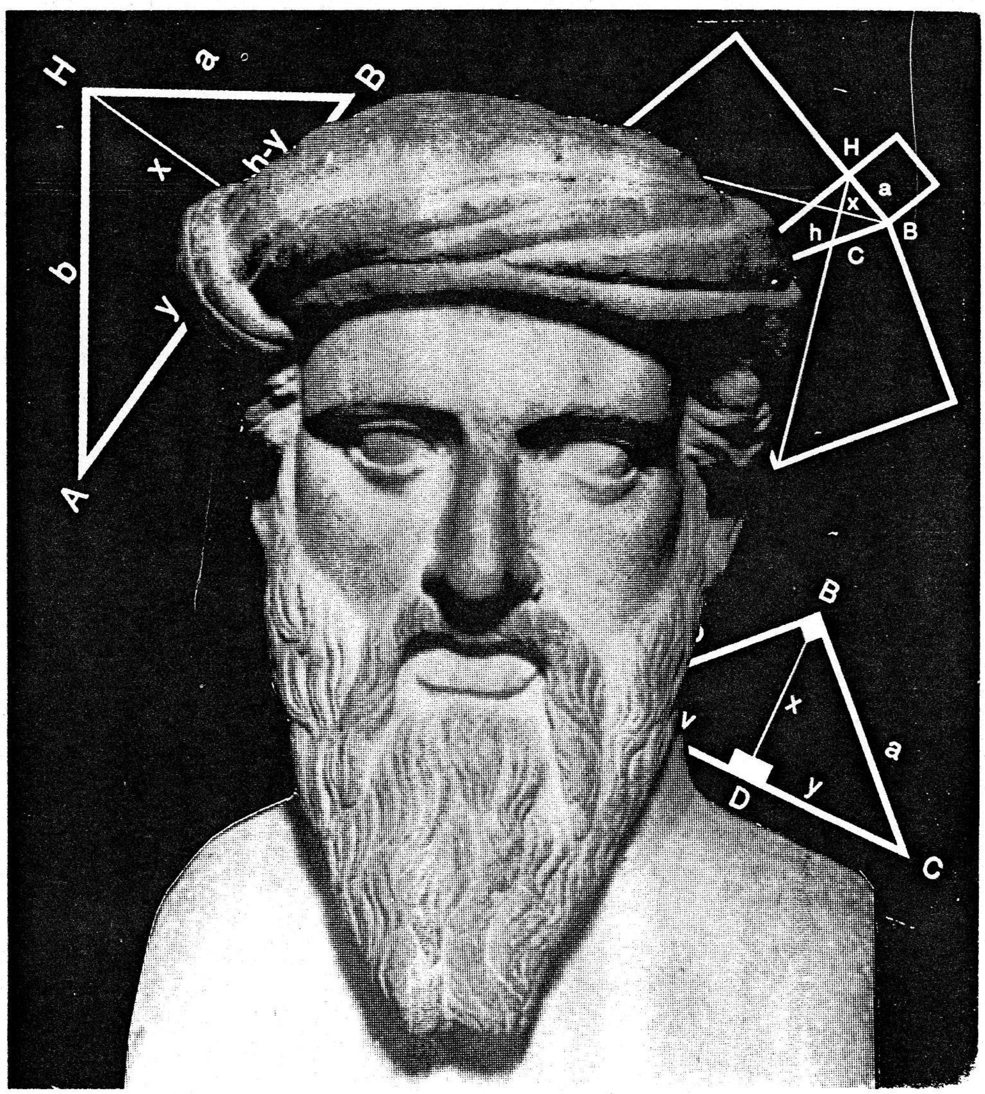
CIENCIA Y EDUCACION

REVISTA DE LA EFPEM VOL. 4 No. 3 NOVIEMBRE 1990
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



Edición Especial: Pitágoras

LA ECUACION DE PITAGORAS

LUIS RADFORD

"Les nombres ne sont redoutables, au contraire, que parce que la raison, tentée d' y rechercher son propre principe, risque de s'égarer jusqu'a ne voir dans l'univers qu'un systeme de nombres"

