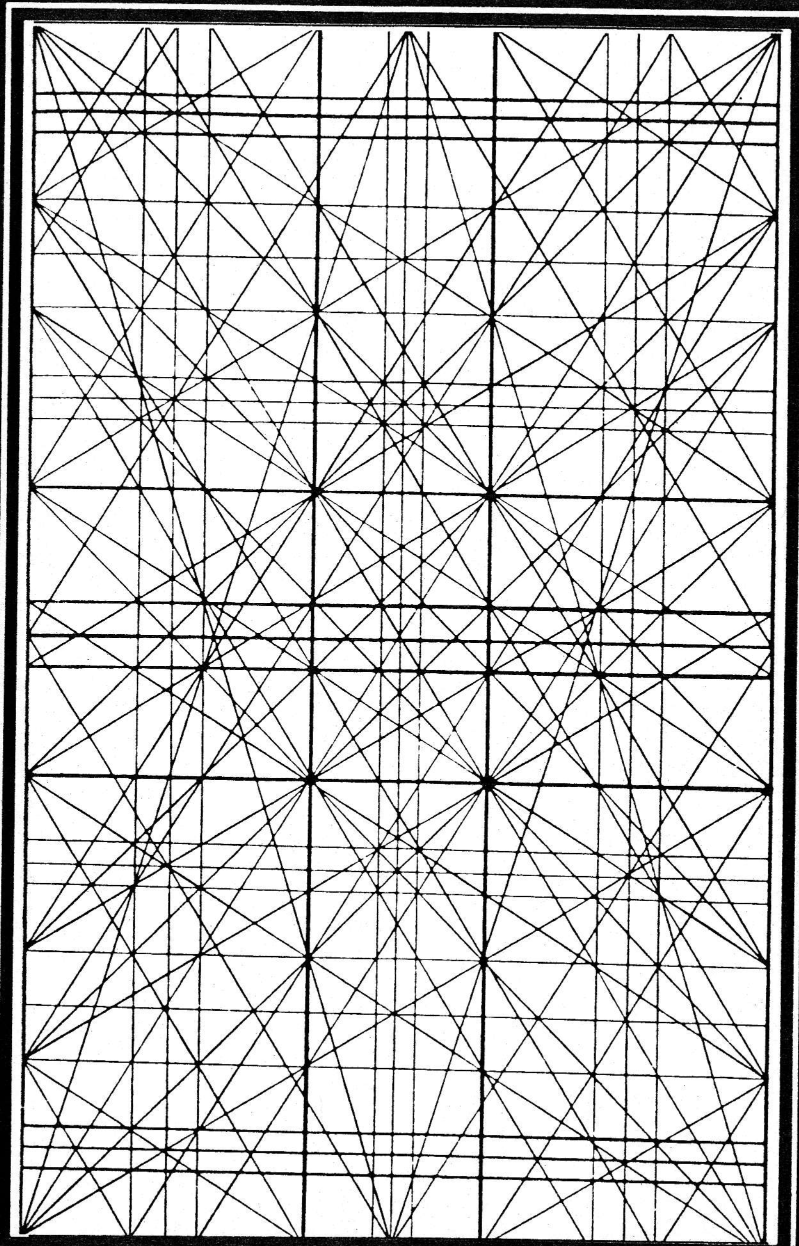
CIENCIA Y EDUCACION

REVISTA DE LA [illegible] VOL. [illegible] No. 1 ABRIL [illegible]



SEN 2° Y LOS NUMEROS ALGEBRAICOS EN EL SENTIDO DE ABEL

LUIS RADFORD

En la sección de problemas de la revista anterior, vol. 3.2 pg. 27, dejamos planteada la pregunta si era posible calcular sen 2° (o bien, expresado el ángulo en radianes: sen($\pi/90$)) sin usar tablas ni calculadora. Vamos a dar aquí respuesta a tal pregunta: sen 2° puede ser calculado sin calculadora ni tabla, utilizando unicamente números racionales y las operaciones básicas del álgebra (suma, resta, multiplicación, división y extracción de raices), un número finito de veces.

Un número que puede expresarse de esa forma fué llamado por el Matemático noruego Niels Abel (1802-1829) "número algebraico" en sus investigaciones sobre la resolución de ecuaciones de grado mayor que cuatro. Actualmente -como veremos más adelante- el sentido de "número algebraico" es otro. Por el momento demostraremos que sen 2° es un número algebraico en el sentido de Abel.

