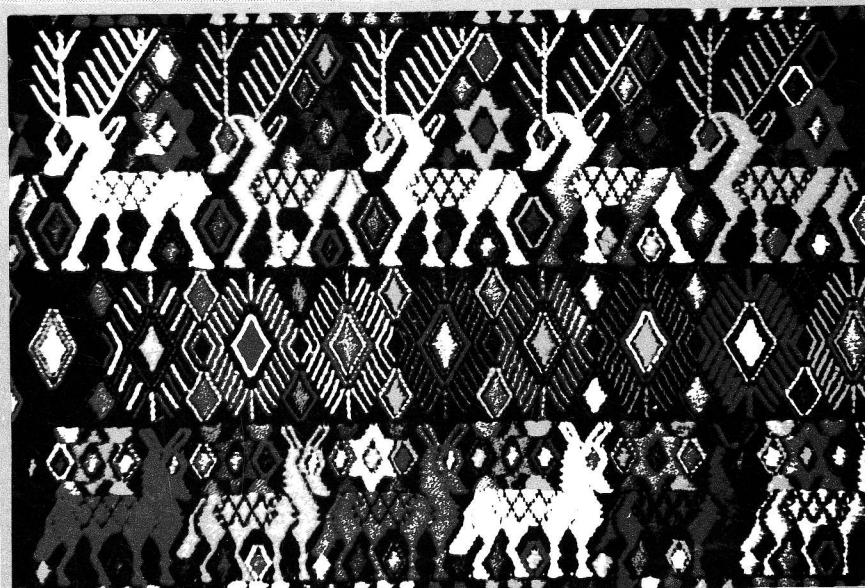


# HUMANIDADES



Junio 90

**HUMANIDADES No. 7**  
**II época junio 1990**

Licenciado Eleázar A. Monroy Mejía  
DECANO

Licenciado Ricardo Moscoso Chigua  
SECRETARIO

Licenciado Enrique Guillermo Zepeda L.  
SECRETARIO ADJUNTO

**JUNTA DIRECTIVA**

Lic. Eleázar A. Monroy Mejía -Decano-  
Lic. Ricardo Moscoso Chigua -Secretario-  
Lic. Francisco Toledo S. -Vocal I-  
Lic. Rubén Homero Jérez Mejicanos -Vocal II-  
Lic. Ricardo Serrano Córdova -Vocal III-  
Estudiante Francisco Hernández -Vocal IV-  
Estudiante Danilo López -Vocal V-

**DIRECTORES DE DEPARTAMENTO**

Lic. Julio Fernando Cruz Burgos -Pedagogía y  
CC. de la Educación-  
Licda. Catalina Barrios y Barrios -Letras-  
Licda. Sonia Lidia Yac -Bibliotecología-  
Lic. Mario Alberto Carrera -Extensión-  
Dr. Eduardo Padilla -Filosofía-  
Licda. Ida Bremmé de Santos -Arte-  
Lic. Oscar Jaime López -EFPEM-  
Dr. Roberto Peña -Idiomas-  
Lic. Francis Polo Sifontes -Otras Especialidades-

**Revista**  
**HUMANIDADES**

**DIRECTOR**  
Licenciado  
**MARIO ALBERTO CARRERA**

**Portada:**

Güipil  
Elaborado por:  
Dominga Quej.  
Municipio Tac Tic;  
Alta Verapaz.  
Colección: G. Zepeda L.

Impreso en:



12 Av. 14-55 "B", Z. 1,  
Tels. 514556-300747.



## Hacia una Nueva Pedagogía de la Matemática

Luis Radford

Uno de los problemas más difíciles que se ha planteado a la Pedagogía es el de la enseñanza de la Matemática. El problema no ha sido, hasta hoy día, satisfactoriamente resuelto, como se puede constatar fácilmente, a la luz, por ejemplo, del bajo grado de aprendizaje sobre las nociones matemáticas que obtienen los individuos durante su escolarización. La dificultad que ha encontrado la Pedagogía en construir modelos eficaces de enseñanza de la Matemática puede ser vista también en el poco interés que los modelos didácticos vigentes logran despertar en el alumno en el estudio de esta disciplina; diríamos, incluso, que, en general, la práctica docente vuelve el aprendizaje de esta ciencia monótono, rutinario y sin sentido.

