RELIME

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Número Especial

# Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático

# Semiotics, Culture and Mathematical Thinking

# Sémiotique, Culture et Pensée Mathématique

Número Especial, 2006

Editores Invitados:

Luis Radford
Bruno D'Amore

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Número Especial, 2006

RELIME

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

# Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático
# Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking
# Sémiotique, Culture et Pensée Mathématique

Editores Invitados:

Luis Radford
Bruno D'Amore

Publicación Oficial de Investigación del
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

**Portada:** «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

**Clame.** Consejo Directivo: *Presidente:* Gustavo Martínez (presidencia@clame.org.mx) – México; *Secretario:* Germán Beitía (secretario@clame.org.mx) – Panamá; *Tesorero:* Joaquín Padovani (tesorero@clame.org.mx) – Puerto Rico; *Vocal Norteamérica:* Gisela Montiel (vocal_norteamerica@clame.org.mx) - México; *Vocal Caribe:* Juan Raúl Delgado (vocal_caribe@clame.org.mx) – Cuba; *Vocal Sudamérica:* Cecilia Crespo (vocal_sudamerica@clame.org.mx) – Argentina.


*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Número especial, 2006. Tiraje 2000 ejemplares. Para cualquier contribución o mayor información, favor de dirigirse a la dirección electrónica: relime@clame.org.mx, o consulte la página http://www.clame.org.mx. Relime está disponible en los siguientes índices: Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica:http://www.conacyt.mx/dac/revistas/revistas_catalogo2004.html; Índice de Revistas Latinoamericanas en Ciencia (Periódica): http://www.dgbiblio.unam.mx/periodica.html; Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal (Latindex): http://www.latindex.unam.mx; Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (Iresie): http://www.unam.mx/cesu/iresie/; Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe (Red ALyC): http://www.redalyc.com/; EBSCO Information Services: http://www.ebsco.com/home/; IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences: http://www.gale.com/; ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: http://www.fizkarlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdmp1.html; Dialnet: http://dialnet.unirioja.es/ ;Informe Académico: www.galeiberoamerica.com

# Contenido

# Editorial

Con gran placer presentamos nuestro primer número especial de Relime que versa sobre una temática de actualidad e importancia para la investigación en matemática educativa: “Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático”. Esta iniciativa ha sido posible gracias al grado de consolidación actual de nuestra revista y a la participación entusiasta y profesional de nuestros colegas Luis Radford y Bruno D’Amore quienes son nuestros editores invitados para este numero especial y a quienes les agradecemos su conocimiento, tiempo y trabajo para el logro de la empresa.

Todas las colaboraciones de este numero siguieron el proceso de revisión y arbitraje estricto usual en Relime y se presentan escritos en castellano, inglés y francés como un reflejo de la pluralidad y contribución de las diversas escuelas de pensamiento hacia la temática que convoca a los diversos especialistas de reconocimiento internacionall. Esta experiencia sin duda enriquecerá a nuestra comunidad, por lo que esperamos continuar con la edición de números especiales de Relime. Para que eso sea posible, invitamos a nuestros colegas a enviar sus propuestas.

Reiteramos las consideraciones de origen que guían la política editorial de Relime: nuestro objetivo es el de promover y fomentar la escritura de artículos de investigación de alta calidad en nuestra disciplina, como un paso necesario para la construcción de la escuela latinoamericana de matemática educativa. Como siempre, expresamos nuestro reconocimiento a quienes nos acompañan en esta empresa: lectores, autores, árbitros y equipo técnico. A todos los colegas que cultivan nuestra disciplina les extendemos nuestra cordial invitación para que remitan sus colaboraciones a Relime. ■

Rosa María Farfán
Directora de Relime

# Introducción

# Semiótica y Educación Matemática

Luis Radford [1]

El creciente interés suscitado por la semiótica en el campo de la educación matemática en los últimos años se debe nos parece a razones de diferente índole.

Por un lado, ha habido una toma de conciencia progresiva del hecho de que, dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, esencialmente, una actividad simbólica (D'Amore, 2001; Duval, 1998; Godino y Batanero, 1999; Otte, 2003; Radford, 2004; Steinbring, 2005).

Por otro lado, el interés que suscitó en los años 1990 la comprensión de la comunicación en el salón de clase puso en evidencia la importancia que tiene, tanto para el investigador como para el maestro, comprender la naturaleza del discurso matemático (Cobb, Yackel, y McClain, 2000; Steinbring, Bartolini Bussi, y Sierpinska, 1998). La semiótica, con su arsenal de métodos y conceptos, aparece como teoría apropiada para intentar dar cuenta de la complejidad discursiva.

Otra razón parece ser el uso cada vez mayor de artefactos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Arzarello, 2004; Borba y Villareal, 2006; Guzmán y Kieran, 2002; Kaput y Hegedus, 2004; Kieran y Saldanha, 2005). La semiótica, de nuevo, parece ofrecer conceptos capaces de ayudar al didáctico en su tarea de entender el papel cognitivo que desempeñan los artefactos.

Mencionemos, por último, el hecho de que los artefactos y los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación que hacen a la semiótica un campo muy bien situado para entender las relaciones entre los signos a través de los cuales piensan los individuos y el contexto cultural (Radford, en prensa-1).

La semiótica se presenta con un amplio y ambicioso espectro de aplicaciones. Esto no debe, sin embargo, dar la impresión de que la semiótica es una teoría nueva, unificada por una serie de principios comunes. Hay, por lo menos, tres tradiciones semióticas claramente diferenciadas. (1) La tradición Saussureana, iniciada por el suizo Ferdinand de Saussure (1857-1913) en una serie de cursos dictados entre 1907 y 1911, tradición que emplea el término *semiología*; (2) la tradición Peirceana, iniciada por el estadounidense Charles Sanders Peirce (1839-1914) quien acuñó el término semiótica; (3); la Vygotskiana, iniciada por el psicólogo ruso Lev S. Vygotski (1896-1934). Cada una de esas tradiciones emergió y fue desarrollada dentro de problemáticas precisas y diferentes.

[1] École des sciences de l'éducation. Université Laurentienne, Ontario, Canada.

## La tradición Saussureana

El problema principal para Saussure era el de la comprensión de la lengua, que él distinguía del lenguaje y de la palabra, una distinción que reposa en la oposición entre lo social y lo subjetivo. Para Saussure, la palabra es de orden subjetivo, mientras que la lengua es de orden social. "La lengua", decía Saussure, "es un sistema de signos que expresan ideas, comparable a la escritura, al alfabeto de los sordomudos, a los ritos simbólicos, a las formas de cortesía, a las señales militares, etc. etc." (Saussure, 1995, p. 33)[2]. Para Saussure, la lengua no solamente se asemeja a esos sistemas de signos, sino que es el más importante de ellos. Fue en este contexto que Saussure propuso una nueva ciencia, que englobaría la lingüística y cuyo objetivo sería el estudio general de los signos:

> Podemos concebir, pues, *una ciencia que estudie la vida de los signos en el seno de la vida social*; ésta sería parte de la psicología social y, por consiguiente, de la psicología general; la llamaremos *semiología* (del griego *semeîon*, "signo"). Ella nos enseñará en qué consisten los signos (y) cuáles son las leyes que los rigen. (Saussure,– *op. cit*. p. 33; énfasis en el original).

Para Saussure, los signos no son simples marcas que representan cosas en el mundo. Esta idea, dice Saussure, reduce el papel de los signos a una mera nomenclatura. El signo, Saussure sugiere, es la unión indisociable de dos elementos de naturaleza psíquica: el concepto (*signifié*, significado) y la imagen acústica asociada (*signifiant*, significante). El lingüista suizo nos invita a imaginar a alguien que nos habla en una lengua desconocida: "Cuando escuchamos una lengua desconocida, estamos en la imposibilidad de decir cómo los sonidos que siguen deben ser analizados" (op. cit. p. 145). Lo que aparece ante nosotros es una cadena de sonidos sin significados. "Pero cuando sabemos qué sentido y qué papel hay que atribuir a cada parte de la cadena, entonces vemos esas partes desprenderse de las otras y esa cinta (auditiva) amorfa dividirse en fragmentos" o signos con pleno sentido (*op. cit*. p. 145).

Como lo sugiere este ejemplo, los signos significan en la medida en que son miembros de un sistema. Esto es, el signo tiene significado cuando está relacionado con otros signos. Es gracias a este sistema que el signo es signo. Saussure ofrece la analogía con el juego de ajedrez. El caballo, por ejemplo, no representa nada, en tanto que pieza material: "En su materialidad pura, fuera de su casilla y de las otras condiciones del juego, el caballo no representa nada para el jugador" (op. cit. p. 153). Esta pieza material no se convierte en elemento real y concreto, sino hasta cuando reviste el valor que le otorgan las reglas del juego. Lo mismo ocurre con los signos.

En la aproximación estructuralista de Saussure, la manera de significar de los signos reposa en su oposición diferencial. Esta idea fue continuada, entre otros, por (Hjelmslev, 1969) y luego por (Eco, 1976).

2 Excepto en los casos de obras mencionadas en español, en la lista de referencias, las traducciones al español son nuestras.

## La tradición Peirceana

Charles Sanders Peirce, matemático dedicado a la lógica, concibió la semiótica como la "doctrina formal de los signos". La orientación de su pragmaticismo (diferente de simple practicalismo como algunos lo han interpretado) no fue la investigación de cómo los signos significan en el seno de la vida social, como fue el caso de Saussure, sino la manera en que un individuo genérico utiliza signos para formar nuevas ideas y nuevos conceptos para alcanzar la verdad. Su teoría de pragmaticismo (es decir, la lógica de abducción) es la base de su semiótica. Por esa razón, la semiótica Peirceana se mueve cerca de las esferas de la lógica, sin reducirse solamente a ésta.

En tanto que buen discípulo de Kant, Peirce había notado, contra las ideas de los racionalistas de la antigüedad y del siglo XVII, que el pensamiento humano no puede ser comprendido a la luz de la teoría de la inferencia o de la lógica formal. Como Kant, Peirce se propuso modificar las categorías aristotélicas y abandonó, como lo haría Piaget unos años más tarde, el apriorismo Kantiano. Para ello, Peirce adoptó una postura ontológica alineada con el Realismo escolástico, y elaboró una fenomenología en la cual la manera de conocer pasa por tres experiencias distintas (*Firstness*, *Secondness* and *Thirdness*).

Peirce definió el signo como algo que, para alguien, toma lugar de otra cosa (el objeto del signo), no en todos los aspectos de esta cosa, sino solamente de acuerdo con cierta forma o capacidad (ver CP 2.228[3]). En efecto, según Peirce, el objeto (*Secondness*) del signo es aprehendido según cierta cualidad (*Firstnees*) de manera tal que un nuevo signo es producido: el *intepretant* (interpretante) (*Thirdness*). Siguiendo el mismo proceso, este interpretante puede convertirse en objeto de otro nuevo signo y así indefinidamente (ver CP 1.339).

Este proceso que va de signo en signo o semiosis ilimitada, como la llaman Eco y otros peirceanos, constituye la esencia del pensamiento, pues como dice Peirce en otras partes, "todo pensamiento es un signo" (CP 1.538, 2.253, 5.314, 5.470). El problema es, pues, para Peirce, encontrar el método "correcto" para pensar:

> si podemos encontrar el método para pensar y si podemos seguirlo el método correcto de transformación de signos entonces la verdad puede ser ni más ni menos que el último resultado al cual el método del seguimiento de signos nos conduciría ultimadamente" (Peirce, CP 5.553).

El éxito de la empresa de Peirce reposa, sin embargo, en la adopción de dos hipótesis fundamentales, cuyo precio puede parecer muy elevado: primero, la hipótesis de una adecuación entre el mundo real y el mundo de las ideas, esto es entre *ordo rerum* y *ordo idearum*; segundo, la confianza en el razonamiento científico como modelo metodológico de raciocinio (Radford, 2006).

Respecto a la primera hipótesis, señalemos, brevemente, que Peirce supone que, desde el punto de vista ontológico, la naturaleza es gobernada por

3 Siguiendo la tradición, en adelante indicaremos los Collected Papers de Peirce (1931-1958) con las siglas CP. El número 2.228 significa el libro 2, entrada 228. En general, CP a.b significa los Collected Papers, libro a, entrada b).

leyes. Además, desde el punto de vista epistemológico, Peirce supone que esta naturaleza es *inteligible*.

Respecto a la segunda hipótesis, la mencionada adecuación entre *ordo rerum* y *ordo idearum*, sostenida por el extremo realismo escolástico Peirceano (ver Parker, 1994, p. 67), es suplementada por una idea racionalista de verdad. El resultado es que la actividad cognitiva del individuo encuentra un aliado incondicional en la naturaleza. Los signos de la naturaleza y el pensamiento humano caminan juntos, tomados de la mano. Es por eso que Peirce puede decir con confianza que "El solo inmediato propósito del pensamiento es volver las cosas inteligibles" (CP 1.405). Es gracias a esta idea racionalista de verdad que funciona como idea reguladora que, según Peirce, podemos estar seguros contra la opinión de Kant y el constructivismo al que el éste dio origen de que en nuestras disquisiciones no estamos corriendo detrás de fantasmas, objetos nominales o simples invenciones subjetivas o ideas "viables" como ha dicho Glaserfeld (1995): al contrario, el "correcto" uso de signos, regulados por esa verdad trascendental que se expresa en los signos de la naturaleza y que nos revela el método científico, asegura el final feliz de la semiosis ilimitada (Nesher, 1997; Radford, en prensa-2).

No obstante el precio a pagar por las hipótesis anteriores, la semiótica de Peirce ofrece ricas topologías de signos que pueden ser muy útiles en la comprensión de fenómenos didácticos (Otte, en prensa; Presmeg, 2005; Sáenz-Ludlow, 2003, 2004, 2006). Una de las vías actualmente exploradas dentro de la tradición peirceana es la del razonamiento diagramático (Dörfler, 2005; Hoffmann, 2002, 2005; Stjernfelt, 2000).

## La tradición Vygotskiana [4]

La semiótica Vygostkiana fue elaborada como respuesta al problema del estudio del pensamiento y de su desarrollo. Amparado en la corriente Marxista de su época, Vygotski propuso una teoría del desarrollo cognitivo en la cual los conceptos de labor y de herramientas desempeñan un papel primordial. En una conferencia dictada en 1930 en la Academia de la educación comunista, Vygotski llamó la atención sobre el hecho de que el comportamiento humano está inmerso en una serie de dispositivos artificiales (artefactos). Una de las novedades de la teoría vygotskiana fue la de mostrar que en vez de ser simples ayudas, estos dispositivos alteran el curso del desarrollo natural de los procesos psíquicos. Dichos dispositivos se convierten en *instrumentos psicológicos* y sirven de base a la aparición de las funciones psíquicas superiores, funciones que distinguen el reino humano del reino animal. Refiriéndose a los instrumentos psicológicos, dice Vygotski:

> Los instrumentos psicológicos son creaciones artificiales; estructuralmente son dispositivos sociales y no orgánicos o individuales; están dirigidos al dominio de los procesos propios o ajenos, lo mismo que la técnica lo está al dominio de los procesos de la naturaleza. (Vygotski, 1991, p. 65)

Para Vygotski y la escuela histórico-cultural de psicología, el problema del desarrollo intelectual es planteado como problema

4 La transliteración del nombre de Vygotski se escribe diferentemente, según el idioma empleado. En inglés la traducción es Vygotsky.

cultural. De acuerdo con la “ley genética de desarrollo cultural” que propone Vygotski,

> En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a nivel social, y más tarde, a nivel individual; primero *entre* personas (*interpsicológicamente*), y después, en el *interior* del propio niño (*intrapsicológicamente*). Esto puede aplicarse igualmente a la atención voluntaria, a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Todas las funciones superiores se originan como relaciones entre seres humanos. (Vygotski, 1988, p. 94; cursivas en el original).

El signo desempeña una función mediadora entre el individuo y su contexto, y permite, además, ese pasaje entre lo interpsicológico y lo intrapsicológico que asegura la reconstrucción interna de la acción, esto es, de su *internalización*. Vygotski da como ejemplo la aparición del gesto:

> Al principio, este ademán no es más que un intento fallido de alcanzar algo, un movimiento dirigido hacia cierto objeto que designa la actividad futura… Cuando acude la madre en ayuda del pequeño y se da cuenta de que su movimiento está indicando algo más, la situación cambia radicalmente. El hecho de señalar se convierte en un gesto para los demás… Únicamente más tarde, cuando el niño es capaz de relacionar su fallido movimiento de agarrar con la situación objetiva como un todo, comienza a interpretar dicho movimiento como acto de señalar… Como consecuencia de este cambio, el movimiento mismo queda simplificado, y lo que de él resulta es la forma de señalar que llamamos gesto. (Vygotski, 1988, pp. 92-93)

La descripción que hace Vygotski de la aparición del gesto indicativo pone en evidencia el papel de lo social en la génesis de la significación. El gesto está primero dirigido hacia alguien (plano intersubjectivo) y se convierte en gesto para sí mismo (plano intrasubjetivo) solamente más tarde, en ese proceso de internalización que es mediado por el cuerpo mismo. Más tarde, la actividad gestual se vuelve más compleja con la aparición de otras formas indicativas, como las lingüísticas (por ejemplo con las expresiones “aquí” “allí”, etc.) en las que el signo se mueve en una capa de significación auditiva o escrita, dando lugar a una deixis compleja (ver Bühler, 1979; Radford, 2002).

A pesar de una orientación literaria, mostrada, sobre todo, en los primeros trabajos, como *La psicología del arte* (Vygotsky, 1971), publicado inicialmente en 1925, Vygotski, como Peirce, adoptó una ontología realista y, como éste, vio en la ciencia y la tecnología la forma por excelencia de alcance del conocimiento. No obstante esto, la idea del signo como objeto cognitivo, inspirado de la idea de herramienta laboral, es, sin duda, una idea interesante. Con ella, Vygotski rompió el esquema tradicional del idealismo y del racionalismo. El signo no es simplemente pieza diferencial de un sistema de estructuras (Saussure) ni mero medio de pensamiento y de formación de ideas (Peirce), sino, sobre todo, medio de *transformación* de las funciones psíquicas del individuo.

La analogía del signo como herramienta tiene, sin embargo, sus limitaciones. Así, van der Veer y Valsiner han sugerido que dicha concepción del signo da a la psicología de Vygotski un aspecto demasiado técnico y la convierte en una especie de "psicotecnología" (van der Veer y Valsiner, 1991, p. 221). Vygotski parece haberse dado cuenta de esta limitación. En una serie de notas tomadas por A. N. Leontiev durante un seminario interno llevado a cabo en 1933 al que participaron, como de costumbre, los colaboradores cercanos de Vygotski y algunos psicólogos jóvenes que trabajaban bajo su dirección, seminario en el que Vygotski expuso ciertas tesis sobre el problema de la conciencia, leemos:

> En los primeros trabajos ignorábamos que el significado es propio del signo (...) Partíamos del principio de la constancia del significado (…) Si antes nuestra tarea era mostrar lo común entre el "nudo" y la memoria lógica, ahora consiste en mostrar la diferencia que existe entre ellos. (cf. Vygotski, 1991, p. 121).

En las notas tomadas en la misma reunión durante la reacción de Vygotski al reporte preparado por otro de sus colaboradores, A. R. Luria, leemos: "Para nosotros lo principal es (ahora) el movimiento del sentido." (cf. Vygotski, 1991, p. 125).

Es claro, pues, que al final de su vida, Vygotski vio la necesidad de continuar la reflexión sobre los signos del lado de la significación. Vygotski vio en el estudio de los significados verbales la pauta para ampliar dicho problema. Más tarde, Leontiev sugirió que la evolución de los significados (verbales y otros) debe ser vista no solamente a la luz de la interacción humana, sino bajo el prisma de las relaciones siempre en movimiento de los individuos y de la naturaleza, bajo la emergencia y desarrollo del trabajo y de las relaciones sociales (van der Veer, 1996, p. 259), ideas que desembocaron el su *Teoría de la Actividad* (Leontiev, 1993).

Entre los trabajos de investigación conducidos dentro del paradigma vygotskiano, se pueden mencionar los de Bartolini Bussi y Mariotti (1999), Bartolini Bussi y Maschietto (2006), Berger (2005), Boero, Pedemonte y Robotti (1997).

## Piaget y la semiótica

En sus trabajos sobre el papel del símbolo en el desarrollo cognitivo, Piaget introdujo el concepto de *función semiótica*, tratando de dar respuesta a la pregunta siguiente: ¿es posible que el pensamiento sea un resultado del lenguaje? [5].

Para Piaget, que solía plantear las preguntas en términos lógicos, el lenguaje era una condición necesaria, pero no suficiente del pensamiento. Un tanto irritado por la posición del positivismo de la primera parte del siglo XX, que reducía todo al lenguaje, Piaget sostuvo que: "El lenguaje puede constituir una condición necesaria de la terminación de las operaciones lógico-matemáticas sin ser, sin embargo, una condición suficiente de su formación." (Piaget, 1978 p. 130). Para

---

5 La vigencia contemporánea de la pregunta de Piaget aparece claramente en una crónica periodística reciente sobre el trabajo antropológico realizado sobre los Pirahã, una pequeña tribu brasileña con un lenguaje sin cláusulas subordinadas. Una de las preguntas que los lingüistas se están haciendo es si es posible tener pensamientos para los cuales no hay palabras en la lengua (ver Bredow, 2006). Estoy en deuda con Heinz Steinbring por llamar mi atención sobre este artículo.

Piaget, era importante resolver el problema genético que consiste en saber si las raíces de las operaciones lógico-matemáticas se encuentran en el campo mismo del lenguaje o, si por el contrario, son anteriores a éste. La pregunta fundamental era saber "si la formación del pensamiento está relacionada con la adquisición del lenguaje como tal o con la función simbólica en general" (*op. cit.*, p. 131). En resumen, según Piaget, había que investigar

> si la transmisión verbal es suficiente para constituir en el espíritu del niño estructuras operatorias o si esta transmisión es eficaz solamente a condición de ser asimilada gracias a estructuras de naturaleza más profunda (coordinación de acciones), no transmitidas por el lenguaje. (Piaget, *op. cit.* p. 131)

Dentro de esta problemática, uno de los resultados más relevantes alcanzados por Piaget fue la puesta en evidencia de una *inteligencia práctica* previa a la aparición del lenguaje en el niño. "Conviene insistir", decía Piaget, aludiendo a los resultados experimentales de la escuela de Ginebra, "en el hecho de que las operaciones, en cuanto resultado de la interiorización de las acciones y de sus coordinaciones, permanecen durante mucho tiempo relativamente independientes del lenguaje." (*op. cit*. p. 134). En su libro *Epistemología Genética*, Piaget regresa sobre el mismo problema y arguye que

> El lenguaje no es ciertamente el medio exclusivo de representación. Éste es solamente un aspecto de la función muy general que Head ha llamado la función simbólica. Yo prefiero utilizar el término lingüístico: función semiótica. Esta función consiste en la habilidad de representar algo a través de un signo o un símbolo o cualquier objeto (Piaget 1970, p. 45)

En su libro "*La formation du symbole chez l'enfant*" [La formación del símbolo en el niño] Piaget sostuvo que el símbolo resulta de un esquematismo no simbólico. Al principio del libro Piaget dice: "Vamos a intentar mostrar cómo la [emergencia del] símbolo es preparada por el esquematismo no simbólico" (Piaget 1968, p. 8), esto es, un esquematismo armado de significantes sensorimotores "índices" o "señales", a los cuales hace falta todavía la independencia respecto al objeto significado.

Según Piaget, la función semiótica empieza precisamente cuando hay una diferenciación entre significado y significante, diferenciación que provee al significado (*signifié*) con una permanencia espacio-temporal y abre la posibilidad de que un mismo significante pueda referir a varios significados. Para Piaget, la función semiótica incluye la imitación diferida, el juego simbólico, la imagen mental, los gestos y el lenguaje natural (Piaget en: Piattelli-Palmarini, 1982, p. 58).

La semiótica Piagetiana, que se enmarca dentro de la tradición Saussureana mencionada anteriormente, reposa en la idea de una continuidad entre los significantes sensorimotores y la emergencia de los primeros símbolos en los niños. En otras palabras, la semiótica Piagetiana se apoya en un postulado según el cual la inteligencia sensorimotriz se prolonga, a través del signo, en representación conceptual (Piaget 1968, pp. 68-69).

La solución que propuso Piaget al acertijo del desarrollo de la inteligencia fue, como en el caso de Peirce, un intento serio de esquivar el apriorismo Kantiano. En el fondo, la solución Piagetiana es una tematización sofisticada del compromiso que hace la filosofía del Siglo de las Luces entre el racionalismo y el empirismo. Piaget retoma la posición epistemológica que Kant otorga al individuo en el acto del conocimiento y la lleva a sus máximas conclusiones. En lugar de contentarse con la deducción Kantiana de las categorías escolásticas, deducción que limitaba al individuo a un uso racionalista de la facultad de entendimiento, Piaget propuso un proceso genético que se eleva de lo sensual a lo conceptual a través del efecto de una razón que se reconstruye, pacientemente, en cada individuo, independiente de su ubicación histórica y geográfica. La razón renace y se reconstruye en el curso de la actividad del individuo y llega, inevitablemente, atraída como el metal por el imán, a ese punto culminante que es la Razón Occidental. En definitiva, la epistemología genética de Piaget es una de las expresiones más modernas de la sensibilidad intelectual heredada del Siglo de las Luces.

## Semiótica y Educación

Los trabajos incluidos en este número especial de la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa prolongan el interés por la semiótica mostrado previamente en nuestro campo de investigación por otros colegas. Varios han sido, en efecto, los educadores y los psicólogos que empezaron a mostrar o sugerir hace varios años el potencial de la semiótica en las reflexiones didácticas. Así, la importancia de los signos matemáticos fue puesta en evidencia por Freudenthal al final de los años 1960 (Freudenthal, 1968). En los años 1980, Filloy y Rojano (1984) mostraron el potencial del análisis semiótico en la comprensión del desarrollo del lenguaje algebraico. Más tarde, Laborde, Puig y Nunes (1996), entre otros, discutieron ciertos aspectos ligados al lenguaje. Siguiendo otro camino, Jean-Blaise Grize, un colaborador de Piaget, había también llamado la atención sobre los problemas del lenguaje en el pensamiento lógico (Grize, 1996).

Los trabajos que constituyen este número especial han sido agrupados en dos categorías. En la primera, el lector encontrará artículos de corte teórico.

En el primer artículo, Michael Otte aborda el tema de la demostración matemática y argumenta que es inútil buscar el sentido de los objetos matemáticos en una especie de estrato fundamental conceptual. Tomando una actitud *anti-mentalista*, que es compartida por varios autores del presente número, Otte argumenta que es inútil seguir creyendo que el significado (*meaning*) de las cosas yace en nuestras cabezas y que es igualmente inútil seguir pensando que el saber (*knowledge*) es una especie de experiencia mental. Siguiendo ciertas ideas de Peirce, Otte sugiere que no hay separación entre idea y símbolo. Explicar, Otte sostiene, es exhibir el sentido de alguna cosa a través de signos y sentido vistos como procesos.

Raymond Duval discute el problema de la heterogeneidad semiótica, heterogeneidad en que subyace una de las dificultades mayores del aprendizaje de las matemáticas, esto es, pasar de un tipo de representación a otro. Duval arguye que el análisis de las producciones matemáticas exige herramientas de análisis semiótico complejas y adaptadas a los procesos cognitivos movilizados en toda actividad matemática y enuncia tres preguntas cruciales, las cuales son discutidas en el texto: una sobre la pertinencia de la distinción entre significante y significado (que nos recuerda la distinción introducida por Saussure), otra en torno a la clasificación de los signos, y, finalmente, otra referente a la comparación entre un análisis funcional y un análisis estructural de los signos.

En el tercer artículo, Cantoral y colaboradores presentan ciertos elementos de la socioepistemología, una teoría que pretende ubicar la actividad matemática en el contexto de la práctica social. El concepto de práctica social hace referencia a aquello que viene a normar la actividad matemática. En su artículo, los autores estudian algunas actividades como medir, predecir, modelar y convenir, y muestran, haciendo referencia a la historia de las matemáticas, escenarios sociales claves de construcción social del conocimiento matemático.

En el cuarto artículo, Radford presenta ciertos elementos de una teoría cultural de la objetivación, una teoría de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se inspira de escuelas antropológicas e histórico-culturales del conocimiento. Dicha teoría se apoya en una epistemología y una ontología no racionalistas que dan lugar, por un lado, a una concepción antropológica del pensamiento y, por el otro, a una concepción esencialmente social del aprendizaje. De acuerdo con la teoría, lo que caracteriza al pensamiento no es solamente su naturaleza semióticamente mediatizada, sino sobre todo su modo de ser en tanto que *praxis reflexiva*.

En el quinto artículo, un artículo de transición entre los artículos de corte teórico y los de corte aplicado, Godino y colaboradores presentan una aplicación del enfoque ontosemiótico al análisis de textos. Los autores buscan ilustrar la técnica de análisis de textos matemáticos propuesta por el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática e identificar criterios de idoneidad de unidades didácticas (en particular la *idoneidad epistémica* y la *cognitiva*) para el estudio de las estructuras aditivas en la educación primaria.

En el sexto artículo, Koukkoufis y Williams aplican ciertos conceptos de la teoría de la objetivación para estudiar la manera en que jóvenes alumnos generalizan, en el aprendizaje de la aritmética, ciertas relaciones numéricas. Los autores examinan en detalle el papel que desempeña el ábaco como artefacto de mediación y efectúan un análisis fino del papel del lenguaje y los gestos en procesos de *reificación* (en el sentido de Sfard, 1994), procesos que preparan el camino a conceptualizaciones numéricas claves en las operaciones con números enteros.

En el séptimo artículo, D'Amore discute el problema de la ontología y conocimiento de los objetos matemáticos, centrándose en particular en el problema de la representación del objeto y su sentido. En la primera parte, D'Amore sintetiza algunas investigaciones recientes en torno al problema de la ontología y el conocimiento; en la segunda parte, el autor analiza un ejemplo concreto para poner en evidencia las dificultades de cambio de sentido cuando cambia la representación del objeto.

En el octavo articulo, Gagatsis y colaboradores presentan el fruto de varios trabajos de investigación sobre el problema de cambios de representación de objetos relacionados con el concepto de función. El artículo torna alrededor del problema de la compartimentación de diferentes registros de representación, así como de las dificultades que, generalmente, encuentran los alumnos para utilizar representaciones adecuadas en contextos de resolución de problemas. Los autores sugieren pistas que pueden ayudar a resolver el problema de la compartimentación.

En el noveno articulo, inspirándose de la semiótica de Peirce, Adalira Sáenz-Ludlow sugiere la existencia de una relación triangular entre interpretación, objetivación, y generalización. Luego de argumentar cómo el discurso matemático es un medio potente en la objetivación semiótica, la autora discute la manera en que el discurso matemático en el salón de clase media el aumento del valor de lo que ella llama “la riqueza matemática del alumno”. En la ultima parte, Sáenz-Ludlow discute cómo maestros, con diferentes perspectivas teóricas, influyen en la dirección del discurso matemático en el salón de clase y, en consecuencia, en el crecimiento de la riqueza matemática de sus estudiantes.

En el décimo artículo, Giorgio Bagni examina cómo alumnos de 15 a 16 años tratan de dar sentido a una frase inspirada de un ejemplo célebre introducido por Russell, y de un aserto expresado en lenguaje matemático. Luego de discutir en la primera parte del artículo las posiciones tomadas por matemáticos, filósofos y epistemólogos, como Frege, Russell, Quine y Brandom respecto al problema de la referencia y el significado, Bagni ofrece un análisis de datos experimentales que se aparta de los conceptos clásicos de realidad y de racionalidad, y propone una reflexion en la que la idea de práctica de la justificación es vista en el interior de una comunidad comunicativa, al estilo de J. Habermas.

En el onceavo artículo, Ferdinando Arzarello presenta una discusión del paradigma multimodal y encarnado (embodied) que ha emergido en los últimos años dentro del marco de investigaciones realizadas en el campo de la psicolingüística y la neurociencia. Luego de analizar los gestos desde una perspectiva semiótica, Arzarello introduce la noción de *semiotic bundle*, el cual es ejemplificado a través de un estudio de casos.

Este número especial de la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa se encuentra en la línea de esfuerzos hechos por otros colegas en intentar mostrar a la comunidad de educadores matemáticos las posibilidades (y las limitaciones) de las aproximaciones semióticas. Este número continúa, de manera más modesta, cierto, las discusiones sobre la representación (Hitt, 2002; Janvier, 1987), la semiótica y la educación (Anderson, Sáenz-Ludlow, Zellweger, y Cifarelli, 2003), el número especial *Representations and the psychology of mathematics education* del *Journal of Mathematical Behavior* (1998, Vol. 17(1) y 17(2)), editado por Gerald Goldin y Claude Janvier, el libro *Activity and sign* (2005) editado por Michael Hoffmann, Johannes Lenhard and Falk Seeger, asi como el reciente número especial *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics* de la revista *Educational Studies in Mathematics*, (2006, vol. 61(1-2)), editado por Adalira Sáenz-Ludlow y Norma Presmeg.

Este número especial de la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa ha sido posible gracias a la colaboración de muchas personas. Queremos agradecer en particular a su editora, Rosa María Farfán. Queremos igualmente agradecer a José Guzmán Hernández (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados [Cinvestav], México), Heather Empey (McGill University, Canadá), Chantal Chivot (Laurentian University, Canadá) por su ayuda en la preparación de los textos.

También agradecemos al Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH) por la subvencion que hizo posible en parte esta publicación.

## Referencias

Anderson, M., Sáenz-Ludlow, A., Zellweger, S., y Cifarelli, V. (Eds.). (2003). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. Ottawa: Legas.

Arzarello, F. (2004). *Mathematical landscapes and their inhabitants: perceptions, languages, theories.* Plenary Lecture delivered at the ICME 10 Conference. Copenhagen, Denmark. July 4-11, 2004.

Bartolini Bussi, M. G., y Mariotti, M., A. (1999). Semiotic Mediation: from History to the Mathematics Classroom. *For the Learning of Mathematics, 19*(2), 27-35.

Bartolini Bussi, M., y Maschietto, M. (2006). *Macchine mathematiche: dalla storia alla scuola*. Milano: Springer.

Berger, M. (2005). Vygotsky's theory of concept formation and mathematics education. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 2*, 153-160.

Boero, P., Pedemonte, B., y Robotti, E. (1997). Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a Vygotskian perspective. *Proceedings of the XXI International Conference for the Psychology of Mathematics Education* . Lahti, Finland, *2,* 81-88.

Borba, M., y Villareal, M. (2006). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. New York: Springer.

Bredow, R. v. (2006). Living without Numbers or Time. *Speigel on line,* May 3 2006 (http://service.spiegel.de/cache/international/spiegel/0,1518,414291,00.html).

Bühler, K. (1979). *Teoría del lenguaje. Traducido del alemán por Julián Marías*. Madrid: Alianza Editorial.

Cobb, P., Yackel, E., y McClain, K. (Eds.). (2000). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*. Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum.

D'Amore, B. (2001). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques: la position «naïve» dans une théorie «réaliste» contre le modèle «anthropologique» dans une théorie «pragmatique». En A. Gagatsis (Ed.), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology* (Vol. 1, pp. 131-162).

Dörfler, W. (2005). Diagrammatic Thinking. Affordances and Constraints. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 57-66). New York: Springer.

Duval, R. (1998). Signe et objet, I et II. *Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg, 6*, 139-196.

Eco, U. (1976). *A theory of Semiotics*. Indiana: Indiana University Press.

Filloy, E., y Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje Aritmético-Algebraico. *L'Educazione Matematica, 5*(3), 278-306.

Freudenthal, H. (1968). Notation Mathématique. *Encyclopedia Universalis*, 338-344.

Glasersfeld von, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. London, Wasington, D.C: The Falmer Press.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1999). *The meaning of mathematical objects as analysis units for didactic of mathematics.* Paper presented at the Proceedings of the First Conference of the European Society for Research Mathematics Education.

Goldin, G. y Janvier, C. (Eds.) (1998). *Representations and the psychology of mathematics education* del *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 17(1) y 17(2).

Grize, J.-B. (1996). *Logique naturelle et communications*. Paris: Presses Universitaires de France.

Guzmán, J., y Kieran, C. (2002). The role of calculators in instrumental genesis: The case of Nicolas and factors and divisors. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Norwich, UK, *3*, 41-48.

Hitt, F. (Ed.). (2002). *Representations and Mathematics Visualization*. Mexico: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Hjelmslev, L. (1969). *Prolegomena to a Theory of Language*. Wisconsin: The University of Wisconsin Press.

Hoffmann, M. H. G. (2002). Peirce's «Diagrammatic Reasoning» as a Solution of the Learning Paradox. En G. Debrock (Ed.), *The Quiet Revolution: Essays on Process Pragmatism* (pp. 147-174). Amsterdam et al: Rodopi Press.

Hoffmann, M. H. G., Lenhard J. y Seeger, F. (Eds.) (2005). *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education*. New York: Springer.

Hoffmann, M. H. G. (2005). Signs as Means for Discoveries. Peirce and His Concepts of «Diagrammatic Reasoning», «Theorematic Deduction», «Hypostatic Abstraction», and

«Theoric Transformation». En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 45-56). New York: Springer.

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J., y Hegedus, S. (2004). An introduction to the profound potential of connected algebra activities: Issues of representation, engagement and pedagogy. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 3*, 129-136.

Kieran, C., y Saldanha, L. (2005). Computer algebra systems (CAS) as a tool for coaxing the emergence of reasoning about equivalence of algebraic expressions. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Melbourne, Australia, 3*, 193-200.

Laborde, C., Puig, L., y Nunes, T. (1996). Language in Mathematics Education. En L. P. a. A. Gutiérrez (Ed.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* . University of Valencia, Valencia, Spain, *1*, 53-84.

Leontiev, A. N. (1993). *Actividad, conciencia y personalidad*. México: ASBE Editorial.

Nesher, D. (1997). Peircean Realism: Truth as the Meaning of Cognitive Signs Representing External Reality. *Transactions of the Charles S. Peirce Society, 33*(1), 201-257.

Otte, M. (2003). *Does mathematics have objects ? In what s ense ?* Synthese, *134* (1-2), 181-216.

Otte, M. (en prensa). *A = B: a Peircean View. En Lafayette de Moraes and Joao Queiroz*. Brazil: Catholic University of Sao Paulo.

Parker, K. (1994). Peirce's Semeiotic and Ontology. *Transactions of the Charles S. Peirce Society, 30*(1), 51-75.

Peirce, C. S. (1931-1958). *Collected Papers, vol. I-VIII*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Piaget, J. (1968). *La formation du symbole chez l'enfant*. Neuchatel: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology*. New York: W. W. Norton.

Piaget, J. (1978). *Problemas de psicología genética*. Barcelona: Ariel.

Piattelli-Palmarini, M. (Ed.). (1982). *Théories du langage, théories de l'apprentissage : le débat entre Jean Piaget et Noam Chomsky*. Paris: Seuil.

Presmeg, N. C. (2005). Metaphor and Metonymy in Processes of Semiosis in Mathematics Education. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 105-115). New York: Springer.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità [Sensible Things, Essences, Mathematical Objects and other ambiguities] (English version available at: http://laurentian.ca/educ/lradford/essences.pdf). *La Matematica e la sua didattica, 1*, 4-23.

Radford, L. (2006). The Anthropology of Meaning. En A. Sáenz-Ludlow, y N. Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics, Special Issue, Educational Studies in Mathematics, 61*, 39-65.

Radford, L. (en prensa-1). Semiótica cultural y cognición. En R. Cantoral y O. Covián (Eds.), *Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica*. Mexico.

Radford, L. (en prensa-2). Rescuing Perception: Diagrams in Peirce's theory of cognitive activity. En Lafayette de Moraes and Joao Queiroz (Eds.), C.S. Peirce's Diagrammatic Logic. Catholic University of Sao Paulo, Brazil.

Sáenz-Ludlow, A. (2003). A collective chain of signification in conceptualizing fractions. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 181-211.

Sáenz-Ludlow, A. (2004). Metaphor and numerical diagrams in the arithmetical activity of a fourth-grade class. *Journal for Research in Mathematics Education, 1*(35), 34-56.

Sáenz-Ludlow, A. (2006). Classroom interpreting games with an illustration. En A. Sáenz-Ludlow, y N. Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics, Special Issue, Educational Studies in Mathematics, 61*, 183-218.

Saussure, F. (1995). *Cours de linguistique générale*. Paris: Payot. (Primera edición, 1916).

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 44-55.

Steinbring, H. (2005). Do Mathematical Symbols Serve to Describe or Construct «Reality»? En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 91-104). New York: Springer.

Steinbring, H., Bartolini Bussi, M., y Sierpinska, A. (1998). *Language and Communication* *in the Mathematics Classroom*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Stjernfelt, F. (2000). Diagrams as Centerpiece of a Perican Epistemology.*Transactions of the Charles S. Peirce Society, 36*(3), 357-384.

Van der Veer, R. (1996). The concept of culture in Vygotsky's Thinking. *Culture and Psychology, 2*, 247-263.

Van der Veer, R., y Valsiner, J. (1991). *Understanding Vygotsky*. Oxford Uk and Cambridge USA: Blackwell.

Vygotsky, L. S. (1971). *The Psychology of Art*. Cambridge and London: The M.I.T. Press (First published in 1925).

Vygotski, L. S. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo.

Vygotski, L. S. (1991). *Obras Escogidas,* Vol. 1 (Segunda edición,1997). Madrid:Visor.

**Luis Radford**
École des sciences de l'éducation
Université Laurentienne
Canada

E-mail: lradford@laurentian.ca

# Proof and Explanation from a Semiotical Point of View

Michael Otte [1]

Man sah, dass der Austauschprozess der Waren widersprechende und einander ausschliessende Beziehungen beinhaltet. Die Entwicklung der Ware hebt diese Widersprüche nicht auf, schafft aber die Form, worin sie sich bewegen können. Dies ist überhaupt die Methode, wodurch sich wirkliche Widersprüche lösen. Es ist z.B. ein Widerspruch, dass ein Körper beständig in einen anderen fällt und ebenso beständig von ihm wegflieht. Die Ellipse ist eine der Bewegungsformen, worin dieser Widerspruch sich ebensosehr verwirklicht als löst. K. Marx, Das Kapital, Band I, p.118f [2]


## RESUMEN

Una distinción entre pruebas que prueban y pruebas que explican es parte invariable de las discusiones recientes en epistemología y en educación matemática. Esta distinción se remonta a la época de los matemáticos que, como Bolzano o Dedekind, intentaron restablecer a las matemáticas puras como una ciencia puramente conceptual y analítica. Estas tentativas reclamaron, en particular, una eliminación completa de los aspectos intuitivos o perceptivos de la actividad matemática, sosteniendo que se debe distinguir de forma rigurosa entre el concepto y sus representaciones. Utilizando una aproximación semiótica que refuta una separación entre idea y símbolo, sostenemos que las matemáticas no tienen explicaciones en un sentido fundamental. Explicar es algo así como exhibir el sentido de alguna cosa. Los matemáticos no tienen, sin embargo, como vamos aquí a intentar demostrarlo, sentido preciso, ni en el sentido intra-teórico estructural, ni en comparación con la objetividad intuitiva. Los signos y el sentido son procesos, como vamos a sostenerlo inspirándonos de Peirce.



- **PALABRAS CLAVE:** Peirce, Bolzano, Semiosis, Prueba, Explicación.



## ABSTRACT

A distinction between proofs that prove and proofs that explain has over and again played an important role within recent discussions in epistemology and mathematics education. The distinction goes back to scholars who, like Bolzano or Dedekind, have tried to


*Fecha de recepción: Enero de 2006/ Fecha de aceptación: Mayo de 2006*

1 University of Bielefeld, Germany.

2 We saw that the exchange of commodities implies contradictory and mutually exclusive conditions. The differentiation of commodities into commodities and money does not sweep away these inconsistencies, but develops a *modus vivendi,* a form in which they can exist side by side. This is generally the way in which real contradictions are reconciled. For instance, it is a contradiction to depict one body as constantly falling towards another, and as, at the same time, constantly flying away from it. The **ellipse** is a form of motion which, while allowing this contradiction to go on, at the same time reconciles it. Karl Marx (1906), *Capital*, vol I. chapter 3.

reestablish pure mathematics as a purely conceptual and analytical science. These endeavors did in particular argue in favor of a complete elimination of intuitive or perceptual aspects from mathematical activity, arguing that one has to rigorously distinguish between a concept and its representations. Using a semiotical approach which negates such a separation between idea and symbol, we shall argue that mathematics has no explanations in a foundational sense. To explain amounts to exhibiting the meaning of something. Mathematics has, however, as we shall try to show, no definite meanings, neither in the structural intra-theoretical sense nor with respect to intuitive objectivity. Signs and meanings are processes, as we shall argue along with Peirce.

• **KEY WORDS:** Peirce, Bolzano, Semiosis, Proof, Explanation.

## RESUMO

Uma distinção entre provas que demonstram e provas que explicam é parte invariável das discussões recentes na epistemologia e em educação matemática. Esta distinção se remonta à época dos matemáticos que, como Bolzano o Dedekind, tentaram divisão da matemática pura como uma ciência puramente conceptual e analítica. Estas tentativas reclamaram, em particular, uma eliminação completa de os aspectos intuitivos ou perceptivos da atividade matemática, sustentando que se deve distinguir de forma rigorosa entre o conceito e suas representações. Utilizando uma aproximação semiótica que refuta uma separação entre idéia e símbolo, sustentamos que a matemática não tem explicações em um sentido fundamental. Explicar é algo assim como exibir o sentido de alguma coisa. Os matemáticos não têm, contudo, como vamos aqui a intentar demonstrar, sentido preciso, nem o sentido intra-teórico estrutural, nem comparação com a objetividade intuitiva. Os signos e o sentido são processos, como vamos a sustentar inspirados em Peirce.

• **PALAVRAS CHAVES:** Peirce, Bolzano, Semiótica, Prova, Explicação.

## RÉSUMÉ

Une distinction entre preuves qui prouvent et preuves qui expliquent est une partie invariable des discussions récentes en épistémologie et en éducation mathématique. Cette distinction remonte à l’époque des mathématiciens qui, comme Bolzano ou Dedekind, ont tenté de rétablir les mathématiques pures comme une science purement conceptuelle et analytique. Ces tentatives ont réclamé en particulier une élimination complète des aspects intuitifs ou perceptuels de l’activité mathématique en soutenant qu’on doit distinguer de façon rigoureuse entre le concept et ses représentations. En utilisant une approche sémiotique qui réfute une telle séparation entre idée et symbole, nous allons soutenir que les mathématiques n’ont pas d’explications dans un sens fondamental. Expliquer revient à exhiber le sens de quelque chose. Les mathématiques

n'ont pas cependant, comme nous allons tenter de le montrer, de sens précis, ni dans le sens intra-théorique structurel, ni par rapport à l'objectivité intuitive. Signes et sens sont des processus, comme nous allons soutenir en nous inspirant de Peirce.

• **MOTS CLÉS:** Peirce, Bolzano, Sémiosis, Preuve, Explication.

## Introduction

Before we can address the issue of proof and explanation we have to get rid of traditional *Bewusstseinsphilosophie* (philosophy of consciousness), that is, popularly speaking, the belief that "meanings are in the head" and knowledge is some sort of mental experience. After Kant epistemology began to ramify and various new philosophies of mathematics arose in which meaning, rather than mind played the central role. But the view that there exists an epistemologically autarkic or self-sufficient epistemic subject, which serves itself from external sensations and internal experiences or representations (Vorstellungen) to thereby constitute true knowledge, is a myth and should also be abandoned.

In Part I of this paper we try to provide some pertinent arguments to this end, based on Peirce's semiotics. "Consciousness is used to denote the *I think*, the unity of thought; but the unity of thought is nothing but the unity of symbolization" (Peirce CP 7.585). Part II treats the questions of proof and explanation with respect to the ideas of Bolzano on the one hand and Peirce on the other. Part III presents some examples and tries to make a connection with current debates about the issue in mathematical education and cognitive psychology.

**I.** To try to understand cognition and knowledge as semiotic processes we begin by conceiving of cognition as the result of a dialectical contradiction between cognitive subject and objective reality. We feel or perceive something, but cannot turn it into cognition without a symbol and it thus remains as a mere non-categorized sensation or intuition. Or, differently: somebody might understand the logic of an argument without seeing how it applies in a particular situation and thus does not really follow it. It is futile and fruitless, for example, to expect that the object of investigation would finally reveal itself to us in plain clearness such that knowing would then amount to reading off its relevant properties.

The symbol is to mediate between conscious feeling and objective reaction and should provide this interaction with a certain form or representation. This is the only manner in which we can know, that is, by constructing a relevant representation of some kind. "A representation is that character of a thing by virtue of which, for the production of a certain mental effect, it may stand in place of another thing. The thing having this character I term a representamen, the mental effect, or thought, its interpretant, the thing for which it stands, its object." (Peirce, CP 1.564). In contrast to the traditional dyadic models, Peirce defines a sign as a triad. And this implies that a sign does not stand for its object in all respects, "but in reference to a sort of idea, which I have sometimes called the ground of the representamen. 'Idea' is here to be understood in a sort of Platonic sense, very familiar in everyday talk" (Peirce, CP 2.228 and 4.536)).

This implies that the sign is consciously recognized by the cognitive subject and for that purpose the subject has to create another sign, which becomes an interpretation of the first interpretant. As Roman Jakobson, characterizing Peirce‘s thinking, once said:

“One of the most felicitous, brilliant ideas which general linguistics and semiotics gained from the American thinker is his definition of meanings *as the translation of one sign into another system of signs* (4.127)” (Jakobson 1985, 251).

The flow of meaning thus expresses the contradiction and it evolves by a recursive interaction between the objects (referents) and interpretants (senses) of signs. Objects and interpretants of signs are in general signs themselves. We argued elsewhere (Otte, 2003) in great detail that (mathematical) meaning has two components, one of which refers to objects, and which is called the extensional component of meaning; the other relating to the interpretant of the sign and which it is suitable to call the intensional or coherence component. The most important consequence, to be applied in the following paragraphs, consists in the fact that there never is a definite meaning; neither in the structural or intensional sense nor with respect to the extensions of theoretical terms. A pragmatic perspective on things thus seems to always recommend itself.

All reasoning is an interpretation of signs of some kind. And the interpretation of a sign is nothing but the construction of a new sign. As was said above, a mere feeling or consciousness, without a representation, is no interpretation and an interpretation or reformulation of a text, which does not carry on the ideas and does not generalize, is futile also. All cognition proceeds by means of the construction of an adequate representation and this construction provides nothing but the contradiction between subject and object with a form. “It is a contradiction that a body will permanently fall into another and at the same time will flee away from it. The ellipse is a form of development by which this contradiction is as much realized as it is resolved” (K. Marx, see above).

A symbol mediates between subjective spontaneity and objective reaction and is termed a Third, by Peirce.

The object of knowledge, being nothing but a representation—something which Kant had dubiously called an intuition—therefore is also not something given “out” there, it is not a Kantian “thing in itself,” but is established by the relation between subject and reality. It makes itself felt equally by the objectivity of this interaction process as well as through its breaking downs.

Mathematical ontology, for example, is constituted by a practice of mathematical reasoning and application, not the other way around. A mathematical object, such as number or function, does not exist independently of the totality of its possible representations, but must not be confused with any particular representation, either. We have on a different occasion expressed these facts in terms of a principle of complementarity (Otte, 2003). To see how a semiotic perspective might help to better grasp that complementarity one should remind oneself of the following characteristics of mathematics;

- Mathematics, on the one hand, has no more concrete objects of its own than painting; it is therefore not possible to do mathematics by simply considering certain kinds of objects, either constructed or given, abstracting what seems essential about them. According to the Cantorian claim that consistency is sufficient for mathematical existence, there is so much truth that it is consistency which makes a sign potentially meaningful. Consciousness “is sometimes used to signify the (Kantian) *I think,* or unity in thought; but unity is nothing but consistency, or the recognition of it. Consistency belongs to every sign, so far as it is a sign; therefore every sign, since it signifies primarily that it is a sign, signifies its own consistency” (Peirce, CP 5.313-15).

- On the other hand, mathematics is not a mere logical language, nor is it an analytical science from concepts, that is, definitions. Mathematics includes indexical representations and observational activities. “The best thinking, especially on mathematical subjects, is done by experimenting in the imagination upon a diagram or other scheme,” says Peirce (Peirce, NEM I, 122).

Thus the idea of a sign might help us to better understand that these different characterizations of mathematics are not as distinct as it might have appeared at first sight, but rather they represent complementary aspects of mathematical thinking, because signs are always used referentially as well as attributively. This is but another expression of the interaction between object and interpretant of the sign, as indicated above.

The semiotic approach to cognition and epistemology distinguishes itself from the philosophy of consciousness (as developed by Kant, for example) by its radical break with the assumptions and prerequisites of reasoning characterizing the latter. “All our thinking,” says Peirce, “is performed upon signs … External signs answer any purpose, and there is no need at all of considering what passes in one’s mind” (Peirce, NEM I, 122). Thinking occurs in signs and representations, rather than by means of imaginations or intuitions, which are to be looked for within our heads. This does not mean that conscious recognition and intuitive activity are dispensable. It only means that they have to be taken as means and instruments of cognitive activity, rather than as its foundations (Otte, 2005, 16f).

Insisting, when for example trying to interpret a text, on the question “what did the author really mean” has no more merits to it than the idea that the reader, and not the author, is the sole source of meaning. “Not even the author can reproduce his original meaning because nothing can bring back his original meaning experience” (Hirsch, 1967, 16; and in contrast: Fish 1980, 359f). And correspondingly, not any arbitrary reformulation of a text is an admissible interpretation. Neither the author nor the reader is the unique source of meaning because meaning is but the sign process itself. The reality of a text is its development, the meaning of a proposition lies in its consequences and the essence of a thing is the essence or meaning of a representation of that thing, and so forth. The semiotic approach fosters a genetic perspective on knowledge. Knowledge is essentially a process, a learning process or a process of growth and generalization, expressed in terms of a permanent transformation of one representation into another one.

Imagining cognition as a contradiction between subject and object implies the conviction that neither subject nor object can dominate or even determine the other part of this relationship. We do not find final and definite descriptions of things and mostly we do not even know what we know. We apply it, we represent it, but we cannot say or express it, nor describe what we are doing. “What can be shown cannot be said,” Wittgenstein famously affirmed. The spirit of creative activity thus is more or less the following.

Everything that we have formulated or constructed is just done and is there in the plain light of day. It means nothing *per se*, it is just there. Everything we achieve, we simply achieve. It neither needs nor deserves an interpretation or commentary, because it is, as we perceive it, real. The commentary would add nothing to the thing created and given. The given is just the given. What we have made, we have made. It has no general symbolic significance nor can it be undone. An action is an action, a work of art is just a work of art, a theory is just a theory. It must be grasped as a form *sui generis,* and recreated in its own terms, before we can inquire into its possible meanings or applications. Any creative achievement remains imperfect as long as questions about its meaning dominate when considering it. In artistic drawing what we achieve is a line, and the line does all the work, and if it fails to do so no philosophical commentary will rescue or repair a bad work of art. In literature or philosophy, it is the word or the sentence, in mathematics the new concept or the diagram, which carry the entire weight, etc. etc. Mastery, Paul Valery, says, presupposes that “one has the habit of thinking and combining directly from the means, of imagining a work only within the limits of the means at hand, and never approaching a work from a topic or an imagined effect that is not linked to the means” (Valery, 40).

Everything just is and thus means itself: P=P! This principle of identity lies at the heart of art and likewise at that of logic or exact science and it is obviously directed against any idea of cognition as a mental feeling or inner experience. P just means P! No commentary and no psychological experience or philosophical consideration shall be able to add anything to the matter.

A monotonous and perfect repetition would, however, destroy any creativity as well. Any line in an artistic drawing is, in fact, a continuum of lines; it fulfills its destination to represent something, at the very same time indicating an indeterminate set of possible modifications and further developments.

The creative process thus operates on the interplay of variation and repetition. A theory or a work of art, being an interpretation, is also a process, namely the process of creating an interpretant of the representation given and so on. At this very moment we are developing the anti-thesis, that is, pointing to the fact that a work of art or a theory are not mere existents, but are signs, which have a meaning. And an interpretation of that meaning is nothing but another representation. The sign is thus a thing as well as a process, namely the process of establishing a relationship between object and interpretant. It is a flow of meaningfulness. Peirce, in fact, defines semiosis as the action or process of a sign. “By ‘semiosis’ I mean”, Peirce writes, “an action, or influence, which is, or involves, a cooperation of three subjects, such as a sign, its object, and its interpretant, this tri-relative influence not being in any way resolvable into actions between pairs” (Peirce, CP 5.484).

Evolutionary realism therefore means the co-evolution of reality and knowledge, that is, the evolution of symbolism. It is the symbol in movement.

**II.**Let us now try and spell out the problem to which we should like to apply our semiotic view of mathematical activity. This is in fact the problem of mathematical explanation.

There has been, for some time now, a widespread debate about mathematical explanation and rigorous proof in mathematics education as well as in the philosophy of mathematics (for an overview see Mancosu, 2000 and 2001; Hanna, 2000). In this discussion, a distinction between proofs that prove against proofs that explain has over and again played an important part. Gila Hanna, for example, presents the distinction in psychological terms, but later on describes *explaining* in this way: "I prefer to use the term explain only when the proof reveals and makes use of the mathematical ideas which motivate it. Following Steiner (1978), I will say that a proof explains when it shows what 'characteristic property' entails the theorem it purports to prove" (Hanna 1989, 47).

Hanna and Steiner, speaking about the "characteristic property" that entails the "theorem it purports to prove," seem to follow Bolzano respectively as well as Aristotle in their ideas about mathematics. The "characteristic property" seems something like an essential cause in the Aristotelian sense. Steiner's view "exploits the idea that to explain the behavior of an entity, one deduces the behavior from the essence or nature of the entity" (Steiner 1978, 143). Steiner, believing that all mathematical truths are necessary and are thus valid in "all possible worlds," prefers to use the term "characterizing properties," rather than the term "essence." But he makes very clear his belief that mathematical proofs are exclusive like calculations or numerical determinations, picking out "one from a family" (147), rather than being general proof schemes or general forms of argumentation and demonstration. This view appears to be derived from an Aristotelian model of science and mathematics and it stands in extreme contrast to modern axiomatical mathematics in the sense of Hilbert or Emmy Noether, for example.

The proofs of modern mathematics are not glued to the particularities of individual propositions and it is generality of perspective and fertility of method that render them explanatory, because it is this which opens up new possibilities for mathematics. A proof is first of all a sign or representation and, as such, is a general already. It is the objectivity of general relationships what matters. Even if one were concerned with the subjective or educational aspects of the matter and therefore interested in the intuitive insights of a proof, this would primarily imply, as we have indicated in Part I, the search for new applications or representations of the basic ideas.

The distinction Steiner and others have drawn between proofs that explain and proofs that merely prove or verify makes sense only with respect to an Aristotelian model of science, as it is exemplified, for instance, by Euclid's *Elements* of geometry. This Aristotelian model has been described by E. Beth (1968) and more recently by de Jong (2003). An Aristotelian science, according to these descriptions, is comprised of a system of fundamental concepts such that any other concept is composed and is definable in terms of these fundamental concepts; it also contains a system of fundamental propositions such that all other propositions are grounded in and are provable from these fundamental propositions. And the fundamental concepts or propositions stand in close continuity with everyday thinking. Explanation in such a context means reduction to the concrete foundations of general experience, rather than constructing new theoretical contexts and searching for new applications.

Bolzano, in fact, referring to Aristotle, seems to have been the first modern author pleading for demonstrations «that show the objective connection and serve not just subjective conviction.» His monumental “Wissenschaftslehre” (doctrine of science; 1836/1929) was conceived of as a general science or logic in the service of enlightenment and was organized like a didactical treatise. This work contains a distinction between proofs that merely prove, being intended to create conviction or certainty, and others, which “derive the truth to be demonstrated from its objective grounds. Proofs of this kind could be called justifications (Begruendungen) in difference to the others which merely aim at conviction (Gewissheit)” (Bolzano, Wissenschaftslehre, vol. IV, p.525, 261). In an annotation to this paragraph Bolzano mentions that the origin of the distinction goes back to Aristotle and the Scholastics, who have, however, attributed an exaggerated importance to it by affirming that only justifications produce genuine knowledge, but that it had fallen into neglect in more recent times.

On grounds of this distinction between proofs that are merely certain and others which are genuine justifications, Bolzano criticized Gauss’ proof of the fundamental theorem of algebra of 1799, for example, because Gauss had on that occasion employed geometrical considerations to prove an algebraic theorem. Bolzano did not, as is often claimed (Volkert 1986), doubt the validity of Gauss‘ arguments and he did not question the certainty of our geometrical knowledge, but criticized the “impurity” of Gauss proof.

It is this spirit that led to the so-called rigour movement and to the program of arithmetization of mathematics and Bolzano has in fact been one of the spiritual fathers of this program. Mathematics was to be established as an analytical science from definitions, and numbers were considered to be the most important means of mathematical analysis.

One important effect of this program was the separation between pure and applied mathematics and the reconstruction of pure mathematics on completely logical, or rather, conceptual terms. Continuous mathematics, like geometry, for example, was considered applied mathematics. All intuitions and objects were to be replaced by definitions and mathematical proof, becoming the central concern of mathematicians, should be performed as a kind of linguistic activity. Although the conceptions of logic involved varied considerably, mathematical explanations in the end amounted to nothing but rigorous deduction from first principles and basic concepts.

One of Bolzano’s most important mathematical achievements was the proof of the existence of the least upper bound of a bounded set of real numbers and, based on this, a completely analytical proof of the intermediate value theorem for continuous real functions. Both results were published in 1817 in Bolzano‘s “Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.” Bolzano‘s proof of the intermediate value theorem survives nearly unchanged in today’s calculus textbooks, although one aspect has changed fundamentally since Dedekind. Bolzano had based his proof on the Archimedean axiom, which says that given any two real numbers *A* and *B*, there will always be a natural number n such that n*A* supersedes *B.* He had*,* however, taken this axiom to be an obvious truth, rather than a postulate. It was Dedekind only, who realized that nothing of such a kind could be proved or assumed as obvious. As Dedekind states it with respect to his own definition of continuity:

“The assumption of this property is nothing else than an axiom by which we attribute continuity to the line, by which we think continuity into the line. If space has real existence at all it is not necessary for it to be continuous” (Dedekind 1912, p.3, my translation).