Anatole France
"L'Orme du Mail"

Un problema matemático que suscitó un interés particular en las civilizaciones antiguas, fue el de encontrar las dimensiones de los triángulos rectángulos. Sabemos, por ejemplo, que ya en Babilonia este problema había sido estudiado durante la primera dinastía. Una tablilla, escrita en escritura cuneiforme que data de 1900 a 1600 A. C., que ha sido reconstruída por Neugebauer y Sachs muestra valores de $(c/a)^2$, b y c, que corresponden a la hipotenusa (c), a un lado (b) de un triángulo rectángulo y al cuadrado de la cosecante $(c/a)^2$.

El problema anterior también fue estudiado por el matemático alejandrino Diofanto, quien vivió en el siglo III A. C. La solución general se encuentra en los Elementos de Euclides (Libro X, proposición 28), enunciada en términos de rectas mediales conmensurables sólo en potencia y rectángulos mediales. Es naturalmente dentro de ese contexto geométrico que la solución es dada.

La Aritmética Moderna Elemental nos permite una caracterización de las dimensiones de los triángulos rectángulos en números enteros, sin recurrir a la geometría. Vamos a consagrar el resto de este artículo a esa caracterización en el contexto de la Aritmética, en donde el problema consiste en encontrar los enteros positivos que verifican la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. Señalemos de paso que fue precisamente la lectura de la solución de Diofanto a este problema el que llevó a Fermat a enunciar lo que hoy llamamos "El último Teorema de Fermat". En efecto, Pierre de Fermat, francés del siglo XVII que vivía en Toulouse y era consejero del Parlamento, entretenía su apacible vida con la lectura de los grandes matemáticos griegos y cierto intercambio de correspondencia con algunos sabios contemporáneos, entre ellos Descartes. Sobre el margen del problema anterior de su ejemplar de Diofanto, Fermat escribió la frase siguiente:

"Al contrario, es imposible dividir un cubo en dos cubos, un bicuadro en dos bicuadros y en general una potencia cualquiera superior al cuadrado en dos potencias del mismo grado; he descubierto una demostración verdaderamente maravillosa pero este margen es muy estrecho para contener" (1)

Hasta hoy no ha sido posible dar una demostración de ese "teorema". No obstante, se sabe que es cierto para las potencias entre 3 y 125,000.

Regresemos, pues, al caso de la potencia 2 ...

LA ECUACION DE PITAGORAS

Llamaremos ecuación de Pitágoras a una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad \text{(P)}$$

El problema que nos proponemos es el de encontrar todas las tripletas (x,y,z) de números naturales que

(1) En lenguaje moderno, el teorema afirma que para n natural mayor que 2, es imposible encontrar 3 enteros positivos x, y, z tales que $x^n+y^n = z^n$.

verifican esa ecuación .Cualquier tripleta solución de (P) la llamaremos de Pitágoras. Empecemos recordando algunos conceptos y resultados de aritmética elemental que nos serán útiles más adelante. Primero, dos números m y n son primos entre sí si su máximo común divisor es 1. Esto lo denotamos por mcd (m,n)=1.
La generalización es evidente: m, n, p son primos entre sí, si su máximo común divisor es 1, lo denotamos por mcd (m, n, p,) = 1. Es claro que si m, n, y p son primos entre sí, dos a dos (esto es: m y n son primos entre sí, m y p son primos entre sí y n y p son primos entre sí), entonces m, n y p son primos entre sí. Sin embargo, la recíproca es falsa: m, n y p pueden ser primos entre sí sin que sean primos entre sí dos a dos. Por ejemplo 2, 4, 9 son primos entre sí, pero no 2 y 4.

Ahora bien, si (m, n, p,) es una tripleta pitagórica, y si m, n y p son primos entre sí, entonces sí tendremos que m, n y p son primos dos a dos. En efecto, demostremos, por ejemplo, que m y n son primos entre sí.