Desde hace algunos años, la

Pedagogía ha venido buscando nuevos puntos de partida, nuevas concepciones de lo que debe ser la educación matemática y de las formas en que esta educación debe desarrollarse. Vamos a intentar describir aquí, someramente, algunos de esos puntos de partida, que vienen a constituir los pilares de una nueva teoría pedagógica que lucha aún por definirse plenamente. Sin embargo, antes de entrar de lleno en la descripción de esta nueva pedagogía, nos parece importante analizar el contexto histórico de donde ella emerge. Para ello, y para comprender qué es lo nuevo que esta corriente pretende aportar, vamos a empezar analizando la Pedagogía que acompañó la introducción de la Matemática Moderna a los planes de estudio en todos los niveles (Primario, Secundario y Superior).

### LA MATEMÁTICA MODERNA

Se conoce como Matemática Moderna la Matemática que afloró a principios de siglo y que venía germinando desde la segunda mitad del siglo XIX, en particular con los trabajos de Cantor y Weierstrass, acerca de los conjuntos y los números reales. La diferencia fundamental de esta Matemática con la anterior puede resumirse en un esfuerzo de rigor que culmina con una formulación axiomática formal.

\* Ponencia presentada en el I Congreso "Educación en Centro América, un enfoque multidisciplinario".

La incorporación de la Matemática Moderna a los planes de estudios pre-universitarios Matemática que nació y creció bajo techos universitarios, y que esta-

ba, en consecuencia, destinada para el uso exclusivo de los matemáticos- se hizo dentro de un movimiento mundial lleno de grandes esperanzas. Fué en esencia, una decisión de tipo económico: en efecto, en 1957 la Unión Soviética lanzó su primer Spoutnik y el mundo occidental tomó conciencia de su retraso tecnológico con respecto a esa potencia. Para recuperar terreno, se creó, en 1958, la Organización Europea de Cooperación Económica (O.E.C.E.), que se volvió más tarde la Organización de Cooperación y de Desarrollo Económico. La O.E.C.E. creó una oficina de Personal Científico y Técnico, siendo uno de sus objetivos el de volver más eficaz la enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas. Esta organización se encargó de reunir durante un mes, en Yugoslavia, a varios expertos para elaborar un programa moderno de matemáticas para la enseñanza secundaria, el cual fué publicado en París, en 1961. Desde entonces, la Matemática Moderna empezó a penetrar las aulas escolares.

#### ASPECTOS PEDAGOGICOS:

Hemos visto, a grandes rasgos, qué es lo que hace cambiar el curso de la enseñanza de la Matemática en la década de los sesenta. Veamos ahora cómo se realiza ese cambio, desde el punto de vista pedagógico.

Primero, en cuanto a la escogencia del programa escolar de la Matemática y su secuencia (esto será muy importante más adelante), el criterio pedagógico se basa en la estructura lógica de la Matemática es decir, se basa en la forma en que la Matemática se concibe a sí misma como disciplina científica. Una de las respuestas actuales más importantes a este criterio pedagógico

-y que constituye uno de los motores de la nueva Pedagogía- es, como lo veremos pronto con más detalles, el de tomar distancias entre lo que es una ciencia y lo que es aprender esa ciencia.

La nueva Matemática apareció construída sobre un sistema lógico axiomático en el cual reposa la Teoría de Conjuntos, de donde arranca, en su orden, las operaciones con conjuntos, las relaciones, las aplicaciones, las operaciones binarias, las estructuras algebraicas, los sistemas numéricos, las funciones, el análisis real, la probabilidad y la estadística, etc.

La Pedagogía copió esta secuencia, desarrollando en el aula el curso de Matemática en el orden indicado (algunas veces se propuso secuencias en espiral, pero en el fondo la idea es la misma).