The filling-up of gaps in the rational numbers through the creation of new point-individuals is the key idea underlying Dedekind’s construction of the domain of real numbers. Bolzano, in contrast, thought it obvious that these points, as exemplified by the incommensurability of certain line segments, for example, existed objectively. Charles Sanders Peirce’s view of the continuum is, in a sense, intermediate between that of Dedekind and Bolzano. He held that the cohesiveness of the continuum rules out the possibility of it being a mere collection of discrete individuals, or points, in the usual sense. “A *continuum* is precisely that every part of which has parts, in the same sense” (Peirce, W2, 256). The continuum represents the reality of the possible determination of points, rather than be an actual set of points; but this possibility is objective, such that, differently from Dedekind, space could not be discrete, according to Peirce.

If one looks at the various proofs of the intermediate value theorem one might be inclined to ask: why not take this theorem itself as the essential continuity postulate? It seems as clear and obvious as any of the other candidates, the existence of the limit of a bounded monotonous sequence, the Heine-Borel theorem, the existence of a point of intersection of a nested sequence of closed intervals of rational numbers with lengths tending to zero, etc. etc.

Mainly pragmatic reasons are responsible for the choice of axioms, reasons that are related to the development of mathematical knowledge and the construction of theories. But what about the problem of explanation then? To explain amounts to exhibiting the meaning of something. Mathematics has, however, no definite meanings, neither in the structural intra-theoretical sense nor with respect to intuitive objectivity. Signs and meanings are processes, as we have argued in paragraph I.

Resnik and Kushner do not consider the proof of the intermediate value theorem as explanatory in the sense of Steiner’s characterization. They write:

“We find it hard to see how someone could understand this proof and yet ask *why* the theorem is true (or what makes it true). The proof not only demonstrates how each element of the theorem is necessary to the validity of the proof but also what role each feature of the function and the interval play in making the theorem true. Moreover, it is easy to see that the theorem fails to hold if we drop any of its conditions” (Resnik/Kushner 1987, 149).

Rigorous proofs in this sense do not admit “why”-questions any more than mere calculations do and it is hard to see how they could be explanatory at all. Considering the question of how to choose the relevant mathematical model might perhaps change the situation. But the reader should remind herself that the term “explanation” had, for Bolzano, an objective meaning, rather than a psychological one. And this objectivism led to his error with respect to the foundations of the real numbers and his ignorance of the fact that mathematics contains only hypthetico-conditional statements, rather than categorical ones. This, however, means that the foundations of mathematical claims lie, so to speak, “in the future”, in the use and application of the mathematical propositions. A mathematical proof must therefore generalize in order to be explanatory. As we have seen, however, with respect to Bolzano and Steiner or Hanna, there is a strong foundational tendency involved in their ideas of explanatory proofs. It is very essential to Bolzano, for example, that there exist a hierarchy of truths in themselves independent from our knowledge or representation.

Cauchy had, at about the same time as Bolzano, given a geometric argument for the intermediate value theorem, being more concerned with certainty and conviction than with objective foundation (Cauchy 1821, 43f). Bolzano did consider proofs, like those by Gauss or Cauchy, as sufficiently obvious and convincing, but objected that they did not show the real fundamentals and thus were not true justifications, but rather mere subjective confirmations (subjektive Gewissmachungen). It is clear, Bolzano writes, “that it is an intolerable offense against correct method to derive truths of pure (or general) mathematics (i.e. arithmetic, algebra analysis) from considerations that belong to a merely applied or special part, namely geometry. … For in fact, if one considers that the proofs of the science should not merely be convincing arguments, but rather justifications, i.e. presentations of the objective reason for the truth concerned, then it is self-evident that the strictly scientific proof, or the objective reason of a truth which holds equally for all quantities, whether in space or not, cannot possibly lie in a truth which holds merely for quantities which are in space. On this view it may on the contrary be seen that such a geometrical proof is really circular. For while the geometrical truth to which we refer here is extremely evident, and therefore needs no proof in the sense of confirmation, it nonetheless needs justification” (Bolzano after the translation by Russ 1980, 160).

The term “justification” refers to the Leibnizian idea that every concept can be decomposed into “atoms.” Unprovable or basic propositions must, according to Bolzano, be among those whose subjects and predicates are completely simple concepts in the sense of Leibniz. Bolzano believed, for example, that different cases of one and the same issue should be formulated in terms of different propositions, like in Euclidean geometry. The law of cosine, for instance, in the cases of the acute- respectively obtuse-angled triangles signifies two different cases requiring different arguments. “Euclid was right in formulating two different propositions here,” writes Bolzano (Bolzano 1810/1926, 61).

Bolzano not only emphasized the necessity of “homogeneity” between method and object but he also conceived of concepts in themselves, propositions in themselves and representations (Vorstellungen) in themselves, independent of our thinking about them. This is sometimes emphasized by saying that Bolzano was the first to realize that “the proper prolegomena to any future metaphysics was the study of what we say and its laws and that consequently the prima philosophia was not metaphysics or ontology but semantics” (Bar-Hillel, 1967, 337f). Thus Bolzano's objective semantics and the Platonic and hierarchically structured universe of objective meanings is essential to his whole conception of explanation.

There are close parallels between Peirce and Bolzano and they are due to the fact that both their philosophies resemble that of Leibniz very strongly indeed. Both did, however, modify classical ontologism, concentrating on how mathematicians create and communicate as well as on the semantics of mathematical affirmations or communications. Both also consider mathematics as the science of possibility or of the possible states of affairs and both understand that proofs do not exist independently from mathematical theories, but are parts of theories.

Finally, both Bolzano and Peirce were concerned with elaborating alternatives to the philosophy of consciousness, as exemplified by Kant's *Critique* and his notion of *a priori* intuition in particular; however, Bolzano denied the evolutionary perspective, saying that Kant had confounded mathematics as such with the way in which humans develop mathematics, whereas Peirce, in contrast, sought to provide evolutionism with an objective basis. The continuity of space and time is objective, rather than subjective, as Kant and Leibniz had believed.

The essential difference between Bolzano and Peirce lies in the way how possibility is conceived. Bolzano thinks about this question in terms of the difference between the actual and the possible. This means that something like the set of all possibilities exists a priori, waiting to possibly be actualized. For Peirce, in contrast, reality is an evolutionary process realizing and producing objective possibilities as well as their conditions.

Peirce over and again stressed that we have to explain not only phenomena but also the laws that govern them (Peirce W4, 551f, see also Peirce, CP 1.175). Peirce, unlike Bolzano, did not consider mathematics to be an analytical science from definitions. Reality is continuous and thus cannot be described or determined. This may even be interpreted on the level of mathematics. Peirce in contrast to Bolzano seems well aware of the fact that there may exist various models of the number line.

The main feature of mathematical reasoning lies therefore in its perceptual character and consists in the fact that all "deep" symbolic meanings must have been eliminated, in the same sense we have described creative activity in Part I above. A proof must enlarge our knowledge and all ampliative or synthetic reasoning is perceptual and inductive, or as Peirce sometimes calls it, "abductive." This does not contradict the fact that mathematical reasoning is necessary, because "no necessary conclusion is any more apodictic than inductive reasoning becomes from the moment when experimentation can be multiplied *ad libitum* at no more costs than a summons before the imagination" (Peirce, CP 4.531). Hence, it amounts to the same to say that mathematics "busies itself in drawing necessary conclusions," and to say that it occupies itself with ideal or hypothetical states of things (Peirce, CP 3.558).

Mathematical proofs in the sense of Peirce do not contain explanations. They consist of apodictic judgments, showing clearly that something is necessarily the case, rather than explaining why that something is the case. They are examples of "knowledge that," rather than "knowledge why" in the sense of the Aristotelian distinction between proofs of the fact (hoti) and proofs of the reasoned fact (dioti). “The philosophers are fond of boasting of the pure conceptual character of their reasoning. The more conceptual it is the nearer it approaches to verbiage” (Peirce, CP 5.147-489). This would sound Kantian, were it not for the reference to the importance of signs.

Already from the fact that a proof is a sign and a sign is determined by its object and combined with the requirement that mathematical proofs are necessary and thus apodictic, it follows that a proof is essentially an icon and that its object is nothing but the form of that icon. Peirce affirms that mathematical reasoning proceeds by means of the construction of all kinds of diagrams and by experimenting with them and observing what happens. “Since a diagram .... is in the main an Icon of the forms of relations in the constitution of its Object, the appropriateness of it for the representation of necessary inference is easily seen” (Peirce, CP 4.531).

Peirce took Leibniz’s theory of a continuum of representations from quite unconscious and quasi imperceptible representations to those most coercive to consciousness and subsequently based his whole semiotic epistemology on it. A realistic view must see reality above and beyond all laws, ideas and explanations as something offering the possibility of understanding. Peirce’s metaphor for such a view of reality is the continuum. Reality is commonly identified with the totality of existing objects and facts. Sometimes, in a flush of enlightened insight, relations or laws are added to the furniture of reality. But this does not help much. The set of all laws, or possibilities of things, is a no less an antinomical conception than the notion of the set of all sets, which lies at the bottom of Russell’s paradox. In a digital or discrete world, with only 1 and 0, or perfectly right and wrong, there would be no growth of knowledge and therefore no knowledge at all. Synechism is above all “a regulative principle of logic prescribing what sort of hypothesis is fit to be entertained and explained” (Peirce, CP 6.173). Or, stated somewhat differently, only a continuous reality makes analysis and inductive generalization possible. According to Peirce relations are not to be reduced to determinate relata, but are related to continua. This was as important to the geometrical illustrations of the classical incommensurability proofs as it was important to the foundations of the calculus. Leibniz had already emphasized these epistemological insights, but had remained bound to a substance ontology in the Aristotelian sense.

What primarily characterizes mathematics is the peculiarity of its generalizations by means of the forming of fertile hypotheses. A “hypothesis substitutes, for a complicated tangle of predicates attached to one subject, a single conception” (Peirce, W3 337). Such hypotheses are created by an inductive process which Peirce called abduction or abductive inference, adding that “abductive inference shades into perceptual judgment without any sharp line of demarcation between them” (Peirce, CP 5.181). Abductive reasoning involves an element of intuition and “intuition is the regarding of the abstract in a concrete form, by the realistic hypostatization of relations; that is the one sole method of valuable thought” (Peirce, CP 1.383). This realistic hypostatization occurs by means of the construction and experimentation with all kinds of diagrams. From the abductive suggestion, which synthesizes a multitude of predicates, «deduction can draw a prediction» (Peirce, CP 5.171).

Thus the meaning and foundations of a piece of mathematical knowledge, a theory, for instance, are to be seen in the intended applications and newly created possibilities. Icons or images are particularly well suited to make graspable and conceivable the possible and potential rather than the actual and factual. It should also be mentioned in this context that psychology and psychotherapy have known for some time that icons or images are particularly well suited to strengthening what could be called “sense of possibility” and which seems indispensable to a person’s mental health (see the proceedings of the 35th International Congress on Psychoanalysis in San Francisco, 1995). Confining a person—a student, for example—to a certain characterization of herself/himself would mutilate her/his personality. Mathematical explanation must therefore enlarge and widen the perspective of the addressee of the explanation and the real is generally to be conceived of as process and evolution.

**III.** It is rather common nowadays to contrast subjective insight and explanation with objective foundation and conviction (Hersh, 1993). Indeed, Hanna’s quest for insight and understanding seems completely psychological and has nothing to do with objective concerns. Bolzano, in contrast, maintaining a strong anti-psychologistic attitude, conceives of explanation in purely objective or logical terms and in reference to a world of truths in themselves, independent of any actual insight. When in the course of the 19th/20th centuries the humanities (Geisteswissenschaften) were developed by W. Dilthey (1833-1911) and others, it became common to contrast understanding and interpretation, as the basis of the humanities, with scientific and mathematical explanation. This distinction resulted later on in the notion of the “two cultures” (Snow). Snow’s basic thesis was that the breakdown of communication between the sciences and the humanities (the «two cultures» of the title) was a major hindrance to solving the world’s problems (see C.P. Snow, 1993)

How can both sides come together? We believe that these two different views can be reconciled from a genetical perspective and that for this the semiotic view and the idea of mathematics as mathematization are essential. The notion of interpretation should be transformed as outlined in Part I of this paper and scientists and mathematicians should refrain from the metaphysical realism and logical objectivism that tends to identify reality with our knowledge of it, thus confusing object and sign.

A mathematical proof is a type, a type of representation, rather than a token-construction. One has to grasp the integrated whole of it, not merely follow the argument or the calculation. Or rather, one has little choice here, as one will hardly be able to memorize a complex proceeding and repeat its application without analysis and generalization.

Still this does not commit us to Platonism, as an idea is not completely to be dissociated from its possible applications and the applications might affect our conviction about what is essential or basic. And to understand the logic of an argument, one must not only follow its consequences in the abstract, but must also see how it applies in a particular situation. Resnik and Kushner found it hard, as they wrote, to see how someone could understand the proof of the intermediate value theorem “and yet ask *why* the theorem is true (or what makes it true).” They are right. This kind of insistence on more and more new why-questions seems to happen when one separates knowledge from its development and application. But the meaning resides in the applications.

In formal mathematics, facts are explained by means of proofs and then it has to be proved that the proof is correct and so on *ad infinitum*. Every proof is faced with the prerequisite of proving that the proof be correct. And the proof of the correctness of the proof again meets the same requirement and the proof of the correctness of the correctness of the proof also … etc. This dilemma is nicely described by Lewis Carroll's version of Zenon's paradox (Carroll, 1905*;* see also: Peirce, CP 2.27).

As a rational being one cannot act contrary to one's own insights and there is no insight without an application. Lewis Carroll's version of the race between Achilles and the Tortoise shows, albeit unintentionally, that one cannot really have knowledge or an insight and keep from applying it. There is no complete analysis without activity and application. Mathematics is just as constructive as it is analytical. Hence, it is difficult to believe that mathematics is meant "to explain," in the usual reductionistic understanding of the term.

In a reader on the philosophy of science we are told: "We can explain the length of the shadow by reference to the height of the flagpole, and not vice versa" (Newton-Smith 2000, 129). It seems natural to ask, upon perceiving a shadow, whence it comes from. Nobody, however, would consider the shadow to be the cause of the flagpole. But what about mathematics? Let us begin with Kant.

A "new light," says Kant, must have flashed on the mind of people like Thales, when they perceived that the relation between the length of a flagpole and the length of its shadow enables one to calculate the height of the pyramid, given the length of its shadow. "For he found that it was not sufficient to meditate on the figure as it lay before his eyes,… and thus endeavor to get at knowledge of its properties, but that it was necessary to produce these properties, as it were, by a positive a priori construction" (Kant, *Critique of Pure Reason*, Preface to the Second Edition 1787). And indeed, the flagpole as such has no positive relationship whatsoever to the pyramid.

Now one might say that mathematics is not concerned with flagpoles, pyramids and the like. But such talk does not help very much, given that we have witnessed, since Descartes' arithmetization of geometry, a gradual destruction of the pre-established harmony between method and object of mathematical inquiry that Bolzano wanted to maintain (Boutroux 1920, 193f). The history of mathematics must be seen as the history of mathematization, including the mathematization of mathematics itself (Lenhard y Otte, 2005). Therefore, mathematics is characterized first of all by the manner in which it generalizes. Mathematicians as a rule do not see things this way. They are either Platonists or Intuitionists and they dislike the semiotic approach to mathematics (Hermann Weyl is a noticeable exception to this: see: *Werke*, vol. IV, p. 334).

G. Cantor (Cantor 1966, 83), for example, believed that applied mathematics must deal with real explanations or foundations of things and thus must be based on sound metaphysics, whereas pure mathematics is defined by its "freedom" to form concepts as one pleases (given that they do not result in logical contradictions). Kant, on the other hand, being confined to an epistemology of consciousness, found it necessary to employ the idea that mathematical concepts and relations must be "constructed in intuition." And people like Poincare or Brouwer followed him in this conviction. This, however, imposes severe limitations on the conception of mathematics, because it introduces an absolute distinction between concepts and intuitions and between analytical and synthetical knowledge.

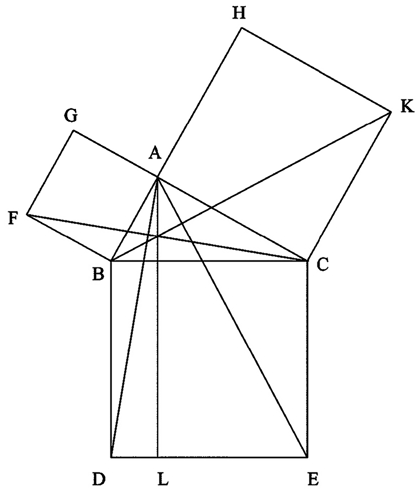
Peirce considered these distinctions as relative and hence his belief that abduction, as the source of mathematical generalization, on the one hand, and empirical perception, on the other hand, are not as different as it may appear. In semiotics, to explain means to represent. And a representation is just a perception cast into a certain form. In this context, Peirce develops the notion of the perceptual judgment as an unconscious inference. There is no sharp demarcation between mathematical and perceptual judgments respectively. When making a perceptual judgment we simply cannot really distinguish between what comes from the outside world and what stems from our own interpretation. "On its side, the perceptive judgment is the result of a process, although of a process not sufficiently conscious to be controlled, or, to state it more truly, not controllable and therefore not fully conscious. If we were to subject this subconscious process to logical analysis … this analysis would be precisely analogous to that which the sophism of Achilles and the Tortoise applies to the chase of the Tortoise by Achilles, and it would fail to represent the real process for the same reason" (Peirce, CP 5.181).

Within a perceptual judgment, the perception of generals (or ideal objects) and of particular data seems inseparable, or, stated differently, the processes of creation and of application of symbolic representations are inseparable. Analysis and interpretation interact. The relativity of the distinction between our inner and outer world could thus be interpreted as demanding its conceptualization in interactive terms, like the concept of representation. Once more we have to conclude that a proof that is supposed to explain must generalize.

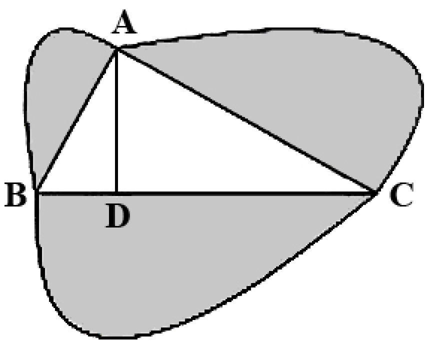
Let us consider a concrete example, given by Boulignand (1933), which concerns three different proofs of the Theorem of Pythagoras. The proofs of the Pythagorean Theorem are commonly considered to be divided into three main types: proofs by *shearing*, which depend on theorems that the areas of parallelograms (or triangles) on equal bases with equal heights are equal, proofs by *similarity* and proofs by *dissection*, which depend on the observation that the acute angles of a right triangle are complementary. Among these proofs the proofs by similarity play a special role because they indicate their embeddedness into the theoretical structure of axiomatized Euclidean geometry. The Pythagorean Theorem is equivalent to the Parallel Postulate, after all.

The following diagrams represent examples of these three types of proofs.

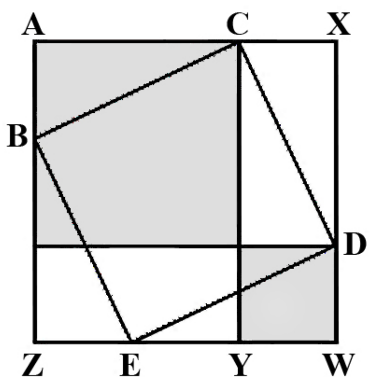
1.




2.




3.




The first proves, the second explains and the third is called intuitive but not explanatory by Boulignand.

The first proof proceeds in the traditional manner that we have become accustomed to in school: Since the angles BAC and BAG are right it follows … Consider now the triangles ABD and FBC … Since the triangles are congruent it follows that …. etc.etc.…

The second proof requires a relational understanding of the notion of "area," rather than an empiricist one. The area of a figure is defined then as the relation of that figure to the unit square $Q(1)$. We have $Q(x)=x^2\,Q(1)$. Therefore the areas of similar plane figures are to each other as the squares of their corresponding sides. Since we have ADC+ADB=ABC, the generalized theorem of Pythagoras follows.

The third proof simply requires some playing around with plane figures like in a geometrical puzzle and observing certain concrete relationships of equality and difference.

The interesting distinction seems to be that between 2) and 3), whereas the distinction between 1) and 2) is familiar and in some way refers to the well-known distinction between the analytic and synthetic, or between corollarial and theorematic reasoning. Corollarial reasoning relies only on that which is enunciated in the premises in a rather straightforward manner. If, however, a proof is possible only by reference to other things not mentioned in the original statement and to be introduced by conceptual construction and generalization, such a proof is theorematic.

The first idea that comes to mind with respect to the contrast between 2) and 3) is that it must be something modern, because it has to do with relational thinking and with the opposition between theoretical thought and common knowledge, or between the exact sciences and the humanities (Dilthey). We have talked about this difference already and one should remember the fact that Euclidean axiomatics and modern axiomatics in the sense of Hilbert are representing this difference (Otte 2003, 204). What is more important still: in modern axiomatic theory mathematical objects or facts are the objects and facts of a theory and proofs only make sense within the context of a theory? In traditional Euclidean geometry all this is different. The objects are given by unaided intuition, independently of any theory, and the proofs do not refer to an explicit and fixed theoretical context as their base, but refer to everyday rationality in the sense of Aristotelian demonstrative science.

Now, the second proof is modern in the described sense, whereas the other two more or less breathe in the spirit of Aristotelian science and traditional thinking in terms of substances and their essential properties.

When classifying the second proof as explanatory, we employ a dynamic conception of knowledge and explanation, as it has been described in semiotic terms above. The proof indicates the possibility of many relationships and thus makes us feel the systemic and theoretical character of knowledge. The other two proofs are foundationalist, assuming a fixed hierarchical organization of knowledge based on unaided intuition and everyday experience.

Intuition seems forceful, but neither an absolute insight or intuition nor a determinate hierarchy of levels of knowledge actually exist. This is very often misunderstood. For example, the well-known Gestalt psychologist Max Wertheimer (1880-1943) comments on the presentation and solution of Zeno's paradoxes by means of a geometric series that is current in present day mathematics. He himself comments on the current proof of the convergence of that series, which is accomplished by multiplying the series by $a$ and subtracting afterwards. Set $S = 1 + a = a^2 + ...$ Then $S - aS = 1$ or $S = 1/(1 - a)$.

Wertheimer writes: "It is correctly derived, proved, and elegant in its brevity. A way to get real insight into the matter, sensibly to derive the formula is not nearly so easy; it involves difficult steps and many more. While compelled to agree to the correctness of the above proceeding, there are many who feel dissatisfied, tricked. The multiplication of $(1 + a + a^2 + a^3 + ...)$ by $a$ together with the subtraction of one series from the other, gives the result; it does not give understanding of how the continuing series approaches this value in its growth." (Wertheimer, 1945)

Wertheimer wants an intuitive demonstration. Intuition is essentially the seeing of the essence of a thought or object as a form or object itself. Things do not have, however, a unique and demonstrable essence, as we have argued before. The essence of something cannot be anything but the essence of a representation of that thing and therefore the diagrammatic proof which Wertheimer does not accept as satisfactory, could be called an intuitive proof, exactly like proof number 3 of the theorem of Pythagoras above. Only, in the present case, the intuition is directed towards the diagrammatic representation itself and to its form. It is also more advanced, because it contains some general methodological message.

If we could establish a direct authentic and "natural" relationship to the object of knowledge then this relationship would also exist in a mechanical form; it would be a relation between reactive systems rather than cognitive ones and thus would be just a singular event without general meaning. The idea of sign marks the difference at this point as it introduces a general element. Our intuitions serve to create expressive and illuminating representations. And in this way we learn to act within the world around us. To understand means exactly to create a representation, as the very example that Wertheimer has criticized shows. We therefore have to renounce searching for definite meanings and absolute foundations of knowledge.

This we can learn from the fact that all our thinking is by means of signs.

Classified in terms of Peirce's categories, the third or intuitive proof represents *Firstness*, the first *Secondness* and the second, or explanatory in our sense, *Thirdness*. Thirdness is, as Peirce says, a synonym of representation and evolution and thus of continuity (CP 6.202). But Thirdness presupposes Firstness and Secondness, or stated semiotically, symbolic representation depends on iconic and indexical elements. Thus a proof may be a symbol, but mathematical reasoning is, as was said, diagrammatic and as such is based mainly on iconic signs with indexical elements as parts of the icon. As Peirce adds: "Firstness, or chance, and Secondness, or brute reaction, are other elements, without the independence of which Thirdness would not have anything upon which to operate" (CP 6.202). What primarily characterizes mathematics is the peculiarity of its generalizations and this is a symbolic process operating by means of hypostatic abstractions (Otte 2003, 218f).

## References

Bar-Hillel, Y. (1967). Bernard Bolzano, In Paul Edwards (ed.), *The Encyclopedia of Philosophy*, vol. II, p.337f

Beth, E. (1968). *The Foundations of Mathematics: a Study in the Philosophy. of Science.* - 2., rev. ed., 2. print . - Amsterdam : North-Holland Publ. Co.

Bochner, S. (1974). Mathematical Reflections, *American Mathematical Monthly*, 830-859.

Bolzano, B. (1810/1926). *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, Paderborn: Schöningh.

Bolzano, B. (1817/1980). Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, Translation into English by S. Russ, *Historia Mathematica*, *7*, 156-185.

Bolzano, B (1837/1981).Wissenschaftslehre, 4 vol. (Sulzbach). Ed. by Wolfgang Schultz. Reprint Scientia Verlag Aalen.

Boulignand, G. (1933). L'idée de causalité en mathematiques et dans quelques theories physiques, *Revue Scientifique*, *71*, 257-267.

Boutroux, P. (1920). *L'Idéal Scientifique des Mathématiciens*. Paris: F. Alcan.

Cantor, G. (1966). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Hildesheim : Olms.

Carroll, L. (1905). «What the Tortoise said to Achilles,»' *Mind*, N. S. vol. 4, p. 278; reprinted in: D. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach,* Vintage N.Y.

Cauchy, A.L. (1821). *Analyse algebrique*, Paris.

Dedekind, R. (1912). Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig, Vieweg & Sohn, 4th edition. de Jong, W.R. (2003). Bernard Bolzano, Analyticity and the Aristotelian Model of Science, *Kant Studien, 92*, 328-349.

Dilthey, W. (1910/1981). *Der Aufbau der geschichtlichen Welt in den Geisteswissenschaften,* Frankfurt: Suhrkamp.

Fish, S. (1980). *Is there a Text in this Class?,* Harvard UP, Cambridge USA

Hanna, G. (1989). Proofs That Prove and Proofs That Explain. In: G. Vergnaud, J. Rogalski, and M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Paris, Vol II, pp. 45-51.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics,* Special issue on «Proof in Dynamic Geometry Environments», *44*, 5-23.

Hersh, R. (1993). Proving is Convincing and Explaining, *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389-99.

Hirsch, E.D. (1967). *Validity in Interpretation*, Yale UP, Princeton.

Jakobson, R. (1985). *Selected Writings*, vol. VII, Berlin: Mouton.

Lenhard, J. y Otte, M. (2005). Grenzen der Mathematisierung – Von der grundlegenden Bedeutung der Anwendung [Limits of Mathematization: the Constitutive Role of Application], *Philosophia naturalis*, *42*(1), 15-47.

Mancosu, P. (2000). On Mathematical Explanation, in: E. Grosholz/H. Breger (eds.) *The Growth of Mathematical Knowledge,* Kluwer, 103-119.

Mancosu, P. (2001). Mathematical Explanation, *Topoi* 20: 97-117.

Marx, K. (1906). *Capital*. Edited by Frederick Engels. Revised and Amplified According to the Fourth German Edition by Ernest Untermann. Translated by Samuel Moore and Edward Aveling, from the Third German Edition (of *Das Kapital*). Published: Chicago: Charles H. Kerr and Co. First published: 1867.

Newton-Smith, W.H. (ed.) (2000). *A Companion to the Philosophy of Science*, Blackwell Oxford.

Otte, M. (2003). Complementarity, Sets and Numbers, *Educational Studies in Mathematics*, *53*, 203-228.

Otte, M. (2005). Mathematics, Sign and Activity. In M. Hoffmann et.al. (eds). *Activity and Sign* (pp. 9-22). N.Y.: Springer.

Peirce, Ch. S.: CP = Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Volumes I-VI, ed. by Charles Hartshorne and Paul Weiß, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1931-1935, Volumes VII-VIII, ed. by Arthur W. Burks, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1958 (followed by volume and paragraph)

NEM = Carolyn Eisele (ed.), The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce, Vol. I-IV, The Hague-Paris/Atlantic Highlands, N.J. (Mouton/Humanities Press)

W = Writings of Charles S. Peirce. Ed. by Peirce Edition Project. Bloomington: Indiana University Press (1982-2000) (followed by volume and page).

Resnik, M./D. Kushner (1987). Explanation, Independence and Realism in Mathematics, *British Journal for the Philosophy of Science, 38*, 141-158.

Rota, G.-C. (1997). The Phenomenology of Mathematical Proof, *Synthese, 111*, 183-196.

Snow, C.P. (1993). *The Two Cultures*, Harvard UP, Cambridge/USA.

Steiner, M. (1978). Mathematical Explanation, *Philosophical Studies, 34,* 135-151.

Valery(no year).*Leonardo*, Insel Verlag Frankfurt.

Volkert, K. (1986). *Krise der Anschauung*, V.+R. Göttingen.

Wertheimer, M. (1945). *Productive Thinking*. New York: Harper.

Weyl, H. (1995). Topology and abstract Algebra as two Roads of Mathematical Comprehension, *American Math. Monthly*, 453-460.

**Michael Otte**
University of Bielefeld
Germany

E-mail: michaelontra@aol.com

# Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?

Raymond Duval [1]


## RESUMEN

Tanto en la enseñanza como en sus prácticas más avanzadas, las matemáticas son el dominio donde todas las formas de representación semiótica pueden ser utilizadas. Ello plantea el problema siguiente: ¿las diferentes teorías semióticas permiten analizar la utilización de imágenes, del lenguaje y de los símbolos en matemáticas? Para comprender los elementos del problema, se debe no solamente observar cómo estas teorías distinguen las relaciones que constituyen y diferencian los signos, sino también considerar las exigencias matemáticas que demanda el recurso de las diferentes formas de representación semiótica. Su comparación muestra una diferencia considerable entre las herramientas de análisis semiótico existentes y la complejidad semiótica de todas las producciones matemáticas. Limitándose al caso de la representación de los números, se puede poner en evidencia que estas herramientas no permiten analizar la heterogeneidad semiótica de los diferentes sistemas utilizados. Ahora bien, esta heterogeneidad semiótica provoca una de las dificultades mayores del aprendizaje de las matemáticas: pasar de un tipo de representación a otro. El análisis de las producciones matemáticas exige herramientas de análisis semiótico más complejas y mejor adaptadas a los procesos cognitivos movilizados en toda actividad matemática. Para poder realizar esta investigación, tres preguntas son cruciales: una sobre la pertinencia de la distinción entre significante y significado, otra en torno a la clasificación de los signos, y, finalmente, otra referente a la comparación entre un análisis funcional y un análisis estructural de los signos.



- **PALABRAS CLAVE:** Condensación, designación, imagen, figura geométrica, relaciones constitutivas de signos, representaciones semióticas y no semióticas, sistema semiótico, transformación de representaciones.



## ABSTRACT

Mathematics, whether in its teaching or in its more advanced practices, is a domain where all the forms of semiotic representation can be used. This entails the following problem: do different semiotic theories allow for the analysis of the use of images, language and symbols in mathematics? To grasp the givens of the problem, we not only have to


---

*Fecha de recepción: Febrero de 2006/ Fecha de aceptación: Abril de 2006*

1 Université du Littoral Côte d'Opale(ULCO), France.

see how these theories make the distinction between the relations that constitute and differentiate signs, but we also have to consider the mathematical demands which necessitate that we make recourse to different kinds of semiotic representation. Their comparison reveals a considerable gap between existing semiotic tools and the semiotic complexity found in all mathematical production. Limiting ourselves to the case of the representation of numbers, we can highlight the fact that these tools do not allow us to analyze the semiotic heterogeneity of the different systems used. Moreover, this semiotic heterogeneity brings up one the major difficulties in the learning of mathematics: going from one type of representation to another. The analysis of mathematical productions demands semiotic tools of analysis that are more complex and better adapted to the cognitive practices mobilized in all mathematical activity. In order to undertake this research, three questions seem to be crucial: that of the pertinence of the distinction between signifier and signified, that of the classification of signs, and that of the connection between the functional analysis and the structural analysis of signs.

- **KEY WORDS:** Condensation, designation, image, geometrical figure, constitutive relations of signs, semiotic and non semiotic representations, semiotic system, transformation of representations.

## RESUMO

Tanto no ensino como nas práticas mais avançadas a matemática é o domínio onde todas as formas de representação semiótica podem ser utilizadas. Coloca-se o problema seguinte: As diferentes teorias semióticas permitem analisar a utilização de imagens, da linguagem e dos símbolos em matemática? Para compreender os elementos do problema, se deve não somente observar como estas teorias distinguem as relações que constituem e diferenciam os signos, mas também considerar as exigências matemáticas que demanda o recurso das diferentes formas de representação semiótica. Sua comparação mostra uma diferença considerável entre as ferramentas de análise semiótico existentes e a complexidade semiótica de todas as produções matemáticas. Limitando ao caso da representação dos números, se pode colocar em evidência que estas ferramentas não permitem analisar a heterogeneidade semiótica dos diferentes sistemas utilizados. Assim, esta heterogeneidade semiótica provoca uma das dificuldades maiores da aprendizagem das matemáticas: passar de um tipo de representação a outra. A análise das produções matemáticas exige ferramentas de análise semiótico mais complexas e melhor adaptadas aos processos cognitivos, mobilizados em toda atividade matemática. Para poder realizar esta investigação, três perguntas são cruciais: uma sobre a pertinência da distinção entre significante e significado, outra em torno da classificação dos signos, e, finalmente, outra referente a comparação entre uma análise funcional e uma análise estrutural dos signos.

- **PALAVRAS CHAVES:** Condensação, designação, imagem, figura geométrica, relações constitutivas de signos, representações semióticas e não semióticas, sistema semiótico, transformação de representações.

## RÉSUMÉ

Aussi bien dans l’enseignement que dans ses pratiques les plus avancées, les mathématiques sont le domaine où toutes les formes de représentation sémiotique peuvent être utilisées. Cela pose le problème suivant : les différentes théories sémiotiques permettent-elles d’analyser l’utilisation des images, du langage et des symboles en mathématiques ? Pour saisir les données du problème, il faut non seulement regarder comment ces théories distinguent les relations qui constituent et différencient les signes, mais il faut aussi considérer les exigences mathématiques qui commandent le recours aux différentes formes de représentation sémiotique. Leur comparaison montre un écart considérable entre les outils d’analyse sémiotique existants et la complexité sémiotique de toutes les productions mathématiques. En se limitant au cas de la représentation des nombres, on peut mettre en évidence que ces outils ne permettent pas d’analyser l’hétérogénéité sémiotique des différents systèmes utilisés. Or cette hétérogénéité sémiotique soulève l’une des difficultés majeures de l’apprentissage des mathématiques : passer d’un type de représentation à un autre. L’analyse des productions mathématiques exige des outils d’analyse sémiotique plus complexes et mieux adaptés aux processus cognitifs mobilisés dans toute activité mathématique. Pour conduire cette recherche trois questions semblent cruciales : celle de la pertinence de la distinction entre signifiant et signifié, celle de la classification des signes, et celle du rapport entre une analyse fonctionnelle et une analyse structurale des signes.



- **MOTS CLÉS:** Condensation, désignation, image, figure géométrique, relations constitutives des signes, représentations sémiotique et non sémiotique, système sémiotique, transformation de représentation.


L’attention portée au rôle des signes dans la pensée mathématique est à la fois ancienne et récente. Elle est ancienne si l’on considère la création multiforme d’un symbolisme mathématique qui a accompagné le développement de l’algèbre, de l’analyse et de la logique dite mathématique. Mais elle est très récente si l’on considère les recherches sur les problèmes d’apprentissage qui, dans un cadre piagétien et constructiviste, ont privilégié une problématique d’acquisition de concepts.

Des raisons très différentes ont contribué à la découverte de l’importance des représentations sémiotiques pour comprendre la complexité des apprentissages en mathématiques. Il y a, bien sûr, l’introduction de l’algèbre. Il y a aussi l’analyse des productions des jeunes élèves dans le cadre des activités qui leur sont proposées en classe. Il y a eu également l’influence, tardive, de la pensée de Vygotski qui avait souligné, contre les explications de Piaget, l’importance du langage à travers ses trois modalités d’expression, intérieure, orale et écrite, dans le développement de la pensée de l’enfant. Mais la découverte de l’importance et de la variété des représentations sémiotiques dans les activités mathématiques et pour l’apprentissage soulève un problème considérable et souvent peu discuté : comment les décrire, comment les analyser et comment les situer par rapport aux démarches mathématiques ?

Le problème, en effet, n'est pas d'analyser la variété des représentations sémiotiques en fonction des concepts et des connaissances mathématiques qu'elles permettent d'exprimer, de traduire, de contextualiser, etc. Cela conduit, en fait, à les dissoudre dans une analyse faite en termes de « savoirs » relatifs à des contenus mathématiques particuliers. Le problème est d'abord de savoir déterminer ce que sont des « signes », ce qu'ils évoquent ou représentent et comment ils le font, quelles fonctions ils remplissent ou ne remplissent pas dans une démarche de connaissance. Certes, ces questions semblent avoir trouvé une réponse claire dans les différentes théories sémiotiques qui ont été élaborées depuis les Stoïciens et, plus particulièrement, avec Peirce, Saussure, et aussi Frege. Mais cette apparente clarté s'évanouit vite si on compare ces différentes théories entre elles et, surtout, si on considère la variété considérable et hétérogène des représentations sémiotiques utilisées en mathématiques et dans l'enseignement des mathématiques. Les quelques « concepts » et classifications élaborés dans les théories sémiotiques et auxquels beaucoup de travaux didactiques se réfèrent, apparaissent alors insuffisants et parfois non pertinents pour analyser l'activité mathématique et ses productions. Et c'est là que surgit la question suivante : quelle sémiotique pour analyser l'activité et les productions mathématiques ?

Cette question est essentielle à un triple titre. Tout d'abord, il s'agit de disposer d'un outil d'analyse suffisamment adapté et discriminant pour étudier l'activité mathématique et ses productions : celles des experts, celles des enseignants et celles des élèves y compris ceux de l'enseignement primaire. Car toutes les productions mathématiques mettent en jeu des représentations sémiotiques. Or, les types de représentations que l'on trouve chez les uns ne sont pas ceux qui sont privilégiés par les autres. Peut-on les considérer comme à peu près équivalents ou interchangeables tant du point de vue de leur fonctionnement sémiotique que du point de vue mathématique? En d'autres termes, peut-on ou non passer facilement d'un type à un autre, ou au contraire ce passage de l'un à l'autre ne cache-t-il pas une rupture? Ensuite, il y a le problème du rôle des signes et des représentations sémiotiques dans le fonctionnement de la pensée. On peut l'aborder de manière très générale sans se référer à aucun domaine particulier de connaissance, c'est-à-dire à la manière spécifique dont on a accès aux objets de connaissance dans chaque discipline scientifique. Mais on peut aussi l'aborder en prenant en compte les exigences propres au développement de la connaissance mathématique. Dans ce cas, il faut tenir compte de la situation épistémologique particulière des mathématiques par rapport aux autres domaines de connaissance. Les représentations sémiotiques jouent-elle le même rôle en mathématiques qu'en botanique, qu'en géologie, qu'en géographie, qu'en astronomie, etc.? Enfin, cela concerne les variables cognitives à prendre en compte dans les apprentissages. Peut-on considérer que certains types de représentation facilitent l'entrée dans les démarches mathématiques ou, au contraire, en brouillent la visibilité ? Les changements de type de représentation constituent-ils une variable didactique cruciale ou au contraire une variable secondaire ?

Le propos de cet article n'est pas de présenter ici une autre approche sémiotique pour analyser l'activité et les productions mathématiques, approche que nous avons développée dans d'autres travaux (Duval 1995a, 1996, 2003, 2005, 2006a, 2006b). Notre propos est de poser la question de la pertinence et des moyens d'une analyse sémiotique de l'activité mathématique et des problèmes d'apprentissage en mathématiques. Cette question exige que l'on commence par analyser les différentes théories sémiotiques dont on a importé en didactique les distinctions et les concepts, sans s'être vraiment interrogé sur leurs fondements, sur leur portée réelle ainsi que sur les critères opératoires qu'elles offrent ou n'offrent pas. Le résultat auquel nous espérons conduire le lecteur est qu'il voit pourquoi il faut se poser cette question. Si on ne s'est pas posé cette question, l'utilisation d'une théorie sémiotique, quelle qu'elle soit, ne peut avoir de sens.

Nous commencerons donc par présenter les données du problème sémiotique, telles qu'elles ressortent des différentes théories sémiotiques existantes. Nous verrons que les différentes théories ont conduit à expliciter cinq relations fondamentales pour caractériser les signes et les représentations sémiotiques, même si aucune ne prend en compte toutes les relations. Mais ce n'est là qu'une partie des données pour la question dont nous voulons montrer la nécessité et la priorité. Il nous faut aussi examiner les exigences mathématiques concernant l'utilisation des signes. Nous verrons alors que les représentations sémiotiques ne sont mobilisées et développées que dans la mesure où elles peuvent être transformées en d'autres représentations sémiotiques. Ce sont ces transformations possibles qui sont importantes et non pas les relations fondamentales explicitées dans les différentes théories sémiotiques. Pour illustrer cela, nous prendrons l'exemple de la représentation des nombres. Nous aurions pu aussi prendre un exemple en géométrie (Duval, 2005) ou un problème dans lequel on ne peut pas distinguer si on est dans un cadre géométrique ou numérique (Duval, 2006b). L'intérêt de la représentation des nombres est que cet exemple permet de comparer plusieurs types de représentation, dont celui de représentations «concrètes», ou iconiques, de marques unités que l'on utilise comme des pseudo objets et qui ne fonctionnement pas du tout comme des signes. Dans une troisième partie, nous verrons, en gardant le même exemple, comment le passage d'un type de représentation à un autre implique un saut sémiotique non seulement dans le fonctionnement de la relation de référence mais surtout dans le type d'opération discursive à effectuer. La dernière partie nous permettra de montrer comment la question, thème de cet article, se traduit et se diffracte en plusieurs questions cruciales. Nous en retiendrons trois. La distinction entre signifiant et signifié, est-elle pertinente en mathématiques ? La classification des représentations, se fait-elle en fonction des relations fondamentales caractéristiques des signes ou en fonction des systèmes producteurs de représentations ? L'analyse des productions peut-elle être entièrement subordonnée à la fonction remplie dans un contexte ?

## I. LES DONNÉES DU PROBLÉME SÉMIOTIQUE

Les définitions des signes qui ont été proposées dans les différentes théories sémiotiques, mettent toutes en avant la fonction cognitive d'évocation, ou de remplacement, qu'un élément remplit à l'égard d'un autre élément, ces deux éléments étant implicitement considérés comme n'ayant pas le même statut épistémologique. De ce point de vue, il n'y a pas de différence entre la définition des signes et celle des représentations qui ne sont pas des signes, comme les images produites sur une surface plane réfléchissante ou par un système optique.

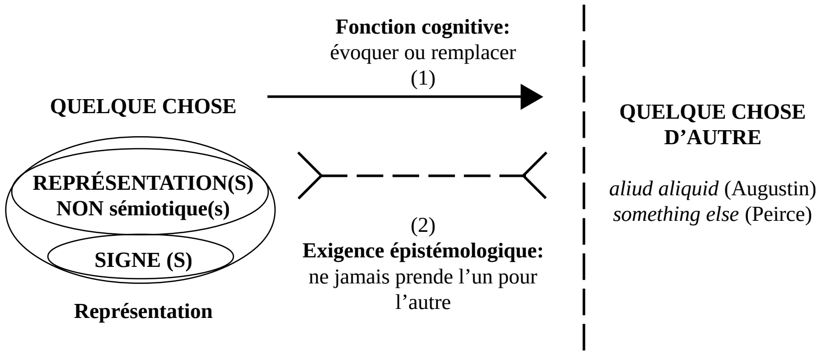



***Figure 1.*** Les deux éléments constitutifs caractérisant les signes et toutes les représentations

Les trois définitions suivantes en sont une parfaite formulation :

— Le signe est une chose qui, outre la forme perçue par les sens, fait venir à partir d'elle la pensée de quelque chose d'autre .... (*Signum est enim res, praeter speciem quam ingerit sensibus, aliud aliquid ex se faciens in cogitationem venire*). (Augustin 1997, p. 136 )
— Un signe ou représentamen est quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un de quelque chose d'un certain point de vue ou realtivement à une compétence (*A sign, or representamen, is* ***something which stands*** *to somebody* ***for something*** *in some respect or capacity*). (Peirce 1978, p.121 (2.228)).
— Les « représentations » sont « l'évocation d'objets absents » (Piaget 1968a, p.305 ; 1968b, p. 8).

Malgré une apparente évidence, toutes ces définitions sont à la fois inutilisables et incomplètes. Elles sont tout d'abord incomplètes parce qu'elles laissent implicite l'exigence épistémologique fondamentale qui conduit à ne pas confondre une représentation avec ce qu'elle représente (Platon *République*, 509e-510b). Car, sans le respect de cette exigence, il n'y a plus de signe ou de représentation. Le respect de cette exigence peut sembler trivial ou immédiat lorsqu'il s'agit de choses matérielles, comme, par exemple une chaise. On ne confondra jamais la chaise en bois sur laquelle on peut s'asseoir et la photographie de cette chaise ou encore un dessin de cette chaise. Cela ne l'est plus pour les représentations sémiotiques utilisées en mathématiques, comme, par exemple les multiples représentations possibles des nombres, car on ne peut pas accéder à ces objets mathématiques sans mobiliser des représentations sémiotiques (Duval 2006b). Mais, surtout, cette définition est inutilisable car la fonction cognitive consistant à « évoquer » ou à « se tenir lieu de quelque chose » ne précise pas comment cette fonction cognitive peut être remplie. Autrement dit, cette définition, qui caractérise les signes par leur seule fonction, ne dit rien de la relation qui, structuralement, permet à quelque chose d'évoquer quelque autre chose.

C'est pourquoi les différentes théories du signe et de la représentation qui ont été développées ont été conduites à expliciter plusieurs relations fondamentales constitutives des signes ou des représentations. Nous en retiendrons cinq et il semble qu'il ne puisse pas en exister d'autres.

### 1. Une relation de « ressemblance »

La relation de ressemblance, à travers les notions de « copie » ou d'« image » (*eikon*) qui lui sont associées, a été dégagée par Platon (République 476c, 509e, 510e). Peirce en a fait l'une des trois catégories des représentations : « Une icône est un *represenamen* dont la qualité représentative est la priméité du *representamen*...par conséquent n'importe quelle chose peut être un substitut de n'importe quelle chose à laquelle elle ressemble » (Peirce 1978 p.14 7 (2.276) ; voir aussi 2.247). Cependant, ce qui permet de définir une ressemblance entre le contenu d'une représentation et ce dont ce contenu est la représentation reste flou comme Quine (1977) l'avait signalé. Comment déterminer s'il y a « ressemblance» ou non entre une représentation et ce qu'elle est censée représenter, sans passer par un ensemble d'opérations qui coûtent plus de temps que le seul fait de reconnaître quelque chose comme une image ?

Bresson a proposé un critère qui s'avère être un outil précieux à la fois pour décider si une représentation est, ou n'est pas « iconique » et pour pouvoir distinguer les différents types d'images. La ressemblance se caractérise par « la conservation entre les éléments du représentant des relations de voisinage existant entre les éléments du représenté » ( Bresson 1987, p. 940). Autrement dit, la ressemblance ne se fonde pas sur la reproduction de formes mais sur la conservation de relations topologiques des éléments qui composent l'ensemble d'une figure. Ainsi, dans l'exemple ci-dessous, les éléments des deux premiers dessins sont homogènes (que des carrés ou des ronds !) et leur forme ne ressemble pas aux différentes parties du visage humain. Ce sont leurs relations de voisinage qui les font interpréter comme des yeux, un nez, etc. Présentées simultanément à de jeunes enfants, ces formes sont généralement vues comme « un robot » et un « bonhomme ».

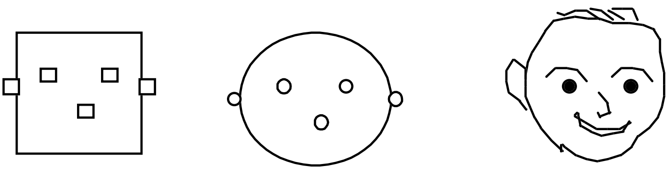


***Figure 2.*** Deux images schématisées et une image figurative.

La comparaison du troisième dessin avec les deux premiers montre l'intérêt de la définition de Bresson. Elle permet de voir ce qui fait la différence entre une image figurative (à droite), qui est une «copie » plus ou moins fidèle d'un visage, et une image schématisée ou abstraite (à gauche) mais qui ressemble encore à un visage. Dans l'image figurative, les éléments sont différents et ont chacun une ressemblance de contour avec une partie du visage. Une image devient schématique lorsque tous les éléments composant l'image deviennent homogènes et perdent donc tout caractère d'iconicité (Duval 2003, p. 39-40).

Regardons maintenant ces figures qui suivent. En quoi se distinguent-elles des premiers dessins ci-dessus ? Peut-on les considérer comme relevant de la même catégorie que les images ci-dessus ?

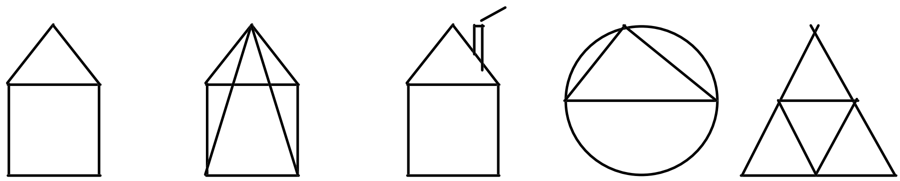



***Figure 3.*** Quatre ou cinq figures géométriques ?

On peut noter une première différence. Une figure géométrique ne se dessine pas à main levée mais se construit à l'aide d'instruments, tandis qu'un dessin ne se construit pas mais se compose à main levée. Mais, d'un point de vue sémiotique, cette différence a peu d'importance. La question suivante demeure : une fois construite ou dessinée, une figure géométrique s'analyse-t-elle en termes de ressemblance avec ce qu'elle représente ?

## 2. Une relation de « référence »

Cette relation, que Frege (1971) appelait la *Bedeutung* (*dénotation*) des signes ou de leur combinaison en une expression, exclut toute possibilité de ressemblance entre les signes et ce dont ils sont les signes. Elle concerne surtout deux types de signes très différents : les symboles et les mots. **La relation de référence d'un signe ou d'une combinaison de signes à un objet résulte d'une opération discursive de désignation**. C'est de cette manière que les lettres en algèbre, les mots, ou les constructions syntagmatiques de mots dans un énoncé, réfèrent à un objet. Cette opération peut paraître simple lorsqu'il s'agit de lettres ou de symboles, puisque généralement on les associe à quelque chose qui est visible graphiquement : les sommets ou les points d'intersection sur une figure géométrique, ou un ensemble de nombres que l'on se donne : « Soit $x$... ». Dans ce type de situation on parle le plus souvent de « notation mathématique » (Freudenthal, 2002).

L'opération de désignation est beaucoup plus complexe dès qu'elle se fait par des mots. **Un mot, seul, ne désigne jamais un objet, sauf si on lui assigne un statut de nom propre.** La désignation d'un objet par un nom commun exige toujours une quantification. Autrement dit, la désignation linguistique se fait par la combinaison d'un nom commun et d'un déterminant. Mais, comme aucun lexique ne comporte jamais autant de mots que d'objets à désigner, la construction syntagmatique doit articuler plusieurs noms en une seule expression : « **le** point **d**'intersection **des** hauteurs **d**'un triangle ... ». Russell considérait ce type de construction syntagmatique, comme une « description ». Il est caractéristique du langage mathématique (Duval, 1995a). Et on le retrouve dans tous les énoncés de définition ou de théorème ainsi que dans les énoncés des problèmes ! Cette opération de désignation, qui crée la référence à un objet, est soumise à une condition d'unicité pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté dans la communication sur l'objet qui est ainsi désigné (Ducrot, 1972). En mathématiques, les expressions qui introduisent une notation articulent en fait deux opérations discursives de désignation : l'une littérale et l'autre linguistique : « *l'écriture* **a/b**) désigne (**le quotient de** *a* **par** *b* ». ( Deledicq 1979, p.

48 ), ou encore « Soit **A** *le point d'intersection des hauteurs d'un triangle* ».

### 3. Deux relations caractérisées en termes de causalité

Il s'agit ici d'une relation totalement différente des deux précédentes. Ici la relation peut être prise de deux manières différentes : soit ce qui fonctionne comme signe est un effet de ce qu'il évoque, soit, au contraire, il agit comme cause ou comme déclencheur d'une action.

#### *3.1 La relation effet $\longrightarrow$ cause*

Elle caractérise les phénomènes naturels qui induisent la recherche de leur cause ou de leur origine : des reflets, des traces, des vestiges, des symptômes, des indices... Peirce a pris l'exemple de l'observation d'une fumée. On pourrait ici faire appel à l'abondante littérature qui, de Plotin à Derrida, a cherché, dans ce type de relation, le caractère premier et fondateur des signes. La trace est devenue la métaphore sémiotique de ce type de relation.

#### *3.2 La relation cause $\longrightarrow$ effet*

Elle ne concerne plus des phénomènes naturels mais ce qu'on considère comme un signal. Ainsi les feux aux carrefours sont des signaux qui doivent déclencher, de manière réflexe, une action de la part des conducteurs. Plus généralement, toute transmission d'informations à l'intérieur d'un système physique ou organique dépend de codes et de signaux.

### 4 . Une relation d'opposition alternative ouvrant un choix d'emploi

Ici, les termes de cette relation ne sont plus entre un élément qui remplirait une fonction d'évocation et un autre qui serait ce qui est évoqué; ils sont entre au moins deux éléments qui s'opposent comme deux signes possibles pour évoquer ou pour désigner quelque chose d'autre. Autrement dit, il n'y a pas de signes isolés qui fonctionneraient par eux-mêmes, comme une notation, mais il y a d'emblée un système de plusieurs signes. Cette relation a été mise en évidence par Saussure (1915) :

> La langue est un *système* dont tous les termes sont solidaires et où la valeur de l'un ne résulte que de la présence simultanée des autres..... Entre eux il n'y a qu'opposition. **Tout le mécanisme du langage repose sur des oppositions** de ce genre et sur les différences phoniques et conceptuelles qu'elles impliquent. Ce qu'il y a d'idée ou de matière phonique dans un signe importe moins que ce qu'il y a autour de lui dans les autres signes. (Saussure 1973, p. 159, 166 )

Autrement dit, il n'y a pas de signes en dehors du système où des éléments prennent valeur de signe. Cette théorie a conduit aux méthodes d'analyse structurale des langues à base phonologique (Martinet, 1966) et de toutes les formes de discours produits (Benveniste, 1974). En dehors des langues, les systèmes de numération de position en fonction d'une base *n* sont une parfaite illustration de ce qu'est un système sémiotique, selon la définition structurale et non pas purement fonctionnelle de Saussure. En effet, ces systèmes de numération sont, selon l'expression de Freudenthal (2002), un «compromis entre le système linguistique et celui de l'abaque ». Pour bien le mettre en évidence, il suffit de comparer les deux types suivants de représentation des nombres.

| Des **MARQUES UNITÉS** tenant lieu chacune d'un objet | Un **SYSTÈME SÉMIOTIQUE** | |
|---|---|---|
| Aucune valeur de position mais des arrangements configuraux possibles | Principe positionnel de l'abaque: la valeur dépend de la colonne où se trouve la marque | |
| | Base «10» : lexique fondé sur **neuf valeurs d'opposition pour chaque terme** | Base «2» : lexique réduit à **une seule valeur d'opposition** |
| \| | 1 | 1 |
| \| \| | 2 | 10 |
| \| \| \| | 3 | 11 |
| \| \| \| \| \| \| \| \| \| \|<br>ou ( \| \| \|   \|\|   \| \| \|   \| \| ) | 10 | 100 |

***Figure 4.*** Hétérogénéité sémiotique de deux types de représentation des nombres.

Nous sommes ici en présence de deux genres radicalement différents de représentation. L'un consiste en des marques unités qui sont indépendantes les une des autres et qui ne peuvent être assemblées que sous forme d'une collection. L'autre est un système sémiotique dans lequel les chiffres, analogues aux termes d'un lexique, dépendent les uns des autres selon deux principes de composition.

— un principe organisationnel de position qui permet de combiner systématiquement les chiffres entre eux pour écrire de nouveaux nombres. Chaque chiffre a ainsi une valeur de position qui correspond à une élévation, à une puissance. Ce principe détermine un algorithme de calcul pour les opérations arithmétiques.
— un principe de choix lexical qui correspond à la base *n*. Cette base détermine le nombre d'oppositions alternatives pour le choix des signes numériques.

A la différence des marques unités (colonne de gauche) qui sont constituées par leur seule trace matérielle, la réalité signifiante des chiffes est déterminée par leur seule valeur d'opposition alternative à d'autres chiffres, et non pas par leur trace matérielle. En ce sens, il ne peut pas y avoir de lexique ne comportant qu'un seul terme : « 1 » ne fonctionne comme signe d'un nombre que par son opposition soit à « 0 » dans le système binaire, soit à neuf autres signes dans le système décimal, dont évidemment « 0 ». Par conséquent « 1 » ne représente le nombre UN, comme la marque unité « I », que par son opposition à « 0 », et sous la condition qu'il occupe la première position en partant de la gauche.

Ces deux types de représentation des nombres sont hétérogènes. De l'une à l'autre, il y a un saut sémiotique et cognitif. Lorsque nous comparerons ces deux types de représentations sous le point de vue des opérations qu'elles permettent, nous verrons que les marques unités fonctionnent comme des pseudo objets manipulables concrètement et non pas comme des signes opératoires (*infra* 2.1). L'apparition du symbole « 0 », irréductible à toute représentation concrète, c'est-à-dire non représentable par des marques unités, traduit déjà la rupture qui se produit quand on passe d'un type de représentation à l'autre.

## 5. Quel est l'autre terme de ces relations fondamentales ?

Ces relations fondamentales sont autant de modes différents par lesquels «quelque chose », appelé « signe» ou « représentation », peut remplir la fonction cognitive d'évocation de « quelque chose d'autre » (Figure 1). Quel peut être cet autre terme que les définitions purement fonctionnelles désignent comme *aliud aliquid* ou *something else* et qui, d'un point de vue épistémologique ne doit jamais être confondu avec son signe ou sa représentation ?

C'est cet « autre chose » du signe ou de la représentation qui est important. C'est pourquoi il a été considéré comme «l'étant véritable » (Platon), comme la *res*, comme la « chose elle-même», c'est-à-dire comme l'objet de connaissance. La notion d'objet est celle qui s'est imposée dans toutes les analyses philosophiques et phénoménologiques de la connaissance comme la notion fondamentale (Duval 1998, p.167-168, 196). L'objet peut être soit une chose matérielle, accessible perceptivement comme une chaise, comme les plantes dans une forêt ou comme le soleil que l'on reconnaît être « le même » qui se lève chaque matin, soit une réalité idéale accessible uniquement par des démarches de pensée mobilisant justement des signes, comme par exemple les nombres. Ainsi les représentations « III », « 3 », « 39/13 », ou encore une configuration triangulaire de points, renvoient au même nombre comme à un même objet. On ne parle jamais du nombre « trois » comme d'un concept et du nombre « quatre » comme d'un autre concept. En mathématiques, on travaille avec les nombres et non pas avec le nombre, c'est-à-dire avec une définition du nombre, celle donnée par exemple par Peano, ou celles qui ont été discutées lors du débat entre Poincaré et Russell. De ce point de vue, l'ouvrage de Piaget sur *La genèse du nombre chez l'enfant* (1941) a introduit des glissements terminologiques qui ont été néfastes pour la réflexion didactique concernant les processus de la pensée.

Un objet, réalité matérielle ou idéalité, peut être le terme de plusieurs relations sémiotiques fondamentales. Ainsi, une chaise peut être à la fois le terme d'une relation de ressemblance dans une photographie, d'une relation de référence dans un énoncé descriptif, et d'une relation d'effet à cause, s'il reste une trace de cette chaise, sur un sol meuble par exemple. Cela permet de composer des juxtapositions paradoxales comme nous le verrons plus loin. Au contraire, à la différence d'une chose matérielle, une réalité idéale ne peut pas être le terme d'une relation de ressemblance.

Cependant, il y a des situations où les signes ne tiennent pas à la place des objets qu'ils évoquent, mais remplacent d'autres signes. C'est le cas, par exemple, des codes alphabétiques qui commutent l'émission orale d'un discours en une suite visuelle de caractères, ou encore des lettres en algèbre, les lettres remplaçant une liste de valeurs numériques possibles. Dans le premier cas, les codes apparaissent comme un marquage formel de signes, les marques formelles appelant un décodage pour retrouver la réalité des signes, c'est-à-dire l'une ou l'autre des cinq relations fondamentales. Aristote, qui avait déjà remarqué cette situation, en avait conclu à une plus grande distance de l'écriture par rapport à la pensée que celle de la parole à la pensée (*De l'interprétation*, 16a 1-10). Le second cas est différent. Il répond à une fonction d'abréviation et d'économie cognitive et soulève la question du caractère « aveugle » d'un symbolisme qui ne remplit plus la fonction d'évocation d'un objet (*infra*, 2.13 et 4.3). Mais ces deux cas peuvent donc être ramenés à l'opposition entre signe et objet, conformément à l'exigence épistémologique sans laquelle la définition purement fonctionnelle des signes deviendrait non pertinente. Rappelons d'ailleurs que Peirce recourt lui aussi à cette notion d'objet pour caractériser des différents types de r*epresentamen*, c'est-à-dire trois des cinq relations fondamentales constitutives des signes.