La idea es la siguiente: las fórmulas del seno y coseno de la diferencia de ángulos, fórmulas que se remontan al célebre Matemático, astrónomo y geógrafo griego, Claudio Ptolomeo, afirman que:

(P_1): $\quad \text{sen}\,(a - b) = \text{sen}a \cos b - \cos a\, \text{sen} b$

(P_2): $\quad \cos\,(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen}a\, \text{sen} b$

De dichas fórmulas y la identidad pitagórica $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, podemos obtener estas otras fórmulas:

(P'_1): $\quad \text{sen}\, a/2 = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2}{2}}$

(P'_2): $\quad \text{sen}\, 3a = 3\text{sen}a - 4\text{sen}^3 a$ *

La fórmula (P'_2) nos permite calcular el sena si conocemos el sen 3a (se trata, pues, de un problema de trisección de ángulos). En efecto, (P'_2) es una ecuación de tercer grado en sena, y sabemos que las fórmulas de Cardano (ver [R1] en las referencias bibliográficas) expresan las soluciones de la ecuación de tercer grado, usando sólo operaciones algebraicas básicas.

Así pues, para calcular sen 2° es suficiente conocer sen 6°.

Ahora bien:

$$\text{sen}\, 6^\circ = \text{sen}\,(36^\circ - 30^\circ) = \text{sen}\, 36^\circ \cos 30^\circ - \cos 36^\circ\, \text{sen}\, 30^\circ$$

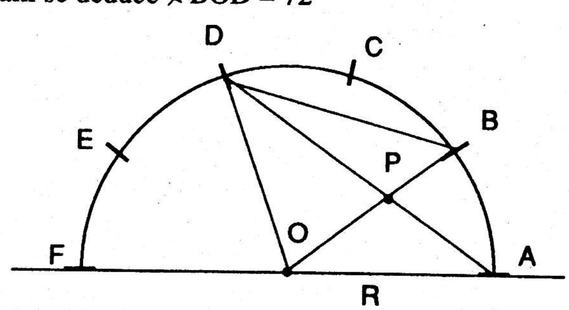
como $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{sen}\, 30^\circ = 1/2$, obtenemos:

$$(F): \text{sen}\, 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\, \text{sen}\, 36^\circ - \frac{1}{2} \cos 36^\circ$$

Nuestro problema es ahora calcular el sen 36° o el cos 36° (conociendo el cos 36°, el sen 36° se obtiene mediante $\text{sen}36^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ}$. El lector fiel a nuestra revista recordará que en la Sección de problemas del vol 3.2 (pg. 25) encontramos que cos 36° es la mitad del número de oro, es decir $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Sin embargo daremos aquí una forma alternativa de llegar a ese resultado.

Dividamos el semicírculo de radio R y centro O en cinco arcos iguales. Como los arcos son iguales, los ángulos que los subtienden son iguales, y la suma de esos ángulos debe ser 180°; por tanto cada uno de ellos mide 36°. Es decir: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COD = \sphericalangle DOE = \sphericalangle EOF = 36^\circ$ De alli se deduce $\sphericalangle BOD = 72$



* Estas dos fórmulas fueron obtenidas por Ptolomeo, en un contexto puramente geométrico, en la elaboración de las primeras tablas trigonométricas (ver [G1]).

Como el ΔDOA es isósceles y la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, debemos tener que $\measuredangle ODA = \measuredangle OAD = 36°$

De aquí resulta que los triángulos DOA y OPA son semejantes.

Por tanto: $$\frac{OA}{OP} = \frac{DA}{R}$$

Es decir $R \cdot OA = OP \cdot DA$

Por otro lado, es fácil ver que $\measuredangle ODP = \measuredangle OPD$; por lo tanto el ΔDOP es isósceles y resulta que $DP = R$.

Como $OA = R$ y $DA = DP + PA = R + PA$, tendremos:
$$R^2 = OP(R+PA).$$

Sea $x = PA$. Como $OP = PA$, tenemos;

$$x^2 + Rx - R^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, llegamos a:

$$x = (-1 + \sqrt{5})\frac{R}{2}$$

Por tanto

$$\cos 36° = \frac{R/2}{(-1+\sqrt{5})\,R/2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

y $\operatorname{sen} 36° = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Regresando a la fórmula (F) tenemos:

$$\operatorname{sen} 6° = \frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \frac{1+\sqrt{5}}{8}$$

Teniendo ya sen 6°, podemos hacer a=2° en la fórmula (P'_2) y obtenemos:
$$4\operatorname{sen}^3 2° - 3\operatorname{sen} 2° + \operatorname{sen} 6° = 0$$

Hagamos $c = \operatorname{sen} 6°$ (constante conocida) y $z = \operatorname{sen} 2°$

Entonces la ecuación anterior se transforma en:
$$4z^3 - 3z + c = 0$$

o bien: $$z^3 - \frac{3}{4}z + \frac{c}{4} = 0$$

Como ya hemos dicho, las soluciones de cualquier ecuación de tercer grado se pueden expresar usando unicamente las operaciones básicas del álgebra (fórmulas de Cardano). Hemos demostrado entonces que sen2° es un número algebraico en el sentido de Abel.