La hipótesis pedagógica fué, pues, que la Matemática sería mejor aprendida por los estudiantes si se seguía la secuencia estructural de la Matemática como ciencia. Esta hipótesis fué sustentada, en alguna medida, por los resultados de trabajos del psicólogo suizo Jean Piaget y de su escuela de Epistemología Genética, de Ginebra. Debemos aclarar, sin embargo, que Piaget no hizo él mismo propuestas pedagógicas en este sentido: Piaget era, como sabemos, más bien un biólogo y un epistemólogo, y las propuestas que tomaron como base de partida sus trabajos pasaron por una interpretación de sus resultados, con vistas a la enseñanza de la Matemática. La razón por la cual estos trabajos de epistemología tuvieron tanta importancia en la enseñanza de la matemática se debe sin duda a la influencia de Piaget en ese momento y a la descrip-

ción de la teoría piagesiana de la inteligencia en términos de estructuras; esas estructuras son identificadas, dentro de la teoría en cuestión, con estructuras matemáticas, (la estructura de grupo, por ejemplo), no obstante se guardan en algunos casos cierta distancia.

La influencia concreta de Piaget en la enseñanza de la Matemática se sitúa, según nosotros, en la concepción de un aprendizaje activo, que viene a oponerse al aprendizaje por contemplación que se heredó de tiempos pasados. Al romper con los viejos esquemas del aprendizaje del ineísmo y del apriorismo, y al concebir el aprendizaje como una interacción del individuo con el medio, Piaget abrió (quizá sin mucha intención) grandes perspectivas pedagógicas. En particular, en el caso que nos ocupa aquí, la enseñanza de la nueva matemática se intentó realizar sobre la base de una pedagogía activa, cuyo propósito era llevar al individuo a la construcción de los conceptos matemáticos.

Si bien es cierto que este proyecto pedagógico se presentó de manera muy interesante, los resultados en la práctica no fueron lo que se esperaba [K1].

Podemos señalar tres causas:

- a) Exceso de formalismo,
- b) confusión entre pedagogía activa con pedagogía concreta,
- c) la descontextualización de la Matemática.

El exceso de formalismo, visible sobre todo en un exagerado recurso a la teoría de los conjuntos, se introdujo al querer igualar el "saber científico" con el "saber enseñado". Para ilustrar este aspecto, tomemos el caso de los



números enteros, es decir los números 0,1,2,3, etc. y sus negativos: -1, -2, -3, etc. Desde el punto de vista matemático, estos números pueden construirse de esta manera: se parte de los números naturales  $N = \{0,1,2,3 \dots\}$ . Se define sobre el producto cartesiano  $N \times N$  una relación R de la siguiente forma:

$(a,b)R(c,d)$  si y sólo si  $a-b = c-d$ .

Por ejemplo,  $(5,2)R(12,9)$  pues  $5-2 = 12-9$ , pero no se tiene que  $(5,2)R(12,10)$  ya que  $5-2 \neq 3$  y  $12-10 \neq 2$ .

Luego se demuestra que la relación anterior es una relación de equivalencia (es decir que es reflexiva, simétrica y transitiva). Esta relación de equivalencia induce una partición en el conjunto  $N \times N$  en clases de equivalencia; cada clase se define como un número entero. Sobre este nuevo sistema numérico se definen dos operaciones, la operación "suma" y la operación "producto". Por ejemplo, la suma del número entero  $[a,b]$  y  $[c,d]$  es  $[a+c, b+d]$ . Un número entero  $m,n$  es positivo si y sólo si  $m-n > 0$ , estando esta última relación en  $N$ . Luego se demuestra que la suma de dos números positivos da como resultado un número positivo, etc.

El postulado pedagógico fue que al enseñar los números enteros de esta forma, el estudiante comprendería mejor ese concepto, y fue enseñado, en el caso de Guatemala, en los primeros años del Ciclo Básico, en aquellos esporádicos casos en los que el propio profesor logró descifrar ese saber científico.