## 6. Qu'en est-il de la distinction entre signifiant et signifié ?

Cette distinction est évidemment la distinction familière. Mais elle est aussi celle dont l'emploi dans la littérature didactique est complètement équivoque.

Soit elle correspond à la distinction entre l'élément qui remplit une fonction d'évocation et cet autre chose qu'il évoque. Dans ce cas, la distinction est redondante par rapport aux définitions classiques du signe (Figure 1) : « signifiant » est alors synonyme de signe et « signifié » synonyme de l'objet évoqué ! Soit elle porte sur ce qui serait la structure interne de l'élément qui remplit la fonction cognitive d'évocation. Dans ce cas, la portée de cette distinction se limite aux langues humaines qui remplissent une fonction de communication orale, c'est-à-dire **aux systèmes linguistiques à base phonologique**.

En effet, toute l'économie des langues humaines, qui remplissent une fonction de communication orale, repose sur ce que Martinet a appelé la « double articulation ». D'une part, il y a une première articulation de la parole en unités de sens (phrases, mots, monèmes). D'autre part, les unités de sens minimales (les monèmes) sont le produit d'une articulation de plusieurs unités phoniques (les phonèmes), ces deux articulations étant entièrement indépendantes l'une de l'autre :

> « Si nous devions faire correspondre à chaque unité significative minima une production vocale spécifique et inanalysable, il nous faudrait en distinguer des milliers, ce qui serait incompatible avec les latitudes articulatoires et la sensibilité auditive de l'être humain. Grâce à la seconde articulation, les langues peuvent se contenter de quelques dizaines de productions phoniques distinctes que l'on combine pour obtenir la forme vocale des unités de première articulation» (Martinet 1966, p. 19).

Les langues humaines se distinguent du langage des animaux par cette double articulation.

Nous verrons plus loin (4.1) que cette distinction n'a pas de sens pour les signes purement visuels, notamment pour les notations mathématiques.

## 7. Conclusion : le problème de l'analyse et du rôle des signes dans l'activité cognitive.

Ce rapide panorama de la diversité des relations constitutives de la « signifiance » des signes (Benveniste 1974, p .45, 51) permet de faire les trois observations suivantes.

Tout d'abord, personne ne confondra la fonction cognitive d'évocation ou de substitut d'autre chose avec les relations de ressemblance, de référence, de causalité ou d'opposition alternative entre deux éléments. Ce sont ces relations structurales qui permettent qu'un élément remplisse la fonction d'« évocation ». Seule la relation cause→effet, caractéristique du signal, ne remplit pas cette fonction, mais une fonction d'instruction ou de commande, comme on peut le voir dans le fonctionnement de tous les systèmes automatisés ou non conscients.

Dans une approche sémiotique, on ne peut pas faire appel aux phénomènes d'association (Russell, 1969). Car cela concerne un autre problème, celui de l'apprentissage des signes et plus particulièrement de celui d'une langue. Or, pour expliquer cet apprentissage le recours au processus d'association relève d'une théorie plus que discutable et démentie par les observations (Boysson-Bardies 1999). Nous verrons plus loin que ce qu'on appelle association relève en fait d'une opération discursive de dénomination complexe.

Aucune théorie sémiotique existante ne permet de prendre en compte toutes ces relations, mais chacune tend à en privilégier une ou deux. Autrement dit, aucune théorie ne couvre la diversité et la complexité des phénomènes sémiotiques.

Maintenant la question n'est pas seulement de savoir quelles sont les relations les plus pertinentes pour analyser les activités et les productions mathématiques, elle est surtout de savoir si les relations que l'on estime pertinentes sont suffisantes.

## II. ÉXIGENCE ET PRATIQUE MATHÉMATIQUES CONCERNANT LES SIGNES : LES POSSIBILITÉS DE TRANSFORMATION DES REPRÉSENTATIONS.

En mathématiques, une représentation n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation. Un signe n'est intéressant que s'il peut être substitué à d'autres signes pour effectuer des opérations (Condillac, 1982). Ce ne sont donc pas les représentations qui sont importantes, mais les transformations des représentations. Cette exigence a commandé le développement d'un symbolisme spécifique aux mathématiques, avec la représentation des nombres, avec l'algèbre, avec l'analyse... Elle traduit le fait que la fonction primordiale des signes et des représentations, en mathématiques, n'est ni la communication, ni « l'évocation d'objets absents », mais le traitement d'informations, c'est-à-dire la transformation intrinsèque de leurs représentations en d'autres représentations pour produire de nouvelles informations ou de nouvelles connaissances.

Ce serait cependant une erreur que de limiter cette exigence au symbolisme mathématique et donc au calcul. Cette exigence mathématique concerne aussi l'utilisation de tous les types de signes culturellement communs, comme les langues naturelles ou les représentations figurales, lesquelles donnent, en géométrie par exemple, des possibilités purement visuelles de transformation. L'originalité et la puissance de la pensée mathématique viennent de ce qu'elles jouent sur la variété des registres sémiotiques et sur les possibilités spécifiques de transformation qui sont propres à chaque système. Pour illustrer cela, nous allons prendre deux exemples : la variété sémiotique de la représentation des nombres et les représentations figurales en géométrie.

### 2.1 Quel rapport entre les signes et les opérations dans la représentation des nombres et/ou des grandeurs ?

Nous avons analysé plus haut les différences entre deux types de représentation des nombres (Figure 3).

Nous pouvons compléter cette comparaison en y ajoutant deux autre types de représentation : l'écriture littérale et algébrique, et les dessins schématisés d'objets (Belmas 2003) que l'on trouve dans les productions de jeunes enfants, ou dans celles d'étudiants plus âgés (Hitt 2003), pour résoudre des problèmes de dénombrement.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Les principes d'organisation suivent les lois d'organisation perceptive | Pas de principes d'organisation pour l'emploi des marques | Des principes d'organisation déterminent **l'EMPLOI** des signes et leurs **COMBINAISONS** en unités de sens (expressions) | |
| TYPES DE REPRÉSENTATION DES NOMBRES | **I. Des dessins schématisant des d'objets** conservant les correspondances topologiques (voitures, roues d'un véhicule..) | **II. Des marques-unités formellement indiscernables** pouvant être agrégées en collections ( traits, points ...) | **III. Des systèmes d'écriture de position** décomposant un nombre selon une puissance $n$ et exigeant $n$ signes | **IV. Notations algébriques** articulant deux types de symboles : - variables conventionnelles pour une désignation fonctionnelle - symboles d'opérations et de relations |
| **OPÉRATIONS possibles de TRANSFORMATIONS des représentations** | Accentuer ou effacer l'**iconicité** (ressemblance avec l'objet représenté) par ajout ou suppression de tracés | Support pour des **manipulations libres**: - comptage -regroupements ou séparation en paquets - disposition selon des configurations polygonales | **algorithmes de calcul** fondés sur le principe : un changement de position correspond à une élévation à la puissance | **Substitutions d'expressions** symboliques fondées sur - des règles syntaxiques propres à chaque opération - invariance référentielle dans les substitutions |

***Figure 5.*** Possibilités de transformations, ou de calcul en fonction du type de représentation.

**Si on regarde ces quatre types de représentations sémiotiques en fonction des relations fondamentales,** les types I et II peuvent être considérés comme iconiques puisqu'ils ressemblent soit aux objets représentés soit à des collections de jetons, de cailloux. Les types III et IV doivent être considérés comme symboliques bien qu'ils ne relèvent pas de la même relation fondamentale : III est déterminé par une relation d'opposition alternative (*supra* 1.4) et IV est déterminé par une relation de référence (*supra* 1.3). Mais une telle analyse ne nous conduit pas loin et elle n'apporte pas grand chose. En revanche, **tout change si on regarde ces quatre types de représentations des nombres en fonction des opérations de transformations qu'ils permettent** (ligne 2 du tableau). On voit alors qu'il faut distinguer trois classes de représentations. Elles sont séparées par un trait double entre les colonnes. Chacune de ces trois classes de représentation donne respectivement lieu à trois types d'opérations radicalement différentes : des manipulations concrètes libres, des algorithmes de calcul, des opérations discursives de désignation et de substitution *salva veritate.*

### *2.1.1 Représentations n'étant qu'un simple support externe pour des manipulations libres*

Les opérations que l'on peut effectuer avec les représentations de type I ou II (Figure 5) sont totalement extérieures à ces représentations : on peut les compter en les pointant du doigt, les regrouper par paquets, ou les disposer sur deux rangées parallèles pour les mettre en correspondance, etc. Ce sont ces opérations que Piaget a presqu'exclusivement considérées dans son étude sur *La genèse du nombre* (1941). Dans les épreuves piagétiennes, les jetons sont le strict équivalent des marques unités. Celles-ci sont un simple support, matériel ou graphique, pour des opérations. Elles fonctionnent plus comme des pseudo objets que comme des signes. Les opérations effectuées sur ce matériel n'entraînent à proprement parler aucune transformation de ces représentations. Se pose alors la question de savoir s'il est utile de représenter les opérations faites et comment les représenter.

Les marques auxquelles on recourt généralement dépendent entièrement du choix de celui qui les utilise. Ainsi on peut jouer uniquement sur la disposition spatiale des marques unités (les séparer en paquets puis les regrouper) comme l'a fait par exemple Wittgenstein (1983, p.143), ou bien les entourer comme dans les diagrammes de Venn. On peut également utiliser des traits plus longs pour matérialiser des paquets, etc. De toute manière elles viennent se surajouter aux marques unités et elles ne sont que des **indices des opérations faites.**

Dans la pratique, les représentations de type I et II ne sont jamais employées sans que l'on recourt à un deuxième type de représentation sémiotique pour justement expliciter ou pour effectuer les opérations : soit par exemple, une explication verbale qui, évidemment, s'oublie très vite, soit l'utilisation d'une écriture numérique qui vient en quelque sorte représenter les opérations (*infra* Figure 11).

Les dessins schématisant des objets présentent des caractéristiques qui les rapprochent de ces marques unités. A la différence des marques unités, ils présentent l'inconvénient majeur de ne pas pouvoir être répétés à loisir comme les marques unités. Cela devient vite trop coûteux.

### *2.1.2. Représentation ou signes constitués par un principe d'organisation interne qui détermine des algorithmes de calcul*

Les écritures numériques (III, Figure 5) ne peuvent pas être considérées comme un simple support pour des opérations de calcul. L'effectuation des opérations est ici entièrement subordonnée aux possibilités et aux contraintes des principes d'organisation du système numérique utilisé. Pour l'écriture des nombres, les algorithmes des différentes opérations arithmétiques dépendent à la fois du principe de position et de la base. Par exemple, les valeurs de position permettent un déplacement à droite ou à gauche, correspondant à une élévation ou à une diminution de la puissance de la base, et, pour chaque position, un dépassement des possibilités de choix offertes par la base conduit à un déplacement à gauche avec report. Ce système est évidement extensible avec l'adjonction d'un séparateur (virgule ou point), et cette extension permet de calculer avec d'autres nombres que les nombres entiers. Pour les mêmes opérations sur les mêmes nombres, les algorithmes changent si, au lieu d'une écriture décimale, on adopte une écriture fractionnaire.

### *2.1.3 Représentations ou signes ouvrant à l'intégration des calculs dans des opÉrations DISCURSIVES : l'algèbre.*

L'écriture littérale (IV, Figure 5) crée une nouvelle rupture sémiotique avec les précédentes représentations des nombres et elle ouvre la voie à de nouvelles opérations. Cette rupture apparaît sur deux points. Tout d'abord, une différenciation entre la sémantique des signes (l'interprétation des lettres) et leur syntaxe (les règles déterminant l'ordre des opérations et leur portée sur les symboles associés dans l'expression) devient nécessaire. Avec cette différenciation, l'interprétation des lettres ne dépend plus directement des choix offerts par un système sémiotique (*supra* 1.4) mais d'une opération discursive de désignation (*supra* 1.2). Ensuite, il y a la possibilité de construire des unités syntagmatiques par l'organisation de plusieurs signes autour d'un symbole dominant (un symbole d'égalité ou d'inégalité). Cette possibilité conduit à des opérations de substitution d'expressions ou de transfert d'expressions *salva veritate*, c'est-à-dire *salva suppositione.* C'est ce qui fait l'originalité du calcul algébrique.

Pour illustrer cette rupture, nous nous limiterons à la seule émergence des lettres en rappelant comment, avec Viète et Descartes, elle s'est inscrite dans la constitution de l'écriture algébrique (Serfati, 1987).

L'émergence des lettres comme symboles algébriques a longtemps été réduite à la désignation d'une quantité inconnue, laquelle fut appelée *res* ou *cosa* pour faciliter la résolution d'un problème. On en retrouve d'ailleurs la trace dans l'explication que Lacroix donnait des signes algébriques : « ...la détermination du nombre inconnu par le moyen des nombres donnés » (Lacroix 1820, p. 1). Cependant, c'est avec **la substitution de lettres à des mots désignant différents types de grandeurs** que les lettres comme signes se sont véritablement constituées. Ainsi, pour ne combiner dans le calcul que des grandeurs homogènes, Viète a classé les grandeurs selon deux critères : le critère géométrique des genres (*planus, solidus*..) et le critère numérique d'un produit scalaire (*quadratus, cubus*..). Et pour pouvoir définir systématiquement et brièvement les règles de composition des opérations selon la nature des grandeurs, Viète a abrégé par des lettres les mots qui désignaient les différents types de grandeur. Cette substitution systématique de lettres à des mots référant déjà à des types de grandeur conduit, chez Descartes, à l'écriture d'équations et à la notation des puissances, lesquelles ont ouvert la voie à la notion de polynôme (Serfati, 1987). Et cela s'est fait en fonction d'une exigence cognitive d'économie que Descartes a formulée dans la règle XVI des *Regulae*. Il faut condenser en un seul signe tout ce qui intervient dans la résolution d'un problème, c'est-à-dire tout ce que Viète avait bien pris soin de séparer pour les calculs : les quantités connues ou inconnues (*res*) et les deux genres de grandeur, géométrique (*solidus*) ou scalaire (*cubus*).

L'autonomie sémiotique des signes qui s'est ainsi imposée en algèbre s'est donc faite au prix d'une réduction-condensation des différents types d'objets représentés. En d'autres termes, l'autonomie sémiotique des signes en algèbre s'est faite au prix d'une neutralisation de leur fonction cognitive d'évocation (*supra* Figure 1) et, par la suite, de toutes les relations fondamentales. Seul importe ce que Husserl a appelé leur

« signifié opératoire », c'est-à-dire les règles d'emploi (règles de priorité, de substitution...). On comprend alors la question du sens des signes algébriques que Leibniz soulève dans un texte de 1684, donc peu après la constitution de l'écriture algébrique moderne : «... cette pensée là, j'ai coutume de l'appeler *aveugle* ou encore *symbolique*... ; c'est celle dont nous usons en algèbre et en arithmétique.. » (Leibniz 1972, p. 152-153).

### 2.2 Peut-il y avoir des transformations figurales purement visuelles ?

Il semble plus difficile d'associer des représentations figurales, que ce soit des « images », des schématisations ou des figures géométriques, à des opérations. Bresson (1987) soulignait qu'une figure représente un état et que la représentation d'une transformation exige la représentation de deux états, l'un initial et l'autre final. Ce sont les différences entre deux figures qui peuvent évoquer un mouvement, une action ou une opération. Et en ce qui concerne la géométrie, les opérations sont généralement associées à des propriétés qui ne peuvent être mobilisées qu'en fonction d'hypothèses. Par conséquent, le contenu visuel d'une figure géométrique ne remplirait que l'une des fonctions suivantes : soit une fonction d'illustration pour faciliter la compréhension d'un énoncé soit un support pour des opérations commandées par le raisonnement et non pas par le contenu visuel de la représentation[2].

Cependant, et contrairement à cette opinion commune, il est important de remarquer que **les représentations figurales suggèrent ou induisent des opérations qui sont internes au contenu visuel de la représentation.** Nous nous limiterons ici à un exemple très simple. Le dessin d'un quadrilatère concave induit plusieurs transformations visuelles possibles, comme on peut le voir ci-dessous **:**

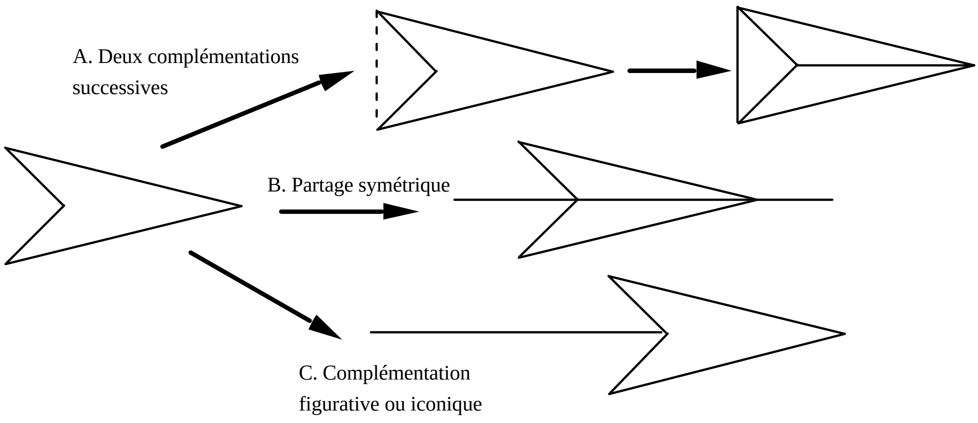



***Figure 6.*** Trois transformations visuelles possibles d'une forme polygonale concave

2 « Deux rôles au moins, peuvent être attribués aux figures en géométrie : d'une part, elles illustrent les situations étudiées, d'autre part elles servent de support à l'intuition au cours de la recherche en faisant apparaître sur un objet visible des relations ou des hypothèses de relations qui ne sont pas clairement évidentes dans un énoncé verbal » (Bessot 1983, p.35). La distinction entre dessin et figure reprend cette opposition entre ce qui est visuel, donc particulier, et l'ensemble des propriétés qui le sous-tendent et qui en font un dessin parmi d'autres.

La transformation A se fait par complémentation. Cette transformation résulte automatiquement des lois d'organisation perceptive qui conduisent à voir les formes concaves dans leur enveloppe convexe. Ainsi un quadrilatère concave est spontanément transformable en un assemblage de trois triangles. Cette transformation ne doit pas être confondue avec une règle essentielle pour les propriétés affines d'une figure: joindre tous les points singuliers (sommets) d'une forme, règle dont la mise en œuvre visuelle n'est jamais évidente comme on peut le vérifier avec les quadrilatères convexes, surtout s'il s'agit de faire apparaître les droites qui sont les supports des segments tracés (Duval & Godin, 2005). La transformation B résulte de la reconnaissance d'une organisation symétrique.

On remarquera que ces deux types de transformation ne dépendent ni d'une interprétation fondée sur une ressemblance partielle ou complète avec quelque chose d'autre, ni d'une interprétation en termes d'objets représentés. Le recours à des propriétés mathématiques sert seulement à les justifier.

Il n'en va pas de même avec la transformation C. Elle se fait en fonction d'une ressemblance du contenu avec un objet extérieur de l'environnement : une flèche, une lance, la forme concave du quadrilatère étant ici mise en rapport avec celle d'une partie de la forme typique d'une lance. La transformation C se fait évidemment sur la base de connaissances.

Ce sont des transformations de type A ou B qui constituent l'enrichissement intuitif des figures en géométrie. Elles sont indépendantes de toute analyse des figures en termes de propriétés . Elles dépendent d'abord de facteurs propres à la visualisation. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici que la géométrie fait appel à au moins deux types de représentation hétérogène et que chaque type de représentation y fonctionne indépendamment l'un de l'autre. Sinon pourquoi mobiliser simultanément deux représentations hétérogènes ?

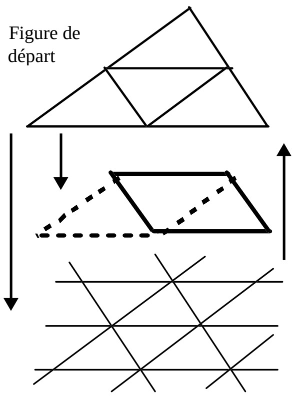
| **Registre de la visualisation :**<br>un jeu de réorganisations visuelles selon la forme ou selon le nombre de dimension des unités figurales reconnues | **ARTICULATION par le codage des sommets avec des lettres** | **Registre du discours :**<br>mise en œuvre d'énoncés de propriétés et de dérivation déductive des énoncés |
|---|---|---|
|  | *Quels éléments des énoncés permettent*<br>*un ancrage dans la visualisation ?*<br>*Quelle fonction remplit la figure par rapport à l'énoncé et à la résolution du problème :*<br>*—illustration ?*<br>*—heuristique ?*<br>*— objet support pour des mesures ?* | Enoncé du problème :<br>A'C' et AC sont parallèles<br>A'B' et AB sont parallèles<br>B'C' e BC sont parallèles<br>Prouver que A est le milieu de B'C'<br>ABED et BCED sont des parallélogrammes.<br>le théorème des milieux |

***Figure 7.*** Analyse sémiotique des représentations géométriques (Duval 2005, p. 29)

L'un des points décisifs de l'enseignement de la géométrie porte sur la prise en compte des facteurs qui favorisent l'entrée des élèves dans le jeu cognitif complexe de toutes les transformations des représentations figurales (Duval 1995b, 2005).

### 2.3 Transformations sémiotiques et démarches de pensée

Les théories du signe reposent, implicitement ou explicitement, sur l'idée que les signes remplissent d'abord une fonction de communication et qu'elles fournissent secondairement une représentation d'appui par rapport à la pensée et à ses démarches. Cette idée est d'ailleurs reprise dans beaucoup d'études sur le rôle et l'usage des signes en mathématiques (Kaput 1987). Or, c'est cette idée qu'il faut remettre en cause si l'on veut analyser et comprendre le rôle des signes en mathématiques. En mathématiques, les signes ne remplissent pas d'abord et essentiellement une fonction de communication mais une fonction de traitement. Condillac (1982) semble être le premier dans l'histoire à avoir mis l'accent sur cette fonction fondamentale des signes. Et les mathématiques sont le domaine de connaissances où l'on utilise le spectre le plus étendu et le plus hétérogène de représentations sémiotiques. Mais, comme nous avons pu le voir avec les deux exemples précédents, cela se fait toujours en fonction des opérations de transformation que chaque type de représentation rend possible. Et là, nous devons distinguer deux grands types d'opérations :

— celles qui sont externes aux éléments utilisés, les représentations étant alors des pseudo objets que l'on peut manipuler librement, et ce sont seulement le résultat d'une opération déjà faite qui peut être marqué. Ici on peut séparer et opposer les représentations et les actions (« perceptivo-gestuelles » selon l'expression de G. Vergnaud), comme cela se fait dans la théorie piagétienne.

— celles qui sont intrinsèques et spécifiques au système de représentation sémiotique, comme avec les écritures numériques de position, l'écriture algébrique et ou les représentations figurales en géométrie. Ici on ne peut plus opposer les représentations et les opérations. Car il y a des opérations sémiotiques et il y a des opérations qui ne sont possibles que sémiotiquement. Et toutes les opérations et les transformations mathématiques sont de ce type. Les démarches de pensée mobilisent toujours un type issu des multiples types possibles de représentation sémiotique. En mathématiques, elles en mobilisent plusieurs à la fois, même si un seul occupe le devant de la scène.

On peut résumer cela dans le tableau suivant :

<table>
<tr><td colspan="5">Transformation d'une représentation en une autre du même genre par des OPÉRATIONS</td></tr>
<tr><td>Externes aux signes pris isolément</td><td colspan="4">Dépendant de principes d'organisation d'un système sémiotique</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Opérations de reconfiguration portant sur des formes ou sur des positions</td><td colspan="2">Opérations discursives dans une langue naturelle ou formelle</td></tr>
<tr><td></td><td>Spatialcontinu</td><td>discret</td><td>Sémantique (référence à des objets)</td><td>Syntaxique Formation d'expression et d'énoncés</td></tr>
<tr><td>Marques unités</td><td>Figures en géométrie</td><td>Système numérique de position</td><td colspan="2">Ecriture algébrique (ouverte à l'intégration de quantificateurs)</td></tr>
</table>

***Figure 8.*** Les différents types de transformations sémiotiques.

Lorsque les transformations sont externes aux signes utilisés, c'est-à-dire lorsque ces derniers ne remplissent qu'une fonction de support, elles peuvent être réalisées matériellement d'une manière équivalente à une transformation symbolique. En revanche, si certaines transformations sémiotiques peuvent être reproduites matériellement, elles deviennent cependant très vite impossibles à réaliser, non seulement pour des raisons de coût mais surtout parce qu'elles ne sont pas concevables en dehors de la représentation symbolique qui les permet. On peut d'ailleurs remarquer qu'il n'y a souvent aucune congruence entre la réalisation matérielle d'une opération et sa réalisation symbolique. C'est l'une des difficultés, dans la représentation des nombres, lors du passage des marques unités au système décimal. Et c'est aussi l'une des difficultés en géométrie où l'articulation des énoncés avec les figures exige la déconstruction dimensionnelle des formes visuelles reconnues (Duval, 2005).

De la représentation iconique ou matérielle des petits nombres à leur représentation systématique dans une écriture décimale, binaire, etc., le saut sémiotique et cognitif à faire est considérable. Mais ce n'est là qu'un exemple parmi d'autres de ce qui constitue l'obstacle spécifique à l'apprentissage des mathématiques : passer d'un type de représentation sémiotique à un autre.

## III. LE PASSAGE D'UN TYPE DE REPRÉSENTATIONS SÈMIOTIQUES A UN AUTRE : PROBLÈME CLÉ DE L'APPRENTISSAGE.

Le phénomène le plus important concernant les représentations est qu'il n'y a pas une seule représentation pour un objet, comme pourrait le laisser croire la définition fonctionnelle (Figure 1), mais une très grande diversité de représentations possibles pour un même objet. On connaît la célèbre photo intitulée « une et trois chaises ». Celle-ci juxtapose, dans un même montage, une chaise, une photo de cette chaise et la description verbale de cette chaise. Mais un autre montage aurait pu tout aussi bien permettre de faire une photo « une et cinq chaises » en ajoutant des schémas ou un plan de montage de la chaise à partir de morceaux livrés en kit. En réalité, il y a autant de représentations possibles d'un objet qu'il y a de systèmes différents producteurs de représentations (Duval, 2006b). Et cela vaut aussi bien pour les représentations non sémiotiques que pour les représentations sémiotiques. Le problème cognitif que pose cette diversité de représentations possibles est celui de la reconnaissance du même *something else* (ou *aliud aliquid* ), c'est-à-dire du même objet, dans les contenus différents de chacune de ses multiples représentations possibles.

Ce problème est crucial pour l'apprentissage des mathématiques dont la situation épistémologique est totalement différente de celle des autres disciplines. En effet, dans les autres domaines de connaissance, les objets et les phénomènes étudiés sont accessibles perceptivement ou à l'aide d'instruments (microscope, télescope, etc..) qui augmentent soit le champ de la perception soit les capacités de détection (les sondes spatiales pour cartographier la planète Mars). On peut alors ancrer chaque type de représentation dans une expérience perceptive directe ou instrumentalement médiatisée. Cela n'est pas possible pour les mathématiques. Car les objets mathématiques ne sont pas accessibles perceptivement et, en mathématiques, l'attention se porte toujours sur tous les cas possibles et non pas seulement sur ceux qui sont réellement observés ou observables. L'accès aux objets mathématiques passe nécessairement par des représentations sémiotiques, rudimentaires ou complexes. **C'est dans cette situation épistémologique très particulière que le problème cognitif de la diversité des représentations sémiotiques devient crucial**.

Rappelons tout d'abord l'un des phénomènes les plus caractéristiques de l'activité mathématique : la mobilisation, simultanée ou successive, de plusieurs types de représentations sémiotiques y est constante. D'une part, toute activité mathématique exige que l'on puisse passer d'un type de signe et de représentation à un autre type, c'est-à-dire que l'on puisse convertir la représentation d'un objet en une autre représentation du même objet dans un autre système sémiotique, afin de se donner d'autres moyens de traitement ou de contrôle. D'autre part, la pratique de l'enseignement des mathématiques tend à juxtaposer des représentations sémiotiques différentes comme si cela devait rendre l'accès aux objets mathématiques plus facile. Il suffit d'ouvrir n'importe quel manuel à n'importe quelle page pour le constater. Et le recours à l'informatique permet de développer cette stratégie.

Or, tout cela présuppose que les élèves puissent comprendre ce passage d'un type de représentation à un autre, et surtout comprendre comment il se fait. Car, comment reconnaître que deux représentations, dont les contenus sont différents , puissent être deux représentations du même objet, si on n'a pas la possibilité d'avoir une expérience de cet objet en dehors de ces deux représentations? On peut se référer à une autre troisième représentation supposée plus familière. Mais, c'est simplement déplacer le problème. Là, se trouve le seuil de compréhension que beaucoup d'élèves ne franchissent pas.

Il ne s'agit pas, ici, de présenter les méthodes d'observation et les résultats qui mettent en évidence la relation entre les échecs pour passer d'un type de représentation à un autre et les difficultés rencontrées par les élèves en mathématiques (Duval 1996, 2006a). L'intérêt d'une approche sémiotique est plus théorique. Il est d'analyser comment fonctionne chacun des systèmes sémiotiques utilisés en mathématiques et d'expliciter le saut cognitif considérable que le passage de l'un à l'autre exige. Cela est important pour comprendre la complexité des apprentissages. Car, quels que soient les contenus et les objectifs visés, l'enseignement des mathématiques implique nécessairement l'introduction de nouveaux types de représentation et il exige que les élèves puissent passer spontanément de l'un à l'autre.

Pour illustrer les sauts existant entre des systèmes de représentation hétérogène, sauts qui sont au cœur des tâches mathématiques demandées aux élèves, nous pouvons garder l'exemple des différents types de représentation des nombres (Figure 5). Ce qui est demandé aux élèves peut alors se traduire dans les trois séries de flèches suivantes :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Pas de principes d'organisation pour l'emploi des marques | Des principes d'organisation déterminent **l'EMPLOI** des signes et leurs **COMBINAISONS** en unités de sens (expressions) | |
| TYPES DE REPRÉSENTATION DES NOMBRES | **I. Des dessins schématisant des d'objets** | **II. Des marques unités formellement indiscernables** | **III. Des systèmes d'écriture de position** | **IV. Notations algèbriques** |
| **Passages d'un type à un autre Et coordination cognitive** | (1) | ? (2) | ? (3) (5) (5bis) | ? (4) |

***Figure 9.*** Ruptures sémiotiques dans la représentation des nombres et/ou des grandeurs.

**3.1 Des dessins schématisant des objets matériels jusqu'à l'écriture algébrique : un ordre d'introduction progressif aveugle aux ruptures ?**

Les passages représentés par les flèches (1) (2) et (3) dans le tableau ci-dessus sont souvent considérés comme un ordre, aussi bien génétique qu'historique, d'apparition. C'est un tel ordre que l'enseignement suit de la Maternelle jusqu'au début du Collège. Or, c'est évidemment le passage (3) qui retient le plus l'attention en raison du passage de l'arithmétique à l'algèbre, tandis que le passage (2), celui de marques unités manipulables comme des objets matériels à un système d'écriture de position, n'est pas considéré comme un saut sémiotique important parce qu'il s'agirait toujours des mêmes objets, les nombres entiers ! Pourtant, ce changement de représentation affecte le sens des opérations[3], car il introduit des algorithmes d'opérations qui n'ont plus rien de commun avec des manipulations libres sur des marques unités. Et il marque comme une première ligne d'arrêt, souvent masquée par une fausse familiarité avec l'usage culturel du système décimal dans l'apprentissage des mathématiques.

Voici deux exemples de difficultés classiques et récurrentes auxquelles l'apprentissage se heurte. Ceux-ci soulignent la complexité sémiotique, irréductible et trop souvent sous-estimée, de la représentation décimale des nombres.

Le premier exemple est emprunté à une enquête d'évaluation nationale sur les décimaux chez des adultes et porte sur des situations de la vie courante (Leclère, 2000 ) :

« Les adultes que nous avons observés ont entendu ou retenu : «multiplier par 10, c'est rajouter un zéro! »

3 Il y a deux types d'interprétation des signes mathématiques qu'il est capital de ne pas confondre. L'un est interne aux démarches mathématiques et l'autre concerne l'application d'opérations ou de modèles mathématiques à des situations de la réalité physique, économique ou quotidienne, dont il faut sélectionner des données (Duval, 2003). En ce sens, il y a une sémantique mathématique et une sémantique commune, celle correspondant à la pratique commune du langage et à la culture d'un milieu ou d'une société. Pour pouvoir justifier les mathématiques, l'enseignement tend à rabattre la sémantique mathématique sur la sémantique commune ! Cela se révèle catastrophique pour l'analyse des problèmes d'apprentissage. Car nous sommes là devant deux types de problèmes très différents.

| | | |
|---|---|---|
| — **10** forets à **25,99** F cela fait combien ? | — à peu près **300** balles! | *sait faire* **25** x 10 et **30** x 10 *mais ne voit pas* |
| | — Je vais faire l'opération | |
| — Combien exactement ? | | 25,9 proche de **26** |
| | — **250, 99** ! peut-être plus ! | |
| — Combien ? | | **(**et donc ne fait pas **26** x 10) |

***Figure 10.*** Exemple d'incompréhension typique du système de la représentation décimale des nombres

Avant de résulter d'une incompréhension des nombres décimaux, cet exemple montre une incompréhension du système de représentation des nombres. En effet, ce qui a été retenu par ces adultes reflète une double déficience : d'une part, le non accès au principe d'organisation de l'écriture, dont la règle retenue n'est qu'une description partielle et, d'autre part, la non articulation de l'écriture numérique avec l'énonciation orale des nombres, utilisée par ailleurs sans erreur pour estimer les ordres de grandeur des prix familiers !

Le deuxième exemple montre que le recours à un type de représentation plus familier ne constitue pas nécessairement une aide pour entrer dans un autre système. Car cela soulève deux questions. La première est celle de la congruence entre les deux types de représentations. La seconde est celle de savoir si on peut articuler, par exemple, une représentation concrète ou iconique et une représentation symbolique. Dans le cadre de l'apprentissage de la multiplication, le problème suivant a été présenté : Madame Dubois a acheté 5 tablettes de chocolat à 7 francs l'une. Combien a-t-elle dépensé ?». Les trois types de réponses ont été observées (Brissiaud 1995 ,15).

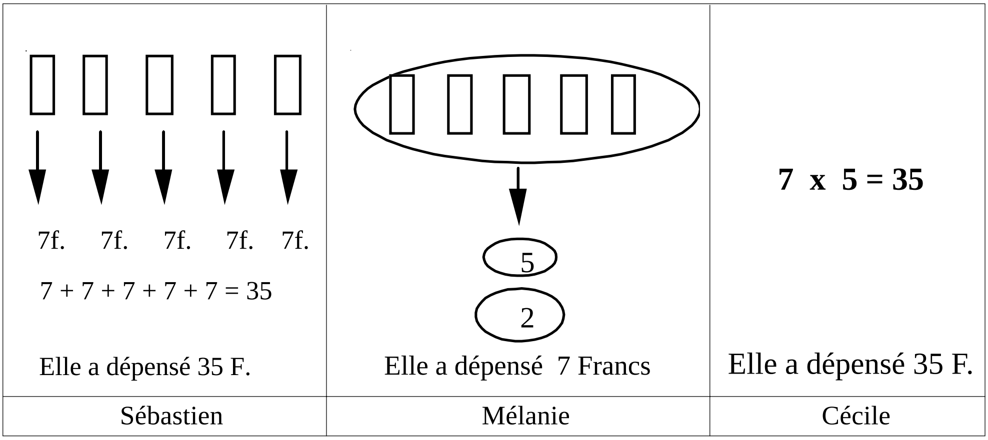



***Figure 11.*** Quelle articulation entre deux types de représentation ?

Les deux premières productions utilisent simultanément des dessins schématisant des objets et l'écriture décimale des nombres. Or, le recours à la représentation iconique d'une quantité conduit à des productions différentes chez Sébastien et chez Mélanie.

Chez Sébastien, la représentation iconique d'une quantité est mise en correspondance avec les prix unités. Or, il est important de voir que ce type de représentation iconique impose quasi nécessairement l'opération additive ! Chez Mélanie, la représentation iconique d'une quantité induit une opération de regroupement des images schématisées de tablettes et cette opération est marquée par un encerclement (2.1.1). Cela conduit à une impasse sémiotique car aucune correspondance pertinente ne peut plus alors être établie avec l'écriture numérique des nombres.

Ces deux exemples montrent que le passage d'une représentation iconique des nombres par des marques unités à la représentation par un système d'écriture de position constitue peut-être un saut analogue à celui de l'apprentissage de la lecture. Et pour les difficultés qui apparaissent à travers ces exemples, on pourrait ici presque parler de **difficultés d'alphabétisation numérique**. En revanche, les difficultés d'entrée dans l'algèbre sont d'une toute autre nature : elles concernent la maîtrise d'un langage, à commencer par les opérations discursives de désignation (Duval, 2002). Or, chacun sait que, dans le langage, ce ne sont pas les mots qui importent mais les énoncés et, sous-jacentes aux énoncés, les opérations discursives qui en construisent le sens (Duval,1995a).

### 3.2 De l'écriture algébrique aux dessins et aux marques unités : quelle fonction et pour qui ?

La deuxième série de flèches (les flèches inverses (4), (5), (5bis) de la Figure 9) correspond aux productions individuelles que l'on peut observer chez des étudiants ou dans des manuels. Celle-ci marque un retour vers des représentations pseudo concrètes qui sont à la fois manipulables et qui correspondent à de petites quantités que l'on peut « voir ». Ce retour peut répondre à des besoins très différents.

Ce peut être pour des besoins de bricolage, lors d'une phase de recherche d'un problème, ou pour des besoins de vérification (Hitt, 2003). Ce peut-être aussi pour un besoin de preuve. Ainsi Wittgenstein lui-même, voulant souligner contre Russell la nécessité d'une synopsis dans un processus de preuve mathématique, n'hésite pas à dessiner:

||||||||||||||||||||||||||| ||||||||||||||||

Puis il commente :

> « Cette figure est-elle une preuve que 27 + 16 = 43 parce qu'on arrive à «27» **en comptant les traits** du côté gauche et à «16» **quand on compte ceux du côté droit**, et à «43» **quand on compte la série entière**?... A quoi tient l'étrange ici - quand on appelle la figure preuve de cette proposition ? Eh bien à la façon dont il faut reproduire ou reconnaître cette preuve : en ce qu'elle n'a pas de forme visuelle caractéristique... » (1983, p. 143).

Quel que soit le besoin ou la fonction particulière qui commande l'utilisation de ces représentations qu'on peut manipuler comme des pseudo objets, cette utilisation manifeste toujours le besoin de s'éloigner de l'abstraction sémiotique, « aveugle » selon Leibniz, pour revenir aux choses mêmes, ou du moins à ce qui aiderait à les apercevoir.

Cependant, il faut être ici extrêmement prudent dans l'interprétation des utilisations faites de ce type de représentation. Outre la polyvalence fonctionnelle de leur utilisation, on peut se demander si le recours à ce type de représentation correspond aux mêmes démarches cognitives chez un expert et chez un élève du primaire. En d'autres termes, le recours à ces représentations relève-t-il de la même compréhension chez celui qui peut à loisir passer d'un type de représentation à un autre et chez celui qui ne peut travailler qu'avec des représentations pseudo concrètes ? Cette question est celle de la coordination entre les différents types de représentations et, donc, celle de la capacité des individus à passer d'un type de représentation à un autre. Elle est marquée par la troisième série de flèches sur la figure 9 ci-dessus.

### 3.3 Les difficultés intrinsèques à la coordination des registres de représentation et les passages d'un type de représentation à un autre.

C'est la situation épistémologique très particulière des mathématiques qui rend le passage d'un type de représentation à un autre si difficile et si insaisissable pour les apprenants. En effet, en mathématiques comme dans les autres domaines de connaissances l'exigence épistémologique de ne jamais confondre les représentations avec les objets représentés demeure (Figure 1). Mais, comment ne pas confondre les représentations sémiotiques avec les objets représentés, lorsque ces objets ne peuvent pas être atteints en dehors de ces représentations?

Une chose en tout cas est certaine : la capacité à passer d'un type de représentation sémiotique à un autre et la reconnaissance d'un même objet représenté dans deux représentations dont les contenus sont différents sont les deux faces d'un même processus cognitif. Deux réactions interprétatives manifestent ce processus cognitif et sont d'ailleurs nécessaires pour conduire une activité mathématique ou résoudre des problèmes :

— reconnaître un même objet représenté à travers deux représentations dont les contenus sont sans rapports entre eux, parce qu'elles *dépendent de systèmes différents.* Il s'agit ici d'une **reconnaissance identifiante** qui permet, par exemple pour une procédure de dénombrement, de jouer sur au moins deux registres différents : les représentations figurales et l'établissement de suites numériques.

— reconnaître deux objets différents, à travers deux représentations, dont les contenus paraissent semblables, parce qu'elles relèvent *du même système de représentation* et que, d'une représentation à l'autre, la variation de contenu est faible. Il s'agit ici d'une **reconnaissance discriminante** qui conduit, par exemple, à la variation de l'écriture algébrique d'une fonction linéaire quand on varie la position d'une droite sur un plan organisé selon des coordonnées cartésiennes, et inversement ! Mais on pourrait également prendre l'exemple des énoncés de problèmes additifs, de mises en équations, et plus généralement tous les énoncés verbaux d'application de savoirs mathématiques à des situations non mathématiques.

Un individu ne devient capable de ces deux réactions que lorsqu'il a commencé à développer des coordinations entre les différents systèmes de représentations.

Or, il ne suffit pas que l'enseignement ait fait suivre aux élèves le parcours marqué par les flèches (1), (2), (3) dans la Figure 9 et que l'on voit les élèves effectuer des retours du type (4) ou (5), pour que de telles coordinations cognitives se soient développées et que les élèves aient acquis de réelles capacités de conversion (Duval, 2006 b). Le problème qui se pose dans l'enseignement des mathématiques n'est pas de savoir de quel type de représentations, sémiotiques ou non sémiotiques, seraient les productions spontanées des élèves, ou encore quel serait le meilleur type de représentation pour les élèves, **mais pourquoi les élèves ont tant de mal à passer d'un type de représentation sémiotique à un autre et comment leur faire acquérir cette capacité.** Car un élève incapable de ces passages se trouve très vite durablement bloqué dans sa compréhension et ses capacités de recherche et de contrôle, pour les activités mathématiques qu'on peut lui proposer.

## IV. QUELLE SÉMIOTIQUE POUR LES MATHÉMATIQUES ET POUR L'ANALYSE DES PROBLÈMES QUE SOULÈVE LEUR APPRENTISSAGE ?

Il pourrait paraître provoquant d'affirmer que la sémiotique comme science des signes reste encore à fonder et que les différentes théories des signes souffrent des limitations du champ particulier des signes qu'elles ont étudiés : la logique et l'interprétation adaptative des phénomènes observés dans l'environnement avec Pierce, la linguistique avec Saussure ou encore les phénomènes de codage et de transmission d'informations avec Jakobson, etc. Ces théories ont eu au moins l'intérêt de définir cinq relations fondamentales pour analyser ce qu'on considère comme *eikon* et non comme le corps dont on voit le reflet (Platon, *Républiqu*e 509$^{e}$), comme *signum* et non pas comme la *res* (Augustin, 1997), comme *representamen* et non pas simplement comme l'objet dont il tient lieu (Peirce, 1978). En réalité, chacune de ces relations, ou parfois leur composition, caractérise un type particulier de signes : image réfléchie ou image imitée, signe logique ou algébrique, signe linguistique, trace, indice ou signal. La question est de savoir si tout cela constitue un apport utile et pertinent pour l'analyse des signes en mathématiques et du rôle qu'ils jouent dans le fonctionnement de la pensée. Pour cerner cette question avec plus précision, nous allons examiner trois questions.

### 4.1 Comment situer la distinction signifiant-signifié par rapport à la relation signe-objet ?

La distinction signifiant-signifié est souvent présentée comme une analyse de la structure interne des signes. Un signe serait constitué de deux éléments : son aspect matériel qui le rend perceptible et son aspect immatériel qui serait sa signification. Cette distinction ne doit évidemment pas être confondue avec la fonction cognitive d'évocation d'un objet absent dont le signe tient lieu (Figure 1). Les stoïciens ont été les premiers à avoir explicitement bien séparé les deux aspects de la « signifiance » des signes: la signification et la dénotation.

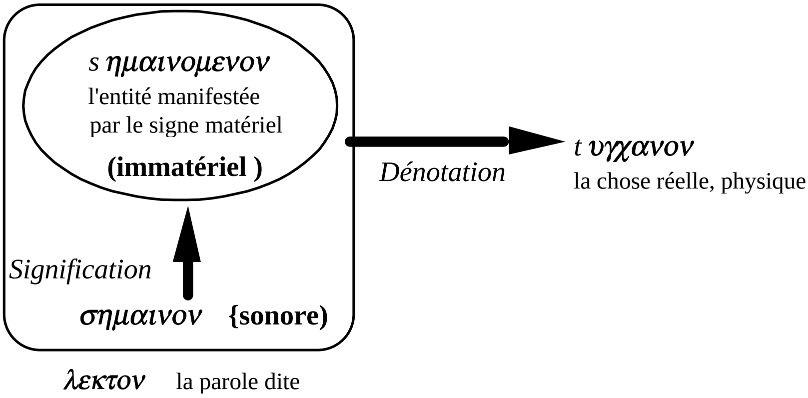



***Figure 12.*** Schéma de l’analyse stoïcienne de la signifiance des signes

On peut tout de suite faire trois remarques :

— La distinction entre signifiant et signifié ne vaut que pour les signes linguistiques, c’est-à-dire pour les langues dont l’emploi est d’abord oral pour remplir une fonction sociale de communication. Cela veut dire que **la distinction entre signifiant et signifié ne s’applique pas aux symboles mathématiques ni d’ailleurs aux signes purement graphiques, c’est-à-dire purement visuels.** Car les signes purement graphiques, à la différence des signes linguistiques, lesquels sont d’abord oraux avant d’être codés graphiquement, ne relèvent pas d’une double articulation (*supra* I.6). Ils relèvent uniquement d’une relation de référence qui lie un caractère à un objet, constituant ainsi ce caractère en signe. Or, cette relation de référence est établie par une opération de désignation (*supra* 1.2) et elle peut d’ailleurs répondre à des fonctions très différentes selon le contexte particulier de la démarche où cette opération de désignation est effectuée. Il n’y a pas de signifiant algébrique, mais seulement des notations qui sont des signes par leur seule référence instituée à un objet (Freudenthal 2002 ; Weyl 1994).

— La distinction signifiant-signifié ne permet pas de définir la nature des signes comme Saussure (1973) l’a montré. On ne peut donc pas considérer le signifiant et le signifié comme deux constituants qui auraient chacun une identité ou une réalité par eux-mêmes. Les signifiants (phoniques) comme les signifiés lexicaux ne sont déterminés que par des différences respectivement à d’autres signifiants phoniques et à d’autres signifiés à l’intérieur d’une langue (*supra* 1.4). Ce n’est pas le signifiant qui signifie mais le signe dans sa totalité indivisible.

— **Les signes, à la différence des signaux ou des représentations non sémiotiques, relèvent toujours d’un emploi intentionnel**. Cela veut dire qu’il ne faut pas confondre les images produites intentionnellement, comme par exemple les dessins, et les images produites automatiquement par le seul usage d’un appareil ou par le jeu des lois physiques (celles par exemple de la réflexion). Cela veut dire aussi que, parmi les cinq relations fondamentales permettant de caractériser des signes, la relation d'opposition alternative (1.4) et la relation de référence (1.2) sont les relations les plus appropriées à un emploi intentionnel. Cela est particulièrement net pour la relation de référence qui s'inscrit toujours dans une opération discursive de désignation d'un objet (individu, classe, relation, etc.).

Il apparaît donc qu'on ne peut pas mettre sur le même plan la distinction signifiant-signifié, laquelle relève de la double articulation spécifique aux langues, et la relation signe-objet, laquelle relève d'une opération discursive de désignation ou de définition. Ce qu'on a présenté comme le triangle sémiotique (Eco 1990, p.31-33) est une illusion néfaste pour la compréhension de ce qu'est un signe et de la manière dont il peut évoquer ou «tenir lieu». On ne peut pas fermer le schéma illustrant les deux aspects, ou plus exactement les deux niveaux de la signifiance des signes (Figure 12) : le niveau du système sémiotique constitutif d'un type de signes (par exemple une langue naturelle ou formelle) et le niveau du discours produit ou du traitement effectué à l'aide de ce système sémiotique.

Il faut donc s'interroger sur la pertinence du recours à la distinction signifiant-signifié que l'on trouve dans beaucoup de travaux de didactique des mathématiques, dans lesquels d'ailleurs le terme « signifié » devient vite synonyme de « concept » et le terme « signifiant » synonyme de « signe » ! Cette distinction induit un glissement d'idées qui conduit à des conclusions erronées : de l'immatérialité du signifié, on glisse à son caractère non sémiotique et, par la suite, à la nécessité de doubler les représentations sémiotiques par des représentations mentales pures. Comme si la pensée était indépendante de tout *lecton* ou de tout langage !

### 4.2 Comment distinguer, dans la variété des signes, différents types ou catégories de signes : en fonction des relations fondamentales ou en fonction des systèmes producteurs de signes et de représentations ?

C'est certainement l'apport de Peirce que d'avoir mis cette question au centre de l'étude des signes. Et c'est lui qui a proposé la première classification systématique des signes. En fait, cette question de la classification recouvre deux problèmes qu'il est important de ne pas confondre. Il y a tout d'abord celui du corpus de signes et de représentations, c'est-à-dire le champ d'observation à partir duquel on établit la classification. Il y a ensuite le problème des critères ou des principes que l'on retient pour établir la classification.

#### *4.2.1 Quelle diversité de signes et de représentations sert de base à l'étude des signes et des représentations?*

Il faudrait ici produire un corpus d'exemples. Nous ne pouvons ici qu'évoquer la variété des signes et des représentations que l'on met sous les mots « image » et « symbole », ce qui rend l'emploi de ces termes problématique ou équivoque.

Ainsi le mot « image » peut recouvrir non seulement des dessins schématisés ou des « copies » (Figure 2) mais également des reflets dans un miroir ou encore les productions du rêve, les souvenirs visuels. C'est sur la base de ce type d'images que Platon a élaboré son analyse de la représentation. Le développement technologique est venu élargir encore cette gamme avec les photos argentiques et les photos numériques. Quoi de commun entre tous ces types d'images ?

Le mot « symbole » est employé également pour une variété considérable de signes : les notations mathématiques, les sigles, et même des fragments de l'objet représenté. Peut-on aussi l'utiliser pour caractériser les mots de la langue ? L'opposition « antithétique », soulignée par Benveniste (1974), entre l'approche de Peirce et celle de Saussure, vient de ce que le premier avait cherché à prendre en compte la diversité des signes, au risque de perdre la spécificité des langues naturelles, et que le second s'était au contraire limité à la langue en en faisant le système sémiotique par excellence, c'est-à-dire celui dont les autres pouvaient être dérivés. Mais qu'y a-t-il de commun entre les mots d'une langue et les notations mathématiques ?

Si maintenant nous regardons les mathématiques, nous sommes devant une situation encore plus complexe, car les mathématiques utilisent une gamme très étendue de signes et de représentations. Il y a, d'une part, tous les types de signes progressivement créés pour le calcul numérique et algébrique, mais il y a également les figures en géométrie, qui peuvent ressembler à des dessins schématisés, mais qui ne le sont pas, et il y a aussi tous les graphes et enfin la langue naturelle qu'il ne faut pas oublier. Car la langue naturelle continue de jouer un rôle essentiel en mathématiques: sans elle, il ne pourrait pas y avoir d'énoncés, c'est-à-dire de définitions, de théorèmes ou même d'énoncés de problème.

### *4.2.2 Selon quels critères distinguer et classer la variété des signes et des représentations ?*

Pour classer la variété des signes, **Peirce a pris comme critères deux des cinq relations fondamentales** que nous avons distinguées plus haut : la relation de ressemblance (1.1) et la relation cause → effet (1.3.1 ). Avec ces deux relations, il a établi la partition trichotomique suivante :

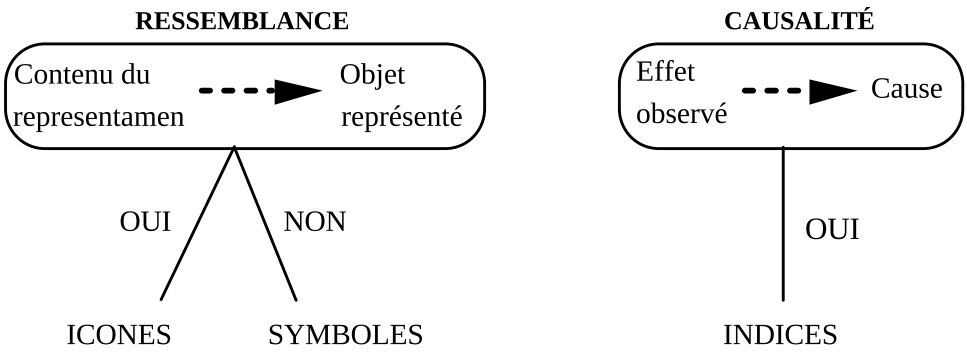



***Figure 13.*** Partition trichotomique des signes selon Peirce

On remarquera qu'il n'y a pas de rapport entre les deux relations retenues par Peirce. En effet, dans la première relation, les signes et les représentations sont caractérisés comme étant des r*epresentamen* à partir de leur seul contenu. Dans la seconde relation, les signes et les représentations sont considérés comme étant le résultat, ou l'effet du phénomène ou de l'objet qu'ils évoquent. Ce peut être un effet direct comme la fumée. Mais ce pourrait être aussi bien un effet indirect médiatisé par un système physique (un appareil photo) ou neurophysiologique (la mémoire visuelle). De toute manière, la classification de Peirce se limite à juxtaposer ces deux relations hétérogènes.

Pour notre propos, la principale question n'est cependant pas là. Elle est de savoir si cette trichotomie est suffisamment discriminante pour être utilisée dans l'analyse des productions mathématiques. Par exemple, le recours à la notion d'icône, fondée sur la relation de ressemblance, permet-elle de distinguer les différences entre les figures schématisées qui peuvent évoluer vers des marques unités (Figure 2, 4 et 5), les figures figuratives (Figure 2) et les représentations visuelles de la géométrie (Figures 3, 6 et 7) ? Le recours à la notion de symbole, permet-il de discriminer entre les systèmes d'écriture des nombres, les symboles algébriques ou logiques, et les mots d'une langue (Figure 4, 5 et 12) ? D'une manière plus générale, cette partition trichotomique permet-elle de prendre en compte les signes qui dépendent d'un système producteur, c'est-à-dire de principes d'organisation générant des règles de formation et une syntaxe[4], et les marques qui sont des supports pour des opérations libres ou encore qui sont seulement la trace d'une opération faite ? Cette question n'a rien de général et de vague. Peut-on, par exemple, appliquer la catégorie d'indice pour désigner le recours à des lettres marquant une opération discursive de désignation et répondant à une fonction d'abréviation (Radford, 1998) ?

La tentative de la classification des signes permet donc de formuler un problème théorique fondamental pour la sémiotique : les relations fondamentales pour l'analyse des signes, peuvent-elles être des critères pertinents et discriminants pour établir une classification des signes utilisable en mathématiques ? Il semble qu'aucune théorie sémiotique cohérente ne soit susceptible d'articuler ensemble les différentes relations fondamentales qui ont été mises en évidence de Platon à Saussure. Il semble en outre, que ces relations ne permettent pas de prendre en compte ce qui est pourtant essentiel pour l'activité et la pensée mathématiques : la transformation des représentations *(supra* II).

En réalité, si l'on veut classer les signes, il faut partir d'un tout autre point de vue : celui des systèmes qui produisent les représentations. La variété des représentations vient de la diversité des systèmes producteurs de représentations, ainsi que nous l'avons déjà suggéré plus haut à propos de la photo intitulée « une et *n* chaises ». Car il y a autant de types de représentations possibles qu'il existe de systèmes différents pour les produire. Ce sont donc moins les représentations qu'il s'agit de classer que les systèmes permettant de les produire (Duval, 1999). Ces systèmes peuvent être :

— de nature physique (reflets, photographies) ou neurophysiologique (images oniriques, souvenirs visuels...) : dans ce cas, la relation est une relation de causalité et le mode de production ne dépend pas de l'intention du sujet mais des propriétés du système qui produit la représentation. En retenant la relation effet observé $\rightarrow$ cause, Peirce s'en est tenu aux seuls systèmes physiques comme systèmes producteurs de représentation.

[4] Rappelons que le principe de position de l'abaque génère une règle de composition des signes qui permet de désigner systématiques et sans confusion n'importe quel nombre entier, la seule limitation étant celle du coût temporel et spatial. En ce sens le principe de position de l'abaque génère un ébauche de syntaxe.

— de nature sémiotique : dans ce cas, la relation est une relation de référence et la production est une production intentionnelle, c'est-à-dire opérant des choix dans la production des représentations qui impliquent une élaboration combinant des unités de sens. Il est surprenant que l'on ait peu ou pas du tout prêté attention au fait que les systèmes sémiotiques sont aussi des systèmes producteurs de représentation. Cela est pourtant frappant en mathématique, ne serait-ce qu'avec les systèmes de numération ! Mais, c'est aussi frappant avec les langues naturelles. L'oublier, c'est oublier toute la création littéraire et poétique.

En ce qui concerne les mathématiques, ce sont évidemment les systèmes sémiotiques qui sont intéressants, et non pas les systèmes de nature physique ou organique. On peut alors classer les systèmes sémiotiques en prenant en compte deux aspects : d'une part, selon qu'ils permettent, ou non, des traitements algorithmiques et, d'autre part, selon qu'ils sont multifonctionnels ou monofonctionnels. Nous obtenons ainsi quatre grandes classes de registres de représentation utilisées en mathématiques (Duval 2003 ; 2006a p.110). Elles permettent, en particulier, de voir que la géométrie mobilise au moins deux types totalement différents de représentations. Cette classification permet de mettre en évidence les deux grands types de transformations des représentations, c'est-à-dire les conversions et les traitements qui font la dynamique de toute activité mathématique (Figures 7 et 9) ainsi que les variables cognitives qui jouent dans l'apprentissage des mathématiques.

### 4.3 L'analyse des signes et des systèmes sémiotiques, peut-elle être entièrement subordonnée à la fonction remplie par les signes dans un contexte déterminé ?

Cette question touche le problème des rapports entre une analyse fonctionnelle des signes et une analyse structurale. Il faut reconnaître que, dans la plupart des travaux, hormis ceux qui prennent en compte l'apport de Saussure, l'analyse des signes est faite en leur assignant une ou plusieurs fonctions, sans que ni une analyse structurale du fonctionnement propre à chaque type de représentation ni une étude systématique de leurs fonctions possibles (Duval, 1999) n'aient réellement été faites. Ainsi, pour la langue naturelle, c'est la fonction de communication qui est immédiatement retenue. Mais, lorsqu'il s'agit des notations algébriques, on fait évidemment appel à d'autres fonctions :

— abréger, faire court, non seulement pour soulager la mémoire mais également pour appréhender le plus grand nombre de signes (et donc d'objets) dans un seul acte de pensée. En d'autres termes, il s'agit de transformer l'appréhension successive d'une séquence en une appréhension simultanée. Cette **fonction d'économie cognitive,** qui a été explicitée pour la première fois par Descartes, tient essentiellement compte des limitations des capacités de l'intuition et de la mémoire (*supra* 2.1.3). Mais, cette fonction d'économie cognitive ne peut réellement être mise en œuvre que dans une production écrite des signes, et non pas dans la parole.

— pouvoir effectuer des substitutions de signes entre eux. C'est la **fonction mathématique de traitement** que les signes doivent remplir pour permettre d'effectuer des calculs. Et la puissance de calcul dépend évidemment du système sémiotique utilisé.

Il y a bien d'autres fonctions que nous n'allons pas prendre en compte ici. Cela suffit pour soulever les deux problèmes suivants en nous limitant aux seules fonction de communication et de traitement.

*4.3.1 Un même système sémiotique peut-il remplir des fonctions hétérogènes ?*

Le langage, c'est-à-dire l'expression dans un langue naturelle, répond prioritairement à une fonction sociale de communication. C'est à ce titre que l'on oppose souvent les mathématiques et le langage. Cependant, la langue naturelle est aussi utilisée, par exemple en géométrie, pour effectuer des démarches mathématiques qui vont permettre de remplir une fonction de preuve : pour définir, pour énoncer des théorèmes, pour déduire. Ce changement de fonction dans l'utilisation de la langue entraîne un changement, souvent non remarqué, dans les opérations discursives qui vont être privilégiées (Duval, 1995a). La difficulté de l'utilisation de la langue naturelle en mathématiques tient au fait qu'un changement de fonction dans son utilisation entraîne un autre type de fonctionnement du discours. Et, le plus souvent, ce changement de fonction ne peut se faire qu'en passant d'une modalité d'expression orale à une modalité d'expression écrite. Car la pratique orale de la langue ne permet pas de remplir les mêmes fonctions que sa pratique écrite (Duval 2000, 2001). C'est là une source profonde, et souvent niée, d'équivoques dans l'enseignement des mathématiques entre les enseignants et leurs élèves (Duval, 2003).

On pourrait faire des remarques analogues à propos des fonctions très différentes que l'on fait remplir aux figures géométriques (Duval, 2005).

Au contraire, les systèmes que nous avons appelés « monofonctionnels », comme les systèmes de numération ou le symbolisme mathématique constitutif des langages formels, ne permettent de remplir qu'une seule fonction, celle de traitement.