Sea d=mcd (m,n) entonces $d|m$ y $d|n$. (Recordemos que la notación $d|m$ significa que "d divide a m"). Por tanto $d^2|m^2$ y $d^2|n^2$. De aquí se deduce que $d^2|(m^2+n^2)$. Pero $m^2 + n^2 = p^2$. Por tanto $d^2|p^2$, y vemos que $d|p$. Entonces d divide a m, n y p. Pero m, n y p son primos entre sí, por lo que d=1.

Resumamos la discusión anterior en el siguiente teorema

TEOREMA 1:
Sea (x, y, z) una tripleta de Pitágoras. Entonces las dos proposiciones siguientes son equivalentes:
a) mcd (x,y,z) = 1
b) x,y,z son primos entre sí dos a dos.

Dirijamos ahora nuestra atención a la forma que tienen los cuadrados de los números. Si x es un número par entonces x es de la forma: $x = 2k$ y su cuadrado x^2 es $x^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ y por tanto es par. Recíprocamente, se puede demostrar fácilmente que si el cuadrado de un número es par, el número debe ser par.
Una propiedad interesante de los cuadrados de números pares que nos será útil en un momento es que el resto de su división por 8 sólo puede ser 0 ó 4. En efecto, veamos el cuadro siguiente:

x	x^2	resto de división por 8
0	0	0
2	4	4
4	16	0
6	36	4
8	64	0
10	100	4
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Por otro lado, si x es un número impar, entonces x es de la forma $x = 2k + 1$. Su cuadrado es: $x^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k (k + 1) + 1$. Como k y k + 1 son números consecutivos, forzosamente uno de ellos debe ser par y por tanto contener a 2 como factor.
Entonces $x^2 = 4k (k + 1) + 1$ debe ser de la forma: $x^2 = 8r + 1$, donde r es un número natural.

Este resultado nos permite demostrar otro resultado importante sobre las tripletas pitagóricas:

TEOREMA 2:
Sea x, y, z una tripleta de Pitágoras con mcd (x, y, z) = 1. (Decimos entonces que la tripleta es una tripleta primitiva de Pitágoras). Los números x, y son de paridad diferente.

DEMOSTRACION:
a) x, y no pueden ser ambos pares: si lo fueran, por lo visto anteriormente, x^2, y^2 serían ambas pares. Pero entonces $z^2 = x^2 + y^2$ sería par. Ahora bien, si z^2 es par, z también lo es. Tendríamos entonces que 2 divide a x, y, z, lo cual es imposible por ser (x, y, z) una tripleta primitiva de Pitágoras.

b) x,y no pueden ser ambos impares: si lo fueran, tendríamos:
$x^2 = 8r + 1$
$y^2 = 8u + 1$
Por tanto $z^2 = x^2 + y^2 = 8(r+u) + 2$
$= 8t + 2$ con $t = r + u$ (notemos que z^2 sería entonces par).
Al dividir z^2 por 8 obtendríamos un resto igual a 2, lo cual es imposible (según vimos el resto de un número par solo puede ser cero o cuatro).

COROLARIO:
Si (x, y, z) es una tripleta primitiva de Pitágoras, z es impar.

DEMOSTRACION:
Por el teorema anterior. x y y son de paridad diferente, por lo tanto x^2 y y^2 también serán de paridad diferente. Entonces $x^2 + y^2$ será será la suma de un número par y un impar, por lo que z^2 será impar. De allí deduce que z es impar.

El próximo teorema enuncia un resultado importante sobre las tripletas pitagóricas y está basado en lo que se conoce como el teorema de Gauss. Este afirma que si a:n y n puede factorizarse como n = bc, donde a y b son primos entre sí, entonces a|c. Por ejemplo 4|20 y 20 = 5x4. Vemos que 4 y 5 son primos entre sí y que 4|4. Igualmente, 4|24 = 3x8. Aquí 4 y 3 son primos entre sí y 4|8. De la misma forma 8|144 = 9x16; 8 y 9 son primos entre sí y 8 divide al otro factor (16). Veamos ahora el teorema 3.

TEOREMA 3:
Sean m y n dos enteros primos entre sí, de paridad diferente tales que $m > n \geq 1$.
Sea $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$. La tripleta (x, y, z) es una tripleta primitiva de Pitágoras.