Las repercusiones de esta acción pedagógica han sido profundamente funestas para la enseñanza de la Matemática. En

efecto, este proceder, en el que se intenta aclarar los conceptos matemáticos a la luz de su status matemático, puede ser útil y las que puede conjeturar un hepero no necesariamente para el estudiante. Hay una gran brecha entre lo que es útil para el trabajo del matemático profesional (en este caso aclarar los conceptos dentro de la propia Matemática) y lo que es útil y motivante para un estudiante que -en general, en nuestro medio- no proseguirá estudios superiores, mucho menos estudios científicos. Qué interés, podemos preguntarnos, puede encontrar un estudiante del área rural en pasar varios años en un curso de Matemática en donde lo que le enseñan es, esencialmente, la teoría de conjuntos?

En cuanto a la confusión entre pedagogía activa y pedagogía concreta, el problema fue, como lo señaló B. Charlot,  $\{C1\}$ , que se asimiló la actividad intelectual del alumno con la actividad física de éste sobre material manipulable. Esta confusión fue fatal para la enseñanza de la Matemática Moderna, la que degeneró en lecciones de vocabulario en las que el alumno aprendió a nombrar estructuras y no a construirlas realmente, de acuerdo al proyecto inicial.

Podemos resumir lo anterior diciendo que la incorporación de la Matemática Moderna a las aulas escolares obedeció, en sus raíces, a una razón económica, como lo era el de preparar mejor a las jóvenes generaciones en el terreno científico y en particular en el de la Matemática, con vistas a reducir el retraso que en el área tecnológica estaba acusando el mundo occidental con respecto a la Unión Soviética, retraso que tendría impacto en el desarrollo económico de este lado del mun-

do. Esta medida económica se inscribe dentro de una política de competencia en donde el objetivo es dominar en áreas prioritarias, y la ciencia y la tecnología son medios excelentes para alcanzar esos fines. Por último, la Matemática Moderna terminó desempeñando un papel social que no tenía originalmente en sus proyectos: el de servir de medio de selección. Este aspecto ha sido largamente discutido últimamente en Europa y en particular en Francia, en donde la selección de alumnos para ingresar a las Grandes Escuelas se hace mediante un examen de admisión con una muy fuerte componente matemática.

#### HACIA UNA NUEVA PEDAGOGIA.

La pedagogía de la que queremos hablar aquí parte de una concepción social y evolutiva de lo que es el aprendizaje; esta concepción le brinda un marco teórico de donde partirán las acciones concretas y que definirán, más tarde, la didáctica de la ciencia, en nuestro caso la Matemática.

Con respecto a la concepción del aprendizaje, se parte, siguiendo algunas de las ideas de Piaget, de que es el individuo el que interactuando con el medio construye sus esquemas conceptuales. Además, el conocimiento es una estructuración de acciones y esquemas cada vez más complejos. Se reconoce, también, que la adquisición del conocimiento no se hace por adición del nuevo elemento a lo ya conocido: no se trata de una simple suma de lo nuevo conocido con lo viejo conocido. Se trata de interpretar ese nuevo conocimiento a la luz de los esquemas anteriores, se pasa aquí por una etapa de "asimilación"

y por una etapa de "acomodación", como decía Piaget, tomando figuras de la Biología.

Del marco conceptual que acabamos de describir se desprende que el conocimiento científico se va ensanchando poco a poco, a medida que avanza la experiencia del individuo con su medio circundante (dichas experiencias pudiendo ser de tipo escolar o no escolar); en particular la adquisición de un concepto no se hace de golpe. El individuo va creando representaciones de las cosas, es decir modelos explicativos. Con esos modelos o concepciones trata de interpretar fenómenos que observa. Sabemos que en muchos casos estas concepciones se han formado fuera de un círculo escolarizado, es decir son representaciones a las que el individuo llega "por su propia cuenta" (decimos esto sin querer introducir con esto ninguna posición filosófica determinística). Diríamos que son concepciones "espontáneas"; por ejemplo, sin enseñar a una persona lo que en Matemática entendemos por "probabilidad", una persona tiene una idea propia de ese concepto: es su representación de probabilidad. Los estudios que se han iniciado muy recientemente sobre el funcionamiento aritmético en adultos no alfabetizados {A1}, ponen en evidencia estrategias de cálculo que les son propias y que en la mayoría de casos no corresponden a aquellas que derivan de una escolarización.