*4.3.2 Quel est le degré de liberté de l'interprétant dans la signification des signes ?*

Ce qui est le plus souvent cité, et retenu, de la définition des signes proposée par Peirce est la relation des signes à un interprétant : « Un signe ou *representamen* est quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un de quelque chose ». Cette relation, que nous n'avons pas retenue parmi les relations fondamentales, est, en effet, très générale et son utilisation dans l'analyse des productions requiert que l'on prenne en compte deux facteurs importants.

Le premier facteur est le type de représentation. Nous avons vu, par exemple, qu'il y avait deux grands types de représentation des nombres (Figure 4 et Figure 5). Lorsque la représentation dépend d'un système de numération, comme, par exemple, le système décimal, l'interprétant n'a aucun degré de liberté. En revanche, s'il s'agit de marques unités, l'interprétant dispose de tous les degrés de liberté qu'il souhaite puisque les représentations lui servent seulement de support externe pour des manipulations libres.

Le deuxième facteur est la situation de l'interprétant : est-il lui-même en situation de production, comme dans un travail de recherche, ou est-il en situation de réception, comme dans l'écoute ou la lecture d'une explication ? Dans la première situation, la relation de l'interprétant aux signes varie selon qu'il produit les représentations pour lui-même, c'est-à-dire pour explorer, pour contrôler, pour mieux prendre conscience ou, au contraire, selon qu'il produit les représentations pour les autres, c'est-à-dire pour communiquer. Dans la première situation, c'est la fonction que l'interprétant assigne aux signes qu'il produit lui-même qui détermine leur critère d'interprétation. Dans la seconde situation, l'interprétant n'a que le contexte global de la communication qui lui sert alors d'appui pour comprendre. C'est dans cette situation particulière qu'une approche pragmatique des signes devient plus essentielle qu'une approche sémantique ou syntaxique. Historiquement, l'intérêt de la relation à l'interprétant qui est mentionnée dans la définition de Peirce est d'avoir ouvert une approche pragmatique dans l'analyse des productions sémiotiques. Mais, une telle approche peut-elle être mise au centre d'une analyse sémiotique de l'activité et des productions mathématiques ?

## CONCLUSION

L'analyse de signes se fait toujours par rapport au type d'activité pour lequel la production et la transformation de représentations sémiotiques s'avèrent nécessaires. Pour ne pas se trouver trop retreintes dans leur champ de validité et d'application, les théories du signe ont donc cherché à s'appuyer sur les formes d'activités les plus communes et, donc les plus générales : la communication, l'interprétation adaptative des phénomènes de l'environnement, ou, en psychologie, la dualité de ces modes de la représentation que sont l'image et le langage, et plus récemment les transmissions de l'information avec leur traitement numérique. Mais toutes ces théories restent en deçà de la complexité et de la variété des représentations sémiotiques qui sont mobilisables dans l'activité et les productions mathématiques.

L'originalité de l'activité mathématique par rapport à tous les autres types d'activité est double. D'une part, ce sont les mathématiques qui utilisent le spectre le plus étendu de représentations sémiotiques et elles ont même contribué à l'enrichir. Mais, elles le font toujours avec la même exigence : utiliser les possibilités de transformation que chaque type de signes ou de représentation peut offrir de manière spécifique. Et cela, pour des raisons heuristiques, pour des raisons de simplification ou d'économie, pour des besoins de contrôle, pour augmenter la puissance de traitement, etc. D'autre part, les objets de connaissances mathématiques sont indépendants des représentations utilisées pour y accéder ou pour les utiliser. Ce qui rend tel ou tel type de représentation sémiotique, localement ou momentanément nécessaire, c'est la fonction que ce type de représentation permet de remplir : fonction heuristique, fonction de contrôle, fonction de traitement. La variété des types de signes mobilisés dans les productions mathématiques reflète la variété des démarches de pensée à accomplir dans une activité mathématique. C'est pourquoi une sémiotique prenant en compte la variété des représentations sémiotiques mobilisées en mathématiques reste peut-être encore à faire ! Mais, pourquoi alors une approche sémiotique ?

Nous touchons là au paradoxe cognitif des mathématiques. Les objets de connaissances mathématiques ne sont accessibles que par le moyen de représentations sémiotiques, mais ils ne peuvent jamais être confondus avec les représentations sémiotiques qui permettent de les atteindre et de les utiliser. Comment alors reconnaître les mêmes objets dans la variété de leurs représentations possibles ? C'est évidemment ce paradoxe qui est au cœur des difficultés que les élèves rencontrent dans l'apprentissage des mathématiques, paradoxe qui n'existe pas dans les autres domaines de connaissance.

En outre, il faut rappeler que l'enseignement des mathématiques ne se limite pas à introduire des concepts selon une progression planifiée dans un curriculum. Il introduit aussi de nouveaux systèmes de représentations sémiotiques, en même temps qu'il introduit une autre mode de fonctionnement cognitif dans les systèmes culturellement communs des images et du langage. L'analyse des différentes tâches impliquées dans les activités proposées aux élèves et dans la résolution de problèmes ne peut pas faire l'impasse sur la variété des représentations sémiotiques à mobiliser. Le paradoxe cognitif des mathématiques ne peut être résolu par les élèves que par une coordination de tous les registres de représentation mobilisables dans l'activité mathématique. Les passages d'un registre à un autre, qui sont ce qu'il y a de plus difficile, ne deviennent possibles pour les élèves qu'avec le développement d'une telle coordination.

Ne prendre en compte dans l'enseignement ni ce paradoxe cognitif ni la complexité cognitive d'une mobilisation simultanée ou successive de types de signes hétérogènes, qui est pourtant inhérente à l'activité mathématique, c'est prendre le risque d'égarer la plupart des élèves dans ce qu'on pourrait appeler, en prolongement des réflexions de Leibniz sur «ce qui embarrasse notre raison», le troisième « labyrinthe », celui des représentations sémiotiques.

## REFERENCE LIST


Augustin, (saint) (1997). *De Doctrina Christiana.* Paris: Institut d'Etudes Augustiniennes.

Belmas, P. (2003). Apprentissage de la proportionnalité et symbolisations chez des élèves en échec scolaire de SEGPA. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *8*, 167-189.

Benveniste, E. (1974). Sémiologie de la langue. In *Problèmes de linguistique générale*, *2*, (pp. 43-66). Paris: Gallimard.

Bessot, D. (1983). Problèmes de représentation de l'espace. In Enseignement de la Géométrie, *Bulletin Inter-IREM* , *23*, 33-40.

Boysson-Barides, B. (1999). *Comment la parole vient aux enfants*. Paris : Odile Jacob.

Bresson, F. (1987). Les fonctions de représentation et de communication. In J. Piaget, Mounoud & Bronckart (Eds.), *Psychologie* (pp. 933-982). Paris: Encyclopédie de la Pléiade.

Brissiaud, R. (1995). *J'apprends les maths*, *CE2*. Paris : Retz.

Condillac (1982 (1798)). *La langue des Calculs.* Lille: Presses universitaires de Lille.

Deledicq, A. (1979). *Mathématiques 4ème*. Paris: Cédic.

Ducrot, O. (1972). *Dire et ne pas dire*. Paris: Hermann.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et Pensée humaine*. Berne: Peter Lang

Duval, R. (1995b) Geometrical Pictures : kinds of representation and specific processing. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1996) «Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349-382.

Duval, R. (1998). Signe et objet : trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*, 139-163.

Duval, R. (Ed.) (1999). *Conversion et articulation des représentations analogiques*. Lille: I.U.F.M. Nord Pas-de-Calais, D.R.E.D.

Duval, R. (2000). Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *20*(2), 135-170.

Duval, R. (2001). Pourquoi faire écrire des textes de démonstration. In E.Barbin, R.Duval, I. Giorgiutti, J.Houdebine, C. Laborde (Eds.), *Produire et lire des textes de démonstration* (pp.183-205). Paris : Ellipses.

Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. In Ph. Drouhard & M. Maurel (Eds.) *Actes des Séminaires SFIDA 13-16*, Volume IV 1901-2001 (pp.67-94) Nice: IREM.

Duval, R. (2003). Décrire, visualiser, raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *8*, 13-62.

Duval, R. (2005). Les conditions didactiques de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. ? *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *10*, 5-53.

Duval, R. (2006a). The cognitive Analysis of Problems of comprehension in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131 .

Duval R. (2006b). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXII ème Colloque COPIRELEM*, 67-89.

Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7-27.

Eco, U. (1990 (1973)). *Le signe* ( tr.J-M. Klinkenberg). Paris: Labor.

Frege G. (1971). *Ecrits logiques et philosophiques*. Paris : Seuil.

Freudenthal, H. (2002). Notation Mathématique. *Encyclopedia Universalis* (pp. 338-344). Paris

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *8*, 255-271.

Kaput, J. (1987). Towards a Theory of Symbol Use in Mathematics. In C Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale, New jersey/ London : Lawrence Erlbaum.

Lacroix, S.F. (1820). *Eléments d'Algèbre.* Paris : Mme Veuve Courcier.

Leclère, J.P. (2000). *Faire des mathématiques à un public en situation d'illettrisme : le contraire d'une utopie.* Thèse Université Lille 1.

Leibniz, G.W. (1972). *Oeuvres* I (Editées par L. Prenant). Paris: Aubier Montaigne.

Martinet, A (1966). *Eléments de linguistique générale*. Paris : Armand Colin.

Piaget, J. (1968a). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Neuchatel : Delachaux et Niestlé.

Piaget , J. (1968b). *La formation du symbole chez l'enfant.* Neuchatel : Delachaux et Niestlé.

Peirce, C.S. (1978). *Ecrits sur le signe* ( tr. G. Deledalle) Paris: Seuil.

Radford L. ( 1998). On signs and Representations. A cultural Account*. Scientia Paedagogica Experimentalis*, *35*(1), 277-302.

Russell, B. (1969). *Signification et Vérité* (tr.Ph ;Delvaux). Paris : Flammarion.

Saussure, F. de (1973 (1915)). *Cours de linguistique générale*. Paris : Payot.

Serfati, M. (1987). La question de la chose. Mathématiques et Ecriture. *Actes du colloque Inter IREM d'Histoire et d'Epistémologie des Mathématiques*, (pp. 309-334). Strasbourg: IREM.

Quine, W.V. (1977). *Relativité de l'ontologie et autres essais* (tr. Largeault). Paris: Aubier.

Weyl, H. (1994 (1953)) Sur le symbolisme des mathématiques et de la physique mathématique in *L e continu et autres écrits* (tr. Largeaut), (pp. 248-264). Paris: Vrin.

Wittgenstein, L (1983). *Remarques sur les fondements des mathématiques* (tr. M-A. Lescouret). Paris : Gallimard.

**Raymond Duval**
Université du Littoral Côte d'Opale(ULCO)
France

E-mail: ray@wanadoo.fr

# Socioepistemología y representación: algunos ejemplos

Ricardo Cantoral [1]
Rosa-María Farfán [2]
Javier Lezama [3]
Gustavo Martínez-Sierra [4]

## RESUMEN

Este artículo discute, en distintos planos y con el empleo de diversos ejemplos, un papel para la noción de *práctica social* en la construcción de conocimiento matemático y de cómo se articula con procesos de representación. Particularmente, estudiamos algunas actividades como medir, predecir, modelar y convenir, como escenarios de construcción social de conocimiento matemático.

- **PALABRAS CLAVE**: Socioepistemología, práctica social, representación.

## ABSTRACT

In this article we discuss, at different levels and through several examples, one role that the notion of *social practice* can play in the construction of mathematical knowledge and its articulation with processes of representation. Particularly, we study some activities such as measuring, predicting, modeling and agreeing as scenarios of social construction of mathematical knowledge.

- **KEY WORDS:** Socioepistemology, social practice, representation.

## RESUMO

Este artigo discute, em distintos planos e com o emprego de diversos exemplos, um papel para a noção de *prática social* na construção do conhecimento matemático e de como se articula com os processos de representação. Particularmente, estudamos algumas atividades como medir, predizer, modelar e ajustar, como cenários de construção social de conhecimento matemático.

*Fecha de recepción: Marzo de 2006/ Fecha de aceptación: Mayo de 2006.*

1 Centro de Investigación en Matemática Educativa (Cimate). Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero (en receso sabático 2005 – 2006). Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav, IPN.

2 Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav, IPN.

3 Programa de Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

4 Cimate. Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero.

**PALAVRAS CHAVE:** Socioepistemologia, prática social, representação.

## RÉSUMÉ

Dans cet article nous discutons, sur des plans différents et à travers l'utilisation de plusieurs exemples, d'un rôle que la notion de pratique sociale peut jouer dans la construction du savoir mathématique et de son articulation avec des processus de représentation. En particulier, nous étudions quelques activités comme mesurer, prédire, modeler et convenir en tant que scénarios de construction social du savoir mathématique.

**MOTS CLÉS :** Socioépistémologie, pratique sociale, représentation.

## Introducción

En un sentido amplio, digamos que tradicional, la teoría del conocimiento ha considerado a la Representación como una imagen, una idea, una noción o más ampliamente, un pensamiento expresado, formado al nivel mental y que está presente de modo consciente. En este sentido la representación precisa de aquello que habrá de ser *re-presentado* –es decir, vuelto a presentar–, requiere por tanto de un Objeto con existencia previa cuya captación intelectual reproduzca mentalmente a través de traer al presente las situaciones vividas, o de anticipar eventos por venir que condensen la experiencia adquirida. Bajo ese enfoque, la actividad semiótica no puede crear al objeto, pues sólo lo re-presenta, es por ello que algunos autores han señalado críticas a su sustento epistemológico. Radford, (2004), por ejemplo, citando a Peirce, decía que el signo no crea al objeto: aquél es solamente afectado por éste. En pocas palabras, en las diferentes escuelas de pensamiento que adoptan una perspectiva trascendental respecto a los objetos matemáticos (que sea el caso del idealismo o del realismo), los signos constituyen el puente de acceso a esos objetos conceptuales vistos como situados más allá de las peripecias de la acción humana y la cultura. Para Radford, es la actividad humana la que produce al objeto. El signo y la forma en que éste es usado (esto es, su sintaxis) –forma necesariamente cultural en tanto que inmersa en Sistemas Semióticos Culturales de significación– son considerados como constitutivos del objeto conceptual: éstos objetivan al objeto. (*op. Cit.*, p. 14).

El enfoque socioepistemológico comparte la tesis, de la semiótica cultural, que confiere a la actividad humana la función de producción del objeto, aunque el énfasis socioepistemológico no está puesto ni en el objeto preexistente o construido, ni en su representación producida o innata; sino más bien se interesa por modelar el papel de la práctica social en la producción de conocimiento a fin de diseñar situaciones para la intervención didáctica. Claramente, ello exige de un posicionamiento sobre el sentido que adquiere la expresión *práctica social*, en este enfoque.

Se asume como tesis fundamental que existe una profunda diferencia entre “la realidad del objeto” –la llamada realidad implicada– y “la realidad descrita” que producen los seres humanos en su acción deliberada para construir su “realidad explicada”. La socioepistemología ha tratado el problema de la representación de un modo singular, pues no busca discurrir teóricamente sobre la acción de representar al objeto mediante artefactos, herramientas o signos, sino que se ubica “a ras” de las *prácticas* y de la forma en que éstas son normadas por *prácticas sociales*.

En primer término, es importante que se distinga la noción de *práctica* en un sentido llano, de aquella que usamos en este enfoque. La *práctica social* la entendemos como normativa de la actividad, más que como actividad humana reflexiva o reflexión sobre la práctica; o aun como se señala en (Radford, 2004), como “interiorización reflexiva de prácticas sociales históricamente constituidas”. Ahí radica una de las principales distinciones teóricas del enfoque socioepistemológico: “la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen” (Covián, 2005). De este modo, se pretende explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático con base en prácticas sociales. En sus investigaciones, los socioepistemólogos reportan más bien caracterizaciones del ejercicio de las prácticas que anteceden a la producción o construcción de conceptos y al desarrollo del saber.

Según este encuadre teórico, es preciso modificar el foco: “pasar de los objetos a las prácticas”. Los enfoques *reificacionistas* centrados en objetos, buscan explicar el proceso mediante el cual se llega a la construcción del objeto y minimizan el papel que desempeña la triada: “herramientas, contextos y prácticas”. El cambio de centración producirá un deslizamiento de orden mayor hacia explicaciones sistémicas, holísticas, complejas y transdisciplinarias, en virtud de que la acción cognitiva no busca la apropiación de objetos a través de sus partes, sino que asume que éstos no existen objetiva y previamente, “ahí afuera”, previos a la experiencia, sino que –más bien– los objetos son “creados” en el ejercicio de prácticas normadas (tesis compartida con la semiótica cultural). En consecuencia, se cuestiona la idea de que la cognición se reduzca a la acción de recobrar el entorno inmediato mediante un proceso de representación, para asumir que la cognición sea así entendida como la capacidad de “hacer emerger” el significado a partir de realimentaciones sucesivas entre el humano y su medio ambiente próximo, tanto físico como cultural, a partir de una interacción “dialéctica” entre protagonistas. Esta interacción, socialmente normada, da a la práctica, inevitablemente, una connotación de práctica social. El conocimiento entonces, como se ha señalado en (Varela et al., 1997) depende de las experiencias vividas que, a su vez, modifica las propias percepciones y creencias.

## 1. La socioepistemología

Debemos señalar que la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa busca construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas, no sólo discute el asunto de la semiosis o el de la cognición de manera aislada, sino que busca intervenir en el sistema didáctico en un sentido amplio, al tratar a los fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral & Farfán, 2003).

En este enfoque se pone énfasis el hecho de que las aproximaciones epistemológicas tradicionales, han asumido que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, en algún sentido, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La socioepistemología, por su parte, se plantea el examen del conocimiento matemático, social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión (Cantoral & Farfán, 2004).

La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa se ocupa entonces, específicamente, del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y de su difusión institucional. Dado que este conocimiento adquiere el estatus de saber sólo hasta que se haya constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor. Bajo este enfoque se han producido una gran cantidad de investigaciones empíricas y de las cuales citamos algunas (Alanís et al, 2000; Arrieta, 2003; Cantoral, 1990, 1999; Cantoral & Farfán, 1998; Cordero, 2001; Covián, 2005; Lezama, 2003; López, 2005; Martínez – Sierra, 2003; Montiel, 2005).

En su intento por difundir estos saberes, la socioepistemología sostiene que se forman *discursos* que facilitan la representación en matemáticas alcanzando consensos entre los actores sociales. Nombramos a estos discursos con el término genérico de *discurso matemático escolar* (Cantoral, 1990). Debemos aclarar que la estructuración de dichos discursos no se reduce a la organización de los contenidos temáticos, ni a su función declarativa en el aula (el discurso escolar), sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos; en este sentido se trata más bien de una unidad cultural en el sentido de Minguer (2004).

Para mostrar lo anterior, consideremos el siguiente hecho. El tratamiento didáctico de las distintas clases de funciones a través de sus representaciones gráficas enfrenta dificultades serias al momento de evaluar los logros al nivel de la comprensión por parte de los estudiantes. Si bien la mera clasificación visual de sus representaciones puede ser un elemento de partida para distinguirlas en una explicación didáctica, habrá que explorar más profundamente aquellos elementos que les permitan aproximarse a la naturaleza de las distintas clases de funciones. Al poner en escena una situación didáctica relativa al tratamiento de la función $2^x$ entre estudiantes de bachillerato (15 – 17 años), a fin de que se apropiaran del concepto de función exponencial, se favoreció el empleo de criterios geométricos: localizar puntos en el plano, identificar regularidades para transitar de la figura a sus propiedades. Para inducirles a construir, basados en la coordinación de elementos geométricos y gráficos, una curva a partir de un atributo analítico. Se propició también la inducción de lo local a lo global, partiendo de casos particulares se les solicitaba que argumentasen sobre la posibilidad de localizar otros puntos más y de ahí, se cuestionaba sobre la naturaleza específica de la función $2^x$.

Presentamos a continuación dos fragmentos realizados por equipos de estudiantes, para dotar de cierta evidencia empírica nuestras afirmaciones. La secuencia propuso actividades para la localización de puntos en el plano que formasen parte de la gráfica de la función $2^x$. Como se puede observar en la Figura 1, los estudiantes ponen de manifiesto que tienen una imagen de la representación gráfica de la función creciente con trazo continuo. También se puede observar que la localización de los puntos sobre la gráfica (como pares ordenados) no corresponde a la escala que se plantea en los ejes.

El haberles solicitado la obtención de determinados puntos sobre la gráfica, permitió que se iniciara una discusión sobre el *significado* de “elevar a una potencia”. En la figura se observa que le asocian, a la expresión $2^x$ distintos valores a la *x* lo que les lleva a explorar el significado de elevar a potencia para distintas clases de números. (Potencia entera, 3; potencia racional, ½ ; y aun el caso de una potencia irracional, þ. Ante esto último los estudiantes no representan nada).

El ubicar puntos específicos para potencias, enteras y racionales, problematiza entre los estudiantes el carácter creciente de la función y su trazo continuo, hay en el dibujo una pregunta tácita ¿cómo se eleva a la potencia þ?

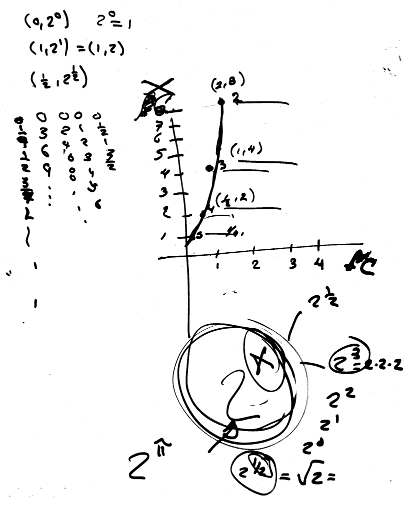


***Figura 1***

En la siguiente figura, de nueva cuenta, los estudiantes tienen una idea de la función $2^x$ mediante una representación gráfica, creciente y con trazo continuo, bosquejándola de manera general y permitiéndonos ver que no reparan ante el caso de que la variable *x* tome el valor de cero o sea incluso negativa. En contraste, observamos junto a ese trazo, la localización de los segmentos de valor $2^{1/4}$, $2^{1/2}$, $2^1$, etc., que fueron obtenidos a través de la aplicación del algoritmo geométrico de la *media geométrica* en la semicircunferencia. Podemos interpretar el empleo de dicho algoritmo, como un ejercicio de medición, ya que es construido a partir de la definición de una determinada unidad de medida. En el caso del gráfico de la izquierda las ordenadas tienen un significado concreto, explícito para los estudiantes: son segmentos de longitud $2^{1/4}$, $2^{1/2}$, $2^1$, etc. Este ejercicio de medir permite comparar a los segmentos y con ellos aproximarse a una idea específica de crecimiento, ya no es arbitrario como en el gráfico siguiente, sino que sigue un patrón susceptible de comparación y descripción detallada.

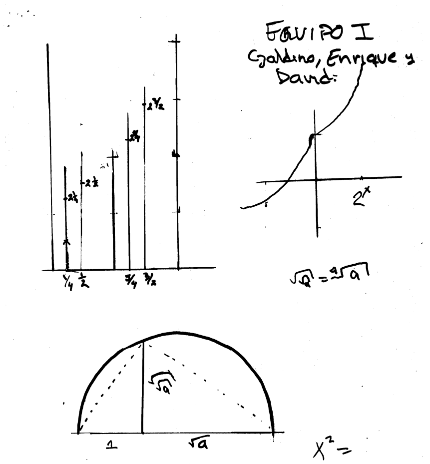



*Figura 2*

La representación gráfica, aun respetando las escalas y dibujándola con gran exactitud, no garantiza una comprensión de la trama interna de la misma, es hasta que se agrega una acción, una *práctica* concreta, proveniente del cúmulo de experiencias de los alumnos durante su vida, la de *medir* segmentos, lo que les permite en principio entender la naturaleza del crecimiento de la función $2^x$. La representación no existe como tal hasta que algunas prácticas cotidianas como medir, comparar, observar son llevadas a cabo, son ejercidas. En este sentido, la aproximación socioepistemológica pone su énfasis en el papel de las prácticas sociales en la construcción del conocimiento. Resta aun discutir a mayor profundidad cuál es la práctica social que subyace al empleo y a la necesidad de la medición; sin embargo, dado que no es asunto de este escrito puede consultarse (Lezama, 2003).

Una explicación más amplia sobre el papel que desempeñan las prácticas, tanto las de referencia como las sociales, en la construcción de conocimiento, puede obtenerse de los siguientes ejemplos. Cada uno de ellos obedece a circunstancias específicas y no haremos de ellos un estudio a profundidad.

## 2. La predicción, el binomio de Newton y la serie de Taylor

¿Por qué Newton representó por vez primera a su binomio como $(P + PQ)^{m/n}$ y no, como es usual hoy día a $(a + b)^n$? Las expresiones aunque matemáticamente

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q + \frac{m}{n}\frac{m-n}{2n}P^{\frac{m}{n}}Q^2 + \frac{m}{n}\frac{m-n}{2n}\frac{m-2n}{3n}P^{\frac{m}{n}}Q^3 + etc.$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

equivalentes, son distintas conceptualmente.

Una lectura ingenua de tales expresiones nos haría creer que se trata sólo de un asunto de la notación propia de la época; en nuestra opinión, ello no es así. Se trata de una verdadera concepción alternativa del binomio, que se apoya en una epistemología sensiblemente diferente de la que hoy enseñamos en clase. De hecho, obedece a un programa emergente, alternativo en el campo de la ciencia y la filosofía, con el que se buscaba modelar, anticipar, predecir fenómenos naturales con respaldo matemático. Un amplio programa de *matematización* de los fenómenos susceptibles de modelar con una fructífera metáfora del flujo del agua, metáfora que se aplicaría por igual a la evolución de muy diversas magnitudes.

La idea básica a la que nos referimos consiste en la asunción de que con la predicción de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza, era posible anunciar, anticipar, su estado ulterior. Pues conociendo ciertos valores iniciales de un sistema en evolución, sabríamos la forma en la que éste progresa. Centremos la atención en la cinemática de una partícula que se desplaza rectilíneamente; situación en la que se precisa de una *predicción de largo alcance en ámbitos de variación continua*. Desde nuestro punto de vista, la predicción se construye socialmente a partir de las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales. Pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud B con el paso del tiempo. Sabemos, por ejemplo, que B depende a su vez de otra magnitud P que fluye incesantemente. Necesitamos saber entonces el valor que tomará B antes de que transcurra el tiempo, antes de que P transite del estado uno al estado dos. Pero dada nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos *predecir*. En tal caso, no disponemos de razones para creer que en este caso, el verdadero valor de B esté distante de las expectativas que nos generan los valores de B y de P en un momento dado, de la forma en la que P y B cambian, de la forma en la que cambian sus cambios, y así sucesivamente. El binomio de Newton (Newton, 1669), se presenta como una entidad que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas ligadas a la resolución de una clase de situaciones que precisan de la predicción. De modo que si P evoluciona de cierta manera, la pregunta central consiste en saber cómo será B(P) si conocemos el inicio de P, el cambio que sufre P, el cambio del cambio de P, etcétera. El binomio fue entonces, una respuesta a la pregunta y una organización de las *prácticas sociale*s.

El caso de mayor interés se presenta, naturalmente, cuando no se dispone en forma explícita de la relación entre B y P. En ese caso, habrá que hacer emerger progresivamente una nueva noción, una noción que permita de algún modo la generación de la solución óptima a una clase de situaciones propias de la predicción. Para ello habrá que considerar tanto la diversidad de contextos en los que puede suceder la variación, como la variedad de fenómenos estudiados con estrategias similares. En su momento, este programa newtoniano de investigación llevó al surgimiento de una progresiva cadena de elaboraciones teóricas, cada vez más abstractas, que culmina, por así decirlo con el programa lagrangiano donde habrá de emerger la noción de función analítica. Los detalles de este estudio pueden consultarse en (Cantoral, 1990, 2001).

Ejemplifiquemos esta situación en un caso simple. Supongamos que tenemos los valores iniciales (en el tiempo $t = 0$), tanto de la posición $s(0) = s_0$, como de la velocidad $v(0) = v_0$, y la aceleración $a(0) = a_0$ de una partícula que se desplaza sobre una recta. Para cualquier instante posterior $t$ la posición $s(t)$, la velocidad $v(t)$ y la aceleración $a(t)$ estarán dadas mediante el instrumento para predecir, a saber, la serie de Taylor, $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2! + ...$ La serie deviene en:

$s(t) = s(0) + s'(0)t + s''(0)t^2 /2! + ...$
$v(t) = v(0) + v'(0)t + v''(0)t^2 /2! + ...$
$a(t) = a(0) + a'(0)t + a''(0)t^2 /2! + ...$

En notación usual:

$s(t) = s_0 + v_0 t + ½\ at^2$
$v(t) = v_0 + at$
$a(t) = a$

En este ejemplo, es el tratamiento de la predicción de fenómenos de movimiento, lo que da lugar a un sucesivo proceso de matematización de una gran cantidad de nociones y procesos matemáticos. Estrictamente hablando, no se buscó representar un objeto, ni construirlo a partir de su representación. Se intenta, según la visión de la ciencia del periodo, simplemente *predecir* el cambio. En este sentido, la predicción en tanto que no es un objeto matemático, tiene que entrar en la problemática teórica no como noción, o representación, sino como práctica social. Para la socioepistemología el foco del análisis estará puesto no en el binomio en sí, en tanto signo o artefacto que mediatiza la actividad, sino en la búsqueda de la predicción como práctica social.

Veamos un segundo ejemplo en el cual, a diferencia del anterior, el fenómeno mismo que será tratado, el fenómeno natural que intentan describir con el método predictivo, estaba aun poco claro para los interlocutores. El calor como noción, no emerge aun con la claridad requerida. ¿Qué se representa entonces?

## 3. Teoría analítica del calor

El ejemplo de la propagación del calor resulta útil para mostrar de qué manera, antes que el objeto y su representación, está la *praxis*, y con ésta la significación cultural. La propagación del calor resulta un asunto desafiante, pues no trata de un *objeto* matemático como tal, sino de un *contexto* en que habrían de ejercer ciertas prácticas los científicos e ingenieros de una época y de una circunstancia específica. Fue una cuestión a la que tanto la Mecánica Racional como el Análisis Matemático del siglo XVIII no dieron respuesta cabal, y de ello da cuenta la histórica controversia suscitada a raíz de la cuerda vibrante. Al lado de este desarrollo, encontramos el surgimiento de la ingeniería matemática sobre la práctica tradicional y el papel sustantivo que una institución de educación superior, la École Polytechnique, tuvo para su posterior consolidación. Así pues, el asunto matemático que estaremos ejemplificando, el del estudio de la convergencia de series infinitas, se inscribe en el ambiente fenomenológico de la conducción del calor, en estrecha relación con la práctica de la ingeniería, dio a luz, gracias a la conjunción de, por supuesto, innumerables variables, de entre las cuales destacamos como antecedentes al cálculo algebraico y al surgimiento de la ingeniería en el siglo XVIII. Es decir, una práctica social que normaba el quehacer de los científicos y tecnólogos de la época: Predecir el comportamiento de lo que fluye, fuese el calor, el movimiento o los flujos eléctricos, la intención última de este programa renovador era el de mostrar el papel del saber como la pieza clave de la vida futura de esa sociedad. Es importante ubicar que esto se da en el marco de la profesionalización de una *práctica de referencia*, la práctica de la ingeniería y por ende en el seno de la comunidad politécnica. La cuestión entonces no se redujo a conocer un objeto matemático, sino el mostrar que la práctica de la ingeniería podría ser científica. La función normativa de la práctica social haría su aparición en forma de discurso matemático y enseguida, casi al mismo tiempo, como una forma de discurso matemático escolar.

El surgimiento del concepto de convergencia, que data del siglo XIX se da en un ambiente fenomenológico de singular relevancia para la Ingeniería Matemática; la propagación del calor en donde la variación está presente y la ecuación en la que tal variación se significa:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{CD}\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right)$$

En los inicios del desarrollo de la humanidad, cuando las diversas experiencias se examinan por vez primera, se recurre de entrada a la intuición reinante del fenómeno, ya sea de lo calórico para el caso que nos ocupa, del ímpetu o del éter, en otros. De este modo, es con lo calórico que se realiza mejor la conducción, o con el ímpetu que se da el movimiento. Se precisó de una revolución del conocimiento científico para agrupar en una unidad fundamental al conocimiento y la manera de percibirlo.

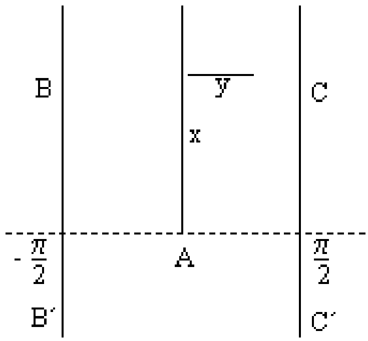
Con la obra de Biot (1774 - 1802) la experiencia se dirige hacia la medida y el cálculo, y se desecha la explicación del fenómeno mediante la noción de calórico, valiéndose de las indicaciones suministradas por termómetros, y se obtiene así la primera ecuación diferencial que rige al fenómeno. Sin embargo, los coeficientes constantes no fueron analizados, no se distinguió entre lo que es propio del cuerpo específico, de aquello que persiste independientemente de él. En especial, los parámetros de conductibilidad, de densidad, de calor específico, permanecen en un único coeficiente empírico. La tarea constructiva culmina con la *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822) de Fourier, en donde se analiza el problema de la propagación del calor en los sólidos, que consiste en describir el comportamiento del fenómeno de propagación, buscando aquello estable y permanente, que se conserva inalterable con el fluir del tiempo. Esto es, la ecuación que gobierna el comportamiento del sistema.

Como Fourier llega finalmente a la ecuación diferencial de Biot, que ha recibido la sanción de la experiencia, se puede decir que el método de Fourier ha logrado la construcción matemática completa del fenómeno. De paso, se rompen o, mejor aún, se niegan, los conceptos fundamentales del análisis matemático del siglo XVIII, como: el de función, el papel del álgebra, el continuo real, así como la interpretación física de las soluciones, y se inicia el estudio de la convergencia de series infinitas, pilar fundamental del Análisis Matemático moderno. Salta a la vista la importancia singular de la obra de Fourier, tanto para la ingeniería como para el análisis matemático mismo. De suerte tal, que determinar el estado estacionario del sistema conduce, necesariamente, a un estudio de la convergencia de una serie trigonométrica infinita. La búsqueda de la predicción y la predicción como práctica, antecede al proceso de significación y de representación de objetos. Es decir, son las prácticas y no sus representaciones las que forman en primera instancia al saber matemático.

En este ejemplo, ¿qué objeto matemático se representa?, no hay objeto preestablecido, ni preexistente, estos son construidos por los actores con el ejercicio de sus prácticas y normados por su búsqueda de la predicción. Se pasa del oficio a la profesión gracias al logro de la función normativa de la práctica social.

A fin de mostrar el problema particular con el que Fourier inicia este estudio, entresacamos algunas notas de su publicación original:

Suponemos que una masa sólida homogénea está contenida entre dos planos verticales B y C paralelos e infinitos, y que se ha dividido en dos partes por un plano A perpendicular a los otros dos (ver figura); consideraremos las temperaturas de la masa BAC comprendida entre los tres planos infinitos A, B, C. Se supone que la otra parte B'AC' del sólido infinito es una fuente constante de calor, es decir, que todos esos puntos permanecen con temperatura 1, la cual no puede llegar a ser jamás menor ni mayor. En cuanto a los dos sólidos laterales, uno comprendido entre el plano C y el plano A prolongado y el otro entre el plano B y el A prolongado, todos los puntos de ambos tienen una temperatura constante 0, y una causa exterior los conserva siempre a la misma temperatura; en fin, las moléculas del sólido comprendido entre A, B y C tienen la temperatura inicial 0. El calor pasará sucesivamente de la fuente A al sólido BAC; él se propagará en el sentido de la longitud infinita y, al mismo tiempo, se desviará hacia las masas frías B y C, quienes absorberán una gran cantidad. Las temperaturas del sólido BAC se elevarán más y más; pero ellas no podrán pasar ni aun alcanzar un máximo de temperatura, que es diferente para los distintos puntos de la masa. Tratamos de conocer el estado final y constante al cual se aproxima el estado variable.




Temperatura constante igual a 1

Así, el problema consiste en determinar las temperaturas permanentes de un sólido rectangular infinito comprendido entre dos masas de hielo B y C y una masa de agua hirviendo A; la consideración de los problemas simples y primordiales es uno de los medios más seguros para el descubrimiento de leyes de fenómenos naturales, y nosotros vemos, por la historia de las ciencias, que todas las teorías se han formado siguiendo este método. (Fourier, 1822; traducción libre al español por los autores )

Para el caso particular propuesto, la ecuación general se reduce a

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

pues se omite tanto la coordenada $z$ como su correspondiente derivada parcial (el grosor se considera infinitesimal). Dado que se trata de determinar el estado estacionario, independiente del tiempo (es decir, constante respecto del tiempo), deberá tenerse que:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \ .$$

Así que la ecuación por resolver es:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \ .$$

Si una función satisface la ecuación, deberá cumplir con las siguientes condiciones:

i) Anularse cuando se sustituye $-\frac{\pi}{2}$ o $+\frac{\pi}{2}$ en lugar de $y$, cualquiera que sea, por otro lado, el valor de $x$.

ii) Ser igual a la unidad si se supone $x=0$ y si se le atribuye a $y$ un valor cualquiera comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$.[5]

Es necesario añadir que esta función debe llegar a ser extremadamente pequeña cuando se da a $x$ un valor muy grande, ya que todo el calor surge de una sola fuente A, condiciones que hoy nombramos de frontera. Fourier encuentra la solución por un método de separación de variables, considerando que la temperatura $v$ se puede expresar como el producto de una función de $x$ por una función de $y$, $v = F(x)\ f(y)$, obteniéndose:

$$v = a\, e^{-x} \cos y + b\, e^{-3x} \cos 3y + c\, e^{-5x} \cos 5y + \ldots \qquad \text{(b)}$$

…en este punto Fourier hace notar: "... No se puede inferir nada para los valores que tomaría la función si se pone en lugar de una cantidad que no esté comprendida entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$ ..."[6]

Así, (b) se convierte en

$$1 = a \cos y + b \cos 3y + c \cos 5y + d \cos 7y + \ldots$$

para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ; ahora sólo resta calcular la infinidad de coeficientes *a*,*b*,*c*,*d*,... . A nuestros ojos, la solución ya está dada (salvo por dicho cálculo); para Fourier, en cambio, es necesario justificar la solución físicamente[7] antes de realizar tal cálculo y añade:

> Supongamos que la temperatura fija de la base A, en lugar de ser igual a la unidad para todos los puntos, sea tanto menor entre más alejado esté el punto 0 de la recta A, y que sea proporcional al coseno de esta distancia; se conocerá fácilmente, en ese caso, la naturaleza de la superficie curva cuya ordenada vertical expresa la temperatura $u$, o $f(x,y)$. Si se corta esta superficie por el origen con un plano perpendicular al eje de las $x$, la curva que determina la sección tendrá por ecuación
>
> $$v = a \cos y \ ;$$
>
> los valores de los coeficientes serán los siguientes
>
> $$a = a,\ \ b = 0,\ \ c = 0,\ \ d = 0,$$

---

5 Esto es debido a que la longitud del lado finito BAC es þ. Nótese que, en el trabajo de Fourier, la abscisa la denota por $y$, mientras que a la ordenada por $x$ (ver figura).

6 La consideración de los valores de una función en un intervalo es nueva; recuérdese que en el siglo XVIII eso carecía de significado.

7 Pero, a diferencia de Bernoulli que presenta argumentos físicos para la demostración del problema, aquí Fourier nos muestra que la solución matemática es coherente con la situación física, pero la demostración se inserta en la matemática misma, sin alusión a argumentos que no pertenecen a ella. Así, se inicia la separación entre la física y las Matemáticas, que desde la antigüedad caminaban estrechamente ligadas una de la otra.

y así sucesivamente, y la ecuación de la superficie curva será

$$v = ae^{-x} \cos y.$$

Si se corta esa superficie perpendicularmente al eje de las $y$, se tendrá una logarítmica cuya convexidad es devuelta hacia el eje; si se le corta perpendicularmente al eje $x$, se tendrá una curva trigonométrica que tiene su convexidad hacia el eje. Se sigue de ahí que la función $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ tiene siempre un valor positivo, y que el de $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ es siempre negativo. Ahora bien (art. 1 3), la cantidad de calor que una molécula adquiere, de acuerdo con su lugar entre otras dos en el sentido de las $x$, es proporcional al valor de $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ; por tanto, se tiene que la molécula intermedia recibe, de la que precede en el sentido de las $x$, más calor del que ella le comunica a la que le sigue. Pero, si se considera esta misma molécula como colocada entre otras dos en el sentido de las $y$, siendo negativa la función $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ , se ve que la molécula intermedia comunica a la que le sigue más calor que lo que recibe de la precedente. Se llega así, que el excedente de calor que ella adquiere en el sentido de las $x$ se compensa exactamente con lo que pierde en el sentido de las $y$, como lo expresa la ecuación

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Se sabe así la ruta que sigue el calor que sale de la fuente A. Él se propaga en el sentido de las $x$, y al mismo tiempo se descompone en dos partes, una se dirige hacia uno de los ejes, mientras que la otra parte continúa alejándose del origen para descomponerse como la anterior, y así sucesivamente hasta el infinito. La superficie que consideramos es engendrada por la curva trigonométrica que responde a la base A, y se mueve perpendicularmente al eje de las $x$, siguiendo este eje, mientras que cada una de sus ordenadas decrece al infinito, proporcionalmente a las potencias sucesivas de una misma fracción.

Se obtendrán consecuencias análogas si las temperaturas fijas de la base A fueran expresadas por el término $b \cos 3y$, o uno de los términos siguientes $c \cos 5y$...; y se puede, después de esto, formarse una idea exacta del movimiento del calor en el caso general; ya que se verá, por lo que sigue, que ese movimiento se descompone siempre en una multitud de movimientos elementales, en donde cada uno se comporta como si fuese solo. (Fourier, 1822; traducción libre al español por los autores )

En el episodio anterior, tanto Fourier como Biot y los ingenieros egresados de la Polytechnique, están interesados en *anticipar* el comportamiento de la naturaleza, en modelarla, su búsqueda no podría entonces ser reducida a la acción de representar un objeto preexistente, una noción, un concepto o un procedimiento, sino debe ampliarse al nivel de la práctica: ¿cómo será posible confundir en este caso, al objeto con su representación?, ¿tiene, en este contexto, sentido tal pregunta?

Para finalizar este artículo, mostramos cómo las prácticas sociales a las que nos hemos referido, no están exclusivamente ligadas a la actividad inmediata. Desarrollamos un ejemplo relativo al proceso de *convenir* en matemáticas.

## 4. El proceso de convención matemática

La acepción que utilizamos para *convención*, es la de “aquello que es conveniente para algún fin específico”; entonces una convención matemática es una conveniencia para las matemáticas. El análisis socioepistemológico de los exponentes no naturales muestra la presencia de una manera común, entre los siglos XIV y XVIII, *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento matemático, es decir para la integración sistémica de conocimientos*. Designamos sintéticamente a este proceso de construcción de conocimiento con la expresión *convención matemática*. Las formas de este mecanismo pueden ser varias: una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción. La elección depende de los objetivos teóricos. Convenir en matemáticas, puede entenderse como proceso de búsqueda de consensos al seno de una comunidad que se norma por la práctica social relativa a dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos (Martínez – Sierra, 2005). Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización. Este proceso de síntesis, conlleva el surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los conocimientos anteriores. Las convenciones matemáticas serían una parte de tales propiedades emergentes.

En el plano de la historia de las ideas, al menos dos tipos de formulaciones emergen para significar a los exponentes no naturales. El primer tipo de formulaciones fue hecho en el contexto de lo algebraico y el segundo en el ámbito de la formulación de coherencia entre lo algebraico y lo gráfico. En el contexto algebraico, la noción de exponente no natural surge de la intención de preservar la relación entre las progresiones aritmética y geométrica, a fin de unificar un algoritmo para la multiplicación de monomios. En el contexto algebraico–gráfico, la construcción de significados emerge como organizador de las fórmulas de cuadraturas de ciertas curvas.

En el marco de las formulaciones algebraicas, los convencionalismos tienen por finalidad el incluir nuevos objetos algebraicos a la estructura operativa conformada por los diferentes caracteres *cósicos* [8].

***Primera formulación algebraica.*** En cuanto a la multiplicación, la regla de Aurel (1552) se basa en el comportamiento especial de las sucesiones: la relación entre la progresión aritmética y progresión geométrica (relación PA–PG) [9]. Con este marco de referencia se determinan los convencionalismos para incluir al *número* en la estructura operativa del conjunto $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots\}$, que en la notación de Marco Aurel (1552) corresponde al conjunto $\{\varphi, x, \xi, \zeta, \xi\xi, \beta, \xi\zeta, b\beta, \xi\xi\xi, \zeta\zeta, \ldots\}$. De esta manera el número 5 es representado como $5\varphi$ y es multiplicado con los demás

8 En el lenguaje moderno se puede identificar estos caracteres cósicos con la segunda potencia, la tercera potencia… de la incógnita.

9 Es decir, si se coloca la progresión aritmética que representa el número de multiplicaciones de la base y la progresión geométrica que representa las potencias, se tiene que la adición (resta) en la parte superior (la serie aritmética) corresponde a la multiplicación (división) de la serie de abajo (geométrica):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2, | 3, | 4, | 5, | 6, |
| 4, | 8, | 16, | 32, | 64, |

A la relación expresada en el enunciado anterior la abreviaremos, en lo sucesivo, como *la relación entre la progresión aritmética y geométrica* (relación PA-PG).

a través de una nueva tabla de caracteres cósicos que tienen la misma regla operativa referente a la relación entre la progresión aritmética y geométrica. Lo anterior está expresada en los siguientes términos: “Y cuando tu querras multiplicar vna dignidad, grado, o carácter con otro, mira lo que esta encima de cada uno y junta lo simplemente, y aquello que verna, mira encima de qual carácter estara: tal diras que procede de tal multiplicacion” (Op. Cit.). Así al utilizar la Tabla 1 se pueden hacer, por ejemplo, las multiplicaciones contenidas la Tabla 2.

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | $x$ | $\xi$ | $\zeta$ | $\xi\xi$ | $\beta$ | $\xi\zeta$ | $b\beta$ | $\xi\xi\xi$ | $\zeta\zeta$ |

***Tabla 1.*** Caracteres cósicos de Aurel y la relación PA-PG

| Notación de Aurel | |
|---|---|
| $8\xi$<br>$2\chi$<br>-----<br>$16\zeta$ | $23\beta$<br>$4\varphi$<br>-----<br>$92\beta$ |
| $13\xi\xi$<br>$2\xi\xi$<br>-----<br>$26\xi\xi\xi$ | $50\varphi$<br>$6\xi$<br>-----<br>$300\xi$ |

***Tabla 2.*** Multiplicaciones en la notación de Aurel

En el marco de esta primera formulación algebraica los cocientes del tipo $x^5/x^7$, es decir, donde el grado del dividendo es menor que el del divisor, no son incluidos como caracteres cósicos; ya que sólo considera para la división el caso en que el dividendo y el divisor son monomios, distinguiéndose dos posibilidades: 1) el grado del dividendo es menor que el del divisor y 2) el grado del dividendo es mayor que el del divisor. En la primera posibilidad *tal partición no se podrá partir y quedará como quebrado*; en la segunda, la regla de Aurel coincide con la actual ($a^m/a^n=a^{m-n}$ con $m>n$).

***Segunda formulación algebraica,*** se encuentra en un contexto donde el progreso en la operatividad con los números negativos y el cero hace posible la inclusión de los cocientes $1/x$, $1/x^2$,.... entre los caracteres cósicos y su operatividad. La formulación surge de haber admitido la operatividad de cantidades negativas para después enmarcarlas en la estructura algorítmica de la relación entre las progresiones aritmética y geométrica. En *La triparty en la Science des Nombres*, Chuquet, (1880/ 1484) construyó una noción de exponente cero y negativo (al parecer no utilizó exponentes fraccionarios). Explica que cada número puede considerarse como cantidad estricta, y así para indicarlo, se puede añadir un cero en la parte superior del número, como por ejemplo, $12^0$, $13^0$ para indicar 12 o 13. Pero cada número puede considerarse como número primero de una cantidad continua, también dicho número lineal, indicando así: $12^1$, $13^1$... o bien número superficial cuadrado: $12^2$, $13^2$ ... y así, sucesivamente, hasta el orden que se quiera ($12^0$ quiere decir doce; $12^1$ indica $12x$; $12^2$ significa $12x^2$,...).”

Es importante señalar que el superíndice cero que utiliza Chuquet significa “ausencia de variable”. En este sentido opta por abandonar las distintas nomenclaturas para designar el orden de las raíces, así como el de las potencias de la incógnita, para exponer una forma de denominación unificadora, que facilite las operaciones entre estas entidades.

Así se opera como sigue[10], Chuquet utiliza .7$^{1.\tilde{n}}$. para denotar $7/x$.

**Formulaciones algebraicas–gráficas**

Al parecer los convencionalismos algebraicos descritos, fueron marginales a la sintaxis algebraica o al estudio de la *cosa*; dado que carecía de sentido fuera del contexto algebraico. Podemos decir que la aceptación de las potencias mayores a tres fue posible gracias a la introducción de la representación cartesiana de las variables. En el marco de las formulaciones algebraicas–gráficas, los convencionalismos tienen por finalidad dotar de coherencia a ambos elementos, lo algebraico y lo gráfico.

***Primera formulación algebraico–gráfica***. Hacia finales del XVI se sabía que las curvas $y = kx^n$ $(n = 1, 2, 3, 4,\ldots)$, llamadas de índice $n$, tenían una propiedad llamada "razón característica". Este conocimiento, según Bos (1975), era propio de la época del cálculo de áreas determinadas por distintas curvas, tanto mecánicas como algebraicas, y al significado que se asocia a las áreas en contextos de variación[11]. Tomando como ejemplo la curva $y = x^2$ se decía que ésta tiene razón característica igual a $1/3$; ya que si tomamos un punto **C** arbitrario de la curva (Figura 1) el área de **AECBA** guarda una proporción de 1:3 respecto del área del rectángulo **ABCD,** es decir**,** el área de **AECBA** es la mitad del área **AECDA**. En general, se sabía de que la razón característica de la curva de índice $n$ es $1/(n+1)$ para todos los enteros positivos $n$ .[12]

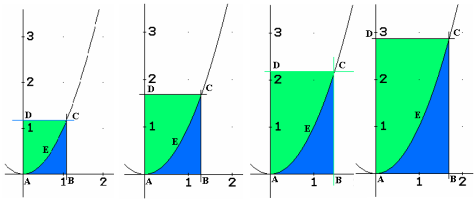


***Figura 1.*** Razón Característica de la curva $y = x^2$

En sus investigaciones acerca de la cuadratura de las curvas, Wallis utilizó lo anterior para convenir que el índice de $y = \sqrt[2]{x}$ debe ser igual a $1/2$ a fin de unificar la noción de razón característica con la noción de índice. Lo mismo puede verse para $y = \sqrt[3]{x}$,cuya razón característica debe ser $3/4=1/(1+1/3)$ por lo que su índice será $1/3$. A continuación Wallis afirma (según Confrey & Dennis, 2000) que el índice apropiado de $y = \sqrt[q]{x^p}$ debe ser $p/q$ y que su razón característica es $1/(1+p/q)$; pero al no tener manera de verificar directamente la razón característica de tales índices, por ejemplo de $y = \sqrt[3]{x^2}$ , retoma el principio de *interpolación* el cual afirma que cuando se puede discernir un patrón de cualquier tipo en una sucesión de ejemplos, uno tiene el derecho de aplicar ese patrón para cualesquiera valores intermedios. En el caso que interesa, él hace la siguiente tabla de razones características conocidas ($R(i/j)$ denota la razón característica, desconocida, de índice $i/j$):

10 El contexto de la formulación está relacionada con las soluciones negativas que resultan de la resolución formal de ecuaciones lineales. Es por ello que al parecer uno de los objetivos de la aceptación de los exponentes negativos era dar legitimidad a los números negativos y su operatividad, pues eran usados para la operatividad consistente con los monomios.

11 Por ejemplo es bien conocida la forma en que Galileo estableció su ley de caída de los cuerpos a través de entender el área determinada por una gráfica velocidad-tiempo como la distancia recorrida por el cuerpo.

12 En términos modernos la noción de razón característica se apoya en que $(a>0)\left(\int_0^a x^n dx\right):a^{n+1} = 1:(n+1)$

| $q/b$ | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1=1/1 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | 1/6 | 1/7 | 1/8 |
| 2 | 1=2/2 | 2/4 | **R(3/2)** | 1/3=2/6 | **R(5/2)** | 1/4=2/8 | **R(7/2)** |
| 3 | 1=3/3 | **R(2/3)** | 1/2=3/6 | **R(4/3)** | **R(5/3)** | 1/3=3/9 | **R(7/3)** |
| 4 | 1=4/4 | 2/3=4/6 | **R(3/4)** | 1/2=4/8 | **R(5/4)** | **R(3/2)** | **R(7/4)** |
| 5 | 1=5/5 | **R(2/5)** | **R(3/5)** | **R(4/5)** | 1/2=5/10 | **R(6/5)** | **R(7/5)** |
| 6 | 1=6/6 | 3/4=6/8 | 2/3=6/9 | **R(2/3)** | **R(5/6)** | 1/2=6/12 | **R(7/6)** |
| 7 | 1=7/7 | **R(2/7)** | **R(3/7)** | **R(4/7)** | **R(5/7)** | **R(6/7)** | 1/2=7/14 |
| 8 | 1=8/8 | 4/5=8/10 | **R(3/8)** | 2/3=8/12 | **R(5/8)** | **R(3/4)** | **R(7/8)** |
| 9 | 1=9/9 | **R(2/9)** | 3/4=9/12 | **R(4/9)** | **R(5/9)** | **R(2/3)** | **R(7/9)** |

Al aplicar el principio de interpolación sobre la fila 5 se puede conjeturar, por ejemplo, que R(3,5)=5/8 y sobre la columna 3 que R(3,5)=5/8. Razonamiento semejante se puede hacer sobre la fila 10 para establecer que R(3,5)=10/16 y sobre la columna 6 que R(3,5)=10/16.

Wallis también interpreta a los números negativos como índices[13]. Define el índice de $1/x$ como $-1$, el índice de $1/x^2$ como $-2$, etc. A continuación él intenta dar coherencia a estos índices y a la noción de razón característica. En el caso de la curva $y = 1/x$ la razón característica debe ser $\frac{1}{-1+1}=\frac{1}{0}=\infty$ [14]. Aceptó este cociente como razonable debido a que el área bajo la curva $1/x$ diverge; el cual, al parecer, era un hecho conocido en la época. Lo anterior puede ser interpretado como que la proporción entre el área de **ABCEFA** (Figura 2) y el área del rectángulo **ABCD** es de 1:0. Cuando la curva es $y=1/x^2$ la razón característica debe ser $1/(-2+1)=1/-1$. Aquí, la concepción de Wallis sobre la razón difiere de la aritmética moderna de números negativos. Él no utiliza la igualdad $1/-1 = -1$, más bien él construye una coherencia entre diversas representaciones; que es en esencia una convención matemática. Debido a que el área sombreada bajo la curva $y=1/x^2$ es más grande que el área bajo la curva $1/x$, concluye que la razón $1/-1$ es mayor que infinito (*ratio plusquam infinita*). Continúa concluyendo que $1/-2$ es incluso más grande. Esto explica el plural en el título de su tratado *Arithmetica Infinitorum*, de la cual, la traducción más adecuada sería La Aritmética de los Infinitos.

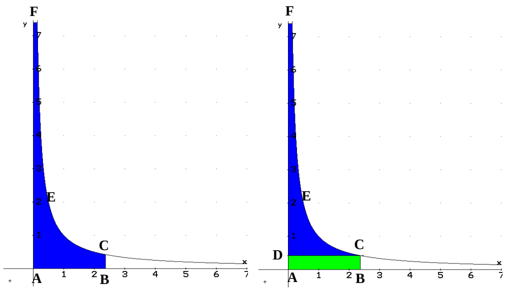



***Figura 2.*** Razón Característica de la curva $y = 1/x$

13 Deseamos aclarar que a través de la literatura consultada no fue posible determinar claramente los motivos que tuvo Wallis para dar tales definiciones; pero es de suponer que fueron tomadas de las convenciones de los exponentes que ya se trabajaban en esa época en el contexto algebraico (Martínez, 2003).

14 Lo que hoy se entiende por fracciones, en la época de Wallis se concebía como proporcionalidad por lo que 1 es 0 (nada) como $\infty$ es a 1.

Lo anterior nos motiva a enfocar nuestra atención en los procesos de integración sistémica de un conjunto de conocimientos. Teóricamente, desde un principio, esta búsqueda de integración, que es una búsqueda de relaciones, puede tener dos salidas: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir, cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Entonces, la convención matemática puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados.

En nuestros ejemplos respecto a las formulaciones de Wallis, la búsqueda de coherencia entre la noción de índice y de razón característica (en donde la razón/proporción posee significados específicos que difiere de considerarla como número) provoca dos convencionalismos: el índice de $y = \sqrt[2]{x}$ como $1/2$ y diversos tipos de infinito representados por $1/0$, $1/\text{-}1$, $1/\text{-}2$, etc. Esto señala el carácter *conveniente y relativo* de la convención matemática respecto a la integración de las nociones de índice y razón característica y las representaciones algebraicas y gráficas. Hoy en día la convención de considerar a las proporciones $1/0$, $1/\text{-}1$, $1/\text{-}2$ como diversos tipos de infinitos no es coherente con la interpretación numérica de las proporciones como números.

De este modo, la convención, o la búsqueda de consensos, al igual que en los ejemplos descritos anteriormente, adquiere una dimensión social fundamental que no podría ser captada si limitáramos nuestra mirada a la construcción de objetos o a su representación, pues aspectos como creencias, ideología y matemáticas estarían excluidos al momento de teorizar sobre la construcción de conocimiento matemático.

## Reflexiones finales

Con los ejemplos mostramos el papel de alguna práctica: medir al construir la función “$2^x$”, predecir en el caso de la cinemática y las funciones analíticas, modelar bajo fenomenologías de ingeniería y, finalmente, convenir en el caso de los exponentes no naturales. Los ejemplos muestran la diversidad de situaciones que habrían de considerarse llevando la mirada hacia la socioepistemología.

Este artículo ha querido mostrar cómo opera el enfoque socioepistemológico al centrar su atención en prácticas más que en objetos. Su centración en las prácticas arroja una luz distinta de aquella que produce la centración en objetos, procesos o mediadores. El artículo mostró, mediante ejemplos, el papel que juega la práctica social en la construcción del conocimiento matemático y de cómo se articula con los procesos de representación.

Este artículo si bien pretende posicionar a la Socioepistemología a través de ejemplos, busca sobre todo discurrir sobre el papel de la noción de práctica social en la formación de conocimiento. No se abordan las relaciones de complementariedad o contraposición de cara a otros enfoques teóricos, aunque bien sabemos que existen relaciones con la Semiótica Cultural de Radford, o con el enfoque Ontosemiótico de Díaz–Godino, o aun con la Teoría Antropológica de la Didáctica de Chevallard y colaboradores, o con la Etnomatemática de D’Ambrosio y colaboradores, pero más bien quisimos aportar un elemento adicional, una particular interpretación de la noción de práctica social que juzgamos prometedora para la investigación en matemática educativa. En el futuro inmediato, el enfoque socioepistemológico estará intentando construir elementos de articulación entre los enfoques señalados anteriormente, aunque esa sea otra historia...

## Referencias

Alanís, J. et al. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada. México: Cinvestav.

Aurel, M. (1552). *Libro Primero de Arithmetica Algebraica*. Valencia: J. Mey.

Bos, H. (1975). Differentials, Higher-Order Differentials and the derivative in the Leibnizian Calculus. *Archive for History of Exact Sciences, 14*, 1 – 90.

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prædiciere y lo Analítico".* Tesis doctoral. México: Cinvestav.

Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico a la ricerca in matemática educativa. *La matemática e la sua didattica*, *3*, 258 – 273.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Espsilon*, *42*, 14(3), 353 – 369.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24* (2.3), 137 – 168.

Chuquet, N. (1880/1484). Le Triparty en las science des nombres. En A. Marre (Ed.) *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche et fisiche*, (volume *13*, pp. 555 – 659, 693 – 814; volume *14*, pp. 413 – 460).

Confrey, J. & Dennis, D. (2000). La Creación de Exponentes Continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(1), 5 – 31.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4*(2), 103 – 128.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Farfán, R. y Cantoral, R. (2003). *Mathematics Education: A Vision of its Evolution*. Educational Studies in Mathematics 53(3), 255-270.

Fourier, J. (1822). *Théorie Analytique de la Chaleur*. Chez Firmin Didot. Pere et Fils. Libraires pur les Mathématiques. France.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas.* Tesis doctoral no publicada. México: Cinvestav.

López, I. (2005). *La socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Martínez – Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado. México: Cicata – IPN.

Martínez – Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(2), 195 – 218.

Minguer, L. (2004). Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Un estudio de caso: El Instituto Tecnológico de Oaxaca. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*(2), 885 – 889.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral. México: Cicata – IPN.

Newton, I. (1669). De Analysi per equationes infinitas (june 1669). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.), *The mathematical papers of Isaac Newton.* Vol. *II* (1667 – 1700) (pp. 206 – 247). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Radford, (2004). *Semiótica cultural y cognición*. Conferencia dictada en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Tuxtla, Chiapas México. [En red] Disponible en http://laurentian.ca/educ/lradford/Tuxtla3.pdf

Varela, F. et al. (1997). De cuerpo presente. Barcelona: Gedisa.

**Ricardo Cantoral**
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV
México

E-mail: rcantor@cinvestav.mx

**Rosa María Farfán**
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV
México

E-mail: rfarfan@cinvestav.mx

**Gustavo Martínez-Sierra**
Cimate de la UAG
México

E-mail: gmartinez@cimateuagro.org

**Javier Lezama**
Programa de Matemática Educativa
CICATA del IPN
México

E-mail: jlezamaipn@gmail.com

# Elementos de una teoría cultural de la objetivación[1]

Luis Radford [2]

**RESUMEN**

En este artículo se presentan los lineamientos generales de una teoría cultural de la objetivación –una teoría de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se inspira de escuelas antropológicas e histórico-culturales del conocimiento. Dicha teoría se apoya en una epistemología y una ontología no racionalistas que dan lugar, por un lado, a una concepción antropológica del pensamiento y, por el otro, a una concepción esencialmente social del aprendizaje. De acuerdo con la teoría, lo que caracteriza al pensamiento no es solamente su naturaleza semióticamente mediatizada sino sobre todo su modo de ser en tanto que *praxis reflexiva*. El aprendizaje de las matemáticas es tematizado como la adquisición comunitaria de una forma de reflexión del mundo guiada por modos epistémico-culturales históricamente formados.

