ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico: una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico

Conceptual zone of "sophisticated" arithmetic ways of thinking and proto-algebraic ways of thinking: a contribution to the notion of the emergence zone of algebraic thinking

Rodolfo Vergel [*]
https://orcid.org/0000-0002-0925-3982
Luis Radford [**]
https://orcid.org/0000-0001-6062-0605
Pedro Javier Rojas [***]
https://orcid.org/0000-0002-9694-4609

Resumen

La investigación sobre formas de pensamiento algebraico no evade la discusión de las formas de pensamiento aritmético. Resultados de investigación muestran que la ausencia de indicios espaciales en el estudio de secuencias numéricas hace que los estudiantes limiten el proceso de generalización al trabajo sobre relaciones entre números. En este artículo, a partir de datos provenientes de una investigación doctoral y de un programa de extensión con profesores de matemáticas, se analiza la actividad semiótica de una estudiante y de una profesora de primaria, respectivamente. El análisis sugiere la presencia de una zona conceptual en la que formas sofisticadas de generalización aritmética estarían muy cerca de proto-formas de pensamiento algebraico, y, además, abre pistas para profundizar la reflexión epistemológica en aras de lograr una caracterización más inteligible de esta zona conceptual en el aprendizaje del álgebra.

Palabras clave: Analiticidad. Generalización aritmética. Generalización algebraica. Pensamiento algebraico temprano. Proto-analiticidad.

Resumo/Abstract

The investigation of forms of algebraic thinking does not evade the discussion on forms of arithmetical thinking. Previous studies show that the absence of spatial clues in the students' investigation of numerical sequences leads to the generalization of relationships between numbers, which implicitly facilitates the emergence of trial-error strategies that stand as an obstacle to the deductive thinking on which analyticity rests. Based on data from PhD research and an extension program with mathematics teachers, the semiotic activity of a student and a

[*] PhD en Educación Matemática de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC). Profesor de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC), Bogotá, Colombia. E-mail: rvergelc@udistrital.edu.co
[**] PhD en Didáctica de las Matemáticas. Profesor de Laurentian University (LU), Sudbury, Ontario, Canada. E-mail: lradford@laurentian.ca
[***] PhD en Educación Matemática de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UD). Profesor de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC), Bogotá, Colombia. E-mail: pedroedumat@udistrital.edu.co

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

primary school teacher, respectively, is analyzed. This analysis suggests the presence of a conceptual zone in which sophisticated forms of arithmetic generalization would be very close to proto-forms of algebraic thinking, and, furthermore, it opens a path to deepen the epistemological reflection in order to achieve a better understanding of this conceptual zone.

Palavras-chave/Keywords: Analiticity. Arithmetic generalization. Algebraic generalization. Early algebraic thinking. Proto-analyticity.

1. Introducción

La generalización puede considerarse como uno de los procesos relevantes en términos de producción del conocimiento. Vygotsky, por ejemplo, veía en los procesos de generalización el origen del concepto (VYGOTSKY, 1987) y enfatizaba el papel de la mediación semiótica en la conformación de conceptos cada vez más complejos. La naturaleza de la actividad matemática (en tanto que actividad semiótica) de los alumnos se constituye en una preocupación didáctica, principalmente, cuando nos vemos avocados, como maestros en la sala de clase, a tratar de comprender lo que ellos nos quieren comunicar al expresar semióticamente las generalizaciones que producen. En este sentido, tiene relevancia la idea de semiótica como una teoría que intenta explicar cómo los signos significan, es decir, una teoría de la comunicación y significación (ECO, 1988).

En la revisión de la literatura se reconoce el interés que viene ganando la investigación sobre álgebra temprana (ver, por ejemplo, AINLEY, 1999; CAI; KNUTH, 2011; KAPUT, 1998; KAPUT; BLANTON; MORENO, 2008; RADFORD, 2010, 2018; VERGEL, 2013, 2015; VERGEL; ROJAS, 2018), entre otros elementos, aquellos relacionados con aspectos epistemológicos y semióticos en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Particularmente la investigación sobre procesos de generalización de secuencias de patrones (RADFORD, 2010, 2013, 2018; VERGEL, 2013, 2015; VERGEL; GODINO; FONT; PANTANO, 2021) ha mostrado que, aun cuando las producciones de los estudiantes no contienen signos alfanuméricos del álgebra, su pensamiento puede ser genuinamente algebraico. Más aún, la investigación ha sugerido la necesidad de caracterizar más profundamente una zona conceptual en la que al parecer formas avanzadas de generalización aritmética (RADFORD, 2021b; VERGEL, 2015; VERGEL; GODINO; FONT; PANTANO, 2021) están muy cerca de proto-formas de pensamiento algebraico. En este artículo nos proponemos brindar pistas para profundizar la reflexión epistemológica en aras de lograr una caracterización más inteligible de esta zona conceptual en el aprendizaje del álgebra.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

2. Consideraciones teóricas

¿Qué es lo que caracteriza el álgebra escolar?

Esta pregunta ha sido objeto de polémicas dentro del campo de la investigación en educación matemática (AINLEY, 1999; CAI; KNUTH, 2011; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; KAPUT, 1998; KAPUT; BLANTON; MORENO, 2008; RADFORD, 2010; VERGEL, 2013, 2015) y ha conducido a la elaboración de ciertas concepciones. Mencionemos las siguientes:

(i) El simbolismo alfanumérico no es una condición para pensar algebraicamente (MASON; GRAHAM; PIMM; GOWAR, 1985);

(ii) El álgebra es una actividad de razonamiento que involucra la noción de indeterminación (KIERAN, 2007);

(iii) El álgebra es inherente a la aritmética (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007, p. 669);

(iv) La actividad simbólica es algebraica. Aquellas actividades en las cuales la generalización es expresada a través de otros sistemas simbólicos no son consideradas genuinamente algebraicas (son llamadas cuasi-algebraicas) (KAPUT et al., 2008);

(v) El álgebra se considera como un fundamento para la aritmética más que como una generalización de la misma (SUBRAMANIAM; BANERJEE, 2011, p. 87).

(vi) Una caracterización del pensamiento algebraico se constituye de tres componentes, estrechamente relacionadas (RADFORD, 2010): (a) el sentido de indeterminancia —objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetros— "como aquello opuesto a la determinancia numérica" (RADFORD, 2010, p. 39); b) la analiticidad, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos que comporta procesos de deducción, esto es, partir de ciertas premisas para llegar a ciertos resultados; y (c) la designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos.