La toma en cuenta de las representaciones es una piedra angular para la edificación de la nueva pedagogía. Se trata, en efecto, de partir de esas representaciones y brindar al alumno la posibilidad de enriquecerlas. Este enriquecimiento es posible, dentro de esta teoría pedagógica,

gracias al supuesto que, como dijimos anteriormente, el conocimiento se hace a través de la interacción del individuo con el medio y por la importancia que tiene el factor social en la construcción del saber.

Un problema fundamental es, entonces, dentro de un marco de acción escolar, la búsqueda de las actividades que han de proponerse al alumno para obtener el enriquecimiento de sus representaciones. Aquí desempeña un papel importante la utilización de las nuevas tecnologías, como veremos más adelante.

Estas actividades didácticas con fines de ensanchar las representaciones se orientan, pues, a utilizar las representaciones (en general incompletas) del individuo. No se pretende, entonces, ni ignorarlas ni destruirlas, ya que como dijimos anteriormente, el nuevo conocimiento se construye sobre el viejo conocimiento. Aquí tiene gran importancia lo que se ha dado en llamar el conflicto cognoscitivo. Esto significa presentar al individuo situaciones que son ya sea irresolubles con las representaciones que él dispone o bien situaciones que son contradictorias con dichas representaciones.

Un elemento que está siendo muy utilizado en la conducción de las actividades didácticas inmersas en el marco pedagógico anterior, es el recurso a la epistemología. La Matemática Moderna propuso, como lo señalamos anteriormente, un desarrollo estructural para la enseñanza de la Matemática, siguiendo una concepción axiomática, algunas veces simplificada. Esta concepción restó interés a cualquier análisis histórico de las nociones matemáticas (es decir, el análisis de las razones que hicieron surgir

dichas nociones, los problemas que éstas atravesaron hasta llegar a su forma definitiva, etc.) con un fin educativo práctico.

En términos generales, el problema de la educación consiste en la apropiación por parte del individuo de una multitud de conocimientos que la humanidad posee sobre el mundo. Esta apropiación puede ser facilitada si se conocen las dificultades que atravesó la construcción de ese saber o conocimiento. La epistemología permite arrojar luces sobre las dificultades que cierta noción como la de número entero, número fraccionario, etc. pueden presentar al estudiante, brindando así una ayuda valiosa a la Didáctica de la Matemática.

Dentro de esta tendencia, la labor del profesor en el aula debe ser tal que logre crear lo que se ha llamado un "micro mundo científico", el cual reproduzca en alguna forma el "ambiente" que dio nacimiento a la noción en cuestión y que, luego, lleve al estudiante a salvar los obstáculos epistemológicos que el análisis ha puesto en evidencia. El profesor debe, pues, simular el desarrollo del concepto. Esta simulación debe pasar de una etapa de contextualización (que es la descrita arriba) a una etapa de descontextualización y despersonalización, en la cual la noción toma su forma final {B1}

Entre los trabajos más importantes en epistemología ligados a la Matemática, podemos citar el de G. Glaeser, "Epistemologie des nombres relatifs" {G1} y el de E. Filloy y T. Rojano "Del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico" {F1}



**LA UTILIZACION DE LA NUEVA TECNOLOGIA: EL CASO DE LAS COMPUTADORAS.**

Hasta hace algunos años, la computadora era un soporte exclusivo para cálculos científicos y administrativos. Los cursos de computación se centraban en la enseñanza de lenguajes de computación y se desarrollaban en las facultades de ingeniería. Se enseñaba, por ejemplo, Fortran, que era el lenguaje científico por excelencia. Para la pedagogía que nos ocupa, la computadora debe ser explotada con fines didácticos. Una de las ventajas de enseñar a través de la computadora es que se provoca una mayor actividad por parte del estudiante. En efecto, éste debe interactuar con la máquina, debe formular hipótesis, evaluar, corregir, etc.