- **PALABRAS CLAVE**: Objetivación, pensamiento matemático, semiótica, sentido, significado, significación cultural, signos.

**ABSTRACT**

In this article, we present the general bases for a cultural theory of objectification. The theory in question deals with the teaching and learning of mathematics and takes its inspiration from some anthropological and historico-cultural schools of knowledge. This theory relies on a non-rationalist epistemology and ontology which give rise, on the one hand, to an anthropological conception of thought, and on the other, to an essentially social conception of learning. According to the theory of objectification, thought is not only characterized by its semiotically mediated nature but more importantly by way of its existence as a *reflexive praxis*. The learning of mathematics is thematized as the acquisition, by the community, of a form of reflection on the world guided by epistemic-cultural modes which have been historically formed.

- **KEY WORDS:** Objectification, mathematical thinking, semiotics, meaning, signification, cultural signification, signs.

*Fecha de recepción: Febrero de 2006/ Fecha de aceptación: Abril de 2006*

1 An English translation of this article is available at: http://laurentian.ca/educ/lradford/PUBLIC.HTML. Este artículo es resultado de un programa de investigación subvencionado por The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH).

2 Université Laurentienne, Ontario, Canada.

## RESUMO

Este artigo apresenta as linhas gerais de uma teoria cultural da objetivação uma teoria da ensino e a aprendizagem das matemáticas que se inspira de escolas antropológicas e histórico-culturais do conhecimento. Tal teoria se apóia em uma epistemologia e uma ontologia não racionalistas que dão lugar, por um lado, a uma concepção antropológica do pensamento e, por outro, a uma concepção essencialmente social da aprendizagem. De acordo com a teoria, o que caracteriza o pensamento não é somente sua natureza semióticamente mediatizada, mas sobre todo seu modo de ser como *praxis reflexiva*. A aprendizagem das matemáticas é tematizado como a aquisição comunitária de uma forma de reflexão do mundo guiada por modos epistémico-culturais historicamente formados.



- **PALAVRAS CHAVES:** Objetivação, pensamento matemático, semiótica, sentido, significado, significação cultural, signos.



## RÉSUMÉ

Dans cet article, on présente les bases générales d'une théorie culturelle de l'objectivation. Il s'agit d'une théorie de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques qui s'inspire de certaines écoles anthropologiques et historico-culturelles du savoir. Cette théorie s'appuie sur une épistémologie et une ontologie non rationalistes qui donnent lieu, d'une part, à une conception anthropologique de la pensée et, d'autre part, à une conception essentiellement sociale de l'apprentissage. Selon la théorie de l'objectivation, ce qui caractérise la pensée n'est pas seulement sa nature sémiotiquement médiatisée mais surtout son mode d'être en tant que *praxis réflexive*. L'apprentissage des mathématiques est thématisé comme étant l'acquisition communautaire d'une forme de reflexion du monde guidée par des modes épistémo-culturels historiquement formés.



- **MOTS CLÉS:** Objectivation, pensée mathématique, sémiotique, sens , signification, signification culturelle, signes.


## Introducción

Incluso para los empiristas, todo aprendizaje supone la actividad del pensamiento. El pensamiento aparece como el sustrato del aprendizaje, aquello a través del cual se establece la relación entre el ser y el mundo. Curiosamente, a pesar de su importancia, y aun si se habla del pensamiento numérico, geométrico, etc., el pensamiento como concepto en sí no forma parte de las teorías didácticas actuales. Sin duda, una de las razones tiene que ver con la idea popular de que el pensamiento es inobservable. Como afirma el fundador del Constructivismo Radical,

> Entre las actividades humanas más intrigantes que no pueden ser observadas, está pensar (thinking) o reflexionar. A veces pueden inferirse los pensamientos o las reflexiones … pero el proceso real del pensamiento queda invisible así como los conceptos que éste usa y el material crudo del cual está compuesto. (von Glasersfeld, 1995, p. 77)

Esta idea de la inobservabilidad del pensamiento es parte de la influencia de la filosofía racionalista y su concepto del ser. Así,

> El ser cartesiano habita un mundo en el que la actividad material es imposible, pues el pensamiento es concebido como una relación entre el ser y las entidades mentales, las ideas, que no son objetos posibles de actividad material. (Bakhurst, 1988, p. 35)

A estos dos elementos –el sujeto y el objeto– que une el pensamiento, las teorías del aprendizaje añaden otro elemento: el profesor, que viene a completar el famoso triángulo didáctico. A menudo, sin embargo, el profesor es revestido de un papel menor: literalmente el de facilitador del aprendizaje. En las medida en que las teorías didácticas conceptualizan al individuo como sujeto auto-regulado y auto equilibrante, desarraigado de su contexto socio-cultural, capaz de reflexionar como científico que explora los alrededores en busca de fenómenos que confirmen la viabilidad de su saber, en la medida en que el individuo es visto –como lo apunta Martin y sus colaboradores– en tanto que individuo que parece llevar de alguna manera en su propio interior las condiciones de su crecimiento, un ser que solamente necesita un entorno facilitador para alcanzar, a través de la experiencia personal, su plena socializacion y potencial intelectual[3], el profesor aparece, contra la abrumadora evidencia de la constatación cotidiana, como simple catalizador del encuentro entre el alumno y el objeto del saber.

La teoría de la objetivación que se esbozará aquí parte de presupuestos diferentes. En oposición a las corrientes racionalistas e idealistas, ésta aboga por una concepción no mentalista del pensamiento y por una idea de aprendizaje tematizado como adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico-culturales históricamente formados.

En las dos primeras partes del artículo se discuten las bases epistemológicas y ontológicas que dan sustento a la teoría, así como el concepto de pensamiento y su significado antropológico. En las dos últimas partes se aborda el problema de la enseñanza-aprendizaje, en particular a la luz del concepto fundamental de sala de clase como comunidad de aprendizaje.

## 1. Una concepción no mentalista del pensamiento

En una clase de primer grado de primaria, los alumnos debían resolver un problema sobre una secuencia numérica. La maestra introdujo el problema a través de una historia en la cual una ardilla, al final del verano, lleva cada día dos nueces a su nuevo nido en preparación al invierno que se acerca. En una parte del problema los alumnos debían encontrar el número de

3 Martin (2004), Martin, Sugarman y Thompson (2003).

nueces almacenadas por la ardilla en su nido al final del décimo día, sabiendo que cuando la ardilla encuentra el nido había ya 8 nueces y que la ardilla no come nueces de su provisión de invierno. Cristina, una de las alumnas, empezó a contar de dos en dos: diez, doce, catorce, dieciséis. Como notó que no había pensado en el número del día, decidió empezar el conteo. Sin embargo, hacer las dos cosas al mismo tiempo resultó una tarea muy difícil. Dirigiéndose a Miguel, su compañero de equipo, Cristina dijo: "¡vamos a hacerlo juntos!" Mientras que el resto de la clase continuaba su trabajo en pequeños grupos, Cristina y Miguel fueron al frente del pizarrón y utilizando una regla larga de madera, Cristina empezó a contar de dos en dos, mientras que Miguel contaba los días en voz alta. En la figura 1, Cuando Miguel dice "nueve", Cristina señala con una regla de madera el número 26 sobre una recta numérica colocada arriba del pizarrón, que es el número de nueces acumuladas hasta el día 9. En la figura 2, Miguel, que continuó contando los días, dice "diez", mientras que Cristina desplaza la regla hacia la derecha y señala el número 28, que es la respuesta a la pregunta.

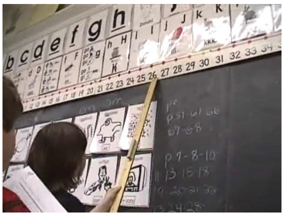


***Figura 1.*** Miguel dice 9 y Cristina señala el número 26.

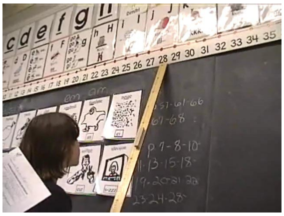


***Figura 2.*** Miguel dice 10 y Cristina señala el número 28.

Es usual que por pensamiento se entienda una especie de vida interior, una serie de procesos mentales sobre ideas que lleva a cabo un individuo. De acuerdo con esta concepción, a partir de los datos dados por la maestra, Cristina y Miguel, habrían recuperado de su memoria la información pertinente para producir una representación mental del problema. Con la ayuda de esta representación, el pensamiento de Cristina y Miguel se hubiese movido a lo largo de los estados de un espacio-problema, procesando informaciones codificadas quizás bajo la forma de representaciones proposicionales, a través de reglas lógicas o de inferencia.

Esta concepción del pensamiento, como "actividad mental" (de Vega, 1986, p. 439), proviene de la interpretación de la filosofía griega por parte de San Agustín a fines del siglo IV, interpretación que operó, en particular, una transformación del significado inicial del término griego *eidos*. Mientras que Homero, entre otros, utilizaba el término *eidos* en el sentido de algo externo, no mental -"lo que uno mira", por ejemplo la figura, la forma, la apariencia[4]- para San Agustín *eidos* se refiere a algo que está *dentro del individuo*[5]. Influenciados por esta

[4] Por ejemplo, en la traducción al inglés del Libro VIII, líneas 229-30, de la Ilíada, Homero dice: " Argives, shame on you cowardly creatures, brave in semblance [eidos] only". (Homer, ca. 800 A.-C.). Estoy en deuda con Eva Firla por su ayuda en la etimología del término eidos.

[5] Una discusión sobre la manera en que ocurre esta transformación en la concepción del pensamiento en las matemáticas renacentistas se encuentra en Radford (2004).

transformación, los racionalistas del siglo XVII, como Descartes y Leibniz consideraban que las matemáticas pueden practicarse hasta con los ojos cerrados, pues la mente no necesita el concurso de los sentidos ni de la experiencia para alcanzar las verdades matemáticas: los principios que necesitamos para entender los objetos o para percibir sus propiedades, las leyes eternas de la razón, son "principios internos", es decir que están en nuestro interior (Leibniz, 1966, pp. 34-37).

Antropólogos como Geertz han puesto en evidencia las limitaciones de la concepción de las ideas como "cosas en la mente" y del pensamiento como proceso exclusivamente intracerebral:

> La idea comúnmente aceptada según la cual el funcionamiento mental es un proceso intracerebral que puede ser sólo asistido o amplificado en segundo término por los varios dispositivos artificiales que dicho proceso ha permitido al hombre crear, resulta estar completamente equivocada. Al contrario, siendo imposible una definición adaptativa, completamente específica de los procesos neuronales en términos de parámetros intrínsicos, el cerebro humano es completamente dependiente de recursos culturales para su propia operación; y esos recursos no son, en consecuencia, [objetos] añadidos a la actividad mental sino constituyentes de ésta. (Geertz, 1973, p. 76)

La teoría de la objetivación parte de una posición no mentalista del pensamiento y de la actividad mental. Dicha teoría sugiere que el pensamiento es una *praxis cogitans*, esto es una práctica social (Wartofsky, 1979). De manera más precisa, el pensamiento es considerado *una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos*.

En el resto de esta sección serán discutidos los diferentes aspectos de esta definición.

### *1.1 Mediación semiótica*

El carácter mediatizado del pensamiento se refiere al papel, en el sentido de Vygotsky (1981a), que desempeñan los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.) en la realización de la práctica social. Los artefactos no son meras ayudas al pensamiento (como lo plantea la psicología cognitiva) ni simples amplificadores, sino partes constitutivas y consustanciales de éste[6]. Se piensa con y a través de los artefactos culturales, de manera que hay una región externa que, parafraseando a Voloshinov (1973), llamaremos el *territorio del artefacto.* Es en este territorio donde la subjetividad y la objetividad cultural se imbrican mutuamente y en el que el pensamiento encuentra su espacio de acción y la mente se extiende más allá de la piel (Wertsch, 1991).

De acuerdo con la teoría de la objetivación, el pensamiento de Cristina y Miguel no es, pues, algo que transcurre solamente en el plano cerebral de los alumnos. El pensamiento también ocurre en el plano social, en el territorio del artefacto. La regla de madera, la recta numérica, los signos matemáticos sobre la hoja que sostiene Miguel mientras lee detrás de Cristina, son artefactos que *mediatizan* y *materializan* el pensamiento. Esos artefactos son parte integral del pensamiento.

6 Una crítica a la concepción de artefactos como amplificadores se encuentra en Cole (1980).

### *1.2 La naturaleza reflexiva del pensamiento*

La naturaleza reflexiva del pensamiento significa que el pensamiento del individuo no es simple asimilación de una realidad externa (como proponen las escuelas empiristas y conductistas), ni tampoco construcción *ex nihilo* (como proponen ciertas escuelas constructivistas). El pensamiento es una *re-flexión*, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios.

En el ejemplo anterior, el pensamiento de los alumnos se desarrolla a lo largo de una compleja coordinación de actividad perceptual y de acciones semióticamente mediatizadas según la interpretación y los sentidos subjetivos de los alumnos (por ejemplo, reinterpretar el problema sobre una recta numérica, contar de dos en dos, etc.). Al mismo tiempo, el problema sobre el cual los alumnos reflexionan es parte de una realidad históricamente constituida. Problemas sobre secuencias de números (progresiones aritméticas) se encuentran en la matemática babilónica y fueron teorizados luego por los pitagóricos y las diferentes escuelas numerológicas griegas (Robbins, 1921). No sólo dicha realidad no se presenta de manera directa o inmediata, como pensaban los empiristas, sino que tampoco puede ser reconstruida a través de la sola experiencia personal, pues

> Ninguna experiencia personal, por rica que sea, puede llegar a pensar de manera lógica, abstracta o matemática, e individualmente establecer un sistema de ideas. Para hacer esto se requeriría no una vida, sino de miles. (Leontiev, 1968, p. 18)

Uno de los papeles de la cultura (sobre el cual vamos a detenernos en la siguiente sección) es sugerir a los alumnos formas de percibir la realidad y sus fenómenos, formas de apuntar (*viser*), como diría Merleau-Ponty (1945), o formas de intuición, como diría Husserl (1931).

En resumen, dicho de manera más general, la *re-flexividad* del pensamiento consiste en que, desde el punto de vista filogenético, los individuos dan lugar al pensamiento y a los objetos que éste crea. Pero al mismo tiempo, desde el punto de vista ontogenético, en el acto de pensar, un individuo concreto cualquiera es subsumido por su realidad cultural y la historia del pensamiento humano, las cuales orientan su propio pensamiento. "El ser social", dice Eagleton, "origina el pensamiento, pero al mismo tiempo es abarcado por éste"[7].

### *1.3 La dimensión antropológica del pensamiento*

En la sección precedente se dijo que el pensamiento es considerado como una *re-flexión* mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos. ¿Qué significa que la *re-flexión* que constituye el pensamiento se realice de acuerdo con la *forma o modo de la actividad de los individuos*? Esto significa que la manera en que llegamos a pensar y conocer los objetos del saber está enmarcada por significados culturales que van más allá del contenido mismo de la actividad en cuyo interior ocurre el acto de pensar. Estos significados culturales actúan como enlaces mediadores entre la conciencia individual y la realidad cultural objetiva, y se constituyen

---

7 Eagleton (1997,p.12).

en prerrequisito y condición de la actividad individual mental (Ilyenkov, 1977, p. 95). Dichos significados culturales *orientan* la actividad y le dan cierta *forma*. Es por eso que pensar no es algo que simplemente nos ponemos a hacer, de forma más o menos antojadiza, en el transcurso del cual de repente encontramos una buena idea. Si bien es cierto que la actividad práctica sensual, mediatizada por los artefactos, entra en los procesos del pensamiento, en su propio contenido, la manera en que esto ocurre está sujeta a los significados culturales en los que se sostiene la actividad.

He aquí un ejemplo. La diferencia entre el pensamiento del escriba babilónico y el del geómetra griego no se reduce únicamente a los tipos de problemas de los que cada uno de ellos se ocupó, ni en los artefactos utilizados para pensar matemáticamente, ni al hecho de que el primero reflexionaba en un contexto ligado con la administración política y económica, mientras que el segundo lo hacia dentro de un contexto aristocrático-filosófico. La diferencia entre el pensamiento matemático babilónico y el griego tiene que ver con el hecho de que la forma de las actividades que enmarcaron esos pensamientos está igualmente subtendida por una *superestructura simbólica* que, a pesar de su importancia, no ha sido tomada en cuenta en las teorizaciones contemporáneas sobre el concepto de actividad[8]. Esta superestructura simbólica, que en otros trabajos hemos llamado *Sistemas Semióticos de Significación Cultural* (Radford 2003a), incluyen significados culturales tales como concepciones en torno a los objetos matemáticos (su naturaleza, su modo de existencia, su relación con el mundo concreto, etc.) y patrones sociales de producción de significados. El pensamiento del escriba babilónico está enmarcado por un pragmatismo realista en el que cobran vigencia los objetos matemáticos “rectángulo”, “cuadrado”, etc., objetos que el geómetra griego del tiempo de Euclides concibe en término de formas platónicas o abstracciones aristotélicas (ver Figura 3).

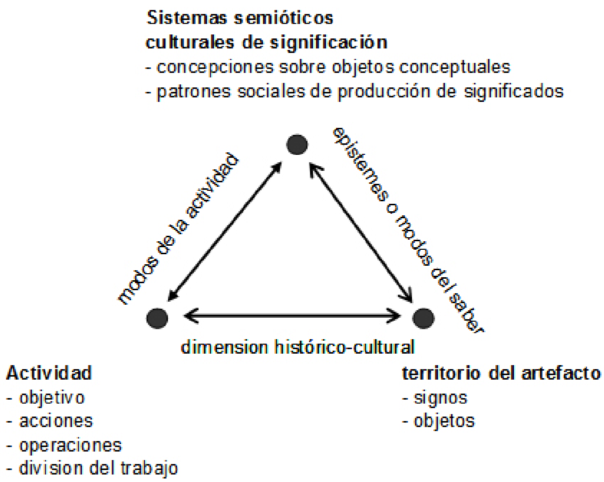



***Figura 3.*** Las flechas muestran la interacción entre los Sistemas Semióticos de Significación Cultural con la actividad y el territorio del artefacto. Dicha interacción general los modos de la actividad y del saber, modos que, en un movimiento dialéctico, vienen a su vez a alimentar a los vértices del triángulo.

8 Leontiev no teorizó la dimensión de la superestructura simbólica que estamos poniendo en evidencia aquí y que es, sin embargo, fundamental para entender el pensamiento en su dimensión antropológica. En la prolongación de la Teoría de la Actividad de Leontiev, hecha por Engeström (1987), dicha superestructura no fue tampoco tomada en cuenta.

En interacción con las actividades (sus objetivos, acciones, distribución del trabajo, etc.) y con la tecnología de la mediación semiótica (el territorio del artefacto), los *Sistemas Semióticos de Significación Cultural* dan lugar, por un lado, a formas o modos de actividad y, por otro lado, a modos específicos del saber o *epistemes* (Foucault, 1966). Mientras que la primera interacción da lugar a maneras particulares en que las actividades son realizadas en un momento histórico, la segunda interacción da lugar a modos de saber específicos que permiten una identificación de los problemas o situaciones "interesantes" y demarcan los métodos, argumentos, evidencias, etc. que serán consideradas válidas en la reflexión que se lleva a cabo sobre los problemas y situaciones en una cultura dada[9].

El triangulo mostrado en la figura 3 ilustra la complejidad de la actividad y la naturaleza diversa de la misma.

La diversidad cultural en las formas de la actividad humana explica, en nuestra perspectiva, la diversidad de formas que toma el pensamiento matemático, y que la historia nos muestra. En vez de ver esas formas históricas como versiones "primitivas" o estados "imperfectos" de un pensamiento que marcha hacia la forma acabada que presenta el pensamiento matemático actual (etnocentrismo), la dimensión antropológica de la teoría de la objetivación considera esas formas como propias de las actividades humanas que la enmarcan y renuncia así a privilegiar la racionalidad occidental como la racionalidad *par excellence*.

Como Spengler (1948, p. 68 y p. 70) sugería hace muchos años, las matemáticas de una cultura no son sino el estilo de la forma con que el hombre percibe su mundo exterior y que, contrario a la idea común, la "esencia" de éstas no es culturalmente invariable. Es precisamente la diversidad cultural la que explica la existencia de universos de números tan diferentes como irreducibles unos a otros (ibid. p. 68).

La manera en que el escriba babilónico, el geómetra griego y el abaquista Renacentista llegan a pensar y a conocer los objetos del saber, la manera en que plantean sus problemas y los considera resueltos, está enmarcada por el modo mismo de la actividad y la episteme cultural correspondiente (Radford, 1997, 2003a, 2003b).

## 2. Las bases epistemológicas y ontológicas de la Teoría de la objetivación

Cualquier teoría didáctica debe en un momento u otro (a menos de confinarse voluntariamente a una especie de posición ingenua) clarificar su posición ontológica y epistemológica. La posición *ontológica* consiste en precisar el sentido en que la teoría aborda la cuestión de la naturaleza de los objetos conceptuales (en nuestro caso, la naturaleza de los objetos matemáticos, su forma de existencia, etc.). La posición *epistemológica* consiste en precisar la manera en que, según la teoría, esos objetos pueden (o no) llegar a ser conocidos.

[9] De allí que no es solamente la acción del sujeto que constituye el esquema del concepto (Piaget) o su sello o emblema (Kant) sino sobre todo el significado de la acción en tanto que momento de la actividad socio-cultural misma (Radford, 2005).

Las teorías didácticas contemporáneas que parten de una aplicación de las matemáticas abrazan a menudo, aun si no es mencionado explícitamente, una ontología realista, y plantean el problema epistemológico en términos de abstracciones. Claro, la situación no es tan simple, como el propio Kant lo reconoció.

Para el realismo, que en un sentido importante es la versión platonista de la racionalidad instrumental (Weber, 1992) que emerge en el renacimiento, la existencia de los objetos matemáticos antecede y es independiente de la actividad de los individuos. Al igual que el platonista, el realista considera que los objetos matemáticos son independientes del tiempo y la cultura. La diferencia es que, mientras los objetos platónicos no se mezclan con el mundo de los mortales, los objetos del realista gobiernan nuestro mundo. Según la ontología realista, esto explica el milagro de la aplicabilidad de las matemáticas a nuestro mundo fenomenal (Colyvan, 2001). Naturalmente, para lograr esto, el realismo hace un acto de fe que consiste en creer que el ascenso de la abstracción hacia los objetos es ciertamente posible. La fe que Platón ponía en el discurso social razonado (logos) y que Descartes ponía en la cogitación consigo mismo, el realismo la pone en el experimento científico.

La posición ontológica y epistemológica de la teoría de la objetivación se aparta de la ontología platonista y realista, y su concepción de los objetos matemáticos como objetos eternos, anteriores a la actividad de los individuos. Al alejarse de la ontología idealista, la teoría se aleja de la idea de que los objetos son productos de una mente que opera replegada sobre sí misma o según las leyes de la lógica (ontología racionalista). La teoría de la objetivación sugiere que los objetos matemáticos son generados históricamente en el curso de la actividad matemática de los individuos. De manera más precisa, los objetos matemáticos *son patrones fijos de actividad reflexiva (en el sentido explicado anteriormente) incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos*.

El objeto círculo, por ejemplo, es un patrón fijo de actividad cuyos orígenes resultan no de la contemplación intelectual de los objetos redondos que los primeros individuos encontraron en su entorno, sino de la actividad sensual que llevó a dichos individuos a notar o a darse cuenta de ella:

> Los hombres pudieron ver el Sol redondo solamente porque redondearon barro con sus manos. Con sus manos dieron forma a la piedra, pulieron sus bordes, le dieron aspecto plano. (Mikhailov, 1980, p. 199)

Esa experiencia sensual laboral queda fijada en el lenguaje, el cual encarna así los significados originales, de manera que

> el significado de la palabra “borde”, “plano”, “línea” no viene de una abstracción de los aspectos generales de las cosas en el proceso de contemplación (Mikhailov, ibid.)

sino de la actividad laboral que se pierde en los orígenes de la humanidad. Lejos de entregarse de lleno a nuestros sentidos, nuestra relación con la naturaleza y el mundo está filtrada por categorías conceptuales y significados culturales que hacen que

> El hombre moderno pueda contemplar la naturaleza solamente a través del prisma de todas las habilidades sociales de trabajo que han sido acumuladas por sus predecesores. (Mikhailov, ibid.)

Terminemos esta sección con una observación general sobre la evolución de los objetos matemáticos que será necesaria para nuestra discusión sobre el aprendizaje. En el curso del tiempo, la actividad laboral va dejando su sello en sus productos conceptuales (Leontiev, 1993, p. 100). Como todo objeto matemático, el concepto de círculo, en tanto que reflexión del mundo en la forma de la actividad de los individuos, ha sido expresado de otras formas a lo largo de la historia. Por ejemplo, a través de una palabra, un dibujo, una fórmula, una tabla numérica. Cada una de esas expresiones ofrece un significado diferente, que se amarra a los anteriores y viene a constituir como diría Husserl capas *noéticas* del objeto. Como es la actividad de los individuos la que forma la raíz genética del objeto conceptual, el objeto posee una dimensión expresiva variada que va más allá de un simple contenido conceptual "científico". Esta dimensión expresiva encierra igualmente aspectos racionales, estéticos y funcionales de su cultura.

## 3. Aprendizaje como objetivación cultural del saber

### *3.1 Dos fuentes de elaboración de significados*

En las secciones anteriores hemos visto que, desde el punto de vista filogenético, la actividad humana es generadora de los objetos conceptuales, los cuales se transforman a raíz de cambios en las actividades mismas. Desde el punto de vista ontogenético, el problema central es explicar cómo se realiza la adquisición del saber depositado en la cultura: este es un problema fundamental de la didáctica de las matemáticas en particular y del aprendizaje en general.

Las teorías clásicas de la didáctica de las matemáticas plantean el problema en términos de una construcción o re-construcción del saber cultural por parte del alumno[10]. La idea de construcción del saber tiene su origen en la epistemología elaborada por Kant en el siglo XVIII. Para Kant, el individuo no es solamente un pensador ensimismado cuya actividad mental, si es bien realizada, lo llevará a las verdades matemáticas como sostenían los racionalistas (Descartes, Leibniz, etc.); tampoco es un individuo pasivo que recibe las informaciones sensoriales para formar ideas, como proponían los empiristas (Hume, Locke, etc.). Para Kant el pensador es un ser en acción: el individuo es el artesano de su propio pensamiento (esta idea kantiana es analizada en Radford, 2005). En realidad Kant expresa de manera coherente y explícita el cambio epistemomólogico que se venía formando paulatinamente desde la aparición de la manufactura y la emergencia del capitalismo en el Renacimiento y que Arendt (1958) resume de la manera siguiente: la era moderna es marcada por un desplazamiento en la concepción de lo que significa saber; el problema central del conocimiento yace en un desplazamiento que va del *qué* (el objeto del saber) al *cómo* (el proceso), de suerte que, a diferencia del hombre del medioevo, el hombre moderno puede entender solamente aquello que él mismo ha hecho.

---

10 Naturalmente, hay matices diferentes, según la concepción que la teoría se hace del sujeto que aprende (esto es, del alumno). Partiendo de una posición extrema, el constructivismo radical va más lejos que todas las formas de constructivismo. Brousseau (2004) resume las dificultades a las que se enfrenta dicha teoría afirmando que "En didactique, le constructivisme radical, est une absurdité", y adopta un constructivismo piagetiano más moderado que, inevitablemente, lleva la teoría de situaciones a una serie de paradojas.

Para la teoría de la objetivación, el aprendizaje no consiste en construír o reconstruír un conocimiento. *Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura*. La adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados. Es lo que llamaremos más adelante un proceso de *objetivación*. Por el momento, nos interesa discutir dos fuentes importantes de elaboración de significados que subtienden la adquisición del saber.

### *El saber depositado en los artefactos*

Una de las fuentes de adquisición del saber resulta de nuestro contacto con el mundo material, el mundo de artefactos culturales de nuestro entorno (objetos, instrumentos, etc.) y en el que se encuentra depositada la sabiduría histórica de la actividad cognitiva de las generaciones pasadas. Si bien es cierto que ciertos animales llegan a utilizar artefactos, para el animal el artefacto no llega a adquirir una significación durable. El palo de madera que el chimpancé utiliza para alcanzar una fruta pierde su significado luego que la acción ha sido ejecutada (Köhler, 1951). Es por eso que los animales no conservan artefactos. Además –y este es un elemento fundamental de la cognición humana– al contrario de los animales, el ser humano es *afectado* profundamente por el artefacto: al contacto con éste, el ser humano reestructura sus movimientos (Baudrillard, 1968) y forma capacidades motrices e intelectuales nuevas, como la anticipación, la memoria, la percepción (Vygotsky y Luria, 1994).

El mundo de artefactos aparece, pues, como una fuente importante en el proceso de aprendizaje, pero no es el único. Los objetos no pueden hacer clara la inteligencia histórica encarnada en ellos. Para esto se requiere de su uso en actividades y del *contacto con otras personas* que saben "leer" esa inteligencia y ayudarnos a adquirirla. El lenguaje simbólico-algebraico quedaría reducido a un conjunto de jeroglíficos. La inteligencia de la que es portador dicho lenguaje quedaría sin ser notada sin la actividad social realizada en la escuela. Es en esta dimensión social que constituye para la teoría de la objetivación la segunda fuente esencial del aprendizaje[11].

### *La interacción social*

Aunque la importancia de la dimensión social ha sido subrayada por una infinidad de estudios recientes sobre la interacción en el salón de clases, hay diferencias sutiles en cuanto a su aporte cognitivo (Cobb y Yackel,1996; Sierpinska, 1996; Steinbring, Bartolini Bussi y Sierpinska, 1998;). A menudo, la interacción es vista como negociación de significados o como simple ambiente que ofrece los estímulos de adaptación que requiere el desarrollo cognitivo del alumno. El problema es que el individuo en general y el alumno en particular no encuentran en la sociedad y en el salón de clases solamente una especie de muro con el que se topan y se frotan para adaptarse; no se trata solamente de condiciones "externas" a las que el sujeto debe *acomodar* su actividad. El punto crucial es que las actividades, los medios materiales que las mediatizan y sus objetivos están impregnados de valores científicos, estéticos, éticos, etc. que vienen a recubrir las acciones que realizan los individuos y la reflexión que estas

[11] La escuela histórico-cultural de Vygotsky ha expresado este punto de manera contundente. Ver por ejemplo Leontiev, 1993, pp. 58-59; 1968, pp. 27-29; Vygotsky, 1981b.

acciones exigen. Tal como fue discutido en la primera parte de este artículo, las acciones que los individuos realizan están sumergidas en modos culturales de actividad. Es por eso que el salón de clases no puede verse como un espacio cerrado, replegado en sí mismo, en el cual se negocian las normas del saber, pues esas normas tienen toda una historia cultural y como tal pre-existen a la interacción que ocurre en el salón de clases. Tampoco puede verse como una especie de ambiente biológico en el que el individuo opera según sus mecanismos invariables de adaptación general.

En la perspectiva que estamos sugiriendo, la interacción desempeña un papel diferente. En lugar de desempañar una función meramente de adaptación, de catalizadora o facilitadora, en la perspectiva teórica que estamos esbozando la interacción es consustancial del aprendizaje.

Vemos, pues, que hay dos elementos que desempeñan un papel básico en la adquisición del saber que son el mundo material y la dimensión social. La asignación de significados que reposa sobre esas dimensiones tiene una importancia psicológica profunda en la medida en que es, a la vez, toma de conciencia de conceptos culturales y proceso de formación de las capacidades específicas del individuo. Es por eso que, dentro de nuestra perspectiva, aprender no es simplemente apropiarse de algo o asimilar algo, sino que es el proceso mismo en que se forman nuestras capacidades humanas.

### *3.2 La actividad de aprendizaje*

Un elemento central en el concepto de actividad es el *objetivo* de la misma (Leontiev, 1993). El objetivo puede ser, por ejemplo, que los alumnos elaboren una fórmula algebraica en el contexto de una generalización aritmética, que aprendan un método algebraico de resolución de problemas, que aprendan a demostrar proposiciones geométricas, etc.. Aunque el objetivo es claro para el profesor, en general éste no lo es para los alumnos. Si el objetivo fuese claro par estos últimos, no habría nada por aprender.

Dentro del proyecto didáctico de la clase, para que dicho objetivo se pueda realizar, el profesor propone a los alumnos una serie de problemas matemáticos. Resolver esos problemas se convierte en *fines* que guían las acciones de los alumnos. Estos problemas -cargados desde el principio con un contenido cultural y conceptual- forman trayectorias potenciales para alcanzar el objetivo.

Debemos subrayar que, desde la perspectiva de la teoría de la objetivación, hacer matemáticas no se reduce a resolver problemas. Sin quitarle méritos al problema en la formación del conocimiento (ver por ejemplo Bachelard, 1986), para nosotros la resolución de problemas no es el fin sino *un* medio para alcanzar ese tipo de *praxis cogitans* o reflexión cultural que llamamos pensamiento matemático. De manera, pues, que detrás del objetivo de la lección, yace un objetivo mayor y más importante, el objetivo general de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que es la elaboración por parte del alumno de una reflexión definida como relación *común* y *activa* con su realidad histórico-cultural.

En otras palabras, aprender matemáticas no es simplemente aprender a *hacer* matemáticas (resolver problemas) sino aprender a *ser* en matemáticas. La diferencia entre *hacer* y *ser* es inmensa y, como veremos más adelante, tiene consecuencias importantes no solamente en el diseño de las actividades sino en la organización misma de la clase y el papel que allí juegan alumnos y profesores.

### *3.3 La objetivación del saber*

En forma sucinta, el objetivo mayor de la enseñanza de las matemáticas es que el alumno aprenda a reflexionar de acuerdo con ciertas formas culturales de pensamiento históricamente constituidas que la distinguen de otras formas de reflexión (por ejemplo de tipo literario o musical) en la medida en que en la reflexión matemática, la relación del individuo con el mundo enfatiza ideas en torno a la forma, el número, la medida, el tiempo, el espacio, etc. Es este énfasis el que distingue el pensamiento matemático de otras formas de pensamiento.

Para conseguir ese objetivo, debemos recurrir a la práctica, por la sencilla razón de que no disponemos de un lenguaje que pueda enunciar y capturar en el enunciado (en el sentido clásico del término, es decir, como conjunto articulado de sonidos vocales) el pensamiento matemático. No hay, en efecto, una formulación lingüística posible del pensamiento matemático de cuya lectura -por atenta que sea- pueda resultar la comprensión de éste. El pensamiento, ya lo hemos dicho (Radford, 2003b), está más allá del discurso: es una *praxis cogitans*, algo que se aprende haciendo.

La teoría de la objetivación no ve, sin embargo, dicho aprendizaje como simple imitación o participación conforme a una práctica ya establecida, sino como la fusión entre una subjetividad que busca percibir ese lingüísticamente inarticulable modo de reflexionar y este último que no puede sino *mostrarse* a través de la acción.

Sin duda, hay una relación estrecha entre el pensamiento matemático y sus objetos en el sentido en que estos objetos no pueden ser percibidos sino a través de un pensamiento, el cual, a su vez, en el momento de su constitución ontogenética, debe apuntar hacia uno o más de esos objetos. ¿Pero cómo es esto posible? Para constituirse, el pensamiento parece suponer la existencia del objeto. Por otro lado, el objeto no puede llegar a ser sin el pensamiento (entendido como *praxis cogitans*) que lo produce.

El misterio de esta relación se disuelve si regresamos a lo dicho en la primera parte de este artículo. El objeto matemático concebido como *patrón o patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo constantemente en cambio de la práctica social* no podrá ser percibido, sino es a través de la actividad reflexiva misma.

De allí que para llegar a conocer los objetos y productos del desarrollo cultural es "necesario realizar en torno a los mismos determinada actividad, es decir, una actividad que produzca los rasgos esenciales de aquélla, encarnada, 'acumulada' en dichos objetos." (Leontiev, 1968, p. 21)

La enseñanza consiste en poner y mantener en movimiento actividades contextuales, situadas en el espacio y el tiempo, que se encaminan hacia un patrón fijo de actividad reflexiva incrustada en la cultura.

Ese movimiento, que podría expresarse como el movimiento del proceso al objeto (Sfard, 1991; Gray y Tall, 1994), posee tres características esenciales. Primero, el objeto no es un objeto monolítico u homogéneo. Es un objeto compuesto de *laderas de generalidad* (Radford, en prensa-1). Segundo, desde el punto de vista epistemológico, dichas laderas serán más o menos generales de acuerdo con las características de los significados culturales del patrón fijo de actividad en cuestión (por ejemplo, el movimiento kinestésico que forma el círculo; la fórmula simbólica que lo expresa como conjunto de puntos a igual distancia de su centro, etc.). Tercero, desde el punto de vista cognitivo, dichas laderas de generalidad son notadas de manera *progresiva* por el alumno. El "¡Aha!" que se convirtió tan popular en parte gracias a la teoría de la Gestalt es a lo sumo cierto en tanto que punto final de un largo proceso de toma de conciencia.

El aprendizaje consiste en aprender a notar o percibir esas laderas de generalidad. Como el aprendizaje es *re-flexión*, aprender supone un proceso dialéctico entre sujeto y objeto mediatizado por la cultura, un proceso en el que, a través de su acción (sensorial o intelectual) el sujeto nota o toma conciencia del objeto.

La objetivación es, precisamente, ese proceso social de toma de conciencia progresiva del *eidos* homérico, esto es, de algo frente a nosotros una figura, una forma algo cuya generalidad notamos gradualmente, al mismo tiempo que la dotamos de sentido. Es ese notar que se desvela en el gesto que cuenta o que señala, notar que se descubre en la intención que se plasma en el signo o en el movimiento kinestésico que mediatiza el artefacto en el curso de la actividad práctica sensorial, algo susceptible de convertirse en acción reproducible, cuyo significado apunta hacia ese patrón eidético fijo de acciones incrustadas en la cultura que es el objeto mismo[12].

## 4. El salón de clases como comunidad de aprendizaje

### *4.1 Ser-con-otros*

El salón de clases es el espacio social en donde el alumno *elabora* esa reflexión definida como relación *común* y *activa* con su realidad histórico-cultural[13]. Es aquí en donde ocurre el encuentro del sujeto y el objeto del saber. La objetivación que permite dicho encuentro no es un proceso individual, sino social. La sociabilidad del proceso, empero, no debe ser entendida como simple interacción de negocios, una especie de juego entre adversarios capitalistas en el que cada uno invierte bienes con la esperanza de terminar con más. La sociabilidad significa aquí el proceso de formación de la conciencia, que Leontiev caracterizaba como *co-sapiencia*, es decir, saber en común o saber-con-otros.

Naturalmente, estas ideas implican una reconceptualización del alumno y su papel en el acto de aprendizaje. En la medida en que las teorías contemporáneas de la didáctica de las matemáticas se amparan del concepto de individuo formulado por Kant y otros filósofos del Siglo de las Luces, la educación se justifica en tanto que ésta asegura la formación de un sujeto autónomo (entendida en el sentido de ser capaz de hacer algo por sí mismo, sin ayuda de los demás). La autonomía es, en efecto, un tema central de la educación moderna que ha servido de fundamento a las teorizaciones del socioconstructivismo (ver, por ejemplo, Yackel and Cobb, 1996) y de la teoría de situaciones (Brousseau, 1986; Brousseau y Gibel, 2005, p. 22). El racionalismo que pesa sobre este concepto de autonomía viene de su alianza con otro concepto clave kantiano: el de la libertad. No puede haber autonomía sin libertad, y la libertad significa el uso conveniente de la Razón según sus propios principios, pues "no vemos los principios sino a través de la razón" (Kant, 1980, p. 119).

12 Ver Radford, 2002, 2003c, 2004.

13 El término *elaborar* debe ser entendido en su sentido etimológico medieval, como *–labMrtus* (de ex-labMrre), es decir de *labor o trabajo sensual conjunto*.

Como el Siglo de las Luces no se planteó la posibilidad de una multiplicidad de razones, sino que postuló la razón occidental como *la* razón, la convivencia en comunidad implica el respeto a un deber que, en el fondo, no es sino una manifestación de esa razón universal, cuyo epitome son las matemáticas. Es esa supuesta universalidad de la razón la que lleva a Kant a fusionar las dimensiones ética, política y epistemológica, y a afirmar que "hacer algo por deber es obedecer a la razón." (Kant, 1980, p. 129).

Para la teoría de la objetivación, el funcionamiento del salón de clases y el papel del profesor no se limitan a buscar el logro de la autonomía. Más importante es aprender a vivir en la comunidad que es el salón de clases (en un sentido amplio), aprender a estar con otros, abrirse a la comprensión de otras voces y otras conciencias, en pocas palabras, a *ser-con-otros* (Radford, en prensa-2).

Como "lo social es irreducible a los individuos, por muy numerosos que éstos sean" (Todorov, 1984, p. 19), la sociabilidad del salón de clases significa una unión a través de vínculos y relaciones que son prerrequisitos de esa reflexión que hemos mencionado anteriormente, definida como relación *común* y *activa* que elabora el alumno con su realidad histórico-cultural. Esa sociabilidad no solamente deja su huella en el contenido conceptual perseguido, sino que es consustancial de éste.

La naturaleza intrínsicamente social del saber y del pensamiento matemático nos ha llevado, pues, a concebir la sala de clase como una comunidad de aprendizaje, cuyo funcionamiento está orientado a la objetivación del saber. Sus miembros trabajan de forma que:

- la comunidad permite la realización personal de cada individuo;
- cada miembro de la comunidad tiene su lugar;
- cada miembro es respetado;
- cada miembro respeta los otros y los valores de su comunidad;
- la comunidad es flexible en las ideas y sus formas de expresión;
- la comunidad abre espacio a la subversión a fin de asegurar:

  – la modification,
  – el cambio
  – y su transformación

Ser miembro de la comunidad no es algo que va de sí. Para ser miembro, los alumnos son alentados a:

- compartir los objetivos de la comunidad;
- implicarse en las acciones del salón de clases;
- comunicar con los otros.

Queremos insistir en que los lineamientos anteriores no son simplemente códigos de conducta, sino, al contrario, son índices de formas de *ser* en matemáticas (y por consiguiente de *saber* matemáticas) en el sentido más estricto del término.

Para resumir las ideas anteriores, subrayemos el hecho de que, para la teoría de la objetivación, la autonomía no es suficiente para dar cuenta de la forma de ser en matemáticas. El alumno que resuelve con éxito problemas, pero que es incapaz de explicarse o de entender o interesarse en las soluciones de los otros o de ayudar a los otros a comprender la suya está apenas a medio camino de lo que entendemos por éxito en matemáticas. Es por eso que el profesor dispone de una serie de *acciones de inclusión*. Estas acciones son concebidas de manera que el alumno que resuelve correctamente problemas matemáticos sin poder atender a la dimensión interpersonal de la comunidad gane poco a poco su espacio en la misma[14]. La idea de autonomía como ser autosuficiente es remplazada por la idea de *ser-con-otros*. En vez de concebir la clase como espacio de negociación personal de significados o como medio que enfrenta al alumno, la clase colabora y coopera con el alumno para que éste se convierta en parte de la comunidad.

### *4.2 Tres fases de la actividad del salón de clases*

#### *El trabajo en pequeños grupos*

Para implementar la comunidad de aprendizaje, el profesor favorece el trabajo en pequeños grupos, los cuales pueden, en el curso de la lección de matemáticas intercambiar ideas con otros grupos. De esa cuenta, la ingeniería didáctica (Artigue, 1988) no se limita al diseño de los problemas matemáticos sino incluye una gestión del salón de clases operacional con los principios comunitarios mencionados anteriormente.

En cada pequeño grupo, los alumnos se apoyan mutuamente para alcanzar la solución de los problemas que se les ha dado. Los alumnos y el profesor están conscientes de que hay diferencias individuales que llevan a formas diferentes de participación. Incluso participaciones que parecen “menos profundas” (como las participaciones periféricas, en el sentido de Lave y Wenger, 1991) son bienvenidas, a condición de que el alumno en cuestión *esté-con-su-grupo*, esto es, que el alumno por ejemplo esté atento a lo que el grupo está discutiendo, solicite explicaciones que le permitan seguir la discusión y las acciones, colabore con su grupo, etc.

El profesor debe proponer tareas y problemas que conlleven a la objetivación del saber. Ciertas condiciones deben ser cumplidas. Por ejemplo, para mantener una reflexión sostenida entre los miembros del grupo, con el profesor y luego con otros grupos, los problemas deben ser suficientemente complejos para favorecer la aparición de diversas formas de abordar el problema y engendrar así la discusión.

En nuestro modelo, el profesor circula entre los grupos y discute con los alumnos. Aunque en general el profesor deja a los alumnos discutir entre ellos sin intervenir innecesariamente, éste va intervenir en momentos en que, por ejemplo, cree que la discusión se ha estancado o que los alumnos no han ido suficientemente lejos como se esperaba.

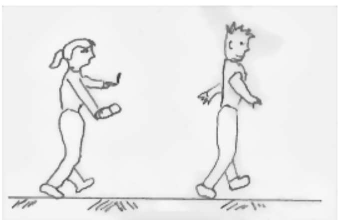
Para ilustrar estos principios, veamos un extracto de una lección sobre la interpretación del movimiento en una clase de décimo grado (15-16 años). La lección incluía un artefacto que mide la distancia a un objeto a través de la emisión-recepción de ondas (Calculador Based Ranger o CBR; ver figura 4).

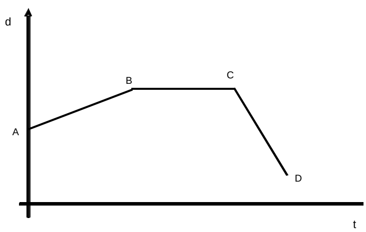
[14] Ver nuestro libro, *Communication et apprentissage* (Radford y Demers, 2004).

***Figure 4.*** El Calculator Based Ranger® (a la izquierda) es un artefacto concebido para estudiar los objetos en movimiento: a través de la emisión de ondas, el CBR recoge datos de su distancia al objeto en cuestión. Al conectarse a una calculadora gráfica (por ejemplo, TI-83+®, mostrada a la derecha), es posible obtener gráficas espacio-tiempo, velocidad-tiempo, etc.

Los alumnos habían empezado a utilizar el CBR en noveno grado. El enunciado de uno de los problemas dado a los alumnos fue el siguiente:

> Dos alumnos, Pierre et Marthe, se colocan a una distancia de un metro y empiezan a caminar en línea recta. Marthe, que está detrás de Pierre, lleva una calculadora conectada a un CBR. El gráfico obtenido se encuentra reproducido abajo. Describan cómo Pierre y Marthe han podido hacer para obtener ese gráfico.






En el problema que seguía en el diseño de la actividad, los alumnos debían verificar su hipótesis, efectuando la marcha en uno de los corredores de la escuela.

Como de costumbre, los alumnos trabajaron en pequeños grupos de 3. En los problemas anteriores, los alumnos habían sido confrontados con situaciones de movimiento en las que uno de los dos, el CBR o el objeto, quedaban fijos. En este caso, los dos están en movimiento. Como esperábamos, las dificultades conceptuales fueron importantes. En general, los alumnos transformaban el enunciado del problema en uno que podían resolver: los alumnos suponían que Marthe no se mueve. Esto queda ilustrado a través de la discusión que tuvieron Samuel, Carla y Jenny de la cual reproducimos a continuación algunas partes:

1. Samuel: Ok, Pierre se mueve despacio de « A » a « B » … Se detuvo algunos segundos (ver figura 5, foto 1), luego corrió a D (figura 5, foto 2).

2. Carla: Ah, Sí! caminó, se detuvo, corrió.

3. Jenny: Mm-hmm.

4. Samuel: Espera, espera un segundo… [Pierre] regresó verdaderamente rápido.

5. Carla: Es cierto. Empezó despacio después *(inaudible)* luego se detuvo, luego corrió.

6. Samuel: Sí, hacia atrás.

7. Jenny: (dirigiéndose a Carla) Sí, hacia atrás, porque [el segmento] baja (haciendo un gesto hacia abajo con la mano; ver figura 5, foto 3).

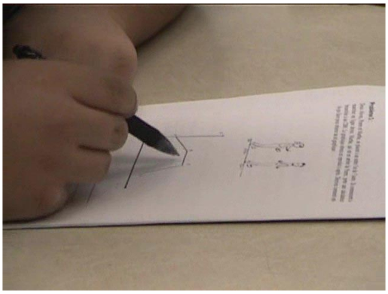


***Foto 1:***…Se detuvo algunos segundos …(línea 1).

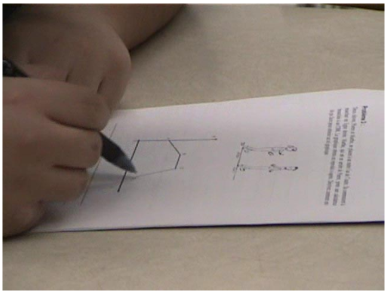


***Foto 2:*** … luego corrió a D (línea 1).

***Foto 3:*** porque [el segmento] baja.

***Figura 5.*** Fotos 1 a 3.

Nuestro interés aquí no es entrar en un análisis de errores, sino de mostrar elementos del proceso social de objetivación del saber. Conviene notar, a ese respecto, que no consideramos la intervención de Carla en la línea 2 como simple réplica o imitación de la preposición enunciada por Samuel en la línea 1. Desde la perspectiva de la objetivación, Carla se *apropia* la interpretación del fenómeno que le es ofrecida por Samuel. La apropiación pasa por una verbalización que Carla reformula en términos más breves (por ejemplo, no hay alusión a las letras A, B. etc.). La preposición de Samuel y el movimiento gestual hechos con la pluma sobre el gráfico son para Carla la materia prima a partir de la cual ella alcanza a ver algo que antes no veía.

Si Samuel ofrece a Carla acceso a una primera interpretación del problema (por rudimentaria que ésta sea), a su vez, la reformulación de Carla permite a Samuel darse cuenta de que hay algo importante que ha quedado sin atenderse: que, para dar cuenta de la diferencia de inclinaciones de los segmentos, en la historia del problema Pierre ha debido regresar “verdaderamente rápido” (línea 4). Carla reformula de nuevo la idea y, en la línea 6, Samuel insiste en que Pierre no solamente ha debido correr más rápido, sino en cierta dirección (“hacia atrás”). En la línea 7, haciendo un gesto con la mano (ver Figura 5, foto 3), Jenny propone una razón.

Los alumnos continúan discutiendo por un buen momento. La interpretación obtenida no convence a Carla y a Jenny, pues ésta asume que Marthe no camina.

La discusión continúa entre ellos:

8. Jenny: No … heuu… ¡(los dos) tienen que caminar!

9. Samuel: Si ella hiciera eso [es decir, caminara] exactamente a la misma distancia [de Pierre] … como si ella hiciera *esto* (ver el gesto en la figura 6), sería una línea plana [es decir horizontal] (…) por lo tanto ¡ella debe quedarse quieta y él debe moverse!

10. Jenny: ¡Pero eso [el enunciado del problema] dice que los dos caminan! (…)

11. Samuel: (después de un momento de silencio) Talvez ella camina, pero él camina un poco más rápido que ella.

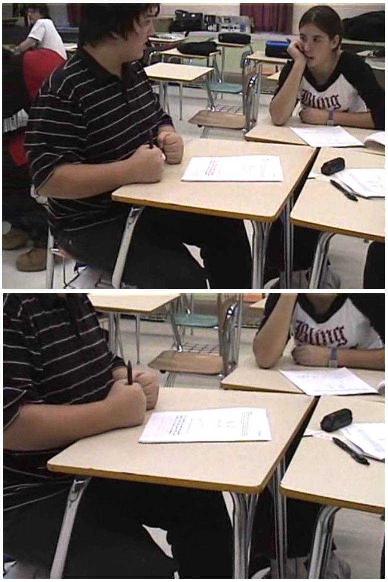


***Figura 6.*** Para simular el caso en que Pierre y Marthe caminan,Samuel desplaza en forma continua las manos de derecha a izquierda, dejándolas a la misma distancia.

En este momento, la descripción del movimiento deja de ser la descripción respecto a un punto fijo y alcanza la descripción del movimiento relativo. A través de ese intercambio, los alumnos consiguen acercarse un poco más a la forma cultural de reflexión vehiculado por la actividad. Será necesaria la expresión corporal con el CBR y simbólica del movimiento (a través de la experiencia física en el corredor de la escuela y luego el cálculo de las ecuaciones de los segmentos) para que los alumnos alcancen una objetivación mayor.

*Intercambio entre pequeños grupos*

Las reflexiones producidas por los pequeños grupos son, a menudo, objeto de intercambio. Un grupo puede intercambiar sus soluciones con otro grupo con el fin de entender otros puntos de vista y mejorar los propios. La figura 7 muestra el encuentro de dos grupos de alumnos sobre el problema de Pierre y Marthe. Los grupos llegaron a un punto en que un acuerdo era imposible. Marc y su grupo planteaban la explicación en términos de cambios de velocidad. Por el contrario, Dona y su grupo afirmaban que la velocidad de Pierre con relación a Marthe es constante. Ante la imposibilidad de poder llegar a un consenso, los alumnos optaron por llamar a la profesora. En la figura 7, Marc (a la izquierda) explica su razonamiento a la profesora (de píe, detrás de los alumnos):

1. Marc: ¿Y si los dos comienzan a la misma velocidad, luego él empieza a correr más rápido? (Marc apoya su argumento con un gesto de manos)

2. Profesora: ¿Tú supones que el muchacho [Pierre] camina cada vez más rápido?

3. Dona: (oponiéndose a la idea) ¡La velocidad es constante! (…)¡No hay curvas! Eso quiere decir que él [Pierre] camina la misma distancia por segundo.

**Figura 7.** Arriba, la discusión entre los Grupos. Abajo, Marc explica la solución de su grupo a la profesora, que aparece en la foto de píe, entre Marc y Dona.

La profesora sugiere a los alumnos pensar en la situación de dos móviles que viajan a 80 k/h y 100 k/h. Marc se da cuenta de que el aumento de distancia no significa necesariamente un aumento de velocidad. La profesora se cerciora de que los otros alumnos del grupo de Marc hayan entendido la diferencia (dice, por ejemplo: "tú, Edgar ¿qué piensas ahora?") y aprovecha las circunstancias para hacer reflexionar a los alumnos sobre el efecto en las gráficas que tendría un movimiento de velocidad que aumenta, como Marc proponía en la línea 1.

En este caso, los alumnos notan las diferencias entre los argumentos e interpretaciones. Sin embargo, muchas veces los alumnos no se dan cuenta de que los argumentos presentados son diferentes o tienden a minimizar las diferencias. Una de las dificultades en la adquisición de formas de reflexión matemática es el de notar las diferencias entre los argumentos. Naturalmente, tanto en un caso como en el otro, el profesor desempeña un papel crucial. En los dos casos, el profesor entra en la zona de desarrollo próximo del grupo. Lo que es más importante es que el profesor no entra a esa zona de manera neutra, sino con un proyecto conceptual preciso.

### *Discusiones generales*

La discusión general es otra manera de intercambiar ideas y discutirlas. Es otro momento que posee el profesor para lanzar la discusión en puntos que requieren mayor profundidad de acuerdo con los estándares curriculares. Por ejemplo, durante la discusión general del problema de Pierre y Marte, la profesora aprovecha para subrayar algo sobre lo cual no todos los grupos habían recapacitado, a saber que la posición del segmento BC no significa necesariamente que Pierre y Marthe están detenidos ni que la posición del segmento CD significa necesariamente que Pierre camina en la dirección de Marthe. En la figura 8, dos alumnos ejecutan la marcha frente a toda la clase, mientras Susan, la tercera alumna de ese grupo (no visible en la foto), explica a toda la clase:

1. Susan : Hem, la persona que estaba enfrente caminaba más rápido que la que estaba atrás, eso lograba una distancia mayor entre el CBR y el punto objetivo. Luego … hem… en seguida B y C en nuestro diagrama [Pierre y Marthe] caminaban a la misma velocidad, por tanto había la misma distancia entre ellos. Luego, … ¿tú?

2. Profesora :Sí, ¡continua!

3. Susan: luego … hem … al final, la persona que estaba atrás camina más rápido para acercarse a la persona que estaba adelante (ver figura 8).

***Figura 8.*** El alumno que camina atrás se acerca al otro alumno

## Síntesis

Algunas teorías de la didáctica de las matemáticas han excluido intencionalmente los aspectos psicológicos del aprendizaje y se han ocupado de las situaciones matemáticas que pueden favorecer la emergencia de razonamientos matemáticos precisos. Tal es el caso de la teoría de situaciones. Por el contrario, otras teorías se han detenido en los mecanismos de negociación de significados en el aula y la manera en que esa negociación explica la construcción de representaciones que se hace el alumno del mundo. Tal es el caso del socio-constructivismo. La deuda intelectual que tiene la teoría de la objetivación con esas teorías es inmensa, y nuestras referencias a ellas no deben ser vistas negativamente. Dichas teorías aparecen sustentadas por principios fundamentales y operacionales claros que les confieren una solidez impecable. Sin embargo, la teoría de la objetivación parte de otros principios. Por un lado, ésta parte de la idea de que la dimensión psicológica debe ser objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas. Por otro lado, sugiere que los significados que circulan en el aula no pueden ser confinados a la dimensión interactiva que ocurre en el aula misma, sino que tienen que ser conceptualizados en el contexto de su dimensión histórico-cultural.

De esa cuenta, la teoría de la objetivación propone una didáctica anclada en principios en los que el aprendizaje es visto en tanto que actividad social (*praxis cogitans*) arraigada en una tradición cultural que la antecede. Sus principios fundamentales se articulan alrededor de cinco conceptos relacionados entre sí.

El primero es un concepto de orden psicológico: el concepto de *pensamiento*, elaborado en términos no mentalistas. Hemos propuesto que el pensamiento es sobre todo una forma de *re-flexión* activa sobre el mundo, mediatizada por artefactos, el cuerpo (a través de la percepción, gestos, movimientos, etc.), el lenguaje, los signos, etc. Este concepto de *re-flexión* difiere del concepto idealista y racionalista en el que la reflexión “no es otra cosa que una atención a aquello que ya está en nosotros” (Leibniz, 1966, p. 36), y que la psicología cognitiva contemporánea llama a menudo meta-cognición. Para la teoría de la objetivación, la *re-flexión* es un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios. Dicha concepción se inscribe en una

> forma peculiar de cognición en la que el acto del conocimiento altera lo que busca. Al tratar de entenderme yo mismo y mi condición, no puedo nunca quedarme idéntico a mí mismo, pues el yo que estaba entendiendo al igual que el yo entendido son ahora diferentes de lo que eran

> antes. Y si quisiera entender todo esto, todo este proceso sería de nuevo puesto en marcha (…) Como este saber también mueve a la gente a cambiar sus condiciones de manera práctica, éste se vuelve una especie de fuerza política y social, una parte de la situación material examinada y no mera reflexion [contemplativa] sobre algo. (Eagleton, 1997, p. 4)

El segundo concepto de la teoría es de orden socio-cultural. Es el concepto de aprendizaje. El aprendizaje es visto como la actividad a través de la cual los individuos entran en relación no solamente con el mundo de los objetos culturales (plano sujeto-objeto) sino con otros individuos (plano sujeto-sujeto o plano de la interacción) y adquieren, en el seguimiento común del objetivo y en el uso social de signos y artefactos, la experiencia humana (Leontiev, 1993).

Este concepto socio-cultural se imbrica inmediatamente con otro –el tercer concepto de la teoría– de naturaleza epistemológica. Como toda actividad, el aprendizaje está enmarcado por *sistemas semióticos de significación cultural* que "naturalizan" las formas de cuestionamiento y de investigación del mundo. Aristóteles hubiese probablemente incitado a nuestros alumnos a plantear y a estudiar el problema de Pierre y Marthe en términos diferentes, dado que dentro del marco aristotélico de referencia, no son el tiempo y el espacio los que describen al movimiento sino, al contrario, el tiempo es un derivado del movimiento[15]. Nuestros alumnos pertenecen a una cultura en donde la medida del tiempo se ha vuelto omnipresente, midiendo no sólo el movimiento sino la labor humana, el crecimiento del dinero (tazas de interés), etc., una cultura en donde

> La temporalidad de la experiencia –esta noción del tiempo como el marco dentro del cual las formas de vida se encuentran inmersas y llevan su existencia– es la característica del mundo moderno. (Bender y Wellbery, 1991, p.1)

Los conceptos anteriores permiten reformular, en términos generales, el aprendizaje de las matemáticas como la adquisición comunitaria de una forma de reflexión del mundo guiada por modos epistémico-culturales históricamente formados.

Ahora bien, como el aprendizaje es siempre acerca de algo, los conceptos anteriores vienen a ser completados por un cuarto concepto de naturaleza ontológica –el de objetos matemáticos, que hemos definido como *patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo constantemente en cambio de la práctica social mediatizada por los artefactos.*

Para volver operacional la teoría en su vertiente ontogenética, fue necesario introducir un quinto concepto de naturaleza semiótico-cognitiva –el de objetivación o toma de conciencia subjetiva del objeto cultural. En este contexto, y a la luz de los conceptos fundamentales anteriores, el aprendizaje se define como proceso social

[15] "We take cognizance of time, when we have defined the movement by defining the before and after; and only then we say that time has been (has elapsed) when we perceive the before and after in the movement…for, when we think [noesomen] that the extremities are other than the middle, and the soul pronounces the present/instants [nun] to be two, the one before, the other after, it is only then that we say that this is time" (Physics IV, 11, 219a 22-25; 26-29).

de *objetivación* de esos patrones externos de acción fijos en la cultura.