DEMOSTRACION:
Una simple substitución muestra que $x^2 + y^2 = z^2$, por lo que (x, y, z) es una tripleta de Pitágoras. Demostremos ahora que es primitiva.
Sea d = mcd(x, y, z). Al tener en cuenta que m y n son de paridad diferente, se obtiene que el número $z^2 = m^2 + n^2$ es impar. Por tanto d, que divide a z^2 no puede ser par.
Por otro lado, como d|z y d|n, forzosamente d|z+x; pero $z+x = 2m^2$.
Por tanto $d|2m^2$. Ahora bien, mcd (2,d) = 1
El teorema de Gauss permite entonces deducir que $d|m^2$.
Análogamente, d|z-x; pero $z-x = 2n^2$.
Por tanto, aplicando de nuevo el Teorema de Gauss, llegamos a $d|n^2$ con lo que podemos afirmar que $d|mcd(m^2, n^2)$
Pero mcd (m, n) = 1. Esto implica que mcd (m^2, n^2) = 1 y vemos que necesariamente d = 1. Hemos demostrado que la tripleta de Pitágoras (x, y, z) es pues primitiva.
Veamos algunos ejemplos:
si m=3 y n=2 obtenemos x=5, y=12, z=13
si m=10 y n=9 obtenemos x=19, y=180, z=181
si m=13 y n=8 obtenemos x=105, y=208, z=233
Notemos que si violamos la condición de que m y n sean primos relativos de paridad diferente, obtenemos siempre una tripleta de Pitágoras pero no primitiva.

Por ejemplo m=5 y n=3 no son de paridad diferente (aunque sean primos relativos). En este caso x=16, y=30, z=34. Evidentemente, (x, y, z) no son primos entre sí: su máximo común divisor es dos.
Tomemos ahora, al azar, algunas tripletas primitivas Pitagóricas, distintas a las anteriores. Por ejemplo tomemos la célebre tripleta x=3, y=4, z=5. ¿Será cierto que existen m y n enteros positivos primos entre sí, de paridad diferente, tal que $x=m^2 - n^2$, $y= 2mn$, $z=m^2+n^2$? La respuesta es sí: m=2 y n=1 convienen.
Tomemos ahora la tripleta x=9, y=40, z=41 mencionada en el primer grupo de ejemplos del artículo anterior (Ecuación de Pitágoras y Parábolas).
Vemos que m=5 y n=4 cumplen con las condiciones pedidas. Cabe entonces preguntarnos si esto es posible para cualquier tripleta primitiva de Pitágoras. La respuesta es afirmativa:

TEOREMA 4:
Toda tripleta primitiva de Pitágoras (x, y, z) puede ser escrita en la forma:
$x = m^2-n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2+n^2$
donde $m > n \geq 1$, mcd (m,n) = 1 y m y n son de paridad diferente.

DEMOSTRACION:
Como $x^2+y^2 = z^2$, entonces $z^2-x^2 = y^2$
Por tanto $\frac{z-x}{2} \cdot \frac{z+x}{2} = \left(\frac{y}{2}\right)^2$

Demostremos que los números $\frac{z-x}{2}$ y $\frac{z+x}{2}$ son primos entre sí.

Sea d= mcd$\left(\frac{z-x}{2}, \frac{z+x}{2}\right)$. Entonces
$d| \frac{z-x}{2} + \frac{z+x}{2}$ es decir: d| z
Análogamente: $d| \frac{z+x}{2} - \frac{z-x}{2}$, es decir d|x

Pero como (x, y, z) es una tripleta primitiva de Pitágoras, entonces mcd (x, y, z) = 1 y en virtud del Teorema 1, z y x son primos entre sí. Por tanto d=1.

Ahora bien, si el producto de dos números primos entre sí es igual al cuadrado de un número, entonces, por un resultado de aritmética elemental sabemos que cada uno de los números debe ser un cuadrado.