Estas caracterizaciones sobre el álgebra escolar indudablemente están vinculadas con el saber algebraico. De hecho, no es posible hablar de saber algebraico al margen de la concepción que de ágebra se tenga. Para Radford el saber "es un sistema […] de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente" (RADFORD, 2017, p.101). El término sistema usado aquí quiere enfatizar la idea de movimiento, de proceso, algo dinámico y transformativo, susceptible de ser modificado. El saber se entiende como una capacidad latente incrustada en la cultura, una potencialidad (una posibilidad de hacer algo). Pero el origen de esa posibilidad no se encuentra en un mundo platónico, sino en la práctica política y social, es decir, aun cuando el saber es algo general, un arquetipo, formas generales de hacer algo, no constituye un mundo aparte, aislado de las acciones humanas (RADFORD, 2017).

Recordemos que para Platón, "el conocimiento de las ideas constituye un mundo aparte, separado del mundo sensible, porque su objeto son aquellas cosas inmutables como la belleza y la naturaleza de los dioses" (PLATÓN, 1983, p. 15). Para Radford "el saber es labor cristalizada" (RADFORD, 2017, p. 103), realizada a través de acciones humanas; el saber "es un sistema de acciones codificadas culturalmente" (RADFORD, 2017, p. 103). Por eso la idea de proceso, de transformación, cobra relevancia. Por ejemplo, en relación con la aritmética, "estos procesos podrían ser de reflexión, de expresión, y de acción que emergieron en Mesopotamia de actividades humanas específicas, tales como contar ganado o granos, o medir los campos" (RADFORD, 2017, p. 101). En esta dirección conceptual, tendríamos que entender el saber algebraico como una forma prototípica de acción y reflexión humana que se convierte en potencialidad cultural y, por tanto, sería pura posibilidad para los estudiantes, es decir, posibilidades que se les ofrecen para pensar, reflexionar, plantear y resolver problemas de cierta manera (RADFORD, 2017, p. 101).

2.1. Generalización algebraica y generalización aritmética de patrones

La generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (BEDNARZ; KIERAN; LEE, 1996; MASON; GRAHAM; PIMM; GOWAR, 1985; KIERAN, 2018; RADFORD, 2000; RIVERA, 2006; WARREN; COOPER, 2008; VERGEL, 2013, 2015), pues, entre otros aspectos, posibilita, en el trabajo de aula, aproximarse a situaciones de variación que se erigen como procesos necesarios para el desarrollo del pensamiento algebraico. De hecho, la propuesta de cambio curricular Álgebra Temprana sugiere avanzar en estos procesos de generalización a partir del trabajo con patrones (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; RADFORD, 2013; VERGEL, 2015). El trabajo sobre generalización de patrones sugiere precisar, al menos, dos clases de generalización: la algebraica y la aritmética. De acuerdo con Radford (2013), la generalización algebraica de patrones comporta:

1. Capturar o identificar una comunalidad o característica común, notada sobre algunos elementos de una secuencia. Esta toma de conciencia de una propiedad común se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$), con k entero positivo.

2. La generalización o aplicación de esta comunalidad a todos los términos de la secuencia que está en consideración, es decir, a los términos subsecuentes de la secuencia $(p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots)$, y

3. La capacidad de usar esa propiedad común a fin de *deducir una expresión directa*[1]

que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

Figura 1- Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales
Fuente: Radford (2013, p. 7)

La generalización de la "comunalidad" a todos los términos es la formación de lo que, en la terminología aristotélica, se llama un género, es decir, aquello en virtud de lo cual los términos se mantienen unidos (RADFORD, 2010). En otras palabras, la generalización algebraica de un modelo se basa en darse cuenta de una comunalidad local, que luego se generaliza a todos los términos de la sucesión y que sirve como una orden para construir expresiones de los elementos de la secuencia que siguen estando fuera del campo perceptivo. La identificación de la característica común o comunalidad requiere, según Radford (2013), hacer una escogencia entre determinaciones sensibles potenciales. “La generalización de la característica común (que puede ser una o varias) corresponde a lo que Peirce llama una abducción, esto es, algo que es solamente plausible” (RADFORD, 2013, p. 6). De acuerdo con Radford:

> Para que la generalización sea algebraica se requiere […] que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera analítica. Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término. Como vemos, el punto crucial corresponde al papel epistemológico que desempeña la característica común, C, extraída durante el trabajo efectuado en el terreno fenomenológico. C pasa de entidad plausible a principio asumido, esto es hipótesis, H. (RADFORD, 2013, p. 7)

[1] Énfasis en el original.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

En el proceso de generalización de patrones es posible identificar casos de producciones matemáticas de estudiantes que no presentan las características de la definición de generalización algebraica de patrones mencionada anteriormente. En este caso, estos estudiantes aún no han ingresado al reino del álgebra, en tanto que pueden estar operando aún en el ámbito de la aritmética al intentar generalizar algo, trabajo que podría estar anclado en el nivel de lo concreto. Como dice Vygotsky (1986, p. 133), "El marco del niño es puramente situacional, con la palabra atada a algo concreto, en tanto que el marco del adulto es conceptual". Si bien lo generalizado puede ser una comunalidad local, observada en algunas figuras, esto podría no garantizar la utilización de dicha información para proporcionar una expresión que permita calcular cualquier término de la secuencia, en otras palabras, "cuando la abducción es simplemente utilizada para pasar de un término a otro (como cuando los alumnos dicen que hay que añadir 2 cuadrados)" (RADFORD, 2013, p. 7). En este sentido estamos frente a una generalización aritmética (RADFORD, 2008). En el recorrido por la Figura 1 estaríamos predicando sólo hasta configurar la generalización de la característica común. En este caso, no hay deducción de una expresión directa que autorice calcular el número de elementos (v.g., cuadrados, círculos, números) en cualquier término de una secuencia de patrones. Radford sostiene que:

> En el caso del procedimiento por ensayo y error, los alumnos producen una fórmula. Pero la fórmula no es deducida. De hecho, la abducción concierne la fórmula misma. Los alumnos proponen una fórmula, que parece plausible, y la someten a un número finito de pruebas. Esta generalización (que corresponde a una de las formas de inducción) no es todavía algebraica. (RADFORD, 2013, p. 7)

El tipo de inducción al que refiere Radford se llama inducción ingenua (RADFORD, 2008). El adjetivo se usa para distinguir el tipo de inducción de otros tipos de inducción más sofisticados, por ejemplo, del proceso de inducción matemática o inducción completa, tal y como lo describe Fowler (1994, p. 253) "If P(1) and P(n)→P(n+1) for all n are both true (valid), then ∴ P(n) is true (valid) for all n".