Desde el punto de vista metodológico, nuestro concepto no mentalista ni racionalista del pensamiento nos conduce a prestar atención a los medios semióticos de objetivación que utiliza el alumno en un esfuerzo que es, a la vez, elaboración de significados y toma de conciencia de los objetos conceptuales. Las fotos que hemos incluido no tienen como fin "embellecer el texto" sino, precisamente, mostrar algunos de esos medios semióticos de objetivación, como los gestos, el lenguaje, los símbolos. Gestos, lenguaje, símbolos, se convierten así en constituyentes mismos del acto cognitivo que posiciona el objeto conceptual no dentro de la cabeza sino en el plano social. Los cortos ejemplos del salón de clases mencionados al inicio y al final del artículo, dan una idea de la manera en que la teoría indaga esa objetivación del saber que se mueve a lo largo de los planos de la interacción y de la acción mediatizada (el territorio del artefacto)[16].

Finalmente, nuestra posición teórica respecto al aprendizaje conlleva a un replanteamiento del concepto del individuo que aprende. Como lo hemos mencionado, el concepto de individuo de la era moderna que aparece con la emergencia del capitalismo en los siglos XV y XVI, está fundamentado en el concepto de autonomía y de libertad. La teoría de la objetivación parte de otro punto y ofrece un concepto diferente: el individuo es individuo en tanto que es *ser-con-otros*.

## Referencias


Arendt, H. (1958). *The Human Condition*: The University of Chicago Press.

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308.

Bachelard, G. (1986). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Bakhurst, D. (1988). Activity, Consciousness and Communication. *The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition*, *10*(2), 31-39.

Baudrillard, J. (1968). *Le système des objets*. Paris: Gallimard.

Bender, J. y Wellbery, D. E. (1991). *Chronotypes: The Construction of Time*. Palo Alto: Stanford University Press.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.


[16] Ejemplos detallados pueden encontrarse en Radford, 2000, 2003c; Radford, Bardini y Sabena, 2005; Sabena, Radford y Bardini, 2005.

Brousseau, G. (2004). *Une modélisation de l'enseignement des mathématiques*. Conferencia plenaria presentada en el Convegno di didattica della matematica, 24-25 de Septiembre, Locarno, Suiza.

Brousseau, G. y P. Gibel (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 13-58.

Cobb, P. y Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational Psychologist, 31*(34), 175-190.

Cole, M., y Griffin, P. (1980). Cultural amplifiers reconsidered. In D. R. Olson (Ed.), *The Social Foundations of Language and Thought, Essays in Honor of Jerome S. Bruner* (pp. 343-364). New York/London: W. W. Norton & Company.

Colyvan, M. (2001). The miracle of applied mathematics. *Synthese*, *127*, 265-277.

de Vega, M. (1986). *Introduccion a la psicologia cognitiva.* Mexico: Alianza Editorial Mexicana.

Eagleton, T. (1997). *Marx*. London, Phoenix.

Engeström, Y. (1987). *Learning by Expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research*. Helsinki, Orienta-Konsultit Oy.

Foucault, M. (1966). *Les mots et les choses.* Paris: Éditions Gallimard.

Geertz, C. (1973). *The Interpretation of Cultures*. New York: Basic Books.

Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26* (2), 115– 141.

Homer (ca. 800 A.-C.). *The Iliad.* The Internet Classics, translated by Samuel Butler. http:// classics.mit.edu/Homer/iliad.html.

Husserl, E. (1931). *Ideas. General Introduction to Pure Phenomenology.* London, New York: George Allen & Unwin.

Ilyenkov, E. (1977). The Concept of the Ideal. *Philosophy in the USSR: Problems of Dialectical Materialism* (pp. 71-99). Moscow: Progress Publishers.

Kant, E. (1980). *Réflexions sur l'éducation*. Paris: Vrin.

Köhler, W. (1951). *The Mentality of Apes*. New York: The Humanities Press / London: Routledge and Kegan Paul.

Lave, J. y E. Wenger (1991). *Situated learning; legitimate peripheral participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Leibniz, G. W. (1966). *Nouveaux essais sur l'entendement humain.* Paris: Garnier Flammarion.

Leontiev, A. N. (1968). El hombre y la cultura. En *El hombre y la cultura: problemas téoricos sobre educación* (pp. 9-48). México: Editorial Grijalbo.

Leontiev, A. N. (1993). *Actividad, conciencia y personalidad*. México: ASBE Editorial.

Martin, J. (2004). The Educational Inadequacy of Conceptions of Self in Educational Psychology. *Interchange: A quarterly review of Education*, *35*, 185-208.

Martin, J., Sugarman, J. y Thompson, J. (2003). *Psychology and the Question of Agency*. New York: SUNY.

Merleau-Ponty, M. (1945). *Phénomenologie de la perception*. Paris: Gallimard.

Mikhailov, F. T. (1980) *The Riddle of the Self*. Moscow: Progress Publishers.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26-33.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(3), 237-268.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *22*(2), 14-23.

Radford, L. (2003a). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa: Legas Publishing.

Radford, L. (2003b). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(2), 123-150.

Radford, L. (2003c). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità [Sensible Things, Essences, Mathematical Objects and other ambiguities], *La Matematica e la sua didattic*a, 2004, no. 1, 4-23. [Traducción al inglés en: http://laurentian.ca/educ/lradford/essences.pdf]

Radford, L. (2005). The semiotics of the schema. Kant, Piaget, and the Calculator. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign. Grounding Mathematics Education* (pp. 137-152). New York: Springer.

Radford, L. (en prensa-1). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns – A semiotic Perspective. *Proceedings of the 28th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA), Mérida, Yucatán, México.*

Radford, L. (en prensa-2). Semiótica cultural y cognición. En: R. Cantoral y O. Covián (Eds.), *Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica*. México.

Radford, L., Bardini, C., y Sabena, C. (2005). Perceptual semiosis and the microgenesis of algebraic generalizations. Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4), 17 - 21 February 2005, Sant Feliu de Guíxols, Spain. [http://laurentian.ca/educ/lradford/cerme4.pdf]

Radford, L. y Demers, S. (2004). *Communication et apprentissage. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques*. Ottawa: Centre franco-ontarien des ressources pédagogiques.

Robbins, F. E. (1921). The Tradition of Greek Arithmology. *Classical Philology*, *16*(2), 97-123.

Sabena, C., Radford, L. y Bardini, C. (2005). Synchronizing gestures, words and actions in pattern generalizations. In H. L. Chick, J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Melbourne, Australia, Vol. 4, pp. 129-136.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sierpinska, A. (1996). Interactionnisme et théorie des situations : Format d'interaction et Contrat didactique. En D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, Séminaires 1996* (pp. 5-37). Grenoble: Université Joseph Fourier.

Spengler, O. (1948). *Le déclin de l'Occident*. Paris: Gallimard.

Steinbring, H., Bartolini Bussi, M. y Sierpinska, A. (Eds.) (1998). *Language and Communication in the Mathematics Classroom*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Todorov, T. (1984). *Mikhail Bakhtin: The Dialogical Principle*. Minneapolis, London: University of Minnesota Press.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. London, Wasington, D.C: The Falmer Press.

Voloshinov, V. N. (1973). *Marxism and the Philosophy of Language.* Cambridge Massachusetts, London, England: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1981a). The instrumental method in psychology. En J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 135-143). Armonk, N. Y.: Sharpe.

Vygotsky, L. S. (1981b). The development of higher mental functions. En J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 144-188). Armonk, N. Y.: Sharpe.

Vygotsky, L. S. y A. Luria (1994). Tool and symbol in child development. En R. van der Veer y J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky Reader* (pp. 99-174). Oxford: Blackwell.

Wartofsky, M. (1979). *Models, Representation and the Scientific Understanding.* Dordrecht: D. Reidel.

Weber, M. (1992). The Protestant Ethic and the Spirit of Capitalism. London New York, Routledge.

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the Mind. A Sociocultural Approach to Mediate Action*. Cambridge, Ma: Harvard University Press.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

**Luis Radford**
Université Laurentienne
Canada

E-mail: Lradford@laurentian.ca

# Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta

Juan D. Godino [1]
Vicenç Font [2]
Miguel R. Wilhelmi [3]

**RESUMEN**

En este trabajo aplicamos algunas nociones del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática al análisis de una lección sobre la suma y la resta de un libro de 5º grado de educación primaria del estado español. La finalidad es doble: (1) ilustrar la técnica de análisis de textos matemáticos propuesta por el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática y (2) identificar criterios de idoneidad de unidades didácticas para el estudio de las estructuras aditivas en educación primaria. Los resultados obtenidos pueden ser de utilidad para la formación de profesores de matemáticas.

• **PALABRAS CLAVE:** Idoneidad didáctica, conflictos semióticos, análisis textos matemáticos, formación profesores.

**ABSTRACT**

In this paper, we apply some theoretical notions of the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction to analyse a lesson on addition and subtraction taken from a Spanish textbook directed to the fifth grade in primary education. Our aims are: (1) to illustrate a technique for analysing mathematics textbooks based on the onto-semiotic approach, and (2) to identify suitability criteria for developing didactical units to study the additive structures in primary education. The results obtained might be useful in the training of prospective mathematics teachers.

• **KEY WORDS:** Didactical aptitude, semiotic conflicts, analysis of mathematical texts, teachers training.

**RESUMO**

Neste trabalho aplicamos algumas noções do enfoque ontosemiótico da cognição e instrução matemática al análise de uma lição sobre a soma e a divisão de um livro do

*Fecha de recepción: Enero de 2006/ Fecha de aceptación: Mayo de 2006*

1 Universidad de Granada.
2 Universidad de Barcelona.
3 Universidad Pública de Navarra.

ensino fundamental do estado espanhol. A finalidade é dupla: (1) ilustrar a técnica de análise de textos matemáticos proposta pelo enfoque ontosemiótico da cognição matemática e (2) identificar critérios de idoneidade de unidades didáticas para o estudo das estruturas aditivas na educação fundamental. Os resultados obtidos podem ser de utilidade para a formação de professores de matemáticas.

• **PALAVRAS CHAVE:** Idoneidade didática, conflitos semióticos, análise textos matemáticos, formação professores.

## RÉSUMÉ

Dans cet article nous appliquons quelques notions théoriques de l’approche onto-sémiotique à la cognition et à l’instruction mathématique pour analyser une leçon sur l’addition et la soustraction tirée d’un manuel scolaire espagnol de la cinquième année. Nos objectifs sont : (1) d’illustrer une technique pour analyser des textes scolaires basée sur l’approche onto-sémiotique; et (2) d’identifier des critères souhaitables pour le développement d’unités didactiques pour l’étude des structures additives dans l’éducation primaire. Les résultats obtenus pourraient être utiles dans la formation des futurs enseignants en mathématiques.

• **MOTS CLÉS**: Aptitude didactique, conflits sémiotiques, analyse textes mathématiques, formation des enseignants.

## 1. Introducción

Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. La ausencia de efectos significativos de los programas de formación de profesores en dicha práctica se puede explicar, en parte, “por la falta de un conocimiento base ampliamente compartido sobre la enseñanza y la formación de profesores” (p. 201). El saber didáctico que progresivamente va produciendo la investigación en educación matemática queda reflejado en diversas fuentes dispersas y heterogéneas (revistas, monografías de investigación, etc.), pero de manera más accesible a los profesores se refleja en los libros de texto escolares. Los libros de texto escolares constituyen la fuente inmediata donde se acumula la experiencia práctica de los profesores y, en cierta medida, los resultados de la investigación. En consecuencia, el análisis crítico de los textos escolares, la evaluación de su pertinencia, idoneidad, adecuación, etc. debe ser un componente importante en los programas de formación de profesores de matemáticas.

> La preparación de programas de formación puede ser más efectiva centrándola en ayudar a los estudiantes a que adquieran las herramientas que necesitarán para aprender a enseñar, en lugar de competencias acabadas sobre una enseñanza efectiva. (Hiebert, Morris y Glass, 2003, p. 202)

Pensamos que entre estas herramientas

deben figurar los criterios para analizar la propia práctica docente y las lecciones de los textos escolares como fuente próxima para el diseño de unidades didácticas.

Dado que el uso de las lecciones propuestas en los libros de texto (o en un formato virtual multimedia) es una decisión importante, ya que en gran medida condiciona el proceso de estudio del tema, los profesores deben tener conocimientos básicos que les permitan evaluar las características de las lecciones para seleccionar (o elaborar) las más adecuadas y adaptarlas al nivel educativo correspondiente. Consideramos importante introducir en la formación (inicial y continua) de profesores de matemáticas criterios para valorar la idoneidad de los procesos de estudio matemático, tanto si son basados en el uso de libros de texto, como si se trata de procesos apoyados en el uso de materiales y documentos de trabajo elaborados por el propio profesor.

En este artículo vamos a utilizar algunas herramientas del "enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática" (EOS) desarrollado por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005; Font y Ramos, 2005; Godino, Contreras y Font, en prensa; etc.) para valorar la idoneidad de un texto matemático escolar. En este marco teórico se postula que la idoneidad global de un proceso de enseñanza-aprendizaje se debe valorar teniendo en cuenta los cinco criterios siguientes (Godino, Contreras y Font, en prensa):

- *Idoneidad epistémica* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia[4]. Por ejemplo, la enseñanza de la adición en la educación primaria actual puede limitarse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad), o tener en cuenta los diferentes tipos de situaciones aditivas e incluir la justificación de los algoritmos (alta idoneidad).

- *Idoneidad cognitiva* expresa el grado de proximidad de los significados implementados respecto de aquéllos que son personales iniciales de los estudiantes o, de manera equivalente, la medida en que el "material de aprendizaje" esté en la *zona de desarrollo potencial* (Vygotsky, 1934) de los alumnos y alumnas.

  Un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad cognitiva sería, en el estudio las operaciones aritméticas con números de tres o más cifras, que el profesor realizara una evaluación inicial para saber si los alumnos dominan los números de uno y dos cifras y, en caso de no ser así, comenzara el proceso de instrucción trabajando dichos números.

- *Idoneidad semiótica*. Un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos

4 Chevallard (1991) considera que todo proceso de enseñanza-aprendizaje comporta la transposición del saber: Saber sabio → Saber a enseñar → Saber enseñado. La noción de idoneidad epistémica puede ser reinterpretada en términos transpositivos de la siguiente forma: grado de representatividad del saber enseñado respecto del saber a enseñar.

sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa. Un proceso de enseñanza-aprendizaje es idóneo desde el punto de vista semiótico si las *configuraciones* y *trayectorias didácticas* (Godino, Contreras y Font, en prensa) permiten, por una parte, resolver conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar *a priori*), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción (mediante la negociación de significados). Por ejemplo, un proceso de estudio realizado de acuerdo con una secuencia de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 1997) tiene potencialmente mayor idoneidad semiótica que un proceso magistral que no tenga en cuenta las dificultades de los estudiantes.

- *Idoneidad mediacional,* grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Si el profesor y los alumnos tuvieran a su disposición medios informáticos pertinentes al estudio del tema en cuestión (Cabri-géomètre, p.e., para la geometría plana), el proceso de estudio que se apoye en estos recursos tendría mayor idoneidad mediacional que otro tradicional basado exclusivamente en la pizarra, lápiz y papel. Asimismo, un ejemplo de un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad mediacional con relación a los medios temporales sería una clase magistral, donde el profesor reproduce de manera íntegra y sin interacción con los estudiantes el significado pretendido.

- *Idoneidad emocional,* grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como de aquéllos que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa. Por ejemplo, tendrán idoneidad emocional alta los procesos basados en el uso de situaciones-problemas que sean de interés para los estudiantes.

Como se puede deducir de los ejemplos propuestos, la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005).

En la siguiente sección presentamos brevemente algunos de los constructos del EOS que nos permitirán fundamentar los criterios de análisis y valoración de una lección de un libro de texto. Estos criterios serán aplicados al análisis de una lección sobre la suma y la resta de un libro de texto para 5º grado de educación primaria (Ferrero y cols., 1999).

## 2. Herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico

Para poder valorar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción realmente implementado, o bien de un proceso de instrucción planificado en un libro de texto, es necesario establecer un “significado de referencia” que sirva de comparación. Este significado de referencia se interpreta en el EOS en términos de sistemas de prácticas (operativas y discursivas) compartidas en el seno de una institución para la resolución de una cierta clase de situaciones-problemas.

Para la realización y evaluación de cualquier práctica es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los siguientes elementos: lenguaje, situaciones, reglas (conceptos, proposiciones, procedimientos) y argumentos. A este conglomerado de objetos se le llama *configuración*. Estas configuraciones pueden ser cognitivas (conglomerado de objetos personales) o epistémicas (conglomerado de objetos institucionales) según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional. A su vez, estas configuraciones son emergentes de las prácticas realizadas para resolver un campo de problemas.

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan (Wittgenstein, 1953) pueden ser considerados desde las siguientes dimensiones duales: personal-institucional, elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo (Godino, 2002).

- *Personal-institucional*: si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales" (Godino y Batanero, 1994).

- *Ostensivo-no ostensivo.*Los objetos institucionales y personales se pueden considerar como objetos no-ostensivos. Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, …). Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).

- *Extensivo-intensivo*: un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo *concreto*, la función $y = 2x + 1$) y una clase más general o *abstracta* (p.e., la familia de funciones $y = mx + n$).

- *Elemental-sistémico*: en algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,…) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades elementales. Estos mismos objetos, en el primer curso, tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

- *Expresión-contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica.

La actividad matemática y los procesos

de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestos en relación unos con otros. La distinción entre expresión y contenido nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas "versiones" de dichos objetos. En Godino, Batanero y Roa (2005) se describen los seis tipos de entidades primarias y los cinco tipos de dualidades cognitivas mediante ejemplos relativos a una investigación en el campo del razonamiento combinatorio.

En la Figura 1 se representan las diferentes nociones teóricas que se han descrito sucintamente. En el EOS la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales.

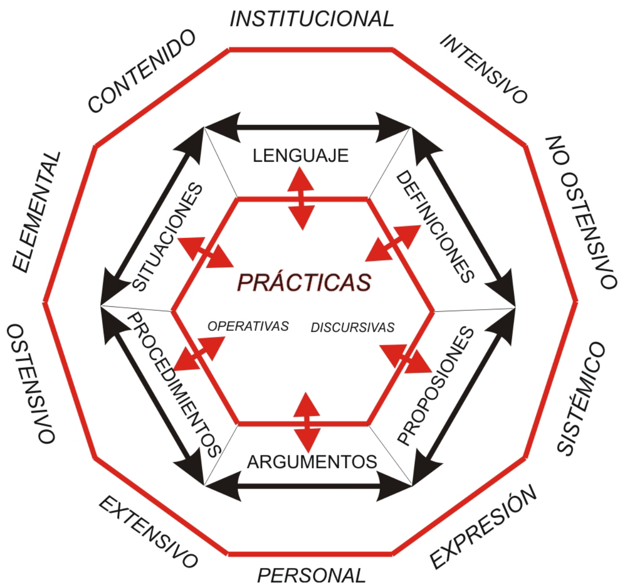



***Figura 1.*** *Herramientas teóricas del EOS*

Por último, dentro del "enfoque ontosemiótico" se están introduciendo nuevas herramientas teóricas que permiten abordar el estudio de los fenómenos de instrucción matemática. Godino, Contreras y Font (en prensa) proponen, como unidad primaria de análisis didáctico, la *configuración didáctica*, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de una tarea matemática y usando unos recursos materiales específicos. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas, cada una de las cuales incorpora una determinada configuración epistémica.

## 3. Configuraciones epistémicas asociadas con las situaciones aditivas. Reconstrucción del significado de referencia

Para poder valorar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción realmente implementado (*significado implementado*) o bien de un proceso de instrucción planificado en un libro de texto (*significado pretendido*) es necesario establecer el significado de referencia que sirva de comparación. En esta sección describimos de manera sintética los principales elementos del significado de referencia para las estructuras aditivas, agrupando dichos elementos en los seis tipos de entidades que propone el EOS: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, propiedades y argumentos y los organizaremos en configuraciones epistémicas.

El primer tipo de configuración epistémica que consideraremos son las "formales". En dichas configuraciones se usa el método axiomático, es decir, se eligen ciertos enunciados de la teoría como axiomas y se exige que todos los demás sean probados a partir de ellos.

### 3.1 Configuraciones formales

Las entidades matemáticas que se ponen en juego en las situaciones aditivas contextualizadas son analizadas de manera formal o estructural en el marco interno de las matemáticas. Para ello, los números dejan de ser considerados como medios de expresión de cantidades de magnitudes (números de personas o cosas, papel que cumplen en una situación, etc.) y son interpretados bien como elementos de una estructura caracterizada según la teoría de conjuntos, bien según los axiomas de Peano. En este contexto de formalización matemática se plantean preguntas tales como:

- ¿Cómo se debería definir la adición, a partir de los axiomas de Peano?
- ¿Cómo se debería definir la adición, cuando los números naturales son definidos como los cardinales de los conjuntos finitos?
- ¿Qué tipo de estructura algebraica tiene el conjunto N de los números naturales dotado de la ley de composición interna de adición?
- ¿Es la sustracción una ley de composición interna? ¿Qué propiedades cumple?

La respuesta a estas preguntas requiere de la elaboración de recursos lingüísticos específicos, técnicas operatorias (recursión, operaciones conjuntistas), conceptos (definiciones conjuntistas de adición y sustracción; definiciones recursivas; definición algebraica de sustracción), propiedades (estructura de semigrupo de **N**) y argumentaciones (deductivas), en definitiva una configuración epistémica con rasgos o características específicas, adaptadas a la generalidad y rigor del trabajo matemático. Estos tipos de configuraciones formales no son las que nos pueden resultar útiles para determinar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción planificado para una institución escolar de enseñanza primaria. Para este tipo de institución necesitamos una configuración, que llamaremos *intuitiva* (o contextualizada), que presuponga una cierta concepción empírica de las matemáticas. Es decir, una concepción que considere que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones y formalizaciones de la experiencia; una concepción de las matemáticas que suponga que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales.

### 3.2. Configuración empírica

Las operaciones aritméticas de la adición y de la sustracción se construyen inicialmente como medio de evitar los recuentos en situaciones que incluyen distintas colecciones parcialmente cuantificadas. Las situaciones concretas o contextualizadas ponen en juego un proceso de modelización que produce, como etapa intermedia, una *situación aditiva formal*; esto es, una situación en la que se requiere realizar una suma o una resta, cuyo resultado debe ser interpretado según el contexto inicial. El aprendizaje de la suma y la resta implica, por tanto, el dominio de las situaciones formales y de los algoritmos de sumar y restar.

La resolución de los problemas aditivos pone en funcionamiento diversos recursos operatorios, lingüísticos, conceptuales, proposicionales y argumentativos que deben ser dominados progresivamente para lograr competencia en dicha resolución. La Figura 2 resume los principales elementos o componentes de la configuración epistémica empírica formada por el sistema de objetos y relaciones implicadas en la solución de los problemas aditivos[5] en el nivel de educación primaria (*significado institucional de referencia*). Por razones de espacio, los componentes de la configuración se muestran de manera tabular. Sin embargo, hay que tener en cuenta que dichos elementos están relacionados entre sí[6].

El lenguaje (verbal, gráfico, simbólico) describe las situaciones-problemas; representa a las entidades conceptuales, proposicionales (adición, sustracción, sumandos, commutativa, asociativa, …) y procedimentales (algoritmos). Las notaciones, disposiciones tabulares, diagramas, etc., sirven de herramientas para la realización de los algoritmos y la elaboración de argumentos justificativos. Las definiciones y proposiciones relacionan los conceptos entre sí y hacen posible el desarrollo de algoritmos de cálculo eficaces. Los argumentos justifican las propiedades y permiten la realización de las operaciones.

---

[5] La clasificación de los problemas aditivos contextualizados ha sido objeto de numerosas investigaciones, ya que cada tipo comporta subconfiguraciones puntuales específicas que deben ser tenidas en cuenta en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Verschaffel y De Corte (1996) presentan una síntesis de estas investigaciones y mencionan los tres tipos básicos de problemas aditivos: cambio, combinación y comparación.

[6] En la Figura 7 mostramos otro ejemplo de configuración puntual correspondiente a una página del libro que analizamos en las secciones 4 y 5 donde explicitamos dichas relaciones.

**LENGUAJE**

*Verbal*
- Juntar, añadir, sacar, suma, resta, "cuánto falta", más menos, adición, sustracción, sustraendo, minuendo, diferencia, paréntesis, operación, propiedad conmutativa, propiedad asociativa, etc.

*Gráfico*
- Dibujos en los que se presentan situaciones contextualizadas de adición y sustracción (se representan con objetos los cardinales de los dos conjuntos y en algunos casos también el cardinal del resultado)
- En la recta numérica se representan sumas y restas
- Etc.

*Simbólico*: +, –, 24 + 30, 45 – 23, $a + b$, $a - b$, $a - b = c$, "(" , ")" …

**SITUACIONES**

- Problemas contextualizados en los que: se añade, hay que seguir contando, se saca, se cuenta hacia atrás, se pide "cuánto falta", se compara, etc.
- Problemas descontextualizados de sumas y resta

**CONCEPTOS**

*Previos*
- Sistema de numeración decimal
- Suma y resta

*Emergentes*
- Adición; Sustracción; Sumandos
- Sustraendo; Minuendo; Diferencia
- Sumas y restas equivalentes

**PROCEDIMIENTOS**

- Descontextualización del enunciado del problema;
- Contextualización de enunciados descontextualizados
- Aplicar los algoritmos de la suma y de la resta
- Comprobación de los resultados de una resta
- Cálculo mental de sumas y restas
- Utilización de las propiedades conmutativa y asociativa para realizar las operaciones más fácilmente
- Cálculo de sumas y resta con calculadora.
- Resolución de problemas de sumas y restas
- Etc.

**PROPIEDADES**

- La suma es una operación interna (la resta no)
- Elemento neutro
- Conmutativa (suma)
- Asociativa (suma)
- El total de una suma siempre es mayor que los sumandos (si estos son diferentes de cero)
- $(a + c) - (b + c) = a - b$
- La diferencia siempre es menor que el minuendo (si el sustraendo es diferente de cero)
- Relación entre diferencia, sustraendo y minuendo: $S - M = D$; $S = D + M$; $S - D = M$

**ARGUMENTOS**

- Comprobación de las propiedades en casos particulares (casi siempre extra matemáticos)
- Justificación de las propiedades, utilizando elementos genéricos
- Justificación de los algoritmos a partir de las características del Sistema de Numeración Decimal

***Figura 2.*** Configuración epistémica "empírica" de la adición y de la sustracción

Se trata de una configuración epistémica en la que los conceptos y las propiedades que se introducen se intentan justificar por su acuerdo con una realidad extra matemática. Este intento topa con una dificultad que se convierte en el origen de importantes conflictos semióticos, que no es otra que el carácter convencional de algunas reglas matemáticas. No pretendemos entrar aquí en la discusión de si todas las reglas en matemáticas son convencionales, puesto que no se pueden justificar por su acuerdo con la experiencia; nos limitamos a señalar que, incluso en el supuesto de que la mayoría de las reglas matemáticas se pudieran justificar por su acuerdo con situaciones extra matemáticas, hay ciertas reglas, como por ejemplo, la prioridad de las operaciones, que indiscutiblemente son convencionales y que, por tanto, difícilmente se pueden justificar con base en su acuerdo con situaciones extra matemáticas.

## 4. Análisis global de la lección

El análisis ontosemiótico de una lección debe abordarse primero desde una perspectiva global que identifique su objetivo y estructura en configuraciones didácticas, para pasar después, en un segundo nivel, a un estudio detallado de cada una de ellas (en este trabajo nos centraremos, sobre todo, en las configuraciones epistémicas asociadas y en los conflictos semióticos potenciales). Este segundo análisis lo haremos en la sección 5, centrándonos sobre todo en las funciones semióticas (dualidad *expresión-contenido*) que relacionan objetos que pueden ser extensivos o intensivos (dualidad *extensivo-intensivo*).

A continuación comenzamos el análisis global de la lección de Ferrero y cols. (1999)[7]. La lección sobre la suma y la resta incluida en este libro de texto escolar se interpreta en el EOS como el significado pretendido en clases de 5º grado de educación primaria (alumnos españoles de 10 años de edad).

El estudio comienza recordando el uso concreto de la suma y la resta:

> Sumamos cuando reunimos o juntamos varias cantidades en una sola. Restamos cuando separamos, quitamos una parte de otra o hallamos la diferencia entre dos cantidades. (p. 18)

Sigue con la presentación de una situación introductoria general donde se presenta una escena de clase con grupos de niños jugando diversos juegos mediante los cuales consiguen puntos. Se plantean problemas cuya solución requiere realizar una suma o una resta. El tipo de situación-problema que se presenta al inicio de la unidad tiene un objetivo que se puede describir del siguiente modo: *¿Cómo discriminar las situaciones de suma y resta y cómo resolverlas?* Esta pregunta general que guía el desarrollo de la lección se descompone en sub-preguntas que son abordadas en las distintas secciones en que se estructura. La Figura 3 muestra la estructura global de la lección, centrando la atención en la secuencia de configuraciones ligadas a los tipos de problemas planteados (figuras hexagonales); una de dichas configuraciones (config. 1) será analizada en la sección 5.1., teniendo en cuenta los instrumentos teóricos introducidos por el EOS.

7 El libro de texto de Ferrero y cols. (1999) es un ejemplar prototípico de los que en la actualidad se utilizan en el sistema educativo español (actualizados en euros como unidad monetaria) y, por lo tanto, el estudio que realizamos no sólo representa un modelo para el análisis de otros libros de texto, sino que determina una “pauta genérica” para la valoración de libros de texto del mismo grado y contexto.

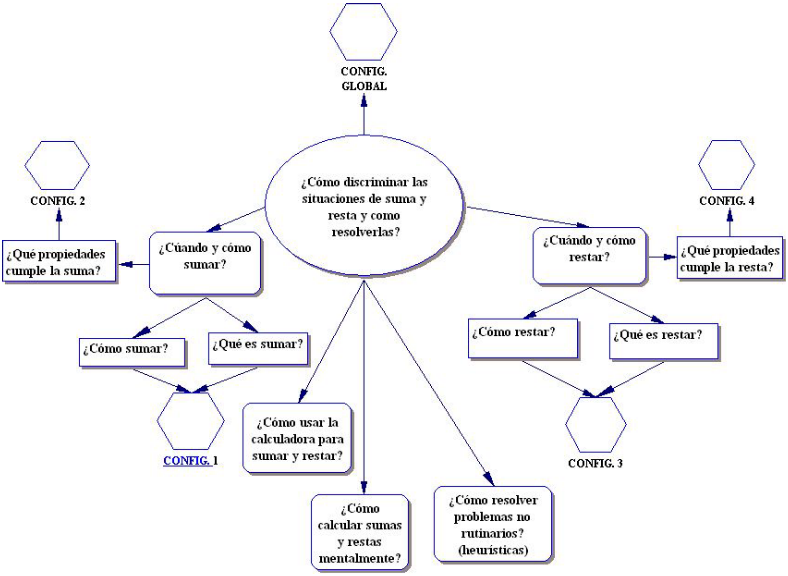



***Figura 3.*** Estructura global de la lección

Las seis primeras secciones (sobre las que centraremos el análisis ontosemiótico) tienen una estructura similar:

- -Planteamiento de una situación-problema.
- -Un apartado titulado "Observa", donde se describe la solución del problema, se presentan las definiciones y se explican las técnicas.
- -Una colección de 4 o 5 ejercicios y aplicaciones.

Las seis primeras secciones se titulan: (1) *La suma. Significados*, (2) *Las propiedades de la suma*, (3) *La resta. Significados*, (4) *Relaciones entre los términos de la resta*, (5) *Restas equivalentes* y (6) *Sumas y restas combinadas. Uso del paréntesis*. En ellas se desarrolla el tema y los algoritmos que aparecen son con lápiz y papel. En la sección siguiente, cuyo título es (7) *Conoce tu calculadora*, se introducen dos técnicas alternativas a los algoritmos con lápiz y papel: el cálculo estimado y el cálculo con calculadora. En la siguiente sección, cuyo título es (8) *Recuerda*, los autores presentan a los alumnos aquello que es esencial recordar de lo que se ha estudiado anteriormente. A continuación se propone una sección de autoevaluación, cuyo título es (9*) ¿Te lo has aprendido?* En la sección siguiente, cuyo título es (10) *Cálculo mental*, se introduce otra técnica alternativa a los algoritmos con lápiz y papel: el cálculo mental exacto. A continuación, en la sección titulada (11) *Arco iris* se propone un problema cuyo contexto es "la compra de comida para el hogar" en la que también se introducen los valores de igualdad entre el hombre y la mujer a la hora de participar en las tareas del cuidado de la casa. Como sección final se propone una sección de consolidación de conocimientos, cuyo título es (12) *Resolución de problemas* en la que además se introduce la estrategia heurística "descomposición del problema en partes".

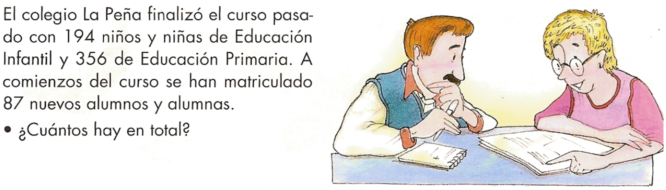
## 5. Análisis ontosemiótico de configuraciones parciales

En esta sección vamos a realizar un análisis detallado de la primera configuración didáctica dedicada al estudio de la suma.

### 5.1. Sección 1: La suma. Significados

Los autores de la lección han organizado un proceso de estudio puntual para explicar los significados de la adición, incluyendo los siguientes apartados:

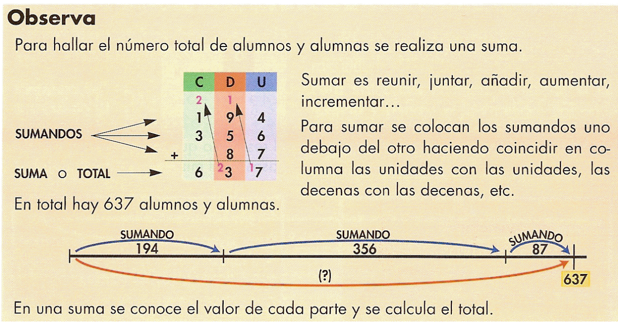
A.Un problema introductorio (Figura 4).


El colegio La Peña finalizó el curso pasado con 194 niños y niñas de Educación Infantil y 356 de Educación Primaria. A comienzos del curso se han matriculado 87 nuevos alumnos y alumnas.

- ¿Cuántos hay en total?

***Figura 4.*** Problema introductorio

B. La explicación de la solución del problema que sirve como sistematización de los significados de la suma y del algoritmo de sumar en columna (Figura 5).


**Observa**

Para hallar el número total de alumnos y alumnas se realiza una suma.



Sumar es reunir, juntar, añadir, aumentar, incrementar…

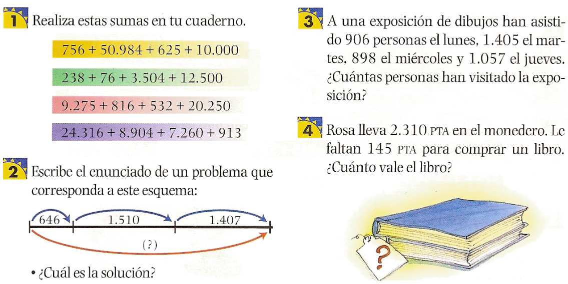
Para sumar se colocan los sumandos uno debajo del otro haciendo coincidir en columna las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc.

En total hay 637 alumnos y alumnas.

En una suma se conoce el valor de cada parte y se calcula el total.

***Figura 5.*** Explicación del problema introductorio

C. También incluyen cuatro actividades de ejercitación y aplicación (Figura 6).


1 Realiza estas sumas en tu cuaderno.

756 + 50.984 + 625 + 10.000

238 + 76 + 3.504 + 12.500

9.275 + 816 + 532 + 20.250

24.316 + 8.904 + 7.260 + 913

2 Escribe el enunciado de un problema que corresponda a este esquema:



- ¿Cuál es la solución?

3 A una exposición de dibujos han asistido 906 personas el lunes, 1.405 el martes, 898 el miércoles y 1.057 el jueves. ¿Cuántas personas han visitado la exposición?

4 Rosa lleva 2.310 PTA en el monedero. Le faltan 145 PTA para comprar un libro. ¿Cuánto vale el libro?

***Figura 6.*** Ejercicios y aplicaciones

La Figura 7 describe la configuración epistémica asociada a esta sección.

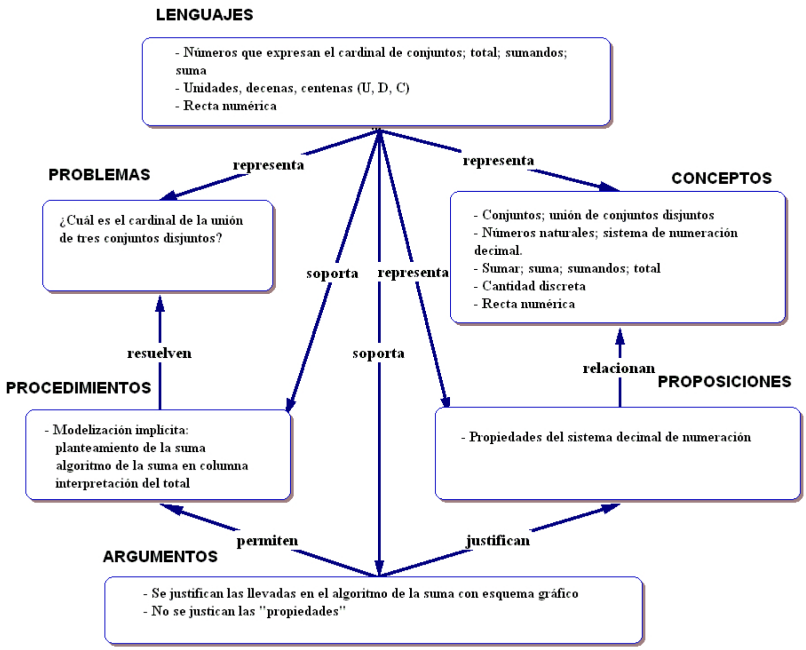



***Figura 7.*** Configuración epistémica de la “La suma. Significados”

Realizamos a continuación un análisis detallado del texto, mostrando los conflictos semióticos que se pueden presentar para los lectores potenciales. Dividimos el fragmento del texto en tres partes correspondientes al enunciado del problema introductorio (A), la explicación de los significados y el algoritmo de sumar (B), y el enunciado de 4 ejercicios (C).

*PARTE A: Situación introductoria*

En esta parte se propone el enunciado de un problema, el cual se acompaña con un dibujo que no tiene ninguna relación con el texto. El objetivo de este problema contextualizado es que sirva de ejemplo para definir el concepto de “suma” y “recordar” el algoritmo de la suma (ambos conceptos se suponen conocidos de cursos anteriores). Los autores suponen que las consideraciones hechas sobre el ejemplo particular son suficientes para que los alumnos comprendan (o recuerden) el concepto de “suma” y su “algoritmo”. Este ejemplo es utilizado implícitamente por los autores como un “elemento genérico” de los problemas que se resuelven mediante sumas, ya que implícitamente se supone que lo que se dice para este caso particular es válido para todos los problemas que se resuelven “sumando”. Dicho de otra manera, el objetivo de este problema no es su resolución, sino activar la dualidad extensivo-intensivo en los párrafos posteriores.

Sin embargo, no parece que este problema sea un buen representante del tipo de problemas aditivos que se pretende abordar. La situación se describe de manera incompleta y ficticia. No se dice el nivel educativo a que corresponden los nuevos alumnos, por lo que se tiene una primera operación de unión de dos conjuntos de elementos disjuntos (niños de infantil y de primaria), y después otra operación de unión de elementos de otro conjunto cuya naturaleza no distingue el nivel escolar de los niños. Parece que la información del nivel escolar a que corresponden los niños introduce una distinción innecesaria que puede confundir a los alumnos. Otro elemento contextual que influye en la solución está el hecho de que no se informa sobre los alumnos del curso anterior que no continúan en el centro; de hecho, una respuesta razonable para el problema puede ser: No se puede saber.

Lo dicho no tiene que suponer necesariamente un "fracaso generalizado en la realización de la tarea". Es muy posible que los alumnos acepten el enunciado y realicen la suma requerida, pero por razones de "contrato didáctico" y por la observación de la palabra clave "total" que previamente habrán asociado a sumar los números que intervienen. En todo caso, la realización exitosa de la tarea por la mayor parte de la clase no es atribuible al problema, sino a reglas previamente establecidas y conocimientos culturales aceptados en la institución.

*PARTE B: Observa*

Se comienza diciendo que para hallar el número total de alumnos y alumnas se realiza una suma. A continuación, se define qué es sumar:*sumar es reunir, juntar, añadir, aumentar, incrementar*, … . Ahora bien, se trata de una definición incompleta ya que no se dice que la suma es el "número de elementos" (cardinal) del conjunto unión (dados dos conjuntos disjuntos). Si el alumno se guía sólo por esta definición puede considerar como situaciones de "suma" muchas que no lo son. Por ejemplo, "reunir" mis regalos con mis libros (cuando algún libro es un regalo); "juntar" dos bolas de plastilina da como resultado una bola de plastilina (¿1 + 1 =1?); al "juntar" todos los números de teléfono de mis amigos, en el mejor de los casos, obtengo una agenda, pero de ninguna manera una "suma"; …

De hecho, al tratarse de verbos de acción transitivos que se aplican sobre los elementos de dos o más conjuntos el reconocimiento de las situaciones en las que es pertinente sumar no estará exento de dificultades dada la generalidad de las acciones que se mencionan como equivalentes a sumar, las cuales además no agotan todas las posibilidades y circunstancias de uso. Asimismo, no se especifica de manera explícita o implícita la necesidad de que los conjuntos deben ser disjuntos.

El conflicto semiótico que se podría producir es que los alumnos identificasen como situaciones de suma algunas que no lo son. Ahora bien, es de suponer que dicho conflicto no se va a producir dados los conocimientos previos de los alumnos sobre la adición de números naturales (hay que recordar que esta unidad está pensada para alumnos de 10 años).

En el EOS se considera que cada definición se debe entender como una definición-regla que, de entrada, no parece que indique que haya algo que sea preciso hacer. A partir de las definiciones-reglas podemos atribuir valores veritativos (verdadero y falso) a ciertas proposiciones. Ahora bien, de una definición-regla también se puede deducir una regla práctica que nos da instrucciones para "realizar una práctica". Esta práctica se puede dar en diferentes situaciones, por lo que se puede afirmar que una definición genera un conjunto de prácticas. A su vez, otra definición equivalente generará otro subconjunto de prácticas. Por tanto, si la definición de suma fuese completa y especificara que la suma es el cardinal de la unión, de ella se podría deducir una práctica para hallar la suma (por ejemplo contar el número de elementos del conjunto unión) y a partir de la necesidad de buscar un método más ágil para hallar dicho cardinal aparecerían otras técnicas (tabla de sumas elementales, cálculo mental, algoritmo escrito, uso de la calculadora, etc.).

La situación que presenta el libro es que, por una parte, da una definición incompleta de la cual no se puede deducir una regla para calcular la suma y, por otra parte, a continuación pasa a explicar el algoritmo de la suma (con dos registros diferentes: enunciado y simbólico). El registro verbal es deliberadamente incompleto, ya que supone que el algoritmo es conocido por los alumnos. El registro simbólico no es el algoritmo habitual, sino que es un pre-algoritmo que se suele usar como paso previo al algoritmo habitual para facilitar su comprensión. Es al final de este algoritmo cuando la suma se identifica con el “total” (es decir, implícitamente como el cardinal del conjunto unión). Puesto que los autores consideran conocido este pre-algoritmo, es el lector quien tiene que interpretar el diagrama tabular y sagital de la izquierda. La descripción del algoritmo contiene diversos convenios que el lector debiera conocer previamente, ya que no se aporta información al respecto. Las letras C, D, U colocadas encima de los datos significan Centenas, Decenas y Unidades y evocan las reglas del sistema de numeración decimal. Los números escritos como superíndices y las flechas inclinadas resumen el algoritmo de sumar con “llevadas” de cifras de un orden al siguiente. El esquema incluye tres definiciones implícitas: *sumandos* (cada uno de los tres números que se suman), *suma* (resultado de la adición), *total* (que significa lo mismo que suma). Se evita, en esta parte del texto, distinguir entre la adición como operación aritmética y la suma como resultado de la adición.

*Diagrama lineal*

Se supone que el lector está familiarizado con los convenios de representación de los números en la recta numérica: elección de un origen y de un segmento que se usa como unidad de medida; lo que permite asignar a cada número natural un segmento de recta que será su medida con el segmento tomado como unidad (o una distancia desde el origen). En este caso, como los números son grandes no se puede mostrar la unidad por lo que se pierde el carácter discreto de los conjuntos representados (aunque hay que resaltar que, en este caso, el dibujante ha procurado que las longitudes de los segmentos mantengan aproximadamente la misma proporción entre ellas que los sumandos). El diagrama lineal se incluye aquí como medio de explicación de la operación de sumar tres sumandos. La definición de suma que se da de manera implícita se basa en el recuento: sumar $a$ y $b$ es “seguir contando $b$ a partir de $a$”. Se pone así en juego un significado parcial de suma distinto del dado anteriormente, basado en el cardinal de un conjunto.

La técnica de sumar sugerida por el diagrama lineal es difícil de poner en práctica, en el sentido de que no se puede aplicar efectivamente cuando los números son grandes. La faceta dual ostensivo-no ostensivo es aceptada implícitamente como transparente, no problemática. Se presupone que el diagrama lineal (*ostensivo*), como recurso didáctico, es una expresión gráfica de la adición que transmite “de forma automática” el significado de la adición (*no ostensivo*) basado en la aplicación sistemática (y por supuesto, implícita) de la *función siguiente* que se introduce en la axiomática de Peano.

La parte B concluye con una explicación que pretende dar a entender que “sumar es una operación que a partir de ciertos números (sumandos) obtiene otro número (suma)” para ello introduce los términos *valor* y *parte* (¿Por qué usar aquí una terminología de procedencia económica?):

> “En una suma se conoce el valor de cada parte y se calcula el total” (p.19).

En esta sección el alumno se encuentra con una gran complejidad semiótica, ya que en media página se le presentan mezcladas diferentes interpretaciones de la “suma”: como una acción (reunir, juntar, etc.), como el cardinal del conjunto unión, como “seguir contando” y como operación. Además, aparecen diferentes registros: verbal, simbólico y gráfico. Esta gran complejidad semiótica podría ser la causa potencial de numerosos conflictos semióticos que, en la mayoría de alumnos, no se producen gracias a sus conocimientos previos sobre la suma. El profesor que use este libro como apoyo de sus clases debe ser consciente de los conflictos semióticos potenciales que hemos descrito.

*PARTE C (Ejercicios)*

En el primer problema se proponen hacer cuatro sumas de cuatro sumandos de números hasta de 5 cifras. Se tratan de sumas descontextualizadas que, como principal novedad respecto del ejemplo resuelto, se presentan dispuestos en fila. Parece que el elevado número de cifras de los sumandos tienen por objetivo conseguir que los alumnos los dispongan en columnas y apliquen el algoritmo de la suma que se ha recordado anteriormente.

En el segundo, se espera que los alumnos realicen el planteamiento y resolución de un enunciado de problema a partir de sumandos expresados en un diagrama lineal. El objetivo es que los alumnos apliquen la dualidad extensivo-intensivo y confeccionen el enunciado de un problema cuya descontextualización se corresponda con el diagrama lineal.

El tercero es un problema contextualizado de sumar con tres sumandos sin que se indique ninguna palabra clave alusiva a las “acciones de sumar”. Incluso, admite como respuesta correcta repetir los datos de visitantes en cada día, o decir que no se puede saber ya que no se dicen los visitantes de los otros días en los que se podía visitar la exposición.

El cuarto es un problema concreto de dos sumandos. Tampoco se incluye términos alusivos a las acciones de sumar. La inferencia de hacer una suma se deriva de un conocimiento práctico de la situación. Es de destacar que mientras el enunciado hace referencia a un solo libro en el dibujo aparecen dos libros.

### 5.2. Algunos conflictos semióticos identificados en las secciones 2-6

*Sección 2: Las propiedades de la suma*

El problema introductorio (Figura 8) pretende motivar las propiedades conmutativa y asociativa de la suma.

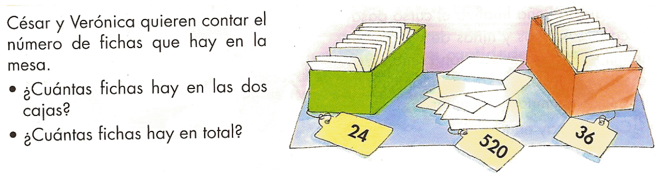



***Figura 8.*** Situación introductoria. Propiedades de la suma

En primer lugar, la Figura 8 presenta un conflicto semiótico entre los códigos de transmisión: en el marco gráfico, el número de fichas es 30 (11 fichas en cada caja y 8 sobre la mesa); en el marco semántico, el número de fichas es 580 (24 y 36 en las cajas, respectivamente, y 520 sobre la mesa). Se supone, por lo tanto, transparente el código de comunicación que identifica el "número en una tarjeta" con el "número de fichas". ¿Por qué no interpretar que en la caja "24" hay 11 fichas?, máxime cuando sobre la mesa hay claramente menos fichas que en las cajas y, en todo caso, no parece admisible que haya 520 fichas. De esta forma, la tarea precisa de aclaraciones del tipo "el número 24 representa el número de fichas que hay en la caja de la izquierda".

En segundo lugar, la primera pregunta, "¿cuántas fichas hay en las dos cajas?", impide que los alumnos se planteen por sí mismos las distintas posibilidades de realizar la suma de los tres sumandos y comprobar que el resultado es el mismo. Una manera de conseguir este propósito sería suprimir la primera pregunta y plantear directamente "¿cuántas fichas hay en total?" De esta manera la situación queda más abierta a la exploración personal del lector. Asimismo, habrá que tener en cuenta que muchos potenciales lectores darían por finalizada la actividad, obtenida una respuesta. Una opción es planificar una sesión de interacción en aula, que conlleve responder a preguntas del tipo:

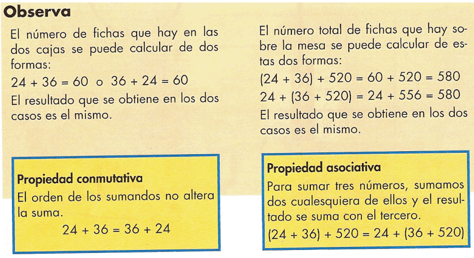
-*¿Cambia el resultado, si cambias el orden en que se hacen las sumas de los números?*

-*¿Ocurre igual si los números de fichas en cada caja y sobre la mesa son diferentes?*

-*¿Da igual que sumemos primero las fichas de las cajas y luego las de la mesa o, por ejemplo, primero las de una caja con las de la mesa y después las de la otra caja?*

En el apartado "Observa" que sigue al enunciado se ve con claridad que el objetivo del problema no es que los alumnos descubran por si mismo la propiedad asociativa. La primera pregunta está pensada para poder explicar con el ejemplo de las dos cajas la propiedad conmutativa y la segunda para explicar la asociativa. En efecto, en la sección "Observa" (Figura 9) se presenta la solución del problema y los enunciados generales de las propiedades conmutativa y asociativa. Nos parece una *generalización prematura*, basada en la comprobación de un solo ejemplo. Por otra parte, bajo el epígrafe "Propiedad asociativa" se da, en realidad, el enunciado de una técnica de cálculo para sumar tres números: "Para sumar tres números, sumamos dos cualesquiera de ellos y el resultado se suma con el tercero". De esta forma, se confunde el enunciado de una técnica, con el de una propiedad.

Además, la técnica de cálculo es en muchos casos interpretada como: *si se cambia el orden en que hacemos las sumas el resultado no varía*, donde la voz "orden" es polisémica: por un lado, "el orden en que se suman tres sumandos dados en una lista" (primero $a$ más $b$ y el resultado sumarlo a $c$ o bien sumar primero $b$ y $c$ y al resultado agregarle $a$), por otro lado, "el orden en que se colocan los sumando dados, que supone una generalización de la propiedad conmutativa a tres números" ($a+b+c = a+c+b = b+a+c = b+c+a = c+a+b = c+b+a$).



**Observa**

El número de fichas que hay en las dos cajas se puede calcular de dos formas:

24 + 36 = 60 o 36 + 24 = 60

El resultado que se obtiene en los dos casos es el mismo.

El número total de fichas que hay sobre la mesa se puede calcular de estas dos formas:

(24 + 36) + 520 = 60 + 520 = 580

24 + (36 + 520) = 24 + 556 = 580

El resultado que se obtiene en los dos casos es el mismo.

**Propiedad conmutativa**

El orden de los sumandos no altera la suma.

24 + 36 = 36 + 24

**Propiedad asociativa**

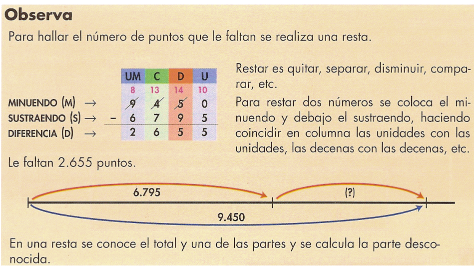
Para sumar tres números, sumamos dos cualesquiera de ellos y el resultado se suma con el tercero.

(24 + 36) + 520 = 24 + (36 + 520)

***Figura 9.*** Propiedades de la suma

*Sección 3: La resta. Significados*

La presentación de la resta (Figura 10) se hace de manera similar a la de la suma. Primero se presenta un problema contextualizado en el que se pide cuánto falta para llegar a 9.450 puntos si tenemos 6.750. Contrariamente al caso de la suma, el problema escogido sí se puede considerar un buen representante de los problemas de resta.



**Observa**

Para hallar el número de puntos que le faltan se realiza una resta.

| | | UM | C | D | U |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 8 | 13 | 14 | 10 |
| MINUENDO (M) → | | ~~9~~ | ~~4~~ | ~~5~~ | 0 |
| SUSTRAENDO (S) → | − | 6 | 7 | 9 | 5 |
| DIFERENCIA (D) → | | 2 | 6 | 5 | 5 |

Restar es quitar, separar, disminuir, comparar, etc.

Para restar dos números se coloca el minuendo y debajo el sustraendo, haciendo coincidir en columna las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc.

Le faltan 2.655 puntos.



En una resta se conoce el total y una de las partes y se calcula la parte desconocida.

***Figura 10.*** La resta. Significados

Se comienza diciendo que para hallar el número de puntos que falta se realiza una resta. A continuación se define qué es restar: *restar es quitar, separar, disminuir, comparar, etc.* Ahora bien, como en el caso de la suma, se trata también de una definición incompleta ya que no se dice, por ejemplo, que la resta es el número de elementos que quedan en el conjunto después de quitar algunos. Si el alumno se guía sólo por esta definición puede considerar como situaciones de "resta" muchas que no lo son. Al igual que en el caso de la suma de esta definición de resta no se puede inferir una regla para realizar la resta.

La situación que presenta el libro es que, por una parte, da una definición incompleta de la cual no se puede deducir una regla para calcular la resta y, por otra parte, a continuación pasa a explicar el algoritmo de la resta (con dos registros diferentes: enunciado y simbólico). El registro verbal es deliberadamente incompleto, ya que supone que el algoritmo es conocido por los alumnos. El registro simbólico que se presenta describe el pre-algoritmo previo al algoritmo de restar "tomando prestado", que no es el que habitualmente se enseñan en España (que suele ser el algoritmo de "restar llevándose"). Puesto que los autores consideran conocido este pre-algoritmo, es el lector quien tiene que interpretar el diagrama tabular de la izquierda. La descripción del algoritmo contiene diversos convenios que el lector debiera conocer previamente, ya que no se aporta información al respecto. El esquema incluye tres definiciones implícitas: *minuendo, sustraendo y diferencia*. Se evita, en esta parte del texto, distinguir explícitamente entre la resta como operación aritmética y la resta como resultado de la sustracción (diferencia).

Es de resaltar la alta "densidad semiótica" del esquema de sustracción presentado.

A diferencia del caso de la suma, se introducen abreviaturas lingüísticas para las palabras *minuendo* (M), *sustraendo* (S) y *diferencia* (D) (la letra D también significa aquí *decena*, lo que produce un nuevo fenómeno de polisemia), que son referidas mediante flechas a los números correspondientes a la sustracción del problema propuesto. Estas abreviaturas notacionales serán usadas en el siguiente apartado para enunciar, de manera general, las relaciones entre los tres números que definen una sustracción. El algoritmo de restar "tomando prestado" se supone conocido y, por ello, sólo se describe tachando las cifras correspondientes del minuendo y anotando encima del mismo la nueva cifra con los incrementos de unidades correspondientes. Hay que resaltar que los autores seguramente han tenido en cuenta, aunque sea sólo de manera implícita, la complejidad semiótica del algoritmo de "restar llevándose" ya que han optado, en cursos anteriores, por explicar un algoritmo de menor complejidad semiótica: el algoritmo de restar "tomando prestado".

Se incluye también un diagrama lineal que pone en juego un significado parcial de resta distinto del dado anteriormente. Ahora la resta se entiende en términos de "sumando desconocido": 6.795 + (?) = 9.450. Se concluye con una explicación que pretende dar a entender que "restar es una operación que a partir de ciertos números (total y parte) obtiene otro número (otra parte)", pero se deja a cargo del alumno la identificación de "total" con "minuendo", de "parte" con "sustraendo" y de "otra parte" con "diferencia".

En esta sección el alumno se encuentra con una gran complejidad semiótica, ya que en media página se le presentan mezcladas diferentes interpretaciones de la "resta": como una acción (quitar, comparar, etc.), como "sumando desconocido" y como operación. Además, aparecen diferentes registros: verbal, simbólico y gráfico. Esta gran complejidad semiótica podría ser la causa potencial de numerosos conflictos semióticos que, en la mayoría de alumnos, no se producen, al igual que en el caso de la suma, gracias a sus conocimientos previos sobre la resta. Por otra parte, es de destacar que no se da a la resta el significado parcial de "contar hacia atrás".

*Sección 4: Relaciones entre los términos de la resta*

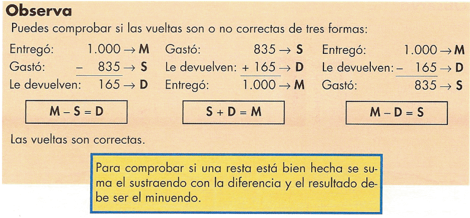
Esta sección comienza con el siguiente problema introductorio:

> "Para pagar la carpeta, Jaime entregó mil pesetas y le devolvieron 165 pesetas (en un dibujo se indica que la carpeta cuesta 835 pta). Comprueba si son correctas las vueltas" (Ferrero y cols, 1999, p. 22).

Puesto que se trata de relacionar la suma y la resta sería más conveniente formular la pregunta de manera más abierta.

Una consigna alternativa podría ser: *¿De cuántas maneras distintas podrías comprobar si la vuelta (es decir, el dinero devuelto) es correcta?"*

A continuación, en el apartado "Observa" (Figura 11) se explican tres maneras alternativas de resolver el problema. Cada una de ellas se simboliza mediante una expresión algebraica en forma de igualdad. De la segunda igualdad se deriva una técnica para comprobar si la resta está bien hecha: "Para comprobar si una resta está bien hecha se suma el sustraendo con la diferencia y el resultado debe ser el minuendo". (p. 22)



**Observa**

Puedes comprobar si las vueltas son o no correctas de tres formas:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Entregó: | $1.000 \to$ **M** | Gastó: | $835 \to$ **S** | Entregó: | $1.000 \to$ **M** |
| Gastó: | $-\ 835 \to$ **S** | Le devuelven: | $+\ 165 \to$ **D** | Le devuelven: | $-\ 165 \to$ **D** |
| Le devuelven: | $165 \to$ **D** | Entregó: | $1.000 \to$ **M** | Gastó: | $835 \to$ **S** |
| | $\boxed{M - S = D}$ | | $\boxed{S + D = M}$ | | $\boxed{M - D = S}$ |

Las vueltas son correctas.

Para comprobar si una resta está bien hecha se suma el sustraendo con la diferencia y el resultado debe ser el minuendo.

***Figura 11.*** La prueba de la resta

En este apartado también se observa una complejidad semiótica importante, ya que los autores dejan a cargo de los alumnos la aplicación de las funciones semióticas que relacionan extensivos con intensivos (faceta extensivo-intensivo). Esperan que sean los alumnos quienes conviertan en intensivos los símbolos M, S y D. Consideran que la flecha será interpretada por los alumnos como el paso de un valor a una variable:

$$1.000 \to \mathrm{M} \qquad 165 \to \mathrm{D} \qquad 835 \to \mathrm{S}$$

Y también esperan que sean los alumnos quienes establezcan la relación entre las tres igualdades obtenidas, ya que los autores evitan entrar en la explicación de propiedades de las expresiones algebraicas (por ejemplo, que sumando el mismo término a cada miembro de la igualdad ésta se mantiene, o bien que un término de uno de los miembros de la igualdad pasa al otro miembro con el signo cambiado). Ahora bien, sólo si el alumno relaciona M–S= D con S+D=M se puede entender que de la segunda igualdad se deriva una técnica general para comprobar el resultado de una resta (primera igualdad).

Esta sección del libro de texto termina con cinco ejercicios. En el primero, se proponen seis restas (por ejemplo, 2.500–865 =1.635) y se pide a los alumnos que comprueben si los resultados son correctos. En el segundo, se les presentan 9 igualdades en las que falta uno de los tres números (el minuendo, el sustraendo o bien la diferencia) y se les pide que hallen el término que falta. En el tercero, se les presenta una resta descontextualizada y se les pregunta que confeccionen un enunciado que se resuelva mediante dicha resta. En el cuarto y quinto, se les presentan dos de los tres términos por su nombre (el minuendo, el sustraendo o bien la diferencia) sin que en ellos aparezca la palabra resta o bien el signo de restar y se les pide que hallen el término que falta.