Aplicando esto a $\frac{z-x}{2}$ y $\frac{z+x}{2}$, cuyo producto según vimos es $\left(\frac{y}{2}\right)$ tendremos:

$$\frac{z-x}{2} = n^2 \qquad \frac{z+x}{2} = m^2$$

De aquí se deduce que $x = m^2-n^2$, $z = m^2+n^2$, con lo que $y^2 = 2mn$. Falta demostrar que m y n son primos entre sí de paridad diferente.

Sea $d = \text{mcd}\,(m,n)$. Es claro que d divide a m, n, m^2, n^2. Por lo tanto d divide también a $x = m^2-n^2$, $y = 2mn$ y $z = m^2+n^2$.

Entonces $d \mid \text{mcd}(x, y, z)$. Pero este mcd es 1.

Por tanto d=1, lo que prueba que m y n son primos entre sí.

Demostremos ahora que son de paridad diferente. Si tuviera la misma paridad, entonces $x = m^2-n^2$, y $y = 2mn$ y $z = m^2+n^2$ serían los tres pares y no podrían constituir una tripleta primitiva de Pitágoras. Conclusión: m y n son de paridad distinta, lo que completa la demostración del Teorema.

Los dos últimos teoremas caracterizan las tripletas primitivas Pitagóricas.

Abajo se encuentra un cuadro con algunas de dichas tripletas, generadas por computadora. ¿Se trata de una generación aleatoria?

(5159, 720, 5209)	(4015, 1152, 4177)	(3565, 6132, 7093)
(279, 440, 521)	(3857, 8424, 9265)	(747, 3404, 3485)
(115, 252, 277)	(1989, 6700, 6989)	(1023, 4264, 4385)
(3225, 8008, 8633)	(5325, 292, 5333)	(75, 308, 317)
(2829, 1540, 3221)	(943, 576, 1105)	(5085, 5372, 7397)
(3751, 6840, 7801)	(4221, 260, 4229)	(1057, 11376, 11425)
(513, 184, 545)	(1665, 328, 1697)	(221, 60, 229)
(13, 84, 85)	(1131, 340, 1181)	(3105, 6248, 6977)
(1971, 2300, 3029)	(3621, 1220, 3821)	(7, 24, 25)
(1845, 172, 1853)	(817, 744, 1105)	(267, 3956, 3965)
(4757, 276, 4765)	(247, 96, 265)	(145, 408, 433)
(2337, 784, 2465)	(3619, 1860, 4069)	(5925, 308, 5933)
(3965, 252, 3973)	(2697, 3904, 4745)	(5395, 1332, 5557)
(1517, 156, 1525)	(183, 1856, 1865)	(33, 56, 65)
(1173, 1036, 1565)	(155, 468, 493)	(3901, 2340, 4549)
(4935, 4408, 6617)	(3233, 456, 3265)	(225, 272, 353)
(3009, 440, 3041)	(329, 1080, 1129)	(2373, 6164, 6605)
(4641, 6320, 7841)	(1007, 1224, 1585)	(1909, 3180, 3709)
(3835, 372, 3853)	(561, 400, 689)	(2415, 6392, 6833)
(2625, 7592, 8033)	(5621, 300, 5629)	(901, 1260, 1546)
(69, 260, 269)	(1219, 1140, 1669)	(1485, 9052, 9173)
(2889, 5360, 6089)	(217, 456, 505)	(1643, 924, 1885)
(189, 340, 389)	(3465, 472, 3497)	(1749, 860, 1949)
(259, 660, 709)	(107, 5724, 5725)	(3075, 1972, 3653)
(3201, 4160, 5249)	(2597, 204, 2605)	(207, 224, 305)

BIBLIOGRAFIA

- Collette, J.P. Historia de las Matemáticas. Vol. I. Siglo XXI. 2a. edición. México. 1986.
- D'hombres et al. Mathématiques au *fil* des âges. Gauthier - Villars, Paris. 1987
- Euclid. The thirteen Books of the Elements. Vol. 1 2nd. Edition. Dover 1956.
- Niven, I y Zuckerman, H. Introducción a la teoría de los números. Ed. Limusa. México. 1985.