ALGUNAS PRECISIONES COMPLEMENTARIAS

Sabemos que la ecuación de tercer grado $z^3 + pz + q = 0$ posee las soluciones:

$$z_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

$$z_2 = w\sqrt[3]{A} + w^2\sqrt[3]{B}$$

$$z_3 = w^2\sqrt[3]{A} + w\sqrt{B}$$

donde $$A = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$B = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

y $\sqrt[3]{A}$ denota un valor cualquiera de la raíz cúbica de A, y $\sqrt[3]{B}$ es tal que $\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} = -\frac{1}{3}$

Recordemos que w es raíz cúbica de la unidad, es decir que verifica la ecuación $x^3 = 1$. Las tres raices de esa ecuación son 1, w, w^2. (Además se tiene que $w^2 = \overline{w}$)

En nuestro caso, tenemos

$$A = -\frac{1}{64}\left[\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - (1+\sqrt{5})\right] + \sqrt{-\frac{7}{4^5} - \frac{1}{4^6}\left(4\sqrt{5} + (2\ \sqrt{3})(1+\sqrt{5})(\sqrt{10-2\sqrt{5}})\right)}$$

$$B = -\frac{1}{64}\left[\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - (1+\sqrt{5})\right] - \sqrt{-\frac{7}{4^5} - \frac{1}{4^6}\left(4\sqrt{5} + (2\ \sqrt{3})(1+\sqrt{5})(\sqrt{10-2\sqrt{5}})\right)}$$

Vemos que A y B son números complejos.

Por otro lado, como el discriminante $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ de nuestra ecuación es negativo, sabemos que las tres raices son reales (ver [V1]). Además lar raices son distintas. Esto último puede establecerse recordando que un polinomio P tiene raices distintas si y sólo si el polinomio P y su derivada P' son primos entre sí.

Supongamos entonces que nuestro polinomio $P(z) = 4z^3 - 3z + c$ tuviera raices iguales. Como $P'(z) = 12z^2 - 3$ no divide a P, P' debería tener un factor lineal común con P(z).

Ese factor podría ser 2z-1 ó 2z+1. Es fácil comprobar que ninguna de estas expresiones factoriza a P(z). Por tanto P(z) tiene raices distintas.

La pregunta que surge ahora es ¿Cuál de las tres raices reales corresponde a sen2°?

CALCULO DE SEN 2°

De las expresiones A y B dadas arriba vemos que B es el conjugado complejo de A. Además, A está en el segundo cuadrante. Asi pues, podemos escribir

$A = re^{i\theta}$ $B = re^{-i\theta}$, con $\pi/2 < \theta < \pi$ y $r = |A|$.

Estudiemos primero a z_2.

$$z_2 = w\sqrt[3]{A} + w^2\sqrt[3]{B}$$

tenemos que $\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{r}\, e^{i\theta/3}$ con $\frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{3} < \frac{\pi}{3}$

$$\sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{r}\, e^{-i\theta/3} \quad \text{con} \quad \frac{-\pi}{3} < \frac{-\theta}{3} < \frac{-\pi}{6}$$

Por otro lado, $w = e^{i2\pi/3}$

Por tanto $z_2 = \sqrt[3]{r}\,[\, e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})} + e^{-i(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})}\,]$

$$= 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

Como $\frac{5\pi}{6} < \frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3} < \pi$, vemos que $z_2 < 0$

Dado que sen 2° es positivo, podemos concluir que z_2 no es sen 2°.

Estudiemos ahora z_1

$$z_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

$$= \sqrt[3]{r}\,[\, e^{i\frac{\theta}{3}} + e^{-i\frac{\theta}{3}}\,]$$

$$= 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta}{3}$$

Como $\frac{\theta}{3} < \frac{\pi}{3}$ y la función coseno es decreciente en $[0, \pi/2]$ tenemos que:

$$\cos\frac{\theta}{3} > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$z_1 > 2\sqrt[3]{r}\,\frac{1}{2} = \sqrt[3]{r}$$