*Sección 5: Restas equivalentes*

Esta configuración se genera para estudiar una propiedad de la sustracción:

> "En una resta, la diferencia no varía cuando se suma o se resta un mismo número al minuendo y al sustraendo". (p. 23)

Para llegar a esta propiedad se comienza con un problema contextualizado sobre la diferencia de precio entre dos gafas (primero sin funda y después con funda). A continuación, en el apartado "Observa" (Figura 12) se explica la solución del problema. También se simbolizan mediante los símbolos M, S y D, aunque en este caso las letras intervienen como antecedentes y los números como consecuentes. Además, las letras M, S y D sólo se utilizan para el cálculo de la diferencia "sin funda". Si en el apartado anterior los alumnos tenían que ir del extensivo al intensivo, en este caso tienen que seguir el camino inverso, tienen que ir del intensivo (M, S y D) al extensivo (los números correspondientes). Los autores consideran que la flecha será interpretada por los alumnos como la asignación de valores a las variables M, S y D:

Por otra parte, la flecha se utiliza también para expresar la suma de un mismo número al minuendo y al sustraendo. Si antes la flecha relacionaba intensivos con extensivos, ahora relaciona extensivos con extensivos. También hay que destacar que el signo + se usa como operador (+1.000) y que el resultado se generaliza no sólo a la suma (el ejemplo utilizado) sino también a la resta (el caso más problemático)

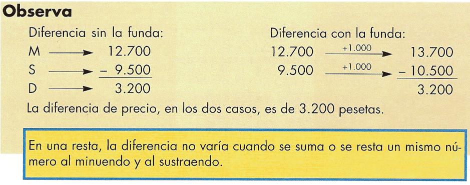



***Figura 12.*** Restas equivalentes

Podemos observar que para obtener un resultado general: (M ± A) – (S ± A) = M–S, los autores comienzan con un caso general (sugerido por las letras, M, S y D) para después hacer intervenir un caso particular: (12.700 + 1.000) – (9.500 + 1.000) = 12.700 – 9.500 para concluir finalmente un resultado general que expresan mediante un enunciado: “En una resta, la diferencia no varía cuando se suma o se resta un mismo número al minuendo y al sustraendo” (p. 23). Se observa que los autores han tenido muy presente la complejidad semiótica asociada y han buscado (1) una explicación que la reduzca considerablemente y (2) una formulación de la propiedad que permita obviar el uso de paréntesis y el doble uso del signo menos (como símbolo de la resta y como símbolo del “opuesto de un número”). A pesar de ello, en este apartado también se observa una complejidad semiótica importante, ya que los autores vuelven a dejar a cargo de los alumnos la aplicación de las funciones semióticas que relacionan extensivos con intensivos (faceta extensivo-intensivo).

Esta sección del libro de texto termina con tres ejercicios. En el primero, se proponen dos casos en los que se suma el mismo número al minuendo y al sustraendo y dos casos en los que se resta el mismo número y se les pide que comprueben que el resultado no varía. En los otros dos problemas se les proponen dos situaciones contextualizadas en las que han de aplicar la propiedad explicada anteriormente.

*Sección 6: Sumas y restas combinadas. Uso del paréntesis*

La situación contextualizadora propuesta para motivar el uso de los paréntesis en la realización de las operaciones se puede resolver mediante la realización de dos restas sucesivas:

> “En el quiosco había 3.000 periódicos. Por la mañana se vendieron 1.948 y por la tarde, 896. ¿Cuántos periódicos quedaron sin vender? (p. 24)

La solución presentada (Figura 13) parece forzada, ya que no se pide como paso intermedio hallar la cantidad de periódicos vendidos. ¿Por qué no operar sin usar los paréntesis, primero 3.000 – 1.948 y después al resultado restarle 896?

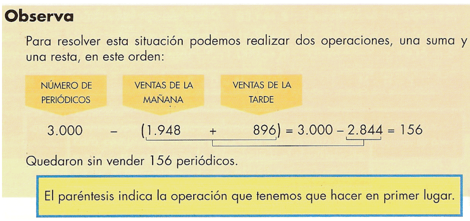



***Figura 13.*** Uso de paréntesis

En este apartado, podemos observar un conflicto semiótico potencial ya que el alumno puede entender, implícitamente, que se hace lo mismo que en los otros apartados, es decir, que a partir de un ejemplo particular se obtiene un resultado general. Sin embargo, lo que se está haciendo es introducir una convención:

"el paréntesis indica la operación que tenemos que hacer en primer lugar" (p. 24). Además, esta convención, implícitamente, puede entrar en contradicción con lo que se ha dicho al explicar anteriormente la propiedad asociativa. Según dicha propiedad, si se ha de efectuar, por ejemplo, (30 + 50) + 25, no es necesario sumar primero 30 con 50, puesto que, si se quiere se puede sumar primero 50 con 25.

## 6. Consideraciones finales

Con relación a la idoneidad epistémica de la lección analizada, nuestra conclusión es que su grado de idoneidad es moderadamente elevado, si tomamos como referencia la configuración empírica descrita en el apartado 3.2.

En cambio, la idoneidad semiótica es bastante más discutible. Basándonos, sobre todo en dos de las cinco facetas duales (expresión-contenido y extensivo-intensivo), hemos mostrado una variedad de conflictos semióticos potenciales, algunos de los cuales se pueden resolver mediante ciertos cambios en las tareas y en las explicaciones proporcionadas. De hecho, la identificación de conflictos semióticos lleva consigo, en algunas ocasiones, la posibilidad de establecer condiciones de control de posibles procesos de estudio con relación a los objetos matemáticos que se ponen en funcionamiento en la lección.

Sin embargo, ciertos conflictos semióticos identificados tienen difícil solución (si nos atenemos a los conocimientos didáctico-matemáticos actuales). Un tipo de estos conflictos semióticos son aquellos originados por configuraciones didácticas que presuponen que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones de la experiencia empírica. En este tipo de configuraciones los conceptos y las propiedades se intentan justificar por su acuerdo con una realidad extra matemática. Este intento topa con una dificultad que se convierte en el origen de importantes conflictos semióticos, que no es otra que el carácter convencional de algunas reglas matemáticas. Este tipo de conflictos han aparecido en la lección en el momento de introducir la regla "el paréntesis indica la operación que tenemos que hacer en primer lugar" a partir de una justificación basada en su acuerdo con situaciones extra matemáticas. Para solucionar este tipo de conflictos semióticos es necesario que los autores de los textos sean conscientes de las limitaciones que tiene la concepción que considera que "las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones de la experiencia empírica".

Otro tipo de conflictos semióticos potenciales de difícil solución son los relacionados con el intento de soslayar ciertas características del razonamiento algebraico. Los autores, por una parte, pretenden el inicio de una reflexión sobre la estructura algebraica de los conjuntos y operaciones con números; tal es el caso de los enunciados generales de las propiedades conmutativa, asociativa, o de la relación entre el minuendo, el sustraendo y la diferencia. Por otra parte, conscientes de la complejidad semiótica que ello representa intentan soslayar ciertas características del razonamiento algebraico, en especial la consideración de que los símbolos no están condicionados por la situación que inicialmente representaban y que, por tanto, son objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones. En la lección analizada, los símbolos substituyen a números y su función es representarlos,

los símbolos representan objetos, acciones sobre objetos o relaciones entre objetos, pero ellos mismos no se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones. Este tipo de conflictos semióticos han aparecido en la lección en el momento de introducir la relación entre los términos de una resta.

Un problema didáctico de mayor alcance, relacionado con el criterio de idoneidad “mediacional” expuesto en la introducción, se pone de manifiesto cuando relacionamos las situaciones introductorias de las distintas configuraciones y las prácticas operativas y discursivas asociadas. Se supone que tales situaciones deben permitir la contextualización de los conocimientos pretendidos y crear las condiciones para la exploración personal de los alumnos. Sin embargo, el texto presenta inmediatamente la solución y las generalizaciones pretendidas, lo que convierte de hecho al proceso de estudio en una presentación magistral. Se trata de un problema relativo a la gestión del tiempo didáctico (*cronogénesis*) y a la gestión de las responsabilidades del profesor y de los alumnos en el proceso de aprendizaje (*topogénesis*) (Chevallard, 1991).

Para terminar, queremos resaltar que el análisis de textos se revela como un componente importante del análisis didáctico de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Con frecuencia, los textos y documentos de estudio asumen una parte sustancial de la dirección del proceso de enseñanza y aprendizaje. Es cierto que en los niveles de educación primaria el alumno no afronta solo el estudio de los contenidos curriculares, usando el libro de manera personal y autónoma. El profesor desempeña un papel de mediador entre el libro y el alumno. Pero un libro de texto escolar que tenga una baja idoneidad epistémica y semiótica implicará una mayor carga para el profesor y menor autonomía para los alumnos.

La metodología de análisis descrita puede ser una herramienta útil para la preparación de profesores. El diseño y desarrollo de unidades didáctica debe tener en cuenta las experiencias e investigaciones previas realizadas, las cuales se concretan habitualmente en las lecciones elaboradas por equipos de expertos. Una pregunta clave para el profesor es: ¿cómo puedo adaptar a mi contexto y circunstancias la unidad didáctica que me ofrece este libro de texto y en la medida de lo posible optimizarla? Para responder esta pregunta es necesario adoptar unos criterios de mejora o idoneidad de un proceso de estudio matemático.

## Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del proyecto MCYT – FEDER: SEJ2004-00789, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica. Madrid.

## Referencias

Brousseau, B. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dordrecht: Kluwer.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Contreras A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(2), 151–186.

Ferrero, L. y cols. (1999). *Matemáticas 5. Serie Sol y Luna*. Anaya.

Font, V. y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. *Revista de Educación*, *338*, 309-346.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématique, 22*(2/3), 237–284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 3–36.

Godino, J. D., Wilhelmi M. R. y Bencomo, D. (2005). "Suitability criteria for a mathematical instruction process. A teaching experience with the function notion". *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *4.2*, 1–26.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (aceptado).

Hiebert, J., Morris, A. K., y Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 66*, 201–222.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. En A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 99-137): Dorchecht: Kluwer A. P.

Vygotski, L.S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, 2ª edición. Barcelona, ESP: Crítica-Grijalbo, 1989.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations.* N. York, Macmillan.

**Juan D. Godino**
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada
España

E-mail: jgodino@ugr.es

**Vicenç Font**
Departament de Didáctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica
Universitat de Barcelona
España

E-mail: vfont@ub.edu

**Miguel R. Wilhelmi**
Departamento de Matemáticas e Informática
Universidad Pública de Navarra
España

E-mail: miguel.wilhelmi@unavarra.es

# Semiotic Objectifications of the Compensation Strategy: En Route to the Reification of Integers

Andreas Koukkoufis [1]
Julian Williams [1]


## RESUMEN

Reportamos aquí el análisis de una experiencia que reproduce el trabajo de investigación "Object-Process Linking and Embedding" (OPLE) en el caso de la enseñanza de la aritmética de los enteros, desarrollada por Linchevski y Williams (1999) en la tradición de la Educación Matemática Realista (realistic mathematics education (RME)). Nuestro análisis aplica la teoría de la objetivación de Radford, con el propósito de aportar nuevas pistas sobre la forma en que la reificación tiene lugar. En particular, el método de análisis muestra cómo la generalización factual de la estrategia llamada de compensación encapsula la noción de "agregar de un lado es lo mismo que quitar del otro lado"; una base fundamental de esto que será, más tarde, las operaciones con enteros. Discutimos, de igual modo, otros aspectos de la objetivación susceptibles de llegar a ser importantes en la cadena semiótica que los alumnos ejecutan en la secuencia OPLE, secuencia que puede llevar a un fundamento intuitivo de las operaciones con los enteros. Sostenemos que es necesario elaborar teorías semióticas para comprender el papel vital de los modelos y de la modelación en la implementación de las reificaciones en el seno de la Educación Matemática Realista (RME).


- **PALABRAS CLAVE:** Enteros, semiótica, teorías del aprendizaje.


## ABSTRACT

We report an analysis of data from an experimental replication of "Object-Process Linking and Embedding" (OPLE) in the case of integer arithmetic instruction originally developed by Linchevski and Williams (1999) in the realistic mathematics education (RME) tradition. Our analysis applies Radford's theory of semiotic objectification to reveal new insights into how reification is achieved. In particular the method of analysis shows how the factual generalization of the so-called compensation strategy encapsulates the notion that "adding to one side is the same as subtracting from the other side": a vital grounding for symbolic integer operations later. Other aspects of objectification are discussed that are considered likely to be important to the semiotic chaining that students achieve in the OPLE sequence that can lead to an intuitive grounding of integer operations. We


*Fecha de recepción: Febrero de 2006/ Fecha de aceptación: Abril de 2006*

1 School of Education, the University of Manchester.

argue that semiotic theory needs to be elaborated to understand the vital role of models and modelling in leveraging reifications in RME.

• **KEY WORDS:** Integers, Semiotics, Theories of Learning.

## RESUMO

Reportamos aqui o análise de uma experiencia que reproduce o trabalho de investigação “Object-Process Linking and Embedding” (OPLE) en o caso da ensino da aritmética dos inteiros, desenvolvida por Linchevski e Williams (1999) na tradição da Educação Matemática Realista (realistic mathematics education (RME)). Nossa análise aplica a teoria da objetivação de Radford, com o propósito de surgir novas pistas sobre a forma em que a reificação tem lugar. Em particular, o método de análise mostra como a generalização factual da estratégia chamada de compensação encapsula a noção de “agregar de um lado é o mesmo que quitar do outro lado”; uma base fundamental disso que será, mais tarde, as operações com inteiros. Discutimos, de igual modo, outros aspectos da objetivação suscetíveis de chegar a ser importante na cadeia semiótica que os alunos executam na seqüência OPLE, seqüência que pode levar a um fundamento intuitivo das operações com os inteiros. Sustentamos que é necessário elaborar teorias semióticas para compreender o papel vital dos modelos e da modelação na implementação das reificações no seio da Educação Matemática Realista (RME).

• **PALAVRAS CHAVE:** Inteiros, Semióticos, Teoria de Aprendizagem.

## RÉSUMÉ

Nous rapportons ici l’analyse d’une expérience qui vise à reproduire le travail de recherche “Object-Process Linking and Embedding” (OPLE) dans le cas de l’enseignement de l’arithmétique des entiers développé par Linchevski et Williams (1999) dans la tradition de l’Éducation Mathématique Réaliste (realistic mathematics education (RME)). Notre analyse applique la théorie de l’objectivation sémiotique de Radford afin d’apporter de nouveaux éclairages sur la façon dont la réification est accomplie. La méthode d’analyse montre, en particulier, comment la généralisation factuelle de la stratégie appelée de compensation encapsule la notion que « ajouter d’un côté, c’est la même chose qu’enlever de l’autre côté » : une base fondamentale de ce que sera plus tard les opérations avec des entiers. Nous discutons également d’autres aspects de l’objectivation susceptibles de devenir importants dans la chaine sémiotique que les élèves accomplissent dans la séquence OPLE, séquence qui peut mener à un fondement intuitif des opérations sur des entiers. Nous soutenons qu’il est nécessaire d’élaborer des théorisations sémiotiques pour comprendre le rôle vital des modèles et de la modélisation dans l’implémentation des réifications au sein de l’Éducation Mathématique Réaliste (RME).

• **MOTS CLÉS:** Entiers, sémiotique, théories de l´apprentissage.

## The Need for a Semiotic Analysis

Based on the instructional methodology of *Object-Process Linking and Embedding (OPLE)* (Linchevski & Williams, 1999; Williams & Linchevski, 1997), the *dice games instruction method* for integer addition and subtraction showed how students could intuitively construct integer operations. This methodology, underpinned by the theory of *reification* (Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994), was developed within the Realistic Mathematics Education (RME) instructional framework. Until very recently, the dice games method had not been analysed semiotically. We believe a semiotic analysis of students' activities in the dice games will illuminate students' meaning-making processes. It will also provide some further understanding of the reification of integers in the dice games in particular and more generally of the theory of reification, which does not explain "what spur[s] the students to make the transitions between stages" (Goodson-Espy, 1998, p. 234). Finally, it will contribute to the discussion of the semiotic processes involved in RME, which are currently insufficiently investigated (Cobb, Gravemeijer, Yackel, McClain, & Whitenack, 1997; Gravemeijer, Cobb, Bowers, & Whitenack, 2000). In this paper we focus on the *compensation strategy* (Linchevski & Williams, 1999), a dice game strategy on which integer addition and subtraction are grounded, and begin to address the following questions:

1. What are the students' semiotic processes of the compensation strategy in the reification of integers through the OPLE teaching of integers in the dice games method?

2. What is the semiotic role of the abacus in the OPLE teaching of integers through the dice games and what can we generally hypothesise about the significance of models and modelling in the RME tradition?

We found Radford's semiotic theory of *objectification* (Radford, 2002, 2003) to be a particularly useful theoretical framework for analysing students' semiotic processes in the dice games, despite the very different context in which it was developed.

## The Object-Process Linking and Embedding Methodology

Sfard (1991) reported as follows:

> But here is a vicious circle: on the one hand, without an attempt at the higher-level interiorization, the reification will not occur; on the other hand, existence of objects on which the higher-level processes are performed seems indispensable for the interiorization – without such objects the processes must appear quite meaningless. In other words: *the lower-level reification and the higher-level interiorization are prerequisites of each other!* (p. 31)

In order to overcome this '*vicious circle*', the *Object-Process Linking and Embedding (OPLE)* pedagogy (Linchevski & Williams, 1999) was developed: "children a) build strategies in the situation, b) attach these to the new numbers to be discovered, and finally c) embed them in mathematics by introducing the mathematical voice and signs" (Linchevski & Williams, 1999, p. 144). The pedagogy can be best understood through the dice games context in which it was developed (Linchevski & Williams, 1999), which aimed at overcoming the paradox of reification described above for the case of arithmetic of the integers.

The *dice games instruction method* (Linchevski & Williams, 1999) is an intuitive instruction of integer addition and subtraction in the RME instructional framework aiming at the reification of integers. The transition from the narrower domain of natural numbers to the broader domain of integers in the method is achieved through *emergent modelling* (Gravemeijer, 1997a, 1997b, 1997c; Gravemeijer et al., 2000) and takes advantage of students' *intuition of fairness* (Liebeck, 1990) for the cancellation of negative amounts by equal positive amounts (Dirks, 1984; Linchevski & Williams, 1999; Lytle, 1994). Practically, the model – the double abacus (see figure 1) – affords the representation and manipulation of integers as objects before they are abstracted and symbolised as such by the students (Linchevski & Williams, 1999):

> The integer is identifiable in the children's activity first as a process on the numbers already understood by the children, then as a 'report' or score recorded (concretised by the abacus). The operations on the integers arise as actions on their abacus representations, then recorded in mathematical signs. Finally, the operations on the mathematical signs are encountered in themselves, and justified by the abacus manipulations and games they represent. Thus the integers are encountered as objects in social activity, *before* they are symbolised mathematically, thus intuitively filling the gap formerly considered a major obstacle to reification. (Linchevski & Williams, 1999, p. 144)

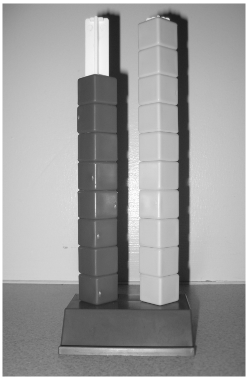


***Figure 1:*** *The abacus*

Therefore, in the games the situated strategies are constructed in a realistic context which allows intuitions to arise. In this process the abacus model is utilized which "affords representation of the two kinds of numbers, and allows addition and subtraction (though clearly not multiplication and division) of the integers to be based on an extension of the children's existing cardinal schemes" (Linchevski & Williams, 1999, p. 135). These strategies are linked to objects (yellow and red team points, see next section), thus allowing object-process linking. Later, the formal mathematical language and symbols enter the games. In the following section we present the games more analytically.

## The Dice Games Instruction

The method involves 4 games in each of which two teams of two children are throwing dice (e.g. a yellow and a red die in game 1) and recording team points on abacuses: the points for the yellow team are recorded by yellow cubes on the abacuses and those for the red team are red cubes on the abacuses. The students sit in two pairs, each having a member of each team and an abacus (see figure 2). On each pair's abacus, points for both teams are being recorded and the team points on the two abacuses add up. The students in turn throw the pair of dice, recording each time the points for the two teams on their abacus. When the two abacuses combine to give one team a score of 5 points ahead of their opponents, that team wins the game. For instance in game 1, if the yellow team at a certain point is 2 ahead and they get a score on the pair of dice, say 4 yellows and one red, then they can add 3 yellows to their existing score of 2 and so get 5 ahead, and they win. But note the complication that because we have two abacuses for the two pairs, a 'combined score of 2 yellows' might involve, say 1 red ahead on the one abacus and 3 yellows ahead on the other abacus: so there are multiple 'compensations' of reds and yellows going on in various combinations. Therefore, the important thing in the games is not how many points a team has, but how many points *ahead* of the opponent: hence the nascent directivity of the numbers.

In the first game (game 1) two dice are used, a yellow and a red one, giving points to the yellow and red team in each throw. Shortly after the beginning of game 1, often with the urging of the researcher, the students intuitively understand that they can cancel the team points on the dice, thus introducing an important game strategy, the *cancellation strategy* (not examined in this paper). For example, according to this strategy, if a throw of the pair of dice shows 3 points for the yellow team and 1 for the red team, this is equivalent to just giving 2 points for the yellow team. The rationale is that the *directed difference* of the points of the yellow and red team (i.e. the amount of points that the yellows are ahead or behind the reds) will be the same anyway. As the abacus columns have only space for 10 points for each team, a team column will often be full before a team gets 5 points ahead of the opponent. In order for the game to go on, the *compensation strategy* is formulated, that is, if you can't add points to one team, subtract the same amount of points from the other, so as to maintain the correct directed difference of team points.

***Figure 2:*** *Students playing one of the dice games*

This strategy is the second important game strategy and it is the one focused upon in this paper. By the end of the games, this strategy will lead to the intuitive construction of equivalences like: $+(+2) \equiv -(-2)$ and $+(-2) \equiv -(+2)$.

Game 2 is similar to game 1, and is introduced as soon as (and not before) the children are able to cancel the pair of dice into ONE score quite fluently. In this game an extra die is now thrown whose faces are marked '*add'* and '*sub'* (subtract). From now on this will be called the *add/sub die*. The introduction of this die allows for subtraction to come into play, instead of just addition, as in game 1. In analogy to game 1, according to the compensation strategy, if you have to subtract points from a team but there are none on the abacus to subtract, you can add points to the other team instead.

In game 3, formal mathematical symbols for integers are introduced. The *add/sub die* is not used and the yellow and red die are replaced with an *integer die* giving one of the following results on each throw: $-1, -2, -3, +1, +2, +3$. Positive integers are points for the yellow team and negative integers are points taken from the yellows, thus they are points for the reds (for more details see Linchevski & Williams, 1999). Here the mathematical voice is encouraged, so that the children say "minus 3" and "plus 2" etc.

In the final game (game 4), the *add/sub die* is back into the game, allowing again for subtraction to be concerned. In these two games the cancellation strategy is no longer needed and the compensation strategy is transformed into a formal symbolic, though still verbal, form: "add minus 3" etc. Once the students become fluent in game 4, they begin recording the games for a transition from verbal to written use of formal mathematical symbols, but we are not going to discuss this transition further in this paper.

## Some Earlier Analyses: Reification in the Dice Games

Linchevski and Williams (1999) have analysed the dice games in terms of reification. Through the instructional methodology of Object-Process Linking and Embedding, they achieved the intuitive reification of integers and the construction of processes related to integer addition and subtraction through the manipulation of objects on a model (i.e. the yellow and red team points). However, they did not provide a semiotic-analytical account of the reification processes – their main concern was to show that reification of integers was possible through their method. We will discuss here the reifications taking place in the dice games, as we understand them, so that we can better appreciate the need for a semiotic analysis of students' processes.

In relation to the reification of integers, according to Linchevski & Williams (1999), the object-process linking allows the intuitive manipulation of integers as objects from the very beginning of the dice games. As a result of this methodological innovation, some elementary processes are obvious from the beginning. These are, that if a team gets points (or points are subtracted from it), the new points add-up to (or are subtracted from) the points the team already has. These processes are intuitively obvious from the introduction of game 1 (and game 2 respectively). However, one may argue that the students still operate at the level of natural numbers, not integers.

Integer processes begin to be constructed, though integers are not yet introduced explicitly, once the students focus on the *score* of the game, that is, which team is ahead and by how many points. The calculation of the *score* as the *directed difference* of the piles of cubes of the points of the two teams is the first *object-process link* to be constructed. The second *object-process link* to be achieved in the games is the cancellation of the team points on the dice: i.e. if in a throw the yellows get 2 points and the reds 1 point, you might as well just give 1 point to the yellows. Thus this link is possible through the establishment of the so called *cancellation strategy*. Further, the *compensation strategy* – according to which *adding to one side of the abacus is the same as subtracting from the other side* – needs to be introduced as an *object-process link*. Up to this point, all the necessary object-process links are in place. Next, at the beginning of game 3, integers are introduced into the games: the formal mathematical voice enters the games. Through the manipulation of the formal mathematical symbols of integers in the above object-process links, integers are being reified and the addition and subtraction of integers are being established.

However, in the above analysis the following significant question arises: What are the meaning-making processes (semiotic) involved in students' integer reification in the dice games? We certainly do not claim that we will exhaust this issue here, but we will begin to address it through the vital component of the compensation strategy.

## Semiotics are Needed to Complement Reification Analyses

The theory of reification, drawing support from a cognitivist/constructivist view of learning, is mainly interested in the internal processes of students' abstraction of mathematical objects. It does not generally refer to the social semiotic means students used to achieve the abstraction of these objects, (e.g. in the dice games, the integers). The analysis of Linchevski & Williams (1999) did in fact go some way in providing a social analysis of the context as a resource for construction of the compensation strategy: they were excited mainly here by the accessing of the socio-cultural resource of 'fairness' in the games as a basis for an intuitive construction of compensation. Semiotic chaining was adduced to explain the significance of the transition to the 'mathematical voice', so that "two points from you is the same as two points to us" slides under a new formulation like "subtract minus two is the same as adding two… plus two". However, we will complement Linchevski & Williams' (1999) study with a more detailed semiotic analysis of the way that the abacus, gesture and deictics mediate children's generalisations (after Radford's, 2003, 2005 methodology).

We wish to clarify at this point that we do not reject the reification analyses. Instead, we agree with Cobb (1994) who takes an approach of *theoretical pragmatism*, suggesting that we should focus on "what various perspectives might have to offer relative to the problems or issues at hand" (p. 18). We propose that in this sense semiotic social theories can be complementary to constructivist ones. More precisely, we propose that Radford's theory of objectification (Radford, 2002, 2003) can be seen as complementary to the theory of reification (Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994): while Sfard (1991) provides a model for the cognitive changes taking place, Radford (2002, 2003) provides the means to analyse these changes on the social, 'intermental' plane.

Radford addresses the issue of semiotic mediation through his theory of objectification (Radford, 2002, 2003). This theory, presented in some detail in the following section, analyses students' dependence on the available *semiotic means of objectification (SMO)* (Radford, 2002, 2003) to achieve increasingly socially-distanced levels of generality. Radford explains this reliance on SMO through reference to Frege's triad: the *reference* (the object of knowledge), the *sense* and the *sign* (Radford, 2002). The SMO refer to Frege's *sense*, that is, they mediate the transition from the *reference* to the *sign*. Moreover, Radford extended the Piagetian *schema* concept to include a *sensual dimension*, as Piaget's emphasis on the process of reflective abstraction can lead to an inadequate analysis of the role of signs and symbols (Radford, 2005).

> The schema …is … both a sensual and an intellectual action or a complex of actions. In its intellectual dimension it is embedded in the theoretical categories of the culture. In its sensual dimension, it is executed or carried out in accordance to the technology of *semiotic activity…* (Radford, 2005, p. 7)

Given this extended schema definition, the process of abstraction of a new mathematical object needs to be investigated in relation to the semiotic activity mediating it. This investigation should expose students' meaning making processes in the objectifications taking place in the dice games, which allow the construction of integers as new mathematical objects, i.e. their reification in Sfard's sense.

In the next section we present analytically Radford's *theory of objectification* (Radford, 2002, 2003), which will then be applied in the section following it to some of our data from the instruction through the dice games.

## Radford's Semiotic Theory of Objectification

Objectification is "a process aimed at bringing something in front of someone's attention or view" (Radford, 2002, p.15). It appears in three modes of generalization: generalization through actions, through language and through mathematical symbols. These are *factual, contextual and symbolic generalization* (Radford, 2003). Objectification during these generalizations is carried out gradually through the use of *semiotic means of objectification* (Radford, 2002):

> …objects, tools, linguistic devices, and signs that individuals intentionally use in social meaning-making processes to achieve a stable form of awareness, to make apparent their intentions, and to carry out their actions to attain the goal of their activities, I call *semiotic means of objectification*. (Radford, 2003, p. 41)

Factual generalization, a generalization of actions (but not of objects), is described as follows:

> … A factual generalization is a generalization of actions in the form of an operational scheme (in a neo-Piagetian sense). This operational scheme remains bound to the concrete level (e.g., "1 plus 2, 2 plus 3" …). In addition, this scheme enables the students to tackle virtually any particular case successfully. (Radford, 2003, p. 47)

The formulation of the operational scheme of factual generalization is based on deictic semiotic activity, e.g. deictic gestures, deictic linguistic terms and rhythm. The students rely on the signification power provided by deictics to refer to actions on non-generic physical objects. These are perceivable, non-abstract objects which can be manipulated accordingly. In the example from Radford (2003) below, the students had to find the number of toothpicks for any figure in the following pattern.

The elaboration of the operational scheme in this case can be seen in the following section of an episode provided by Radford (2003).

1. Josh: It's always the next. Look! [and pointing to the figures with the pencil he says the following] 1 plus 2, 2 plus 3 […]. (Radford, 2003, p. 46-47)

Josh constructed the operational scheme for the calculation of the toothpicks of any figure in the form "1 plus 2, 2 plus 3", while pointing to the figures. Moreover, he used the linguistic term *always* to show the general applicability of this calculation method for any specific figure and the term *next* which "emphasizes the ordered position of objects in the space and shapes a perception relating the number of toothpicks of the next figure to the number of toothpicks in the previous figure" (p. 48). Hence, in factual generalization:

> …the students' construction of meaning has been grounded in a type of social understanding based on implicit agreements and mutual comprehension that would be impossible in a nonface-to-face interaction. … Naturally, some means of objectification may be powerful enough to reveal the individuals' intentions and to carry them through the course of achieving a certain goal. (Radford, 2003, p. 50)

In contextual generalization the previously constructed operational scheme is generalised through language. Its generative capacity lies in allowing the emergence of new abstract objects to replace the previously used specific concrete objects. This is the first difference between contextual and factual generalization: new abstract objects are introduced (Radford, 2003). Its second difference is that students' explanations should be comprehensible to a "generic addressee" (Radford, 2003, p. 50): reliance on face-to-face communication is excluded. Consequently, contextual generalization reaches a higher level of generality. More specifically, in Radford (2003) the operational scheme "1 plus 2, 2 plus 3" presented above becomes "You add the figure and the next figure" (p. 52). Therefore, the pairs of specific succeeding figures *1, 2* or *2, 3* become *the figure* and *the next figure*. These two linguistic terms allow for the emergence of two new abstract objects, still situated, spatial and temporal (Radford, 2003). Reliance on face-to-face communication is eliminated, and deictic means subside. However, the personal voice, reflected through the word *you*, still remains.

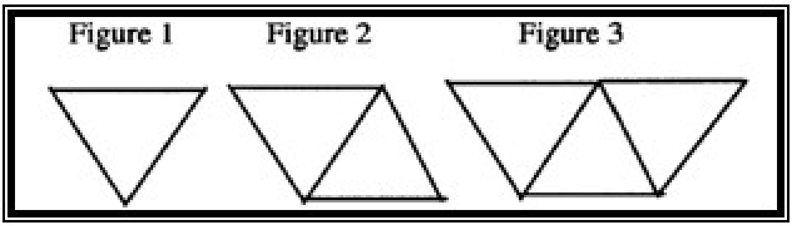



***Figure 3:*** *First three 'Figures' of the 'toothpick pattern', labelled 'Figure1', 'Figure 2', 'Figure 3' by Radford (the picture in the box was taken from Radford, 2003, p. 45)*

In symbolic generalization, the spatial and temporal limitations of the objects of contextual generalization have to be withdrawn. Symbolic mathematical objects (in Radford's case algebraic ones) should become "nonsituated and nontemporal" (Radford, 2003, p.55) and the students lose any reference point to the objects. To accomplish these changes, Radford's (2003) students excluded the personal voice (such us *you*) from their generalization and replaced the generic linguistic terms *the figure* and *the next figure* with the symbolic expressions $n$ and $(n+1)$ correspondingly. Hence, the expression *you add the figure and the next figure* became $n+(n+1)$ . Still, Radford (2003) points out that for the students the symbolic expressions $n$ and $(n+1)$ remained indexed to the situated objects they substituted. This is evident in students' persistent use of brackets and their refusal to see the equivalence of the expressions $n+(n+1)$ and $(n+n)+1$ . Summarising, the mathematical symbols of symbolic generalization were indexes of the linguistic objects of contextual generalization, which in turn were indexes of the actions on concrete physical objects enclosed in the factual generalization operational scheme.

## The Compensation Strategy – Factual Generalization

In this section we analyse the objectification of the compensation strategy in terms of factual, contextual and symbolic generalization. We present excerpts of the discourse contained in the games, which we analyse in terms of their contribution to the progressive abstraction of integers through the means of objectification. We also discuss the SMO involved in students' processes. The analyses of factual, contextual and symbolic generalization are presented separately, but first we provide some information about the students and the episodes in this paper.

The study, part of an ongoing PhD research, involves year 5 students in Greater Manchester, who had not yet been taught integer addition and subtraction. The PhD involves two experimental methods (respectively containing 5 and 6 groups of 4 students) from 2 separate classes and a control group from a third class. In each experimental method class the students were arranged by their teacher in mixed gender and ability groups, which were taught for three one-hour lessons. In this paper we focused on a microanalysis of one group of one of the methods – the dice games as originally applied by Linchevski and Williams (1999).

Radford's factual generalization is quite a clear-cut process based on action on physical objects formulated into an operational scheme through deictic activity. However, in our investigation of the compensation strategy, we find a multi-step process of semiotic contraction happening inside it. The three following episodes co-constitute in our view the factual generalization. In these episodes, occurring during game 1 (in lesson 1), the students were faced with a situation where they had to add cubes/points to one of the two teams, but there was no space on the abacus. As a result, a breakthrough was needed for the scoring to continue.

<u>Episode 1 (Minutes 14:30-14:50, lesson 1):</u> Umar had to add 1 yellow cube on the abacus but, as there was no space in the relevant column, he got stuck. Fay proposed taking away 1 red cube instead. "“…” indicates a pause of 3 sec or more, and “.” or “,” indicate a pause of less than 3 sec” (Radford, 2003, p. 46).

Fay: You take 1 off the reds [*pointing to the red column on her abacus*]. […] Because then you still got the same, because you're going back down [*showing with both her hands going down at the same level*] 'cause instead of the yellows getting one [*raising the right hand at a higher level than her left hand*] the red have one taken off [*raising her left hand and immediately moving it down, to show that this time the reds decrease*].

Fay's proposal for the subtraction of a red cube instead of the addition of a yellow one is the first articulation of the compensation strategy in the games for this group of students. We especially noticed the analytical explanation of the proposed action, which allows the process of compensation to be introduced for the first time. Deictic activity was associated both with the proposed action of taking away a red cube and with the justification following it. Fay used pointing to the red cubes on the abacus, as well as a gesture with both her hands indicating the increase/decrease of the pile of cubes in each team's column. Moreover, the names "the yellows" and "the red" have a deictic role. We also notice the phrase "you still got the same", stressing that something (obviously important) remains unaltered: either we add a yellow point/cube or subtract a red point/cube. This significant unaltered game characteristic, which we call the *directed difference* of the points of the yellow and red team, still cannot be articulated as it has not yet acquired a name.

<u>Episode 2 (Minutes 20:15-20:43, lesson 1):</u> The yellows' column was full and the reds' only had space for 1 cube. Compensation was needed and as Zenon could not understand, Jackie explained as follows.

Jackie: It's still the same, like … [*a very characteristic gesture (see figure 4): she brings her hands to the same level and then she begins to move them up and down in opposite directions, indicating the different resulting heights of the cubes of the two columns of the abacus*] because it's still 2, the yellows are still 2 ahead [*she does the same gesture while she talks*] and the reds are still 2 below, so it's still the same… [*again the gesture*] … em like… [*closing her eyes, frowning hard*] … I don't know what it's called but it's still the same… score [*the gesture 'same' again before and while articulating the word "score" – indicating 'same' score on her abacus*].

***Figure 4:*** *Jackie's gesture (this sequence of action performed fast and repeated several times)*

In episode 2, we noticed the repeated use of the phrase "it's still the same", the word "still" followed by the difference in team points (i.e. "still 2", "still 2 ahead"), as well as the accompanying characteristic gesture. The gesture, too, emphasized the importance of the unaltered directed difference of the cubes of the two teams. We also noticed Jackie's difficulty in finding a proper word for this important unaltered game characteristic: "em like… [closing her eyes, frowning hard] … I don't know what it's called but it's still the same… score" (extract from episode 2 above). We believe the articulation of the word *score*, meaning what we call the directed difference of team points, as well as Jackie's gesture were very important for the factual generalization process, because they achieved the *semiotic contraction* (Radford, 2002) of the process originally established in episode 1. From this point onward, the students do not need to provide an analytical semiotic justification of the proposed action, as Fay needed to in episode 1. Just saying that the score will be the same is enough. A similar effect was accomplished by the word *difference* in a different group (Koukkoufis & Williams, 2005).

<u>Episode 3 (Minutes 21:27-21:57, lesson 1):</u> There's only space for 2 yellow cubes, but Fay has to add 3 yellows and 1 red.

Fay: Add 2 on [*she adds 2 yellow cubes*] and then take 1 of theirs off [*she takes off a red cube*] and then for the reds [*pointing to the red dice*] you add 1, so you add the red back on [*she adds 1 red cube*].

Researcher: […] Does everybody agree? (Jackie and Umar say "Yeah").

Finally, in the above episode further semiotic contraction took place. In fact, no justification of the proposed action was provided, as it seemed to be unnecessary – indeed Jackie and Umar agreed with Fay without further explanation. We argue that the further semiotic contraction happening in episode 3 completed the factual generalization of the compensation strategy.

To sum up, we see in the three episodes provided up to this point a continuum as follows: in episode 1 Fay presented a proper action and an analytical process to justify it; in episode 2 again a proper action was presented but the process justifying it was contracted; finally in episode 3 the presentation of the proposed action was sufficient, therefore further semiotic contraction took place and the process for resulting in this proposed action disappeared.

## The Compensation Strategy – Contextual Generalization

Contextual generalization, in which abstraction of new objects through *language* takes place, has not yet been completed in this case. If we had had a contextual generalization of the compensation strategy, we would have a generalization like this: if you can't add a number of yellow/red points, you can subtract the same number of red/yellow points instead. Similarly for subtraction, the generalization would be similar to this: if you can't subtract a number of yellow points/red points, you can add the same number of red/yellow points instead. However, our students did not spontaneously produce such a generalization, neither does the instructional method demand it; therefore we did not insist that the students produce it. We believe that the lack of articulation of the compensation strategy through generic linguistic terms, and thus the incompleteness of the production of a contextual generalization, has to do with the compensation strategy being too intuitively obvious. On the contrary, in the case of the *cancellation strategy* (Linchevski & Williams, 1999) which was not so obvious, the same students produced a contextual generalization as follows (Fay, minutes 38:17-38:40, lesson 1, 5 reds and 2 yellows): "you find the biggest number, then you take off the smaller number". In the case of the contextual generalization of the cancellation strategy, we notice that new abstract objects ("the biggest number", "the smaller number") enter the discourse, as in Radford (2003). However, we will not discuss the contextual objectification of the cancellation strategy here.

## The Compensation Strategy – Symbolic Generalization

Despite the incompleteness of the contextual generalization, we found that symbolic generalization was not obstructed! In this section we discuss the symbolic generalization of the compensation strategy, which presents some differences from that of the case presented by Radford (2003).

To begin with, in Radford (2003) symbolic generalization remained indexical throughout the instruction. In our case, the students began using symbolic generalization non-indexically. For convenience, we present indexical and non-indexical symbolic generalization separately.

### *Indexical Symbolic Generalization*

The elaboration of a symbolic generalization for the compensation strategy demands the replacement of pre-symbolic signs with symbolic ones. Therefore, the reference to yellow and red team points has to be substituted by reference to positive and negative integers. According to the dice games method, this is achieved in the beginning of game 3, when *the red and the yellow die* are replaced by the *integer die*. Analytically, the numbers +1, +2 and +3 (on the integer die) are points for the yellow team. Further, –1, –2 and –3 (on the integer die) are points taken away from the yellow team, thus they are points for the red team. Of course, similarly one can say that +1, +2 and +3 are point taken away from the red team. Conclusively, when it is "+" it is yellow points, while when it is "–" it is red points. In the following episode we witness the transition from the pre-symbolic signs of "yellow team points" and "red team points" to the symbolic signs of "+" and "–" (positive and negative integers).

<u>Episode 4:</u> Minutes: 20:45-21:55, lesson 3.

| | |
|---|---|
| Researcher: | +1. Who is getting points? |
| Jackie: | The yellows |
| Researcher: | […] Who is losing points? |
| Jackie, Umar: | The reds |
| Fay: | […] reds are becoming called minuses and then the yellows are becoming called plus. |

As a result of the above introduction of the formal mathematical symbols for integers, positive integers are used to indicate yellow team points and negative integers are used to indicate red team points. Here lies the first difference from Radford's symbolic generalization, which is soon to become evident.

In Radford (2003), the symbolic signs/ expressions used in symbolic generalization were indexes of the contextual abstract objects of contextual generalization. Hence, the expressions $n$

and $n+1$ indicated the generic linguistic terms *the figure* and *the next figure*. Instead, in the dice games the formal mathematical symbols of integers were indexes not of the generic linguistic terms of contextual generalization (which was never completed), but of the concrete objects of factual generalization. For example, +2 is an index of “2 more for yellows” as well as of “2 yellow points”, as in episode 5.

Episode 5 (Minutes: 33:15-33:53, lesson 3)

Researcher: […] you get –2. What would you do? (Fay takes 2 yellow cubes off) […] What if you had +3?
Umar: You take away 3 of the reds.
Zenon: … or you could add 3 to the yellow.
Fay, Jackie: … add 3 to the yellow.
Researcher: Oh, 3 off the reds or 3 to the yellows. (All the students agree)

Indeed, the students read +2 on the die, the researcher articulates it as “plus 2”, but then the students’ discussion is in terms of reds and yellows. If symbolic signs were being used non-indexically at that point, Umar would have said “minus 3” instead of saying “3 of the reds” (as in the phrase “take away 3 of the reds”). Also the others would have said “plus 3” instead of “3 to the yellow” (as in the phrase “add 3 to the yellow”). It becomes clear that in our case, we witnessed a *direct* transition from *factual* to *indexical symbolic generalization*, without the completion of contextual generalization being necessary. This transition was afforded due to the RME context and the abacus model.

In indexical symbolic generalization, though the operational scheme of factual generalization is reconstructed through the use of symbolic signs instead of concrete physical objects, it is not a simple repetition of factual generalization in symbolic terms that takes place. No semiotic contraction needs to take place for the establishment of the compensation strategy in symbolic terms. The students know right away that instead of adding +2 (2 yellow points) they can subtract 2 red points.

*Non-indexical Symbolic Generalization*

Up to now the formal symbolic signs for integers are being used indexically, but the intended instructional outcome is that students will eventually be using these symbols non-indexically. We do not imply that the symbols should drop their connection to the context though. Indeed it is essential that students can go back to the contextual meanings of these symbols in the dice games, so as to draw intuitive support regarding integers. We just emphasize that the students should become flexible in using the formal symbols of integers either indexically or non-indexically. A non-indexical use of integer symbols would mean explicit reference solely to *pluses* and *minuses* (i.e. +2, –3 etc). Therefore, the compensation strategy should be constructed only based on the formal symbols of integers, excluding the pre-symbolic signs of yellow and red team points.

In order to target *non-indexical symbolic generalization*, we encouraged students to articulate the symbols on the dice as “+” (*plus*) and “–” (*minus*), in an attempt to facilitate the connection of the verbalization *plus/minus* to the symbolic signs +/–. Though in the beginning most students needed to be reminded to use the “proper” names of the signs, by the time the students had played game 4 for a while they were able to refer to integers in a formal manner, as can be seen in the following examples of student verbalizations. We believe that the introduction of the *add/sub die* in game 4 obliged the students to refer correctly to the integers with their formal names, so as to be able to perform the actions of addition and subtraction on these symbols. For example (brackets added), Fay said: *add [minus* 3*]*, *subtract [*2 *of the minuses];* Zenon said: *add [*2 *to the pluses]*; Jackie said: *add [minus* 2*]*. Umar was still struggling with the verbalization and sometimes said *[minus* 1*] add* or *add [subtract* 2*]* etc.

Finally, we checked if students had spontaneously produced a more general verbalization in a form like "if you can't add pluses/minuses, you can subtract minuses/ pluses" or the other way around. In this group, such a generalization did not take place. We believe, however, that this will not necessarily be the case for other groups of students, and indeed that it may be desirable to encourage this in the teaching.

## The Semiotic Role of the Abacus Model

As may be clear by now, the abacus model and the RME context of the dice games are very significant for the reification of integers and the instruction of integer addition and subtraction through the dice games method. Up to now we have referred to the semiotic processes, but we have not referred to the abacus model: though Radford's theory of objectification has been crucial in the analyses so far, we contend it needs to be complemented by an analysis of the role of the abacus in affording these semiotics. We claim that analysing the contribution of the model in students' semiosis will afford some primary discussion of phenomena such as (i) the embodiment of semiotic activity, (ii) the incompleteness of the contextual generalization and (iii) the direct transition from factual to symbolic generalization.

The abacus model in the games seems in many ways to be the centre of the activity: the abacus is in the centre of a 'circle of attention', as we are all sitting around the abacuses (see figure 2 again); it affords the representation of the yellow and red team points through their red and yellow cubes; it is the constant point of reference about which team is ahead. It was only natural that the abacus, being in the centre of the spatial arrangement and credited with allowing the students to keep the score, became the focus of semiotic activity. What is even more important: the abacus mediated in some cases the semiotic activity.

This can be seen in several features of the games. To begin with, the team points referred to the above episodes as "points for the yellow/red" (or as "yellow/red points") were concretized or 'objectified' from the start: they were yellow and red cubes. That is, *the points were embodied into the cubes*. This allows, as Linchevski and Williams (1999) point out, for integers to be introduced in the discourse as objects from the very beginning: the students speak about the general categories of yellow and red points from the beginning. Additionally, the *directed difference was embodied on the abacus*, as the difference of yellow and red points can be seen with a glance at the abacus, and the sign is evidently that of the larger pile of cubes: i.e. in figure 1 the yellows on that abacus are 2 points ahead. This convenient reference to the directed difference in the two piles of cubes afforded the association of semiotic activity to it, which made the establishment of the compensation strategy possible. Such semiotic activity is Fay's gesture in episode 1 in which the movements of her hands were matched with a verbal manipulation of the difference of the two piles of cubes (i.e. "you're going back down") to show that the directed difference remained the same. Also Jackie's quick movement of her hands up and down in episode 2 again indicates the difference in the two piles of cubes, in other words it points to the directed difference as it is embodied on the abacus. We suggest that this embodiment is crucial because it mediates the emergence of deictic semiotic activity such as that of Fay and Jackie in episodes 1 and 2 and hence allows the objectification to take place. We may even consider the toothpick figures in Radford (2003) to afford the same role.

As we noted above, the embodiment of the yellow and red team points through the cubes allowed the introduction of points for the yellow and points for the red as general abstract categories. We mentioned earlier that the students did not complete the contextual generalization of the compensation strategy to produce a generalization like "if you can't add a number of yellow/red points, you can subtract the same number of red/yellow points instead". However, the embodiment of the yellow and red team points of the abacus had already introduced generic situated objects into the discourse, even though this was not achieved through language. Consequently, the students could obviously see that the operational scheme of the factual generalization can be applied for any number of points for a team. This is an additional reason to the one presented earlier for the incompleteness of contextual generalization. Hence, this embodiment of the team points in a sense shapes the semiotic activity in the compensation strategy, providing one more reason why the completeness of contextual generalization was unnecessary in this case.

Further, the semiotic role of the abacus was crucial in the direct transition from factual to symbolic generalization. As we have seen in episode 4, the yellow points became "plus" and the red points are now "minuses". We say that this direct transition was afforded through the construction of a *chain of signification* (Gravemeijer et al., 2000; Walkerdine, 1988), in the form of a transition from the embodiment of yellow and red points through the abacus cubes to the embodiment of positive and negative integers. As a consequence of this transition, the formal symbols could be embedded into the operational scheme for the compensation strategy established through the factual generalization. Quite naturally then, the embedding of the formal symbols in the operational scheme performed on the abacus produced the symbolic generalization directly from factual generalization.

## Conclusion

Beginning with a presentation of the OPLE methodology and the dice games instruction, we argued the need for a finer grained, semiotic analysis of objectifications to explain how reification is accomplished.

We have applied Radford's theory of objectification to fill this gap in understanding the case of the compensation strategy, a vital link in the chain of significations necessary to OPLE's success: thus we were able to identify relevant objectifications applying Radford's semiotic categories of generalisation. This work began to reveal the significance of the abacus itself, which affords, and indeed shapes the semiosis in essential ways. We have also shown how the effectiveness of the pedagogy based on OPLE can be explained as semiotic chaining using multiple semiotic objectifications and begun to discuss the significance of models and modelling in the dice games, and hence in the OPLE methodology. Finally, we suggest that our discussion over the semiotics of the abacus model might be the route to understanding the significance of models and modelling in the RME tradition more generally. We suggest that the role of the abacus as a model in this case might be typical of other models in RME. Indeed, Williams & Wake (in press) provide an analysis of the role of the number line in a similar vein.

In applying Radford's theory in a very different context we are bound to point out certain differences in the two cases: for instance, the differing roles of contextual generalisation in the two cases. Though the adaptation of the theory was necessary at some points, we have shown that this theory can be a powerful tool of analysis. The question arises as to whether the instruction method adopted here gains or perhaps loses something by eliding contextual generalisation: thus we suggest that Radford's categories might in fact be regarded as raising design-related issues as well as providing tools of analysis.

## References

Cobb, P. (1994). Where Is the Mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development. *Educational Researcher*, *23*(7), 13-20.

Cobb, P., Gravemeijer, K., Yackel, E., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Mathematizing and Symbolizing: The Emergence of Chains of Signification in One First-Grade Classroom. In D. Kirshner & J. A. Whitson (Eds.), *Situated Cognition. Social, Semiotic, and Psychological Perspectives* (pp. 151-233). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Dirks, M. K. (1984). The integer abacus. *Arithmetic Teacher*, *31*(7), 50–54.

Goodson-Espy, T. (1998). The roles of reification and reflective abstraction in the development of abstract thought: transitions from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *36*(3), 219-245.

Gravemeijer, K. (1997a). Instructional design for reform in mathematics education. In K. P. E. G. M. Beishuizen, and E.C.D.M. van Lieshout (Ed.), *The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures* (pp. 13-34). Utrecht: CD-ß Press.

Gravemeijer, K. (1997b). Mediating Between Concrete and Abstract. In T. Nunez & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching in Mathematics. An International Perspective* (pp. 315-345). Sussex, UK: Psychology Press.

Gravemeijer, K. (1997c). Solving word problems: A case of modelling? *Learning and Instruction*, *7*(4), 389-397.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). Symbolising, Modelling and Instructional Design. Perspectives on Discourse, Tools and Instructional Design. In

P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms* (pp. 225-273). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Koukkoufis, A., & Williams, J. (2005). *Integer Operations in the Primary School: A Semiotic Analysis of a «Factual Generalization»*. Paper presented at the British Society for Research in to the Learning of Mathematics Day Conference November 2005, St. Martin's College, Lancaster.

Liebeck, P. (1990). Scores and forfeits – an intuitive model for integer arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(3), 221–239.

Linchevski, L., & Williams, J. (1999). Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1-3), 131-147.

Lytle, P. A. (1994). *Investigation of a model based on neutralization of opposites to teach integers*. Paper presented at the Nineteenth International Group for the Psychology of Mathematics Education, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brazil.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *22*(2), 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2005). The semiotics of the schema. Kant, Piaget, and the Calculator. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign. Grounding Mathematics Education* (pp. 137-152). New York: Springer.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification: the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 87–124.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason*. London: Routledge.

Williams, J. & Wake, G. (in press). Metaphors and models in translation between College and workplace mathematics. *Educational Studies in Mathematics.*

**Andreas Koukkoufis**
School of Education
The University of Manchester
UK

E-mail: andreas_koukkoufis@hotmail.com

**Julian Williams**
School of Education
The University of Manchester
UK

E-mail: julian.williams@manchester.ac.uk

# Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido

Bruno D'Amore [1]


## RESUMEN

En este artículo intento mostrar una consecuencia que algunas veces se evidencia en las transformaciones semióticas de tratamiento y conversión de una representación semiótica a otra, cuyo sentido deriva de una práctica compartida. El pasaje de la representación de un objeto matemático a otra, por medio de transformaciones, de una parte conserva el significado del objeto mismo, pero, en ocasiones, puede cambiar su sentido. Este hecho está aquí detalladamente evidenciado por medio de un ejemplo, pero insertándolo en el seno de un amplio marco teórico que pone en juego los objetos matemáticos, sus significados y sus representaciones.



- **PALABRAS CLAVE**: Registros semióticos, sentido de un objeto matemático, objeto matemático, cambio de sentido.



## ABSTRACT

In this paper, I want to illustrate a phenomenon related to the treatment and conversion of semiotic representations whose sense derives from a shared practice. On the one hand, the passage from one representation of a mathematical object to another, through transformations, maintains the meaning of the object itself, but on the other hand, sometimes can change its sense. This is shown in detail through an example, inserted within a wide theoretical framework that takes into account mathematical objects, their meanings and their representations.



- **KEY WORDS:** Semiotic registers, sense of a mathematical object, mathematical object, change of sense.

*Fecha de recepción: Enero de 2006/ Fecha de aceptación: Marzo de 2006*


[1] NRD, Departamento de Matemática, Universidad de Bolonia, Italia. Facultad de Ciencia de la Formación, Universidad de Bolzano, Italia. Alta Escuela Pedagógica, Locarno, Suiza. MESCUD, Universidad Distrital "F. José de Caldas", Bogotá, Colombia

## RESUMO

Neste artigo intento mostrar uma conseqüência que algumas vezes se evidencia nas transformações semióticas de tratamento e conversão de uma representação semiótica a outra, cujo sentido deriva de uma pratica compartida. A passagem da representação de um objeto matemático a outra, por meio de transformações, de uma parte conserva o significado do objeto mesmo, mas, em ocasiões, pode mudar seu sentido. Este fato está aqui detalhadamente evidenciado por meio de um exemplo, pero inserindo-o em um amplo marco teórico que trabalha os objetos matemáticos, seus significados e suas representações.



- **PALAVRAS CHAVES:** Registros semióticos, sentido de um objeto matemático, objeto matemático, mudança de sentido.



## RÉSUMÉ

Dans cet article, je montre un phénomène relié au traitement et à la conversion des représentations sémiotiques dont le sens provient de pratiques partagées. D’une part, le passage de la représentation d’un objet mathématique à une autre représentation, à travers des transformations, conserve le sens de l’objet lui-même. D’autre part, ce passage peut entraîner quelquefois une modification du sens. Ce phénomène est ici mis en évidence à travers un exemple inséré dans un cadre théorique ample qui met en jeu les objets mathématiques, leurs significations et leurs représentations.



- **MOTS CLÉS:** Registre sémiotique, sens d´ un objet mathématique,objet mathématique, changement de sens.


Este trabajo está dividido en dos partes. En la primera parte se discuten aspectos de carácter epistemológico, ontológico y semiótico desarrollados en algunos marcos teóricos de investigación en didáctica de la matemática.

En la segunda, a través de la narración de un episodio de sala de clase, se propone una discusión sobre la atribución de sentidos diversos de varias representaciones semióticas en torno a un mismo objeto matemático.

## Primera parte

### 1. Un recorrido

#### 1.1. *Ontología y conocimiento*

En diversos trabajos de finales de los años 80 y 90 se declaraba que, mientras el matemático puede no interrogarse sobre el *sentido* de los *objetos matemáticos* que usa o sobre el sentido que tiene el *conocimiento* *matemático*, la didáctica de la matemática no puede obviar dichas cuestiones (ver D’Amore, 1999, pp. 23-28). En un trabajo reciente, Radford resume la situación de la manera siguiente:

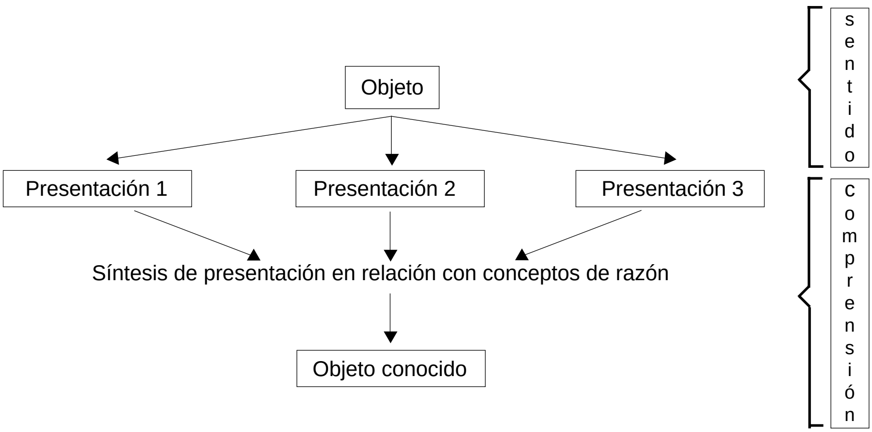
> Se puede sobrevivir muy bien haciendo matemática sin adoptar una ontología explícita, esto es, una teoría sobre la naturaleza de los objetos matemáticos. Es por eso que es casi imposible inferir de un artículo técnico en matemáticas la posición ontológica de su autor. (...) La situación es profundamente diferente cuando hablamos del *saber matemático*. (…) Cuestiones teóricas acerca del contenido de ese saber y de la manera como dicho contenido es transmitido, adquirido o construido nos ha llevado a un punto en el que no podemos seguir evitando hablar seriamente de ontología. (Radford, 2004, p. 6)

El debate es antiguo y se puede señalar como punto de partida la Grecia clásica. Como he señalado en trabajos anteriores, dicho debate está enmarcado por una creencia ontológica que parte del *modo* que tienen los seres humanos de *conocer* los conceptos (D’Amore, 2001a,b; 2003a,b). Radford retoma el debate y se detiene, en particular, en el trabajo de Kant quien dice que los individuos tienen un conocimiento conceptual *a priori* gracias a una actividad autónoma de la mente, independiente del mundo concreto (Radford, 2004, pp. 5-7).

Como Radford pone en evidencia, el apriorismo kantiano tiene raíces en la interpretación de la filosofía griega hecha por San Agustín y su influencia en los pensadores del Renacimiento. Refiriéndose al matemático Pietro Catena (1501-1576), por mucho tiempo profesor de la Universidad de Padua y autor de la obra *Universa Loca* (Catena, 1992), Radford afirma que, para Catena, “los objetos matemáticos eran entidades ideales e innatos” (Radford, 2004, p. 10). El debate se vuelve moderno, en todo el sentido de la palabra, cuando, con Kant, se logra hacer la distinción entre los “conceptos del intelecto” (humano) y los “conceptos de objetos”. Como Radford observa:

> [Estos] conceptos del intelecto puro no son conceptos de objetos; son más bien esquemas lógicos sin contenido; su función es hacer posible un reagrupamiento o *síntesis* de las intuiciones. La síntesis es llevada a cabo por aquello que Kant identificó como una de nuestras facultades cognitivas: el entendimiento. (Radford, 2004, p. 15)

El siguiente gráfico presenta las ideas de *sentido* y de *comprensión* en el lugar adecuado:




La relación entre los sentidos y la razón en la epistemología Kantiana (tomado de Radford, 2004, p. 15)

### 1.2. *Aproximación antropológica*

La línea de investigación antropológica parece fundamental en la comprensión del pensamiento matemático (D'Amore, 2003b). Dicha línea de investigación debe atacar ciertos problemas, entre ellos el del uso de signos y artefactos en la cultura. En la aproximación antropológica al pensamiento matemático que propone Radford, el autor sugiere que

> una aproximación antropológica no puede evitar tomar en cuenta el hecho de que el empleo que hacemos de las diversas clases de signos y artefactos cuando intentamos llegar a conocer algo está subsumido en prototipos culturales de uso de signos y artefactos. (...) Lo que es relevante en este contexto es que el uso de signos y artefactos alteran la manera en que los objetos conceptuales nos son dados a través de nuestros sentidos (…) Resumiendo, desde el punto de vista de una epistemología antropológica, la manera en que me parece que puede resolverse el misterio de los objetos matemáticos es considerando dichos objetos como patrones (*patterns*) fijados de actividad humana; incrustados en el dominio continuamente sujeto a cambio de la práctica social reflexiva mediatizada. (Radford, 2004, p. 21).

En esta línea de pensamiento, existe una aceptación general de consenso:

> Los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realizan determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de los "objetos matemáticos" y que el "significado" de estos objetos esté íntimamente ligado con los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática. (D'Amore & Godino, 2006, p. 14).

### 1.3. *Sistema de prácticas*

Tal acuerdo viene ulteriormente clarificado por proposiciones explícitas:

> La noción de "significado institucional y personal de los objetos matemáticos" implica a las de "práctica personal", "sistema de prácticas personales", "objeto personal (o mental)", herramientas útiles para el estudio de la "cognición matemática individual" (Godino & Batanero, 1994; 1998). Cada una de tales nociones tiene su correspondiente versión institucional. Es necesario aclarar que con estas nociones se trata de precisar y hacer operativa la noción de "relación personal e institucional al objeto" introducida por Chevallard (1992). (D'Amore & Godino, 2006, p. 28)

Aquello que nosotros entendemos por "sistema de prácticas personales" está en la misma línea de la aproximación semiótica antropológica (ASA) de Radford:

> En la aproximación semiótica antropológica (ASA) a la que estamos haciendo referencia, la

idealidad del objeto conceptual está directamente ligada al contexto histórico-cultural. La idealidad de los objetos matemáticos es decir de aquello que los vuelve generales es completamente tributaria de la actividad humana. (Radford, 2005, p. 200).