La inducción ingenua se basa en diversas abducciones que están representadas en propuestas de fórmulas, las cuales parecen plausibles, y son sometidas a un número finito de pruebas. Aun cuando por este razonamiento se podría obtener una fórmula algebraica que corresponda al término general de la secuencia, esta regla es obtenida por inducción, es decir, a través de un procedimiento basado en un razonamiento probable y, como precisa Radford, "cuya conclusión va más allá de lo que está contenido en sus premisas" (RADFORD, 2008, p. 3), lo cual, por un lado, marca la diferencia con el proceso de inducción matemática descrito

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

por Fowler (1994), y, de otra parte, no sugiere un proceso de deducción (que contiene en su arquitectura la abducción analítica) que sí comporta la generalización algebraica de patrones.

El criterio acerca de la analiticidad, entonces, ofrece un principio operacional para distinguir el pensamiento aritmético del pensamiento algebraico. Es necesario precisar aquí que detrás de la operación con lo indeterminado se encuentra esta idea de analiticidad, entendida no sólo en términos del carácter operatorio de los objetos indeterminados a través de la aplicación de propiedades de las operaciones (conmutativa, asociativa, distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, etc.), sino también en términos de procesos de deducción, es decir, el trabajo a partir de algo, que es admitido o supuesto con certeza (DESCARTES, 1983), para llegar a una conclusión. Por eso sostenía Viète (1983) que lo que era distintivamente algebraico correspondía a la manera analítica en la cual pensamos cuando pensamos algebraicamente.

3. Aspectos metodológicos. Dos ejemplos de actividad semiótica

En esta sección presentamos la producción de una estudiante (Yaneth) participante de una investigación (VERGEL, 2015), que indagó, desde un análisis multimodal del pensamiento humano (ARZARELLO, 2006), las formas de pensamiento algebraico temprano en estudiantes de 4° y 5° de primaria (10-11 años), y la producción de una profesora de básica primaria participante de un programa de extensión (SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DISTRITAL, SED, en prensa) que pretendía cualificar las prácticas docentes en matemáticas en escuelas y colegios de Bogotá (Distrito Capital, Colombia). Los casos que se presentan no tienen la pretensión de llegar a una comprensión enteramente nueva del fenómeno bajo estudio (zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico), sino más bien a una comprensión más precisa de dicho fenómeno (STAKE, 1999).

3.1. Análisis y resultados del caso de Yaneth

En el contexto de la investigación de Vergel (2015), una de las producciones de los estudiantes estuvo precedida por el interés de indagar acerca de los medios semióticos de objetivación que podrían emerger durante su actividad matemática, cuando la tarea propuesta correspondía a una secuencia de patrones que no contaba con elementos geométricos-espaciales como en el caso de las secuencias figurales apoyadas por representación tabular (VERGEL, 2015). En términos generales, la tarea tiene un estatus epistemológico (VERGEL;

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

ROJAS, 2018) y en tal sentido juega un papel clave en la actividad matemática de los estudiantes.

En tanto que categoría didáctica, la tarea desarrolla, a través de su abordaje, pensamiento matemático. La idea de tarea se inspira en la máxima vygotskyana, según la cual, “la instrucción solamente es positiva cuando va más allá del desarrollo y, de esta manera, despierta y pone en funcionamiento toda una serie de funciones que, situadas en la zona de desarrollo próximo, se encuentran en proceso de maduración” (WERTSCH, 1988, p. 87). La tarea propuesta, denominada secuencia numérica con apoyo tabular, es la siguiente:

2	**5**	**8**
Término 1	Término 2	Término 3

Figura 2 - Secuencia numérica con apoyo tabular correspondiente a la tarea implementada
Fuente: Vergel (2015, p. 207)

Entre otros requerimientos, se solicitaba encontrar los términos 4 y 5 de la secuencia (que se genera a partir del término general $3n - 1$, con $n = 1,2,3, \ldots$). La profesora Johanna introduce este tipo de secuencias a partir del siguiente diálogo:

L1. Profesora Johanna: A partir de hoy no vamos a trabajar con las secuencias figurales, es decir ya no vamos a tener figuras ni círculos sino que vamos a empezar a trabajar con una secuencia numérica. ¿Qué significa eso? Que ahora ya no vamos a hablar de figura 1, figura 2, figura 3, etc., sino del término 1, término 2, término 3, (...) entonces miren el término 1 es (...) ¿quién?
L2. Estudiantes en coro: ¡2!
L3. Profesora Johanna: 2, el término 2 ¿quién es?
L4. Estudiantes en coro: ¡5!
L5. Profesora Johanna: El término 3 ¿quién es?
L6. Estudiantes en coro: ¡8!
L7. Profesora Johanna: Entonces con esa nueva secuencia vamos a tratar de hacer ejercicios como lo hicimos en las anteriores.
(Diálogo entre la profesora y estudiantes, VERGEL, 2015)

El diálogo pretende mostrar que el desarrollo de la clase de matemáticas que se venía adelantando estaba basado en secuencias figurales con apoyo tabular, y ahora los estudiantes se encuentran con otro tipo de secuencias que no cuentan con elementos geométrico-espaciales. La profesora Johanna inicia una actividad que intenta constituirse en un trabajo conjunto (RADFORD, 2014) y pretende resaltar la relación funcional entre el término y el número correspondiente, con el propósito de hacer emerger una toma de conciencia de dicha relación funcional en y entre los estudiantes. El trabajo conjunto es, precisamente, el que posibilita la toma de conciencia, pues ésta se encuentra estrechamente vinculada con la interacción entre los estudiantes, es decir, con la actividad. “La actividad del individuo constituye la substancia de su conciencia" (LEONTIEV, 1978, p. 96). Esta relación estrecha entre individuo, conciencia y actividad participa en el desarrollo o materialización del sujeto. En este sentido, hay que entender la conciencia en términos de relación —relación al mundo. Desde un punto de vista dialéctico-materialista, el sujeto concretamente histórico crea todo un conjunto de formas de conciencia. Sin embargo, como lo sostiene Kosik, "La conciencia no es reducida a las condiciones dadas; el centro de atención lo ocupa un proceso, en el cual el sujeto concreto produce y reproduce la realidad social, al mismo tiempo que es producido y reproducido históricamente en ella" (KOSIK, 1967, p. 139).