El cálculo de $r = |A|$ conduce a $r = 1/8$

De allí se deduce que

$$z_1 > \sqrt[3]{1/8} = \frac{1}{2}$$

Ahora bien, como la función seno es creciente en $[0, \pi/2)$, tenemos que:

$$\text{sen } 2^0 = \text{sen } \frac{\pi}{90} < \text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

y como $z_1 > 1/2$, vemos que $z_1 \neq$ sen2°

De lo anterior se deduce que sen2° $= z_3$

En otras palabras:

$$\text{sen } 2^0 = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\Big[\frac{-1}{64}\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - (1+\sqrt{5})\right) +$$

$$\sqrt{\frac{-7}{4^5} - \frac{1}{4^6}\left(4\sqrt{5} + (2\sqrt{3})(1+\sqrt{5})(\sqrt{10-2\sqrt{5}})\right)}\ \Big]^{1/3} +$$

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\Big[\frac{-1}{64}\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - (1+\sqrt{5})\right) -$$

$$\sqrt{\frac{-7}{4^5} - \frac{1}{4^6}\left(4\sqrt{5} + (2\sqrt{3})(1+\sqrt{5})(\sqrt{10-2\sqrt{5}})\right)}\ \Big]^{1/3}$$

(hasta no ver no creer ...)

LA ESTRUCTURA DE LOS NUMEROS ALGEBRAICOS EN EL SENTIDO DE ABEL

Hemos dicho que un número es algebraico en el sentido de Abel si éste puede escribirse utilizando número racionales y las operaciones básicas del álgebra, un número finito de veces.
De esta manera tenemos que

$$\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2},\ \sqrt{-1},\ \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \quad \text{etc.}$$

son números algebraicos.
Es claro que ese conjunto, que denotaremos por A, está contenido en el conjunto de números complejos C.
Además, es fácil verificar que A tiene una estructura de campo. Así pues, A es un subcampo de C.

Saturación por radicales: otra forma de ver el conjunto A

Si un elemento tiene una potencia en un campo K, se dice que es un radical relativo a ese campo.
Por ejemplo $\sqrt[3]{2}$ es un radical relativo al conjunto de números racionales Q, pues su cubo es 2 y $2 \in Q$. Observemos, sin embargo, que $\sqrt[3]{2}$ no está en Q. Además, todo elemento de un campo es radical relativo a ese campo.
El conjunto A de números algebraicos en el sentido de Abel puede verse como el resultado de añadir a Q todos sus radicales y luego todas las expresiones racionales (es decir las expresiones que pueden formarse utilizando unicamente las operaciones suma,

resta, multiplicación y división). Pero A puede verse también como el subcampo más pequeño que contiene a Q y a todos sus radicales. Es por ello que A suele llamarse también la saturación por radicales de Q. En A, toda "ecuación binomial" $x^n - a = 0$ tiene solución.

Se ve inmediatamente que A queda caracterizado por ser el subcampo más pequeño de C en el cual los polinomios $P(x) = x^n - a$ tienen sus raices.

Podemos preguntarnos ahora si el conjunto A de Abel contiene las raices de cualquier polinomio. La respuesta es no: hay polinomios cuyas raices no pueden expresarse utilizando números racionales ylas operaciones básicas del álgebra. Un ejemplo lo constituye el siguiente polinomio: $x^5 - 4x - 2$.

Àsí, pues, hay números que son raices de polinomios con coeficientes en Q -es lo que llamamos actualmente "números algebraicos"- que no pueden ser descritos con las operaciones del álgebra.

El conjunto de números algebraicos (en este último sentido) tiene también una estructura de campo y contiene al conjunto A de Abel.

Un número que no es algebraico se le llama trascendente.

La existencia de los números trascendentes fue demostrada por el Matemático francés J. Liouville, en 1844. Uno de los primeros números trascendentes encontrados y que pertenece al conjunto que hoy llamamos de números de Liouville es

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$$

Mas tarde, en 1873, Charles Hermite (otro Matemático francés) demostró, utilizando fracciones continuas, que e es un número trascendente. En 1874, Georges Cantor demostró que la "mayoría" de los números reales son trascendentes. Además, hay mucho más numeros trascendentes que algebraicos (y que algebraicos en el sentido de Abel). De hecho el conjunto de números algebraicos en el sentido de Abel se relativamente "pequeño".

Podemos concluir, pues, diciendo que los números expresables con las operaciones algebraicas son "pocos".* No obstante, y en beneficio de nuestra tranquilidad, sen 2° sí lo es...

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[R1] Rodríguez, E. La resolución de ecuaciones de grado dos y tres. Revista Ciencia y Educación. Febrero 1989, Vol 3.1

[U1] Uspensky, J.V. Teoría de Ecuaciones. Editorial Limusa. México, 1987.

[G1] Glaymann, M. Ptolémée, Al Kashi et les Tables naturelles. Bulletin de l' Association des professeurs de mathématiques de l'enseigtnement public de France. Septembre 1989.

* Es más, la cardinalidad del conjunto de números algebraicos es contable, mientras que la del conjunto de números trascendentes no lo es.