Se ha observado que en un ambiente de computadora (computer environment), el alumno puede aprender más rápido, de manera que la máquina viene a funcionar como un catalizador del aprendizaje. Por otro lado, la velocidad con que una computadora efectúa los cálculos y las posibilidades de visualización que ésta ofrece, son explotados para desarrollar análisis cualitativos de problemas matemáticos (en el comportamiento de funciones, mediante graficación, por ejemplo): Estas máquinas suelen también ser utilizadas para llevar al alumno a situaciones en las que puede onjeturar un hecho e intentar demostrarlo más tarde por los métodos analíticos de la Matemática. De hecho, este aspecto de la computadora es también utilizado en la investigación Matemática. No es extraño que un científico, luego de un trabajo experimental con computadora formule una hipótesis y que

la pruebe más tarde sobre un papel. Entre los programas educativos más usuales, podemos mencionar a LOGO y su famosa geometría de la tortuga; MuMath, que resuelve ecuaciones algebraicas y Geometrical Supposer.

Señalemos que la introducción de la computadora a la enseñanza de la Matemática tiene dos raíces: una raíz "externa", en donde se trata de preparar al estudiante a un mundo tecnológico cada día más avanzado, y una raíz "interna": facilitar y acelerar -cuando es posible- la adquisición de conceptos matemáticos.

**EL SENTIDO CULTURAL DE LA MATEMATICA.**

Para lograr ser un lenguaje universal que brinde métodos de resolución de problemas de todo orden (económico, físico, biológico, industrial, etc.), la Matemática debe pagar un precio que es precisamente la descontextualización de sus teorías. Con esto queremos decir que dichas teorías (por ejemplo, el Cálculo Diferencial e Integral o la Estadística) se elaboran sin ningún referencial concreto. Esta descontextualización hace aparecer a la Matemática como una disciplina fría, sin ninguna relación con el medio del individuo; de aquí resulta, en nuestra opinión, el muy conocido desinterés del alumno por aprender esta disciplina. Esta es una dificultad que la Pedagogía de la Matemática moderna no pudo saltar.

Dentro de la nueva Pedagogía que estamos describiendo, se hace un intento por tratar de encontrar un sentido a la Matemática dentro del contexto cultural donde se desarrolla. Cabe mencionar, a este respecto, las investigaciones que se llevan actual-

mente en lo que se ha llamado Etnomatemáticas {S1}.

Digamos, para terminar, que el sentido cultural de la Matemática nos parece de vital importancia en la enseñanza de la Matemática, sobre todo en los países no desarrollados, en donde la educación científica en general ha sido transferida o copiada intacta, sin las precauciones debidas, de los países más desarrollados, obteniéndose así, en algunos casos, una concepción de educación científica que, paradójicamente, colinda con la alienación.

**BIBLIOGRAFIA:;**

- A1 AVILA, A. Las estrategias de cálculo aritmético de los adultos no alfabetizados. Tesis de Maestría en Pedagogía. UNAM. México, 1988.
- C1 CHARLOT, B. Qu'est-ce que "faire des Maths"? L'épistémologie implicite des pratiques d'enseignement des Mathématiques. Bulletin 359. APMEP. France. Juin 1987.
- B1 BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 7.2, 1986.
- F1 FILLOY, E. y ROJANO T. Del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico. Cuadernos de Investigación del CINVESTAV. I.P.N. México.

G1 GLAESER, G. Epistémologie des nombres relatifs. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 2,3 1981.

K1 KLINE, M. El fracaso de

la Matemática Moderna. Siglo XXI. 12a. edición. 1986

S1 SCOTT, P. Etnomatemáticas: Matemáticas y realidad. Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana

na y del Caribe sobre Formación de profesores e investigación en Matemática Educativa. Guatemala. 1988