Después de un trabajo individual por parte de los estudiantes, la profesora Johanna indaga con varios grupos para identificar qué piensan sobre la secuencia y cómo, a través de sus producciones e intercambios verbales, han abordado la tarea. Este tipo de actividad es un aspecto clave para hacer aparecer el saber algebraico. Cuando se pone en movimiento, el saber algebraico empieza a transformarse, a materializarse. Es eso lo que se materializa (esto es, lo que se actualiza), mediatizado por la actividad, lo que llamamos conocimiento. En consecuencia, el conocimiento es producto de una mediación (la actividad). Este conocimiento, representado en las diversas producciones semióticas de los estudiantes, necesariamente queda supeditado a la naturaleza de la actividad. Desde una postura sociocultural aceptamos que las formas de pensamiento matemático son consustanciales a la naturaleza de la actividad, en otras palabras, la actividad imprime su marca en la actualización del saber (ILYENKOV, 1977). Dependiendo de la naturaleza de la actividad podríamos hacer emerger una toma de conciencia en los estudiantes acerca de una mirada algebraica de las secuencias numéricas. Es en este sentido que hemos constatado que la materialidad de la actividad (representada en las preguntas de la profesora, en las intervenciones de los estudiantes, así como en su producción matemática) es la que hace emerger el saber algebraico de cierta manera (RADFORD, 2018; VERGEL, 2015; VERGEL; ROJAS, 2018).

A continuación presentamos la producción de Yaneth (una estudiante participante de la investigación), como parte de la actividad, motivada por responder al número correspondiente al Término 15 de la secuencia (valor del número de término).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

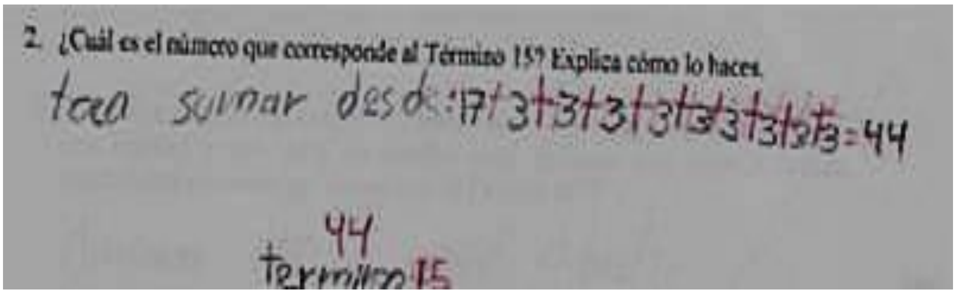

Figura 3 - Producción de Yaneth al requerimiento del ítem 2 de la tarea sobre secuencia numérica con apoyo tabular
2. ¿Cuál es el número que corresponde al Término 15? Explica cómo lo haces.
Toca sumar desde: 17+3+3+3+3+3+3+3+3+3=44
44
termino 15
Fuente: Vergel (2015, p. 207)

Yaneth instancia una forma aditiva para responder al número que corresponde al Término 15 (ítem 2, Figura 3). Su producción con respecto al ítem 2, "toca sumar desde: $17+3+3+3+3+3+3+3+3+3\ =\ 44$", inicialmente parece indicar que el número 9, obtenido por la diferencia entre los números 15 y 6, determina las veces que debe repetirse el número 3 en la suma, anclándose en 17 que corresponde al valor del Término 6. En el proceso de análisis de la secuencia, de cómo cambian los números correspondientes a los términos, esto es, en el proceso de identificación de ciertas determinaciones sensibles potenciales (RADFORD, 2013), Yaneth identifica una característica común (aumentar 3) y, a partir de su respuesta al ítem 2, es generalizada y aplicada para encontrar el número que corresponde al término solicitado (valor del número del Término 15). Sin embargo, esta generalización de la característica común no parece ser utilizada de manera analítica. El término analítico era considerado por el matemático griego Pappus como movimiento, "El análisis es el movimiento desde lo que es dado hacia lo que es buscado" (RIDEOUT, 2008, p. 62). La producción de Yaneth, si bien no parece usar como hipótesis o principio asumido la generalización de la característica común para deducir una expresión que le permita calcular el valor correspondiente a cualquier número de término, es decir, su generalización no parece ser de naturaleza algebraica, sí recurre a lo que, inicialmente, proponemos llamar una generalización aritmética sofisticada, que se podría describir de la siguiente manera:
Se parte de un término conocido (en este caso, $T_6 = 17$) y ella quiere hallar T_{15}, entonces procede haciendo lo que nosotros escribiríamos como $17 + (15 - 6) \times 3 = T_{15}$.

La producción de Yaneth, a esta altura del trabajo, sugiere que la resolución del problema no pasa por la distinción entre las variables en juego (número del término y valor

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

del número del término), sino por una especie de ajuste puntual en el que se determina cuántas veces se debe sumar 3. La variable número del término aparece pero no como variable independiente en el sentido algebraico, sino como punto de apoyo para resolver dicho problema. El punto crucial es el pasaje de $17+3+3+3+3+3+3+3+3+3$ a pensar el proceso en términos de variables conectadas $(17\ +\ (n-6)\times 3)$, es decir en términos de co-variación. Es ver la suma repetida como una multiplicación lo que hace aparecer la variable número del término de manera explícita, funcionando analíticamente. Esto es, justamente, el paso sutil que Yaneth no logra dar. Consideramos que hacerlo sería entrar en la analiticidad, aunque por otra vía. Aun cuando se está cerca de la analiticidad, afirmamos que todavía no se ha llegado allí.

La comunalidad "$+3$" es asumida por Yaneth, y convertida por tanto en hipótesis, sin lo cual ella no podía haber afirmado que hay que sumar 3 varias veces. Pero ese número de veces que hay que sumar no llega a concretarse en una relación entre variables, que es precisamente la fórmula, es decir el resultado de la deducción. En otras palabras, el multiplicador del 3 no llega a cobrar vida, no se le designa semióticamente. Consideramos que hay una analiticidad incipiente, en el sentido que se aproxima a un cálculo de términos que queda muy cerca de una expresión multiplicativa que casi hace aparecer la variable, pero no lo logra, es decir, no aparece explícitamente la deducción, pues lo que está faltando aquí es llegar a producir una fórmula, no necesariamente simbólica, en donde las variables llegan a la vida, emergen a la conciencia, a través de la designación semiótica.

