HUMANIDADES

nº 3

HUMANIDADES Nº 3
II epoca

Revista
HUMANIDADES

DIRECTOR
Licenciado
MARIO ALBERTO CARRERA

PORTADA
Rafael Pereyra Piedrasanta
Mujeres 1959

Oleo sobre masonita
0.85x0.61 m
Colección del licenciado Horacio Rodríguez C. y Señora

Foto De León Cabrera

Impreso por Ediciones américa

12 Av. 14-55 "B" Zona 1
Tel.: 51-45-56

SOBRE LA NOCION DE DEMOSTRACION: UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE UNIVERSIDAD

Luis Radford

Reportamos aquí una experiencia con estudiantes universitarios sobre la idea que poseen ellos de la demostración. Ponemos en evidencia algunos problemas que obstruyen una correcta apropiación de esta noción y de dificultades que encuentran los alumnos en el plano de la heurística.

1. INTRODUCCION

La demostración es para la Matemática un instrumento para probar la veracidad de enunciados. Contrariamente a lo que se hace en los sitemas formales, como la Lógica Matemática, en la demostración matemática se abandona el aspecto formal, se incursiona en un mundo dotado de significado y aparece un auditor al que hay que convencer. Balacheff (B1) expresa claramente esta idea diciendo que una prueba es una explicación aceptada por un auditor de una verdad adquirida por un locutor; cuando esta explicación está estructurada de tal forma que los enunciados que aparecen en la explicación son reconocidos por ambas partes como verdaderos o se encadenan según reglas de inferencia bien definidas, dicha explicación adquiere el rango de **demostración**.

La distinción entre el significado de demostración para la lógica y demostración para la matemática no siempre ha sido clara. Una de las consecuencias de la asimilación de una a la otra ha sido el de introducir en los programas de Matemática de la escuela secundaria (como es el caso en Guatemala) de un contenido de lógica proposicional con la esperanza que de esa forma el alumno aprenderá lo que es una demostración. Los pésimos resultados todos los conocemos.

La demostración, en el sentido matemático, debería de ser, en nuestra opinión, un tema de estudio durante la escolarización del individuo. Este trabajo intenta probar que los modelos actuales de enseñanza de la demostración (cuando existen) conducen a los alumnos a ideas erróneas de lo que es una demostración matemática.

2. LA PRUEBA Y LA POBLACION

La prueba consistió en una serie de problemas del siguiente tipo:

1. Sea A={4n+1 / n=0,1,2,...}. Demostrar que si a A entonces a^2 A

2. Sean a, b, c, enteros positivos. Demostrar que si a | b y b | c, entonces a | c.

3. Demostrar que n N, $(n+1)^2/(n+1) < 1$.

4. Demostrar que x [-1,0] $(1-x)/(1+x) < 1$.

Tomamos una muestra al azar de 15 estudiantes del primer año de una Facultad de Ingeniería y les pasamos una prueba individual papel-crayón. Luego tomamos un grupo de 6 estudiantes para profesores de Matemática de escuela secundaria y los interrogamos individualmente en entrevistas clínicas.

3. RESULTADOS

3.1 Sobre la idea de demostración

a) La demostración resulta ser algo sobre lo cual no se tiene una idea precisa:

María: "La verdad me cuesta demasiado demostrar algo; me confundo con lo que es una demostración, una comprobación o una verificación".

El hecho de arribar al primer año de universidad sin una idea clara del concepto de demostración obedece a la ausencia de modelos explícitos de enseñanza de ésta. En este caso, el único contacto del alumno con tal noción se hace por intermedio de los libros, en general universitarios; como sabemos, allí aparecen teoremas, seguidos de sus demostraciones. Lo que es importante es que esas demostraciones están escritas como un últil de prueba y presuponen que el lector entiende para qué sirven y cómo se hacen. Ahora bien, esto en general no es cierto (por lo menos dentro del contexto guatemalteco) y trae como consecuencia que el alumno adquiera un concepto desfigurado de lo que es la demostración.

b). La demostración interpretada como comprobación:

Para Mynor la demostración es vista como una comprobación: en el problema 4 procede a "demostrar" la propiedad, verificando ésta para ciertos valores de x. En algunos casos la comprobación se efectúa sólo sobre un elemento (Mynor hace sólo n=0 en el problema 1).

