of algebra: the Libro di Ragioni of Paolo Gerardi (1328). *Physis, 20,* pp. 155-189.

Egmond, W. van (1980). *Practical Mathematics in the Italian Renaissance: a catalog of italian abbacus manuscripts and printed books to 1600.* Instituto e Museo di Storia della Scienza. Firenze.

Greeno, J. (1980). Some examples of cognitive task analysis with instructional implications. *In:* R. Snow et al. (Eds): *Aptitude, Learning and Instruction, 2,* Lawrence Erlbaum Associates.

Greeno, J. (1985). *Competence for Solving and Understanding Problems.* Pittsburg University. Reports Research.

Libri, G. (1838-1841). *Histoire des sciences mathématiques en Italie.* Paris: Jules Renouard, *II.*

Mayer, R. (1982). Memory for Algebra Story Problems. *Journal of Educational Psychology, 74,* pp. 199-216.

Mayer, R., Larkin, J. (1983). A cognitive Analysis of Mathematical Problem-Solving Ability. *In:* R.J. Stenberg (Ed.): *Advances in the psychology of human intelligence, 2,* Hillsdale: N.J: Lawrence Erlbaum, pp. 231-273.

Radford, L. (1991). Lenguaje natural y lenguaje algebraico: el problema de la traducción en la resolución de problemas. *Paper presented at the VIII Interamerican Conference on Mathematics Education.* University of Miami.

Radford, L. (1992). Diophante et l'algèbre pré-symbolique. *Bulletin de l'Association des Mathématiques du Québec, 31/32,* pp. 73-80.

Vergnaud, G. (1989-1990). *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques.* Un exemple: les structures additives, *Petit x, 22,* pp. 51-69.