El adjetivo "sofisticada" introducido quiere establecer la diferencia en relación con el proceso de generalización aritmética teorizado por Radford, para quien "la abducción [generalización de la característica común] es simplemente utilizada para pasar de un término a otro" (RADFORD, 2013, p. 7). La ausencia de elementos espaciales o geométricos (que sí comportan las secuencias figurales con o sin apoyo tabular) obliga a la realización de un trabajo de generalización, por parte de Yaneth, basado en relaciones entre números, es decir, sus procesos perceptivos, por un lado, quedan anclados, necesariamente, al contexto matemático que enfrenta (en este caso, la secuencia numérica con apoyo tabular) y, por otro lado, dichos procesos perceptivos se han desarrollado (esto es, transformado) a partir de la interacción social con los demás compañeros y la profesora. Por eso decía Luria que "Los procesos perceptivos también dependen de las formas socio-históricas de vida" (LURIA, 1987, p. 18). Como señala Radford (2013), en ciertos casos de producciones de estudiantes que cursan primeros grados de la primaria, sería posible generar una fórmula algebraica

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

tomando en consideración solamente la dimensión aritmética, al notar que se añade siempre 3 a un término para producir el siguiente, sin embargo, este camino resultaría difícil pues requiere un conteo sistemático que luego debe ser transformado en una multiplicación sofisticada: $17 + 9 \times 3$.

La forma de trabajar la secuencia fue aplicada más tarde a otros términos remotos o lejanos. Mientras la profesora Johanna discutía con otros grupos, Yaneth interactuaba con Luis Felipe discutiendo acerca del Término 100. Ellos continuaron anclándose en 17 que corresponde al valor del Término 6:

> *L1. Yaneth: Para término 100 pasamos los 6 [primeros] términos y … faltarían 94 que es lo que le falta a 6 para ser igual a … a 100.*
> *L2. Luis Felipe: (Interrumpiendo) sí … y como cada término aumenta de a 3 multiplicamos 94x3 que es igual a … igual a … 282 … a ver … a esto le agregamos…*
> *L3. Yaneth y Luis Felipe (en coro): el 17 [valor] del Término 6!*
> *L4. Yaneth: O sea hacemos así: 17 + 282 = 299.*
> (Diálogo entre estudiantes, VERGEL, 2015)

De hecho, Yaneth interactúa con otro grupo de compañeros y se atreve a exponer a este que con el método puede calcular otro término (refiriéndose al Término 1000) y dice: *"si queremos conseguir el número del [término] 1000 lo que hacemos es primero restar 6 del 1000 y … lo multiplicamos por 3 … bueno … este resultado le sumamos siempre el 17"*. Observamos que Yaneth ha logrado plantear una relación implícita, la cual nosotros escribiríamos como $17 + (1000 - 6) \times 3 = 2999$, y, más generalmente, como $T_n = T_a + (n - a) \times 3$, con $a = 6$. Consideramos que hay aquí una proto-analiticidad o analiticidad incipiente, en el sentido que se aproxima a un cálculo de términos. Observemos que la relación que nosotros escribimos como $T_n = T_a + (n - a) \times 3$, con $a = 6$, no es más que la fórmula correspondiente al término general de la secuencia numérica, el cual en términos funcionales es $T_n = 3n - 1$ (dado que $T_a = 3a - 1$).

Proponemos, en consecuencia, pensar en una zona conceptual en la cual se confunden formas sofisticadas de generalización aritmética y proto-formas de pensamiento algebraico (basadas en una proto-analiticidad). El caso de la profesora de primaria que exponemos a continuación pretende aportar más evidencias empíricas con el objetivo de substanciar la discusión en relación con la zona conceptual aludida.

3.2. Análisis y resultados del caso de la profesora de primaria

El programa de extensión o proyecto de fortalecimiento curricular en matemáticas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

aludido anteriormente con profesores de básica primaria (SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DISTRITAL, SED, en prensa) tenía por objetivo proponer orientaciones didácticas a los maestros de matemáticas de 150 instituciones educativas de la ciudad de Bogotá (Distrito Capital, Colombia) para el trabajo en sus clases de matemáticas. Más específicamente, el proyecto pretendía aportar elementos didácticos para promover el desarrollo del pensamiento lógico matemático en los estudiantes de todos los grados de la escolaridad. Uno de los aspectos que desarrolló el proyecto consistía en diseñar y validar una serie de tareas que justamente posibilitaran, en su abordaje por parte de los maestros y de los estudiantes, el desarrollo de pensamiento matemático.

Varias de las tareas propuestas en el proyecto de fortalecimiento curricular tenían que ver con secuencias de patrones (tanto numéricas como figurales, ambas con apoyo tabular) y se adelantaron algunas reflexiones con los maestros sobre la importancia didáctica del trabajo en el aula a partir de este tipo de secuencias. Durante el proyecto se planteó a los maestros la siguiente secuencia figural apoyada con representación tabular:

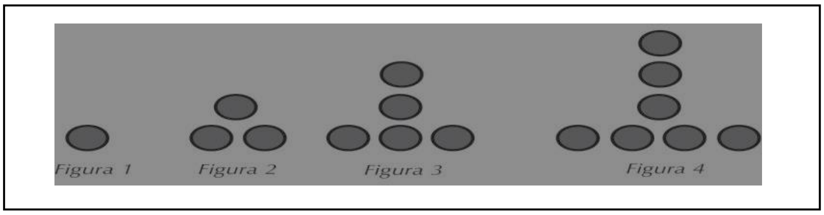

Figura 4 - Secuencia figural con apoyo tabular propuesta en el proyecto SED (en prensa)
Fuente: SED (en prensa)

En su actividad los profesores habían construido las figuras 5 y 6 que fueron solicitadas, y tuvieron la oportunidad de analizar la secuencia, poniendo especial atención a la articulación de las estructuras espacial y numérica en la idea de identificar las variables independiente y dependiente, así como proponer alguna relación entre ellas. Se esperaba que estas reflexiones didácticas sirvieran de insumo para el trabajo posterior que ellos desarrollarían con sus estudiantes a través de la implementación de las tareas, cuyas producciones debían ser analizadas a la luz de las ideas teóricas, provenientes de la didáctica de la matemática, que se discutían previamente en las sesiones de trabajo. Frente a la pregunta ¿cuántos círculos tiene la figura 100?, una profesora de básica primaria responde de la siguiente manera:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