Debe anotarse aquí que esta comprobación no tiene un carácter exploratorio de la cual se obtendría información sobre relaciones (necesariamente desconocidas en ese momento) entre objetos matemáticos. La interpretación de la demostración como comprobación supone que el enunciado ya es verdadero. De allí que un ejemplo baste.

c). La demostración aparece también como una ac-

tividad que debe conducir de hipótesis a una conclusión, pero no mediante una vía deductiva. Frente al problema 2, pudimos observar, en dos ocasiones, a estudiantes colocar por un lado las hipótesis perfectamente identificadas (a | b, b | c), y por otro lado la conclusión (a | c). el problema era entonces, como lo manifestaron, llegar de un lado al otro. Para ello **interpretaron** a | b **como una fracción:** a | b se transformó en la fracción y escribieron

d). La demostración también es vista como un medio para establecer propiedades generales. En este caso, los alumnos trabajaban con objetos sin especificación (x, n, etc. según el problema) o se lanzaban a una experimentación. Esa experimentación podía tener dos significados: a) como un procedimiento de comprensión del problema y/o b) como base a la búsqueda de una solución general. Por ejemplo, Luz María, en el problema 4, procede a una experimentación atribuyéndole valores a x. Para x positivo escoge x=2; para x negativo escoge x=-2. En ambos casos obtiene un valor negativo en (1-x) / (1+x). Esto la lleva a plantear el problema en término de signos: hace 1-x=m y 1+x=n y demuestra, cometiendo algunos errores en el camino, que m/n siempre es negativo y, por tanto, menor que 1.

3.2 EL EFECTO DEL CALCULO

Frecuentemente observamos que cuando el alumno interpretaba la demostración como una herramienta de prueba y se lanzaba en una etapa de cálculo aritmético o algebraico, este cálculo hacía pasar a un segundo plano hipótesis que pesaban sobre el problema, como lo mostramos a continuación:

En el problema 5 Rolando procede a simplificar la expresión $p(n) = (n^2 + n + 1) / (n + 1)$ por medio de procedimientos algebraicos; este cálculo algebraico cobra toda la importancia y le hace olvidar que se trata de demostrar una propiedad (que n N, $p(n) < 1$). Al final, el problema es visto como "resolver una desigualdad". Rolando concluye: n Z^-

3.3 EL PAPEL DE LA VARIABLE

Los procesos heurísticos puestos en obra en los problemas planteados se vieron a menudo detenidos por un manejo no adecuado de las variables o por la imposibilidad de introducir variables, una vez la relación entre los objetos del problema había sido encontrada a partir de algunos casos concretos. Esto se observó sobre todo en el problema 1. La polisemia o polivalencia de la variable, es decir asignarle varios valores distintos a la vez, fue otro problema que estuvo presente en los procedimientos empleados por los alumnos.

4. CONCLUSIONES

La noción de demostración en estudiantes con una relativa escolarización fuerte no corresponde, en general, a la noción de demostración matemática. Existe un **obstáculo didáctico** que proviene de asimilar la noción de demostración matemática a la noción de demostración que aparece en los Sistemas Formales. Esto conduce a plantear modelos didácticos inadecuados de enseñanza de la demostración matemática. Sin embargo, lo más usual es considerar (en general en forma implítica) que la demostración no se aprende: se considera a la demostración como un acto "lógico" (aunque no se diga qué se entiende por ello), innato al individuo o mejor dicho a los individuos dotados para la Matemática. Esta creencia, que se convierte también en un **obstáculo didáctico,** se vio sostenida por la epistemología que acompañó a la llamada Matemática Moderna. Dentro de este esquema de pensamiento, si la demostración no se aprende, la pregunta de cómo enseñarla no tiene sentido. Los resultados de este estudio muestran que deben tomarse nuevos puntos de partida. En particular, pensamos que la noción de demostración matemá-tica es un objeto de aprendizaje y de estudio. Recientemente han aparecido estudios que van en ese sentido [B2], [M1], pero sin duda queda mucho por hacer.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[B1] BALACHEFF N. Preuve et demonstration. Recherches en Didactique des Mathematiques. Vol 3, Nº 3, pp 261-304

[B2] BOLLE M-L. L´apprentissage de la demonstration. Quelques idées et expriences. Mathematique et pedagogie Nº 63. 1987

[M1] MESQUITA A., RAUSCHER J-C. Sur une approche d´apprentissage de la démonstration. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Strasbourg, France. 1988