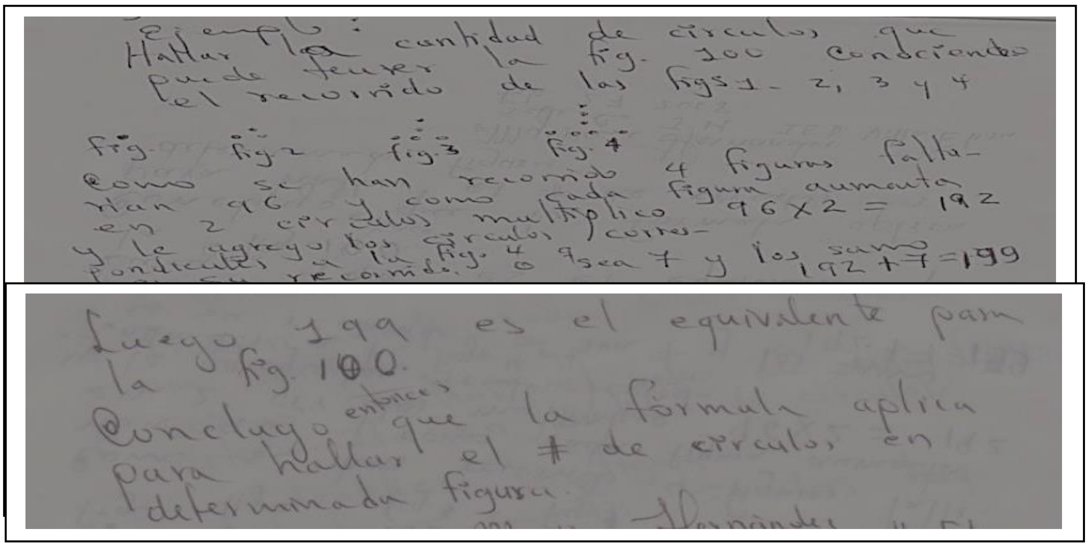
Ejemplo: Hallar la cantidad de circulos que puede tener la fig. 100 conociendo el recorrido de las figs 1- 2, 3 y 4
fig. fig 2 fig. 3 fig. 4
Como se han recorrido 4 figuras falta-rian 96 y como cada figura aumenta en 2 circulos multiplico 96×2 = 192 y le agrego los circulos corres-pondientes a la fig. 4 o sea 7 y los sumo 192+7=199
Luego 199 es el equivalente para la fig. 100
Concluyo entonces que la fórmula aplica para hallar el # de circulos en determinada figura

Figura 5 - Producción de una profesora de básica primaria que evidencia una generalización aritmética Sofisticada
Ejemplo:

Hallar la cantidad de circulos que puede tener la fig. 100 conociendo el recorrido de las figs 1, 2, 3 y 4
Como se han recorrido 4 figuras faltarían 96 y como cada figura aumenta en 2 circulos multiplico 96×2 = 192 y le agrego los círculos correspondientes a la fig. 4 o sea 7 y los sumo 192 + 7 = 199.
Luego 199 es el equivalente para la fig. 100
Concluyo entonces que la fórmula aplica para hallar el # de circulos en determinada figura.
Fuente: SED (en prensa)

Ejemplo: Hallar la cantidad de círculos que puede tener la fig. 100 conociendo el recorrido de las figs 1, 2, 3 y 4…. Como se han recorrido 4 figuras faltarían 96 y como cada figura aumenta en 2 círculos multiplico $96 \times 2 = 192$ y le agrego los círculos correspondientes a la figura 4 o sea 7 y los sumo $192 + 7 = 199$.

Es clave destacar el sorprendente parecido de la producción sofisticada de esta profesora con la producción de Yaneth analizada anteriormente. Recordemos que la estudiante aborda una secuencia numérica con apoyo tabular, mientras que la profesora trabaja sobre una secuencia figural con apoyo tabular. En su producción se observa que Yaneth se ancla en 17 que corresponde al valor del Término 6. Por su parte, en su respuesta se observa cómo la profesora se ancla en el número de círculos de la Figura 4 (7 círculos). Ella dice: "96 es lo que le hace falta a 4 para llegar a 100 y cada figura aumenta de a 2, entonces lo que hago es multiplicar 96×2 y a ese resultado le sumo 7 que son los círculos de la figura 4". El hecho de contar con índices perceptivos generalizables en las secuencias figurales propulsa una articulación de las estructuras espacial y numérica, articulación que viene a constituir un aspecto clave en el desarrollo del pensamiento algebraico (RADFORD, 2010, 2013, 2018; VERGEL, 2015; VERGEL; ROJAS, 2018).

No obstante, lo que está faltando aquí, al igual que en el caso de Yaneth, es que la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

profesora produzca una fórmula, no necesariamente simbólica, que es justamente el resultado de la deducción, en donde las variables lleguen a cobrar vida, para decirlo una vez más, emerjan a la conciencia, a través de la designación semiótica. La profesora presenta dificultades en la producción de la fórmula debido a que no ha logrado significar las variables que entran en juego ni tampoco su relación. Las investigaciones de Vygotsky muestran que la palabra cumple un rol fundamental en la totalidad de la conciencia y no en sus funciones aisladas, pues asumir palabras con un sentido específico contribuye a fijar una idea o concepto en la conciencia (VYGOTSKY, 2007). En el siguiente diálogo sostenido con la profesora alcanzamos a observar la dificultad para concretar la relación funcional entre las variables intervinientes materializada en una fórmula:

> *Investigador: ¿Es posible expresar una fórmula concreta que te permita calcular el número de círculos de la figura 500?*
> *Profesora de primaria: Me toca saber que hay 7 círculos en la figura 4. Si me dices figura 500 … yo hago una resta … de 500 quito 4 y me quedan … 496 [hace la operación en una hoja de papel]. Ahora, esos 496 los tengo que multiplicar por 2…*
> *Investigador: ¿Por qué debes multiplicar por 2?*
> *Profesora de primaria: Ah ya … porque las figuras aumentan en 2 … entonces lo que yo hago es multiplicar por 2 los 496 … y eso me da … 992 [hace la operación con lápiz y papel]. A este resultado le tengo que sumar los círculos de la figura 4 que es mi ayuda.*
> (Diálogo entre la profesora de primaria y el investigador, SED, en prensa)

La expresión semiótica, que nosotros escribiríamos como $T_n = T_a + (n - a) \times 2$, con $a = 4$, se concreta a partir del reconocimiento de las variables involucradas y de su relación de co-variación. Dado que $T_a = 2a - 1$, la expresión semiótica del término general está dada por $T_n = 2n - 1$. La producción de la profesora no se concreta en una fórmula, que es justamente el resultado de la deducción. Vygotsky plantea que la producción escrita no produce en modo alguno la historia del habla oral, “la semejanza de ambos procesos es más bien externamente sintomática que sustancial” (VYGOTSKY, 2007, p. 338). No es una simple traducción del habla oral a signos escritos. La profesora se ha anclado en el número de círculos de la figura 4 y sabe que luego debe proceder con una multiplicación (496×2). Además reconoce que estos dos resultados (número de círculos de la figura 4 y 992) debe sumarlos para llegar a responder por el número de círculos de la figura 500. No obstante, la expresión semiótica no aparece todavía, pues no ha reconocido el significado de las variables (número de figura y número de círculos de la figura) y la relación entre ellas no emerge aún a la conciencia, esto es, no hay una designación semiótica que exprese la relación de co-variación entre las variables. Es por esto que afirmamos, una vez más, que, al igual que en el caso de la producción de Yaneth, estamos frente a la presencia de una proto-analiticidad en

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

tanto que su producción se aproxima a un cálculo de términos que queda cerca de una expresión multiplicativa, la cual no se materializa como tampoco las variables.

4. Conclusiones y consideraciones finales

Desde las reflexiones epistemológicas y el análisis semiótico planteados en este trabajo, es posible, por tanto, pensar en lo que proponemos llamar una zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico, zona que estaría caracterizada fundamentalmente por el solapamiento o entrecruzamiento de estas dos formas de pensamiento matemático y que se puede inscribir en el marco de lo que se ha dado por llamar la zona de emergencia del pensamiento algebraico (RADFORD, 2010).

El análisis presentado en este trabajo brinda una pauta para pensar que es posible una evolución desde una generalización aritmética hacia una generalización aritmética sofisticada y, a su vez, hacia una proto-forma de pensamiento algebraico, categorías que han sido consideradas desde la TO. Justamente una de las contribuciones de Vygotsky (2001) fue posicionar la relación crucial que existe entre la instrucción y la maduración de las funciones psíquicas listas a madurar, pues con una instrucción conveniente (obuchenie) las funciones psicológicas, que están próximas a desarrollarse, podrán hacerlo. Desde la TO, tal y como sugiere Radford (2014, 2017), para remarcarlo una vez más, es el contenido o la materialidad de la actividad lo que hace aparecer el saber algebraico de cierta manera. En este sentido, los sujetos encuentran condiciones de posibilidad de su pensamiento en las formas de actividad históricamente desarrolladas de su sociedad (RADFORD, 2021a).

Los dos casos que hemos discutido en este trabajo evidencian que no hay designación semiótica de las variables en juego. El significado de la variable no es otra cosa que una generalización (VYGOTSKY, 2007). Por ejemplo, en el caso de Yaneth, el multiplicador del 3 no es designado semióticamente. Su producción no va más allá de una aproximación a un cálculo de términos que se encuentra próxima a una expresión multiplicativa. Esta proximidad casi hace aparecer la variable, pero en realidad no aparece, por lo que no hay todavía deducción explícita, es decir, no hay una fórmula. En el caso de la producción de la profesora de primaria, observamos que tampoco se produce una fórmula (no necesariamente simbólica), que sería el resultado de la deducción. En otros términos, las variables no llegan a cobrar vida, no emergen a la conciencia. De allí la importancia de la palabra para fijar la idea en la conciencia, para hacerla tangible. Como plantea Vygotsky, “El pensamiento no se refleja en la palabra, sino que se realiza en esta. Por esta razón, podría hablarse del proceso de formación

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

del pensamiento en la palabra” (VYGOTSKY, 2007, p. 438).

En las dos producciones analizadas observamos que la variable no llega al campo de la enunciación, esto es, la formulación (producto de la deducción) o generalización. El hecho de que la variable no sea enunciada, o no significada, sugiere una dificultad hacia la generalización. Por eso decía Vygotsky que “generalización y significado de la palabra son en esencia sinónimos” (VYGOTSKY, 2007, p. 426). El análisis semiótico de las producciones en los dos casos también sugiere que estamos frente a proto-formas de pensamiento algebraico, pues la variable tampoco se sitúa en el campo de la intuición, como es el caso de las generalizaciones algebraicas factuales, en las cuales la variable es intuida a través del movimiento de la actividad semiótica. En este tipo de generalización algebraica, como ha mostrado Radford, la designación semiótica se evidencia a partir de “una actividad multimodal en la que intervienen la percepción, los gestos, los símbolos matemáticos y el lenguaje natural” (RADFORD, 2013, p. 12).

Dado que la profesora elabora una multiplicación para encontrar la figura 100 de su secuencia y, por su parte, Yaneth elabora una suma, podríamos preguntarnos si la diferencia en sus respuestas tiene que ver con el hecho de que ellas dos tengan diferentes grados de conciencia. Esta cuestión merece un mayor análisis y aun cuando la profesora pudiera tener mayor experiencia en el trabajo com secuencias, como lo hemos señalado en el análisis, ella no logra concretar una fórmula debido a que no ha logrado significar las variables que entran en juego ni tampoco su relación, situación que también aparece en el caso de la producción de Yaneth.

En términos de desarrollar una mayor sensibilidad por parte de los profesores de matemáticas frente a los procesos de aprendizaje de los estudiantes, consideramos pertinente continuar auscultando este tipo de deducción incipiente o primitiva (proto-analiticidad) a través de reflexiones epistemológicas en el contexto de las generalizaciones observadas en las secuencias numéricas y figurales con apoyo tabular. Estas reflexiones deben tener en cuenta la idea de analiticidad, que caracteriza el pensamiento algebraico, y a su vez no desestimar las generalizaciones inductivas, las cuales parecen apoyar las generalizaciones de tipo aritmético. Más específicamente, proponemos investigar detenidamente la deducción, pues esta podría adquirir significados diferentes en la medida en que una [deducción] proviene de una abducción, como es el caso de las generalizaciones algebraicas, mientras que la otra [deducción] procede de una aserción no abductiva, como en el caso de las generalizaciones aritméticas.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

Reconocimiento

Este artículo profundiza el trabajo presentado en la XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática de 2019, titulado “Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico”.

Referencias bibliográficas

AINLEY, J. Doing algebra-type stuff: Emergent algebra in the primary school. *In:* O. ZASLAVSKY (Ed.). **Proceedings of the 23rd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Haifa: PME, 1999. p. 9-16.

ARZARELLO, F. Semiosis as a multimodal process. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, Número especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento matemático, p. 267- 299, 2006.

BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. **Approaches to Algebra: Perpectives for Research and Teaching**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.). **Early algebraization**. New York: Springer, 2011.

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. Early algebra and algebraic reasoning. *In:* F. LESTER (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Charlotte: Information Age Publishing, Inc. y NCTM, 2007. p. 669-705.

DESCARTES, R. **Discurso del método**. Reglas para la dirección de la mente. Barcelona: Ediciones Orbis, S.A., 1983.

ECO, U. **Signo**. Barcelona: Labor, 1988.

FOWLER, D. Could the Greeks have used mathematical induction? Did they use it? Critical remarks on an article by S. Unguru. **Physis**, v. 31, p. 253-265, 1994.

ILYENKOV, E. V. **Dialectical logic**. Moscow: Progress Publishers, 1977.

KAPUT, J. **Teaching and learning a new algebra with understanding**. Dartmouth: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1998.

KAPUT, J. J.; BLANTON, M.; MORENO, L. Algebra from a symbolization point of view. *In:* J. J. KAPUT; D.W. CARRAHER; M.L. BLANTON (Eds.). **Algebra in the early grades**. New York: Routledge, 2008. p. 19-55.

KIERAN, C. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. *In:* F. LESTER (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Charlotte: Information Age Publishing, Inc. y NCTM, 2007. p. 707-762.

KIERAN, C. (Ed.). **Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12- year-olds: The global**

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

evolution of an emerging field of research and practice. New York: Springer, 2018.

LEONTIEV, A. N. **Activity, consciousness, and personality**. Toronto: Prentice-Hall, 1978.

KOSIK, K. **Dialéctica de lo concreto**. Ciudad de México: Grijalbo, S.A., 1967.

LURIA, A.R. **Desarrollo histórico de los procesos cognitivos**. Madrid: Akal, 1987.

MASON, J.; GRAHAM, A.; PIMM, D.; GOWAR, N. **Routes to/ roots of algebra**. Milton Keynes, UK: Open University Press, 1985.

PLATÓN. **Diálogos** (M. J. Ribas, Trad.). Madrid: Sarpe, 1983.

RADFORD, L. Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 42, n. 3, p. 237-268, 2000.

RADFORD, L. Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, Germany, v. 40, p. 83-96, 2008.

RADFORD, L. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA**, Granada, v. 4, n. 2, p. 37-62, 2010.

RADFORD, L. En torno a tres problemas de la generalización. *En:* L. RICO; M. C. CAÑADAS; J. GUTIÉRREZ; M. MOLINA; I. SEGOVIA (Eds.). **Investigación en Didáctica de la Matemática.** Homenaje a Encarnación Castro. Granada: Comares, 2013. p. 3-12.

RADFORD, L. De la teoría de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, Pasto, v. 7, n. 2, p. 132-150, 2014.

RADFORD, L. Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. *En:* B. D'AMORE; L. RADFORD (Eds.). **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:** problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. Bogotá: Editorial UD, 2017. p. 97-114.

RADFORD, L. The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. *In:* C. KIERAN (Ed.). **Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12- year-olds:** The global evolution of an emerging field of research and practice. New York: Springer, 2018. p. 3-25.

RADFORD, L. Davydov's concept of the concept and its dialectical materialist background. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 106, p. 327-342, 2021a.

RADFORD, L. O ensino-aprendizagem da álgebra na teoria da objetivação. *In:* V. MORETTI; L. RADFORD (Eds.). **Pensamento algébrico nos anos iniciais:** Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural. São Paulo: Livraria da Física, 2021b. p. 171-195.

RIDEOUT, B. Pappus reborn. **Pappus of Alexandria and the changing face of analysis and synthesis in late antiquity**. 2008. 189. Disertación Master of Arts in History and Philosophy of Science (Thesis). University of Canterbury, Christchurch, 2008.

RIVERA, F. Sixth graders' ability to generalize patterns in algebra: Issues and insights. *In:* J. NOVOTNÁ; H. MORAOVÁ; M. KRÁTKÁ; N. STEHLÍKOVÁ (Eds.). **Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Prague: PME, 2006. p. 320.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DISTRITAL, SED, (en prensa). **Propuesta pedagógica en**

fortalecimiento curricular para el desarrollo de aprendizajes a lo largo de la vida con énfasis en el desarrollo del pensamiento lógico matemático. Bogotá: SED.

STAKE, R. E. **Investigación con estudio de casos**. Madrid: Morata, 1999.

SUBRAMANIAM, K.; BANERJEE, R. The Arithmetic-Algebra Connection: A Historical-Pedagogical Perspective. *In:* J. CAI; E. KNUTH (Eds.). **Early algebraization.** A global dialogue from multiple perspectives**.** Berlín: Springer-Verlag, 2011. p. 87-107.

VERGEL, R. Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años). **Revista Científica**, Edición especial, Bogotá, p. 225-231, 2013.

VERGEL, R. Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. **PNA**, Granada, v. 9, n. 3, p. 193-215, 2015.

VERGEL, R.; ROJAS, P. J. **Álgebra escolar y pensamiento algebraico:** aportes para el trabajo en el aula. Bogotá: Editorial UD, 2018.

VERGEL, R.; GODINO, J; FONT, V; PANTANO, O**.** Comparing the views of the theory of objectification and the onto semiotic approach on the school algebra nature and learning. **Mathematics Education Research Journal**. Sidney, Disponible en: https://doi.org/10.1007/s13394-021-00400-y, 2021.

VIÉTE, F. **The analytic art**. New York: Dover [work published 1591], 1983.

VYGOTSKY, L. S. **Thought and language**. Cambridge: The mit Press. [Obra original publicada póstumamente en ruso en 1934 y en inglés en 1962], 1986.

VYGOTSKY, L. S. **Collected works** (Vol. 1). New York: Plenum, 1987.

VYGOTSKY, L. S. **Obras escogidas** (Vol. 2). Madrid: Visor, 2001.

VYGOTSKY, L. **Pensamiento y habla** (A. Ariel González, Trad.). Buenos Aires: Ediciones Colihue. [Original publicado en 1934], 2007.

WARREN, E.; COOPER, T. Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 67, n. 2, p. 171-185, 2008.

WERTSCH, J. **Vygotsky y la formación social de la mente.** Barcelona: Paidós, 1988.