Los aspectos sociológicos de esta adhesión a la actividad humana y a la práctica social son así confirmados:

Considero que el aprendizaje matemático de un objeto O por parte de un individuo I en el seno de la sociedad S no sea más que la adhesión de I a las prácticas que los otros miembros de S desarrollan alrededor del objeto dado O. (D'Amore, en D'Amore, Radford & Bagni, 2006, p. 21)

De igual manera, "la práctica de sala de clase puede considerarse como un sistema de adaptación del alumno a la sociedad" (Radford, en D'Amore, Radford & Bagni, 2006, p. 27).

### 1.4. *Objeto y objeto matemático*

Se necesita, sin embargo, dar una definición de este "objeto matemático". Para lograrla preferimos recurrir a una generalización de la idea de Blumer sugerida por (Godino, 2002): *Objeto matemático* es todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas. Esta idea es tomada de Blumer (Blumer 1969, ed. 1982, p. 8): un objeto es "cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo.

En un trabajo anterior hemos sugerido considerar los siguientes tipos de objetos matemáticos:

- "lenguaje" (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- "situaciones" (problemas, aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, ...)
- "acciones" (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos, ...)
- "conceptos" (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
- "propiedad o atributo de los objetos" (enunciados sobre conceptos, ...)
- "argumentos" (por ejemplo, los que se usan para validar o explicar los enunciados, por deducción o de otro tipo, ...).

A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías,... (D'Amore & Godino, 2006, p. 28-29).

En el trabajo citado, se aprovecha la idea de función semiótica:

se dice que se establece entre dos objetos matemáticos (ostensivos o no ostensivos) una función semiótica cuando entre dichos objetos se establece una dependencia representacional o instrumental, esto es, uno de ellos se pone en el lugar del otro o uno es usado por otro. (D'Amore & Godino, 2006, p. 30).

Y, más allá:

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales:

- personal – institucional: como ya hemos indicado, si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”; mientras que si estos sistemas son específicos de una persona los consideramos como “objetos personales”;
- ostensivos (gráficos, símbolos, ...), no ostensivos (entidades que se evocan al hacer matemáticas, representados en forma textual, oral, gráfica, gestual, ...);
- extensivo – intensivo: esta dualidad responde a la relación que se establece entre un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo *concreto*: la función $y=2x+1$) y una clase más general o *abstracta* (la familia de funciones, $y = mx+n$);
- elemental – sistémico: en algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio;
- expresión – contenido: antecedente y consecuente (significante, significado) de cualquier función semiótica.

Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas “versiones” de dichos objetos. (D’Amore & Godino, 2006, p. 31).

Pero, si se hace referencia a la práctica de representación lingüística: “Creo que se deben distinguir dos tipologías de objetos en el ámbito de la creación de la competencia matemática (aprendizaje matemático): el objeto matemático mismo y el objeto lingüístico que lo expresa” (D’Amore, en D’Amore, Radford & Bagni, 2006, p. 21).

En los siguientes partes de este articulo, será discutido lo referente a la representación, de forma especifica.

### 1.5. *Aprendizaje de objetos*

En los intentos hechos por sintetizar las dificultades en el aprendizaje de conceptos (D’Amore, 2001a, b, 2003a) he recurrido en varias ocasiones a la idea que se encuentra en la *paradoja de* Duval (1993):

> de una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, de otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje no podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos sólo pueden tener relación con las representaciones semióticas? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, por el contrario, ¿cómo pueden ellos adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados con las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifican actividades matemáticas y actividades conceptuales y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas. (Duval, 1993, p. 38)

Estas frases reclaman fuertemente no solamente un cierto modo de concebir la idea de semiótica sino también su relación con la epistemología. Como apunta Radford: "El problema epistemológico puede resumirse en la siguiente pregunta: ¿cómo llegamos a conocer los objetos generales, dado que no tenemos acceso a éstos sino a través de representaciones que nosotros mismos nos hacemos de ellos?" (Radford, 2005, p. 195).

1.6. *La representación de los objetos*

A propósito de la representación de los objetos, Radford menciona que

> En una célebre carta escrita el 21 de febrero de 1772, Kant pone en duda el poder de nuestras representaciones. En esta carta, enviada a Herz, Kant dice: "¿sobre qué fundamento reposa la relación de lo que llamamos representación y objeto correspondiente?". En esa carta, Kant cuestiona la legitimidad que tienen nuestras representaciones para representar fielmente al objeto. En términos semióticos, Kant cuestiona la adecuación del signo. (…) La duda kantiana es de orden epistemológico. (Radford, 2005, p. 195)

Todo esto pone en juego, de forma particular, la idea de signo, dado que para la matemática esta forma de representación es específica; el signo es de por sí especificación de lo particular, pero esto puede ser interpretado dando sentido a lo general; al respecto Radford nota que: "Si el matemático tiene derecho a ver lo general en lo particular, es, como observa Daval (1951, p. 110) 'porque está seguro de la fidelidad del signo. El signo es la representación adecuada del significado (*signifié*)' ". (Radford, 2005, p. 199).

Pero los signos son artefactos, objetos a su vez "lingüísticos" (en sentido amplio), términos que tienen el objetivo de representar para indicar:

> [La] objetivación es un proceso cuyo objetivo es mostrar algo (un objeto) a alguien. Ahora bien, ¿cuáles son los medios para mostrar el objeto? Esos medios son los que llamo *medios semióticos de objetivación*. Estos son objetos, artefactos, términos lingüísticos y signos en general que se utilizan con el fin de volver aparente una intención y de llevar a cabo una acción. (Radford, 2005, p. 203)

Estos signos tienen múltiples papeles, sobre los cuales no entro en detalle para evitar grandes tareas que ligan signo - cultura - humanidad: "la entera cultura es considerada como un sistema de signos en los cuales el significado de un significante se vuelve a su vez significante de otro significado o de hecho el significante del propio significado". (Eco, 1973, p. 156)

No último en importancia, es el "papel cognitivo del signo" (Wertsch, 1991; Kozoulin, 1990; Zinchenko, 1985) sobre el cual no profundizo con el fin de abreviar, pero, no sin antes reconocerlo, en las bases mismas de la semiótica general: "*todo proceso de significación entre seres humanos (…) supone un sistema de significaciones como propia condición necesaria*" (Eco, 1975, p. 20; el cursivo es del Autor), lo que quiere decir un acuerdo cultural que codifica e interpreta; es decir, produce conocimiento.

La elección de los signos, también y básicamente cuando se componen en lenguajes, no es neutra o independiente; esta elección señala el destino en el cual se expresa el pensamiento, el destino de la comunicación; por ejemplo:

> El lenguaje algebraico impone una sobriedad al que piensa y se expresa, una sobriedad en los modos de significación que fue impensable antes del Renacimiento. Impone lo que hemos llamado en otro trabajo una *contracción semiótica*. Presupone también la pérdida del *origo*. (Radford, 2005, p. 210)

La pérdida del *origo* (es decir del origen, del inicio) fue discutida por Radford también en otros trabajos (2000, 2002, 2003).

Y es propio sobre *este punto* que se cierra mi larga premisa, que es también el punto de partida para lo que sigue.

**Segunda parte**

## 2. Objeto, su significado compartido, sus representaciones semióticas: la narración de un episodio

### 2.1. *El episodio*

Estamos en quinto de primaria y el docente ha desarrollado una lección en situación a-didáctica sobre los primeros elementos de la probabilidad, haciendo construir a los alumnos, por lo menos a través de unos ejemplos, la idea de "evento" y de "probabilidad de un evento simple". Como ejemplo, el docente ha hecho uso de un dado normal de seis caras, estudiando los resultados casuales desde un punto de vista estadístico. Emerge una probabilidad frecuencial, pero que es interpretada en sentido clásico. En este punto el docente propone el siguiente ejercicio:

*Calcular la probabilidad del siguiente evento: lanzando un dado se obtenga un número par.*

Los alumnos, discutiendo en grupo y básicamente compartiendo prácticas bajo la dirección del docente, alcanzan a decidir que la respuesta se expresa con la fracción $\frac{3}{6}$ porque "los resultados posibles al lanzar un dado son 6 (el denominador) mientras que los resultados que hacen verdadero el evento son 3 (el numerador)".

Después de haber institucionalizado la construcción de este saber, satisfecho de la eficaz experiencia, contando con que este resultado fue obtenido más bien rápidamente y con el hecho de que los alumnos han demostrado gran habilidad en el manejo de las fracciones, el docente propone que, dada la equivalencia de $\frac{3}{6}$ y $\frac{50}{100}$, se puede expresar esta probabilidad también con la escritura 50%, que es mucho más expresiva: significa que se tiene la mitad de la probabilidad de verificarse el evento respecto al conjunto de los eventos posibles, tomado como 100. Alguno de los alumnos nota que "entonces es válida también [la fracción] $\frac{1}{2}$"; la propuesta es validada a través de las declaraciones de quien hace la propuesta, rápidamente es acogida por todos y, una vez más, institucionalizada por el docente.

### 2.2. *Análisis semiótico*

Si se analizan las representaciones semióticas diferentes que han emergido en esta actividad, relativas al mismo evento: "obtener un número par al lanzar un dado", son encontradas, por lo menos, las siguientes:

- registro semiótico lengua natural: probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado

- registro semiótico lenguaje de las fracciones: $\frac{3}{6}$, $\frac{50}{100}$, $\frac{1}{2}$

- registro semiótico lenguaje del porcentaje: 50%.

### 2.3. *El sentido compartido por diversas representaciones semióticas*

Cada una de las representaciones semióticas precedentes es el significante "aguas abajo" del mismo significado "aguas arriba" (Duval, 2003). El "sentido" compartido a propósito de aquello que se estaba construyendo estaba presente idénticamente y por tanto la práctica matemática efectuada y así descrita ha llevado a transformaciones semióticas cuyos resultados finales fueron fácilmente aceptados:

- conversión: entre la representación semiótica expresada en el registro lenguaje natural y $\frac{3}{6}$
- tratamiento: entre $\frac{3}{6}$, $\frac{50}{100}$ y $\frac{1}{2}$
- conversión: entre $\frac{50}{100}$ y 50%.

### 2.4. *Conocimientos previos necesarios*

Entran en juego diversos conocimientos, aparentemente cada uno de estos bien construido, que interactúan entre ellos:

- conocimiento y uso de las fracciones
- conocimiento y uso de los porcentajes
- conocimiento y uso del evento: obtener un número par lanzando un dado.

Cada uno de estos conocimientos se manifiesta a través de la articulación en un todo unitario y la aceptación de las prácticas en el grupo clase.

### 2.5. *Continuación del episodio: la pérdida del sentido compartido a causa de transformaciones semióticas*

Terminada la sesión, se propone a los alumnos la fracción $\frac{4}{8}$ y se pide si, siendo equivalente a $\frac{3}{6}$, también esta fracción representa el evento explorado poco antes. *La respuesta unánime y convencida fue negativa.* El mismo docente, que antes había dirigido con seguridad la situación, afirma que "$\frac{4}{8}$ *no puede* representar el evento porque las caras de un dado son 6 y no 8". El investigador pide al docente de explicar bien su pensamiento al respecto; el docente declara entonces que "existen no sólo dados de 6 caras, sino también dados de 8 caras; en tal caso, y sólo así, la fracción $\frac{4}{8}$ representa el resultado obtener un número par al lanzar un dado".

Examinaré lo que está sucediendo en el aula desde un punto de vista semiótico; pero me veo obligado a generalizar la situación.

## 3. Un simbolismo para las bases de la semiótica

En esta parte, son utilizadas las definiciones usuales y de la simbología introducida en otros trabajos (D'Amore, 2001a, 2003a,b):

semiótica $=_{df}$ representación realizada por medio de signos noética $=_{df}$ adquisición conceptual de un objeto[2].

Se indica, de ahora en adelante:

$r^m$ $=_{df}$ registro semiótico m-ésimo

$R^m_i(A)$ $=_{df}$ representación semiótica i-ésima de un concepto A en el registro semiótico $r^m$ ($m = 1, 2, 3, \ldots; i = 1, 2, 3, \ldots$).

Se puede notar que, si cambia el registro semiótico, cambia necesariamente la representación semiótica, mientras que no es posible asegurar lo contrario; es decir, puede cambiar la representación semiótica manteniéndose aún el mismo registro semiotico.

Uso un gráfico para ilustrar la situación, porque me parece mucho más eficaz[3]:

características de la semiótica $\left\{ \begin{array}{l} \textit{representación} \\ \textit{tratamiento} \\ \textit{conversión} \end{array} \right.$ (implican actividades cognitivas diversas)

concepto A para representar

elección de los rasgos distintivos de A

*REPRESENTACIÓN* de A: $R^m_i(A)$ en un registro semiótico dado $r^m$

transformaciones de representación *TRATAMIENTO*

nueva representación $(i \neq j): R^m{}_j(A)$ en el *mismo* registro semiótico $r^m$

transformación de registro *CONVERSIÓN*

nueva representación $(h \neq i, h \neq j): R^n{}_h(A)$ en *otro* registro semiótico $r^n$ $(n \neq m)$ $(m, n, i, j, h = 1, 2, 3, \ldots)$

## 4. Volvamos al episodio

- Existe un objeto ( significado) matemático $O_1$ por representar: probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado;
- se le da un *sentido* derivado de la experiencia que se piensa aceptada, en una práctica social construida en cuanto compartida en el aula;
- se elige un registro semiótico $r^m$ y en éste se representa $O_1$: $R^m_i(O_1)$;
- se realiza un tratamiento: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^m{}_j(O_1)$;
- se realiza una conversión: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^n{}_h(O_1)$;
- se interpreta $R^m_j(O_1)$ reconociendo en esto el objeto (significado) matemático $O_2$;
- se interpreta $R^n_h(O_1)$ reconociendo en esto el objeto (significado) matemático $O_3$.

¿Qué relación existe entre $O_2$, $O_3$ y $O_1$?

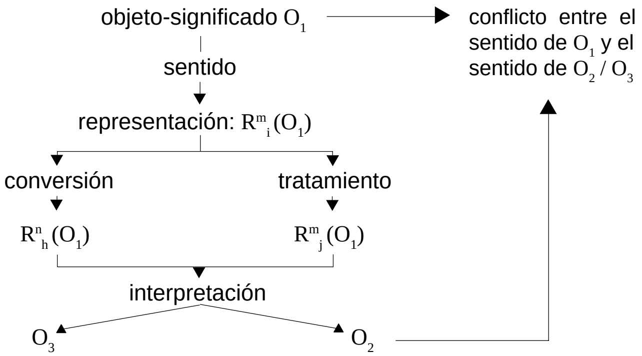
Se puede reconocer identidad; y esto significa entonces que existe un conocimiento previo, en la base sobre la cual la identidad puede ser establecida.

2 Para Platón, la noética es el acto de concebir a través del pensamiento; para Aristóteles, es el acto mismo de comprensión conceptual.

3 Hago referencia a Duval (1993).

De hecho, se puede no reconocer la identidad, en el sentido que la “interpretación” es o parece ser diferente, y entonces se pierde el *sentido* del objeto (significado) de partida $O_1$.

Un esquema como el siguiente puede resumir lo que ha sucedido en el aula desde un punto de vista complejo, que pone en juego los elementos que se desea poner en conexión entre ellos: objetos, significados, representaciones semióticas y sentido:




En el ejemplo aquí discutido:

- objeto - significado $O_1$: “probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado”;
- sentido: la experiencia compartida como práctica de aula en situación a-didáctica y bajo la dirección del docente, lleva a considerar que el sentido de $O_1$ sea el descrito por los alumnos y deseado por el docente: tantos resultados posibles y, respecto a estos, tantos resultados favorables al verificarse el evento;
- elección de registro semiótico $r^m$: números racionales $Q$ expresados bajo forma de fracción ; representación: $R^m_i(O_1)$: $\frac{3}{6}$ ;
- tratamiento: $R^m{}_i(O_1) \to R^m{}_j(O_1)$, es decir, de $\frac{3}{6}$ a $\frac{1}{2}$ ;
- tratamiento: $R^m{}_i(O_1) \to R^m{}_k(O_1)$, es decir, de $\frac{3}{6}$ a $\frac{4}{8}$ ;
- conversión: $R^m{}_i(O_1) \to R^n{}_k(O_1)$ ,es decir, de $\frac{3}{6}$ a 50%;
- se interpreta $R^m_j(O_1)$ reconociendo en esto el objeto (significado) matemático $O_2$;
- se interpreta $R^m_k(O_1)$ reconociendo en esto el objeto (significado) matemático $O_3$;
- se interpreta $R^n_h(O_1)$ reconociendo en esto el objeto (significado) matemático $O_4$.

¿Qué relación existe entre $O_2$, $O_3$, $O_4$ y $O_1$?

En algunos casos ($O_2$, $O_4$), se reconoce identidad de significantes; y esto significa que existe de base un conocimiento ya construido que permite reconocer el mismo objeto; el *sentido* está compartido, es único;en otra situación ($O_3$), no se le reconoce la identidad de significante, en el sentido que la "interpretación" es o parece ser diferente, y entonces se pierde el *sentido* del objeto (significado) $O_1$.

La temática relativa a más representaciones del mismo objeto está presente en Duval (2005).

No está dicho que la pérdida de sentido se presente sólo a causa de la conversión; en el ejemplo aquí dado, tal como ya fue discutido, se presentó a causa de un tratamiento (el pasaje de $\frac{3}{6}$ a $\frac{4}{8}$ ).

La interpretación de $\frac{4}{8}$ dada por el docente no admitía como objeto plausible el mismo $O_1$ que había tomado origen del sentido compartido que había llevado a la interpretación $\frac{3}{6}$ .

## 5. Otros episodios

En seguida, son propuestos algunos ejemplos de interpretación solicitados a estudiantes que están cursando los últimos semestres en la universidad, programa de matemática; aquellos indicados como "sentidos" son mayormente compartidos entre los estudiantes entrevistados:

1)

$$x^2+y^2+2xy-1=0 \xrightarrow{\text{TRATAMIENTO}} x+y=\frac{1}{x+y}$$

sentido: de "una circunferencia" a "una suma que tiene el mismo valor de su recíproca"; Investigador: "Pero, ¿es o no es una circunferencia?"; A: "Absolutamente no, una circunferencia debe tener $x^2+y^2$ "; B: "Si se simplifica, ¡si!" [es decir, es la transformación semiótica de tratamiento que da o no cierto *sentido*]*;*

2)

$$n+(n+1)+(n+2) \Longrightarrow 3n+3$$

sentido: de "la suma de tres naturales consecutivos" a "el triple de un número más 3"; Investigador: "Pero, ¿se puede pensar como suma de tres naturales consecutivos?"; C: "No, ¡no entra nada!";

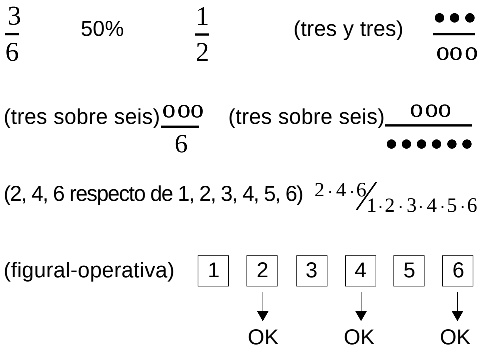
3)

$$(n-1)+n+(n+1) \Longrightarrow 3n$$

sentido: de "la suma de tres enteros consecutivos" a "el triple de un número natural"; Investigador: "Pero, ¿se puede pensar como suma de tres enteros consecutivos?"; D: "No, así no, así es la suma de tres números iguales, es decir $n$ ".

## 6. Representaciones de un mismo objeto dado por el docente de primaria, consideradas apropiadas para sus alumnos

En un curso de actualización para docentes de primaria, fue discutido el tema: *Primeros elementos de probabilidad*. Al final de la unidad, se pidió a los docentes representar el objeto matemático: "obtener un número par al lanzar un dado", usando un simbolismo oportuno que fuese el más apropiado, según ellos, a los alumnos de primaria. Fueron dadas a conocer todas las representaciones propuestas y se sometieron a votación. En seguida se muestran los resultados obtenidos en orden de preferencia (del mayor al menor):




La importancia de tomar en consideración el análisis de la producción de los alumnos es subrayada así por Duval (2003):

> No se puede subrayar la importancia de las descripciones, en la adquisición de conocimientos científicos así como en las primeras etapas de los aprendizajes matemáticos, sin afrontar otra cuestión fundamental tanto para la investigación como para los docentes: el análisis de las producciones de los alumnos. Pues es en el cuadro del desarrollo de la descripción, que se obtienen las producciones más personales y más diversificadas, dado que éstas pueden ser hechas verbalmente o con la ayuda de diseños, de esquemas ... En este caso se trata, para la investigación, de una cuestión metodológica y, para los docentes, de una cuestión diagnóstica. Veremos que cada análisis de las producciones de los alumnos requiere que se distinga con atención en cada producción semiótica, discursiva o no discursiva, *diversos niveles de articulación del sentido,* que no revelan las mismas operaciones. (p. 16)

En el ejemplo discutido en este parágrafo 6, los "alumnos" son docentes de escuela primaria que frecuentan el curso, mientras los "docentes" son los profesores universitarios que impartían las lecciones .[4]

Diversos pueden ser los análisis de las precedentes producciones de los alumnos - docentes, evidenciadas al inicio de este parágrafo, pero se prefiere seguir la bipartición que, de nuevo, se encuentra en Duval (2003):

> [N]o se debe confundir aquello que llamaremos una tarea "real" de descripción y una tarea "puramente formal" de descripción. (...). Una tarea de descripción es real cuando requiere una observación del objeto de la situación que se desea describir (...). Aquí, el alumno tiene acceso a cada uno de los dos elementos de la pareja {objeto, representación del objeto}, independientemente uno del otro. Al contrario, una tarea de descripción es puramente formal cuando se limita a un simple cambio de registro de representación: descripción verbal a partir de un diseño o de una "imagen" o viceversa. El alumno sólo tiene un acceso independiente al objeto representado. Las descripciones formales son entonces tareas de conversión que buscan respetar la invarianza de aquello que representan. (p. 19)

Creo que esta distinción de Duval ayuda a explicar, por lo menos en parte, el episodio narrado en los parágrafos 2 y 5 de este artículo:

4 Que este "cambio de rol" pueda ser concebido como plausible es ampliamente demostrado por la literatura internacional; por brevedad me limito a citar sólo el amplio panorama propuesto en el ámbito PME por Llinares & Krainer (2006), con abundante bibliografía específica.

> Respecto a un objeto matemático observable, conocido sobre la base de prácticas compartidas, la “descripción real” responde plenamente a las características del objeto, es decir de la práctica realizada alrededor de éste y con éste, y por tanto del *sentido* que todo esto adquiere por parte de quien dicha práctica explica. Pero el uso de transformaciones semióticas a veces lleva a cambios sustanciales de dichas descripciones, convirtiéndose en una “descripción puramente formal”, obtenida con prácticas semióticas sí compartidas, pero que niegan un acceso al objeto representado o, mejor, le niegan la conservación del *sentido.* (Duval, 2003, p. 18)

## 7. Otros episodios semióticos tomados de la práctica matemática compartida en aula

### 7.1. *Probabilidad y fracciones*

He repetido el experimento descrito en el parágrafo 2, con estudiantes que han aprobado cursos más avanzados de matemática y con estudiantes en formación como futuros docentes de escuela primaria y de secundaria. Si la conversión que hace perder el sentido en el pasaje de tratamiento de $\frac{3}{6}$ a $\frac{4}{8}$ es un ejemplo fuerte de pérdida de sentido, lo es aún más el de pasar de $\frac{3}{6}$ a $\frac{7}{14}$; mientras lo es en menor medida la conversión de $\frac{3}{6}$ a 0.5.

### 7.2. *Un ejemplo en el primer año de escuela secundaria superior*

Objeto matemático: El gasto total de $y$\$ para el alquiler de algún instrumento por $x$ horas a $a$\$ cada hora, más el costo fijo de $b$\$ ; los alumnos y el docente llegan a la representación semiótica: $y = ax + b$ ; se sigue la transformación de tratamiento que lleva a $x - \frac{y}{a} + \frac{b}{a} = 0$, que se representa como:

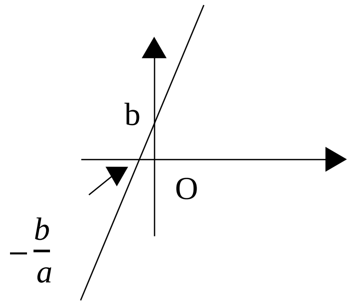



***Figura 1***

y es interpretada universalmente como “una recta”.

Dicha representación semiótica obtenida por tratamiento y conversión, a partir de la representación inicial, no se le reconoce como el mismo objeto matemático de partida; ésta asume otro *sentido.*

### 7.3. *Un ejemplo en un curso para docentes de escuela primaria en formación*

Objeto matemático: La suma (de Gauss) de los primeros 100 números naturales positivos; resultado semiótico final después de sucesivos cambios operativos con algunas transformaciones de conversión y tratamiento: 101•50; esta representación no se reconoce como representación del objeto de partida; la presencia del signo de multiplicación dirige a los futuros docentes a buscar un sentido en objetos matemáticos en los cuales aparezca el término “multiplicación (o términos similares).

### 7.4. *Un primer ejemplo en un curso (postgrado) de formación para futuros docentes de escuela secundaria*

Objeto matemático: La suma de dos cuadrados es menor que 1; representación semiótica universalmente aceptada: $x^2 + y^2 < 1$; después de cambios de representación semiótica, siguiendo operaciones de tratamiento: $(x+iy)(x-iy)<1$ y de conversión:

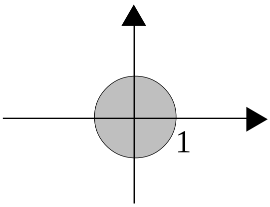


**Figura 2**

hasta llegar a: $\rho^2 + i^2 < 0$.

No obstante que las diversas transformaciones se efectúen con total evidencia y en forma explícita, discutiendo cada uno de los cambios de registro semiótico, ninguno de los estudiantes futuros docentes, está dispuesto a admitir la unicidad del objeto matemático en juego. La última representación es interpretada como “desigualdad paramétrica en C”; el *sentido* fue modificado.

### 7.5. *Un segundo ejemplo en un curso (postgrado) de formación para futuros docentes de escuela secundaria*

A) Objeto matemático: Sucesión de los números triangulares; interpretación y conversión: 1, 3, 6, 10, …; cambio de representación por tratamiento: 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4,….; esta representación es reconocida como “sucesión de las sumas parciales de los naturales sucesivos”.

B) Objeto matemático: Sucesión de los números cuadrados; interpretación y conversión: 0, 1, 4, 9,…; cambio de representación por tratamiento: 0, (0)+1, (0+1)+3, (0+1+3)+5,…; esta representación es reconocida como “suma de las sumas parciales de los impares sucesivos”.

En ninguno de los casos precedentes descritos brevemente, los alumnos pudieron aceptar que el *sentido* de la representación semiótica obtenida finalmente, *después* de transformaciones semióticas evidenciadas, coincide con el *sentido* del objeto matemático de partida.

## 8. Conclusiones

No parecen necesarias largas conclusiones. Urge sólo evidenciar cómo el *sentido* de un objeto matemático sea algo mucho más complejo respecto a la pareja usual (objeto, representaciones del objeto); existen relaciones semióticas entre las parejas de este tipo:

(objeto, representación del objeto) –
(objeto, otra representación del objeto),

relaciones derivadas de transformaciones semióticas entre las representaciones del mismo objeto, pero que tienen el resultado de hacer perder el sentido del objeto de partida. Si bien, tanto el objeto como las transformaciones semióticas son el resultado de prácticas compartidas, los resultados de las transformaciones pueden necesitar de otras atribuciones de sentido gracias a otras prácticas compartidas. Lo que enriquece de mayor interés todo estudio sobre ontología y conocimiento.

Los fenómenos descritos en la primera parte de este artículo pueden ser usados para completar la visión que Duval ofrece del papel de las múltiples representaciones de un objeto en la comprensión de dicho objeto, y también para "romper el círculo vicioso" de su paradoja. En realidad cada representación lleva asociado un "subsistema de prácticas" diferentes, de donde emergen objetos diferentes (en el parágrafo anterior denominados: $O_1$, $O_2$, $O_3$ y $O_4$). Pero la articulación de estos objetos en otro más general requiere un cambio de perspectiva, el paso a otro contexto en el que se plantee la búsqueda de la *estructura común* en el sistema de prácticas global en el que intervienen los distintos "objetos parciales".

Sin duda, el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación enriquecen el significado, el conocimiento, la comprensión del objeto, pero también su complejidad. El objeto matemático se presenta, en cierto sentido, como único, pero en otro sentido, como múltiple. Entonces, ¿cuál es la naturaleza del objeto matemático? No parece que haya otra respuesta que no sea la estructural, formal, gramatical (en sentido epistemológico), y al mismo tiempo la estructural, mental, global, (en sentido psicológico) que los sujetos construimos en nuestros cerebros a medida que se enriquecen nuestras experiencias.

Es obvio que estas observaciones abren las puertas a futuros desarrollos en los cuales las ideas que parecen diversas, confluyen por el contrario en el intento de dar una explicación a los fenómenos de atribución de sentido.

## Reconocimientos

Este trabajo fue desarrollado dentro del programa estratégico de investigación: *Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico*, con fondos de la Universidad de Bologna. Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla, con la colaboración de Juan Díaz Godino.

## Referencias

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism. Perspective and method.* Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall.

Catena P. (1992). *Universa loca in logicam Aristetolis in mathematicas disciplinas*. (Editor G. Dell'Anna). Galatina (Le): Congedo.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora. [Versión en idioma español: D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Con una carta de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Luis Rico. Bogotá: Editorial Magisterio].

D’Amore, B. (2001a). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, *2*, 150-173. [Versión en idioma español: D’Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, *35*, 90-106].

D’Amore, B. (2001b). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione “ingenua” in una teoria “realista” vs il modello “antropologico” in una teoria “pragmatica”. *La matematica e la sua didattica*, *1*, 4-30. [Versión en idioma español: D’Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*, *27*, 51-76].

D’Amore, B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*, *23*(1), 47-51. [Versión preliminar reducida en idioma español: D’Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, *11*, 63-71].

D’Amore, B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [Versión en idioma español: D’Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Prefacio de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Ricardo Cantoral. Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla. México DF, México: Reverté-Relime.]. [Versión en idioma portugués: D’Amore, B. (2005). *As bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas e conceituais da didáctica da matematica*. Prefácio da edição italiana: Guy Brousseau. Prefácio: Ubiratan D’Ambrosio Tradução: Maria Cristina Bonomi Barufi. Escrituras: São Paulo].

D’Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, *1*, 7-36.

D’Amore, B., Radford, L., & Bagni, G.T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 29B, 1, 11-40.

Daval, R. (1951). *La métaphysique de Kant*. París: PUF.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37-65.

Duval, R. (2003). Décrire, visualiser ou raisonner: quels ‘apprentissages premiers’ de l’activité mathématique? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *8*, 13-62.

Duval, R. (2005). Transformations de représentations sémiotiques et démarche de pensée en mathématiques. Colloque COPIRELEM, Strasbourg, 30 mayo - 1 junio 2006. Actas en curso de impresión.

Eco, U. (1973). *Segno*. Milano: ISEDI.

Eco, U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer A. P.

Kozoulin, A. (1990). *Vygotsky's psychology*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future.* Rotterdam /Taipei: Sense Publishers 429-460.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*, *42*(3), 237-268.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*, *22*(2) 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical thinking and learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, *1*, 4-23.

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, *2*, 191-213.

Wertsch, JV. (1991). *Voices in the mind. A sociocultural approach to mediate action*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

Zinchenko, VP. (1985). Vygotsky's ideas about units for the analysis of mind. In J.V.Wertsch (Ed.), *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

**Bruno D'Amore**
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna
Italia

E-mail: damore@dm.unibo.it

# Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking?

Athanasios Gagatsis [1]
Iliada Elia [1]
Nikos Mousoulides [1]

**RESUMEN**

El objetivo de este artículo es doble. En primer lugar, se hace un resumen superficial de investigaciones sobre la compartimentación de diferentes registros de representación, así como de las aproximaciones de resolución de problemas, relacionadas con el concepto de función. En segundo lugar, se aportan elementos que clarifican las posibles maneras que permiten superar el fenómeno de la compartimentación. Investigaciones precedentes muestran que la mayoría de los alumnos de secundaria e, incluso de universidad, tienen dificultades para cambiar, de forma flexible, los sistemas de representación de funciones, de seleccionar y de utilizar aproximaciones apropiadas de resolución de problemas. Los resultados de dos estudios experimentales previos, llevados a cabo por miembros de nuestro equipo de investigación, centrados sobre la utilización de aproximaciones no tradicionales de enseñanza y sobre el empleo de software matemático, proveen pistas preliminares, en cuanto a la manera de cómo puede superarse con éxito el fenómeno de la compartimentación.

- **PALABRAS CLAVE:** Aproximación algebraica, compartimentalización, función, aproximación geométrica, resolución de problemas, registros de representación, transformación de representaciones.

**ABSTRACT**

The purpose of the present study is twofold: first, to review and summarize previous research on the compartmentalization of different registers of representations and problem solving approaches related to the concept of function; second, to provide insights into possible ways to overcome the phenomenon of compartmentalization. To this extent, previous research shows that the majority of high school and university students experience difficulties in flexibly changing systems of representations of function and in selecting and employing appropriate approaches to problem solving. Two previous experimental efforts, by the authors, focusing on the use of non-traditional teaching approaches and on the use of mathematical software respectively, provided some initial strategies for successfully overcoming the phenomenon of compartmentalization.

---

*Fecha de recepción: Febrero de 2006/ Fecha de aceptación: Mayo de 2006*

1 Department of Education, University of Cyprus. Nicosia, Cyprus.

- **KEY WORDS:** Algebraic approach, compartmentalization, function, geometric approach, problem solving, registers of representation, transformation of representations.

## RESUMO

O objetivo deste de artigo é duplo. Primeiro, é feito um resumo superficial de investigações sobre a compartimentação de diferentes registros de representação, e aproximações de resolução de problemas, apostas em relação ao de conceito de função. Em segundo lugar, traz elementos que clarificam as possíveis maneiras que permitem superar o fenômeno da compartimentarão. Investigações precedentes mostram que a maioria dos alunos do ensino médio e, mesmo de universidade, tem dificuldades para alterar, de maneira flexível, os sistemas de representação de funções, de escolher e utilizar aproximações adequadas à resolução de problemas. Os resultados de dois estudos experimentais prévios, levados a efeito por membros do nosso grupo de pesquisa, centrados no utilização de aproximações não tradicionais de ensino e sobre ou emprego de «software» matemático, fornecem pistas preliminares, quanto à maneira como pode ser superar com sucesso o fenômeno da compartimentação.

- **PALAVRAS CHAVE:** Aproximação algébrica, compartimentação, função, geométrica aproximação, solução de problema, registros de representação, transformação de representações.

## RÉSUMÉ

Le but de cet article est double. En premier lieu, il s’agit de faire un survol et une synthèse des recherches sur la compartimentation de différents registres de représentation et des approches de résolution de problèmes reliées au concept de fonction. En deuxième lieu, il s’agit d’apporter un éclairage sur les manières possibles de surmonter le phénomène de compartimentation. Des recherches antérieures montrent que la majorité des élèves de l’école secondaire et de l’université ont de la difficulté à changer de façon flexible les systèmes de représentation des fonctions ainsi qu’à sélectionner et à utiliser des approches appropriées de résolution de problèmes. Deux efforts expérimentaux préalables, menés par les auteurs, centrés sur l’utilisation des approches non-traditionnelles d’enseignement et sur l’emploi de logiciels mathématiques, fournissent des indications préliminaires quant à la manière de surmonter avec succès le phénomène de compartimentation.

- **MOTS CLÉS:** Approche algébrique, compartimentation, fonction, approche géométrique, résolution de problèmes, registres de représentation, transformation de représentations.

## 1.INTRODUCTION

During the last decades, a great deal of attention has been given to the concept of representation and its role in the learning of mathematics. Nowadays, the centrality of multiple representations in teaching, learning and doing mathematics seems to have become widely acknowledged (D' Amore, 1998). Representational systems are fundamental for conceptual learning and determine, to a significant extent, what is learnt (Cheng, 2000). A basic reason for this emphasis is that representations are considered to be "integrated" with mathematics (Kaput, 1987). Mathematical concepts are accessible only through their semiotic representations (Duval, 2002). In certain cases, representations, such as graphs, are so closely connected with a mathematical concept, that it is difficult for the concept to be understood and acquired without the use of the corresponding representation. Any given representation, however, cannot describe thoroughly a mathematical concept, since it provides information regarding merely a part of its aspects (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Given that each representation of a concept offers information about particular aspects of it without being able to describe it completely, the ability to use various semiotic representations for the same mathematical object (Duval, 2002) is an important component of understanding. Different representations referring to the same concept complement each other and all these together contribute to a global understanding of it (Gagatsis & Shiakalli, 2004). The use of different modes of representation and connections between them represents an initial point in mathematics education at which pupils use one symbolic system to expand and understand another (Leinhardt, Zaslavsky, & Stain, 1990). Thus, the ability to identify and represent the same concept through different representations is considered as a prerequisite for the understanding of the particular concept (Duval, 2002; Even, 1998). Besides recognizing the same concept in multiple systems of representation, the ability to manipulate the concept with flexibility within these representations as well as the ability to "translate" the concept from one system of representation to another are necessary for the acquisition of the concept (Lesh, Post, & Behr, 1987) and allow students to see rich relationships (Even, 1998).

Duval (2002) assigns the term "registers" of representation to the diverse spaces of representation in mathematics and identifies four different types of registers: natural language, geometric figures, notation systems and graphic representations. Mathematical activity can be analyzed based on two types of transformations of semiotic representations, i.e. treatments and conversions. Treatments are transformations of representations, which take place within the same register that they have been formed in. Conversions are transformations of representations that consist in changing the register in which the totality or a part of the meaning of the initial representation is conserved, without changing the objects being denoted. The conversion of representations is considered as a fundamental process leading to mathematical understanding and successful problem solving (Duval, 2002). A person who can easily transfer her knowledge from one structural system of the mind to another is more likely to be successful in problem solving by using a plurality of solution strategies and regulation processes of the system for handling cognitive difficulties.

## 2. THE ROLE OF REPRESENTATIONS IN MATHEMATICS LEARNING: EMPIRICAL BACKGROUND

Students experience a wide range of representations from their early childhood years onward. A main reason for this is that most mathematics textbooks today make use of a variety of representations more extensively than ever before in order to promote understanding. However, a reasonable question can arise regarding the actual role of the use of representations in mathematics learning. A considerable number of recent research studies in the area of mathematics education in Cyprus and Greece investigated this question from different perspectives. In an attempt to explore more systematically the nature and the contribution of different modes of representation (i.e., pictures, number line, verbal and symbolic representations) on mathematics learning, Gagatsis and Elia (2005a) carried out a review of a number of these studies, which examined the effects of various representations on the understanding of mathematical concepts and mathematical problem solving in primary and secondary education. Many of these studies identified the difficulties that arise in the conversion from one mode of representation of a mathematical concept to another. They also revealed students' inconsistencies when dealing with relative tasks that differ in a certain feature, i.e. mode of representation. This incoherent behaviour was addressed as one of the basic features of the phenomenon of compartmentalization, which may affect mathematics learning in a negative way.

The research of Gagatsis, Shiakalli and Panaoura (2003) examined the role of the number line in second grade Cypriot students' performance in executing simple addition and subtraction operations with natural numbers. By employing implicative statistical analysis (Gras, 1996), they detected a complete compartmentalization between the students' ability to carry out addition and subtraction tasks in the symbolic form of representation and their ability to perform the same tasks by using the number line. A replication of the study by Gagatsis, Kyriakides and Panaoura (2004) with students of the same age in Cyprus, Greece and Italy, and this time using a different statistical method, namely structural equation modelling, resulted in congruent findings. This uncovers the strength of the phenomenon of compartmentalization despite differences in curricula, teaching methods, mathematics textbooks and even culture.

Michaelidou, Gagatsis and Pitta-Pantazi (2004) have examined 12-year-old students' understanding of the concept of decimal numbers based on the threefold model of the understanding of an idea, proposed by Lesh et al. (1987). To carry out the study, three tests on decimal numbers were developed. These tests aimed at investigating students' abilities to recognize and represent decimal numbers with a variety of different representations and their ability to transfer decimal numbers from the symbolic form to the number line and vice versa. The application of the implicative statistical method demonstrated a compartmentalization of students' abilities in the different tasks and this signifies that there was a lack of coordination between recognition, manipulation within a representation and conversion among different representations of decimal numbers. This finding means that some students who can recognize decimal numbers in different representations cannot use the representations to represent the decimal numbers by themselves and, what is more important, fail to transfer from one representation of decimal numbers to another. In other words, students have not developed a unified cognitive structure concerning the concept of decimals since their ideas seemed to be partial and isolated. Given the three aspects of the understanding of mathematical concepts related to representations, namely, recognition, flexible use and conversion, it can be suggested that in this study students did not understand the concept of decimal numbers.

Finally, Marcou and Gagatsis (2003) examined 12-year-old students' understanding of the concept of fractions and more specifically the equivalence and the addition of fractions. The researchers designed three types of tests on fractions, which involved conversions among the symbolic expressions, verbal expressions and the diagrammatic representations of fractions (area of rectangles). Students' responses to the tasks were compartmentalized with respect to the starting representation of the conversions, as indicated by the implicative analysis of the data. In line with the afore mentioned studies' results, this finding means that students had a fragmentary understanding of fractions.

In the present paper, four recent studies are combined and discussed to explore secondary school and university students' abilities to use multiple modes of representation for one of the most important unifying ideas in mathematics (Romberg, Carpenter, & Fennema, 1993; Mousoulides & Gagatsis, 2004), namely functions, and to flexibly move from one representation of the concept to another. The main concern of this paper is twofold; first to identify and further clarify the appearance of the phenomenon of compartmentalization in students' thinking about the particular concept and second to examine possible ways for succeeding at de-compartmentalization in registers of representations and problem solving processes in functions.

## 3. REPRESENTATIONS AND THE CONCEPT OF FUNCTION

The concept of function is central to mathematics and its applications. It emerges from the general inclination of humans to connect two quantities, which is as ancient as mathematics itself. The didactical metaphor of this concept seems difficult, since it involves three different aspects: the epistemological dimension as expressed in the historical texts; the mathematics teachers' views and beliefs about function; and the didactical dimension which concerns students' knowledge and the restrictions imposed by the educational system (Evangelidou, Spyrou, Elia, & Gagatsis, 2004). On this basis, it seems natural for students of secondary or even tertiary education, in any country, to have difficulties in conceptualizing the notion of function. The complexity of the didactical metaphor and the understanding of the concept of function have been a main concern of mathematics educators and a major focus of attention for the mathematics education research community (Dubinsky & Harel, 1992; Sierpinska, 1992). An additional factor that influences the learning of functions is the diversity of representations related to this concept (Hitt, 1998). An important educational objective in mathematics is for pupils to identify and use efficiently various forms of representation for the same mathematical concept and to move flexibly from one system of representation of the concept to another. The influence of different representations on the understanding and interpretation of functions has been examined by a substantial number of research studies (Hitt, 1998; Markovits, Eylon, & Bruckheimer, 1986).

Several researchers (Evangelidou et al., 2004; Gagatsis, Elia & Mougi, 2002; Gagatsis & Shiakalli 2004; Mousoulides & Gagatsis, 2004; Sfard 1992; Sierpinska 1992) indicated the significant role of different representations of function and the conversion from one representation to another on the understanding of the concept itself. Thus, the standard representational forms of the concept of function are not enough for students to be able to construct the whole meaning and grasp the whole range of its applications. Mathematics instructors, at the secondary level, have traditionally focused their instruction on the use of algebraic representations of functions. Eisenberg and Dreyfus (1991) pointed out that the way knowledge is constructed in schools mostly favours the analytic elaboration of the notion to the detriment of approaching function from the graphical point of view. Kaldrimidou and Iconomou (1998) showed that teachers and students pay much more attention to algebraic symbols and problems than to pictures and graphs. A reason for this is that, in many cases, the iconic (visual) representations cause cognitive difficulties because the perceptual analysis and synthesis of mathematical information presented implicitly in a diagram often make greater demands on a student than any other aspect of a problem (Aspinwall, Shaw, & Presmeg, 1997).

In addition, most of the aforementioned studies have shown that students tend to have difficulties in transferring information gained in one context to another (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Sfard (1992) showed that students were unable to bridge the algebraic and graphical representations of functions, while Markovits et al. (1986) observed that the translation from graphical to algebraic form was more difficult than the reverse. Sierpinska (1992) maintains that students have difficulties in making the connection between different representations of functions, in interpreting graphs and manipulating symbols related to functions. A possible reason for this kind of behaviour is that most instructional practices limit the representation of functions to the translation of the algebraic form of a function to its graphic form.

Lack of competence in coordinating multiple representations of the same concept can be seen as an indication of the existence of compartmentalization, which may result in inconsistencies and delays in mathematics learning at school. This particular phenomenon reveals a cognitive difficulty that arises from the need to accomplish flexible and competent translation back and forth between different modes of mathematical representations (Duval, 2002). Making use of a more general meaning of compartmentalization which does not refer necessarily to representations, Vinner and Dreyfus (1989) suggested that compartmentalization arises when an individual has two divergent, potentially contradictory schemes in her cognitive structure and pointed out that inconsistent behaviour is an indication of this phenomenon.

The first objective of this study is to identify the phenomenon of compartmentalization in secondary school students and university students' strategies for dealing with various tasks using functions on the basis of the findings of four recent research studies (Elia, Gagatsis & Gras, 2005; Gagatsis & Elia, 2005b; Mousoulides & Gagatsis, 2006; Mousoulides & Gagatsis, 2004). Although these studies explored the students' ability to handle different modes of the representation of function and move flexibly from one representation to another, there is a fundamental difference between the mathematical activities they proposed. The study of Elia et al., (2005) investigated students' understanding of function based on their performance in mathematical activities that integrated both types of the transformation of representations proposed by Duval (2002), i.e. treatment and conversion. The study of Mousoulides and Gagatsis (2004) investigated students' performance in mathematical activities that principally involved the second type of transformations, that is, the conversion between systems of representation of the same function, and concentrated on students' approaches to the use of representations of functions and the connection with students' problem solving processes. The studies of Gagatsis et al., (2004) and Mousoulides and Gagatsis (2006) introduced two approaches that might succeed at de-compartmentalization, namely a differentiated instruction and the use of a computerized environment for solving problems in functions. Thus, what is new in this review is that students' understanding of function is explored from two distinct perspectives (which will be further clarified in the next section), but nevertheless based on the same rationale, that is, Duval's semiotic theory of representations. The second objective of the review is to discuss strategies for overcoming compartmentalization in functions.

## 4. CAN WE "TRACE" THE PHENOMENON OF COMPARTMENTALIZATION BY USING THE IMPLICATIVE STATISTICAL METHOD OF ANALYSIS?

Previous empirical studies have not clarified compartmentalization in a comprehensive or systematic way. Thus, we theorize that the implicative relations between students' responses in the administered tasks, uncovered by Gras's implicative statistical method (Gras, 1996), as well as their connections (Lerman, 1981) can be beneficial for identifying the appearance of compartmentalization in students' behaviour. To analyze the collected data of both studies, a computer software called C.H.I.C. (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000) was used.

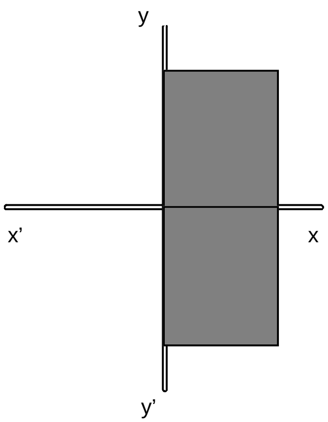
We assume that the phenomenon of compartmentalization in the understanding of function as indicated by students' performance in tasks integrating treatment and conversion (Gagatsis & Elia, 2005b) appears when at least one of the following conditions emerges: first, when students deal inconsistently or incoherently with tasks involving the different types of representation (i.e., graphic, symbolic, verbal) of functions or conversions from one mode of representation to another; and/or second, when success in using one mode of representation or one type of conversion of function does not entail success in using another mode of representation or in another type of conversion of the same concept. As regards students' ways of approaching tasks requiring only conversions among representations of the same function (Mousoulides & Gagatsis, 2004), our conjecture is that compartmentalization appears when students deal with all of the tasks using the same approach, even though a different approach is more suitable for some of them.

### 4.1. Secondary school students' abilities in the transformation of representations of function (Study 1)

Recent studies (Gagatsis & Elia, 2005b; Elia et al., 2005) investigated secondary school students' ability to transfer mathematical relations from one representation to another. In particular, the sample of the study consisted of 183 ninth grade students (14 years of age). Two tests, namely A and B, were developed and administered to the participants. The tasks of both tests involved conversions of the same algebraic relations, but with different starting modes of representation. Test A consisted of six tasks in which students were given the graphic representation of an algebraic relation and were asked to translate it to its verbal and symbolic forms respectively. Test B consisted of six tasks (involving the same algebraic relations as test A) in which students were asked to translate each relation from its verbal representation to its graphical and symbolic mode. For each type of translation , the following types of algebraic relations were examined: $y<0,\ xy>0,\ y>x,\ y=-x,\ y=3/2,\ y=x-2$ based on a relevant study by Duval (1993).

The former three tasks corresponded to regions of points, while the latter three tasks corresponded to functions. Each test included an example of an algebraic relation in graphic, verbal and symbolic forms to facilitate students' understanding of what they were asked to do, as follows:

***Table 1:*** *An example of the tasks included in the test*

| **Graphic representation** | **Verbal representation** | **Symbolic representation** |
|---|---|---|
|  | It represents the region of the points having positive abscissa. | $x>0$ |

It is apparent that the tasks involved conversions, which were employed either as complex coding activities or as point-to-point translations and were designed to correspond to school mathematics. However, a general use of the processes of treatment and conversion was required for the solution of these tasks. For instance, the conversion of the function $y=x-2$ from the algebraic expression to the graphical one could be accomplished by carrying out various kinds of treatment, such as calculations in the same notation system. It is evident that in this kind of task the process of treatment cannot be easily distinguished from the process of conversion. According to this perspective, these tasks differ from the tasks proposed by Duval (1993).

The results of the study revealed that students achieved better outcomes in the conversions starting with verbal representations relative to the conversions of the corresponding relations starting with graphic representations. In addition, all of the conversions from the graphic form of representation to the symbolic form of representation appeared to be more difficult than the conversions of the corresponding relations from the graphic form of representation to the verbal form of representation. Students perceived the latter type of conversion more easily at a level of meta-mathematical expression rather than at a level of mathematical expression. In fact, students were asked to describe verbally (in a text) a property perceived by the graph. On the contrary, the conversions from the graphical form to the symbolic form entailed mastering algebraic concepts concerning equality or order relations as well as using the algebraic symbolism efficiently.

Figure 1 presents the similarity diagram of the tasks of Test A and Test B based on the responses of the students.

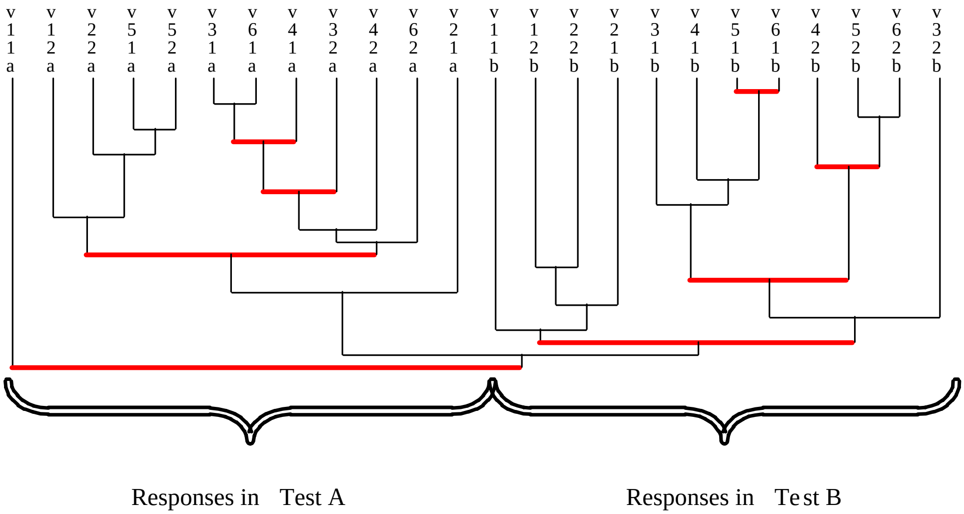



***Figure 1:*** Similarity diagram of the tasks of Test A and Test B according to Grade 9 students' responses

*Note: The symbolism used for the variables of this diagram (and the diagram that follows) is explained below.*

*1. "a" stands for Test A, and "b" stands for Test B*

*2. The first number after "v" stands for the number of the task in the test*
*i.e.,* 1: $y<0$, 2: $xy>0$, 3: $y>x$, 4: $y=-x$, 5: $y=3/2$, 6: $y=x-2$

*3. The second number stands for the type of conversion in each test, i.e., for Test A, 1: graphic to verbal representation, 2: graphic to symbolic representation; for Test B, 1: verbal to graphic representation, 2: verbal to symbolic representation.*

The similarity diagram allows for the grouping of students' responses to the tasks based on their homogeneity. Two distinct similarity groups of tasks are identified. The first group involves similarity relations among the tasks of Test A, while the second group involves similarity relations among the tasks of Test B. This finding reveals that different types of conversions among representations of the same mathematical content were approached in a completely distinct way. The starting representation of a conversion, i.e., graphic or verbal representation, seems to have influenced the students' performance, even though the tasks involved the same algebraic relations. Thus, we observe a complete separation of students' responses to the two tests even in tasks that were similar and rather "easy" for this grade of students. The similarity relations within the group of variables of the tests are also of great interest since they provide some indications of the students' way of understanding the particular algebraic relations and further support the likelihood that the phenomenon of compartmentalization was present.

For example, the similarity group of Test B is comprised of three subgroups. The **first subgroup** contains students' responses to the tasks v11b and v12b ($y<0$) and the tasks v21b and v22b ($xy>0$), that is, the two conversions from verbal to graphic representation and from verbal to symbolic representation of the first two tasks of Test B. These two tasks involve relations that represent "regions of points" and they are the easiest tasks of the test. The **second subgroup** is formed by the variables v31b ($y>x$), v41b($y=-x$), v51b ($y=3/2$) and v61b ($y = x-2$) that is the conversion from verbal to graphic representation of four relations of "functional character," as the relation of task 3 corresponds to a region of points related to the function $y=x$, while the relations of tasks 4, 5 and 6 are functions. The **third subgroup** is comprised by the variables v42b ($y=-x$), v52b ($y=3/2$) and v62b ($y=x-2$), that is, the conversion from verbal to algebraic representation of the tasks that involve functions.

To sum up, the formation of the first subgroup separately from the other two is of a "conceptual nature," since it is due to the conceptual characteristics of the relations involved, whereas, the distinction between the third subgroup and the forth subgroup is of a "representational character," since it is a consequence of the target of the conversion. To summarize, one can observe two kinds of compartmentalization in the similarity diagram: one "first order" compartmentalization (between the tasks of the two tests) and one "second order" compartmentalization (between the tasks of the same test).

The implicative diagram in Figure 2 was derived from the implicative analysis of the data and contains implicative relations, indicating whether success at a specific task implies success at another task related to the former one. The implicative relations are in line with the connections in the similarity diagram and the above remarks. In particular, one can observe the formation of two groups of implicative relations. The first group involves implicative relations among the responses to the tasks of Test B and the second group involves implicative relations among the responses to the tasks of Test A.

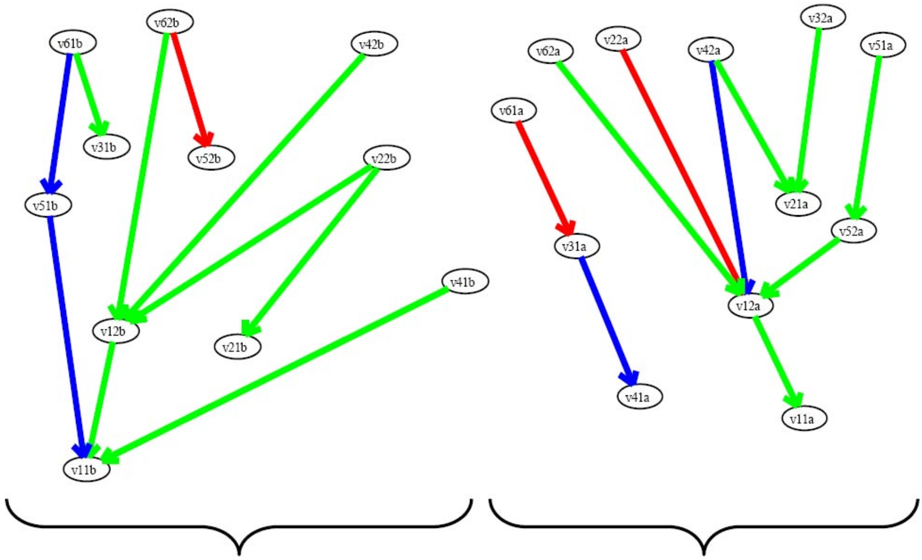



***Figure 2:*** *Implicative diagram of 14-year-old students' responses to the tasks of Test A and Test B*

The fact that implicative relations appear only between students' responses to the tasks of the same test indicates that success at one type of conversion of an algebraic relation did not necessarily imply success at another type of conversion of the same relation. For example, students who accomplished the conversion from a graphical representation of a mathematical relation to its verbal representation were not automatically in a position to translate the same relation from its verbal representation to its graphical form successfully. This is the first order compartmentalization that appears between students' responses to the tasks of the two tests. Additionally, evidence is provided for the appearance of the second order compartmentalization, that is, between students' responses to the tasks of the same test. The implicative chain "v61a-v31a-v41a" of Test A and the implicative chain "v61b-v51b-v11b" of Test B can be taken as examples of the second order compartmentalization, probably due to the same "target" representations of the conversions.

Other useful information can also be obtained by this implicative diagram. For example the simplest tasks in both tests are the tasks which involve the relation $y<0$ (v11), corresponding to a region of points. The students' failure in the tasks involving the particular relation (v11a or v11b) also implies failure at most of the other tasks in both tests. This inference is tenable as the implicative diagram was constructed by using the concept of "entropy." This means that for every implication where "a implies b" the counter-inverse "no a implies no b" is also valid.

Overall, based on the relations included in the similarity and the implicative diagrams for secondary school students, it can be inferred that there was a compartmentalization between students' responses to the tasks of the first test and the tasks of the second test, which involved conversions of the same algebraic relations but different starting modes of representation (i.e., graphic and verbal respectively). Students' higher success rates at the tasks of Test B, i.e., conversions starting with graphic representations, relative to the tasks of Test A, i.e., conversions starting with verbal representations, provide further evidence for their inconsistent behaviour in the two types conversions. Another kind of compartmentalization was also uncovered within the same test, indicating students' distinct ways of carrying out conversion tasks with reference to their conceptual (kind of mathematical relation) or representational (target of the conversion) discrepancies.

## 4.2. Student teachers' approaches to the conversion of functions from the algebraic to the graphical representation (Study 2)

In this section, we present some elements from a study of Mousoulides and Gagatsis (2004) that used a different approach to explore the idea of the conversion between representations and the phenomenon of compartmentalization. The researchers investigated student teachers' approaches to solving tasks of functions and the connection of these approaches with complex geometric problem solving. The theoretical perspective used in their study is related to a dimension of the framework developed by Moschkovich, Schoenfeld and Arcavi (1993). According to this dimension, there are two fundamentally different perspectives from which a function is viewed, i.e., the *process perspective* and the *object perspective*. From the *process perspective,* a function is perceived of as linking $x$ and $y$ values: For each value of $x$, the function has a corresponding $y$ value. Students who view functions under this perspective can substitute a value for $x$ into an equation and calculate the resulting value for $y$ or find pairs of values for $x$ and $y$ to draw a graph. In contrast, from the *object perspective,* a function or relation and any of its representations are thought of as entities - for example, algebraically as members of parameterized classes, or in the plane, as graphs that are thought of as being "picked up whole" and rotated or translated (Moschkovich et al., 1993). Students who view functions under this perspective can recognize that equations of lines of the form $y = 3x + b$ are parallel or can draw these lines without calculations if they have already drawn one line or they can fill a table of values for two functions (e.g., $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x + 2$) using the relationship between them *(e.g.* $g(x) = f(x) + 2$) (Knuth, 2000).

Mousoulides and Gagatsis (2004) have adopted the terms "algebraic approach" and "geometric approach" in order to emphasize the use of the algebraic expression or the graphical representations by the students in the conversion tasks and in problem solving. The algebraic approach is relatively more effective in making salient the nature of the function as a process, while the geometric approach is relatively more effective in making salient the nature of function as an object (Yerushalmy & Schwartz, 1993).

Data were obtained from 95 sophomore pre-service teachers enrolled in a basic algebra course at the University of Cyprus. A questionnaire, which consisted of four tasks and two problems, was administered at the beginning of the course. Each task involved two linear or quadratic functions. Both functions were in algebraic form and one of them was also in graphical representation. Functions in each task were related in a way such as $f(x)$, $g(x)=f(x)+c$, or $h(x)=-f(x)$, etc. The four particular tasks were as follows:

1. $y=2x$ and $y=-2x$ (T1)
2. $y=x^2$ and $y=x^2+3$ (T2)
3. $y=x^2+3x-2$ and $y=x^2-3x-2$(T3)
4. $y=x^2+x$ and $y=x^2+2x+1$(T4)

Students were asked to sketch the graph of the second function. An example of the form in which the four tasks were proposed is as follows:

*The following diagram presents a graph of the function $y=x^2+x$. Sketch the graph of the function $y=x^2+2x+1$.*

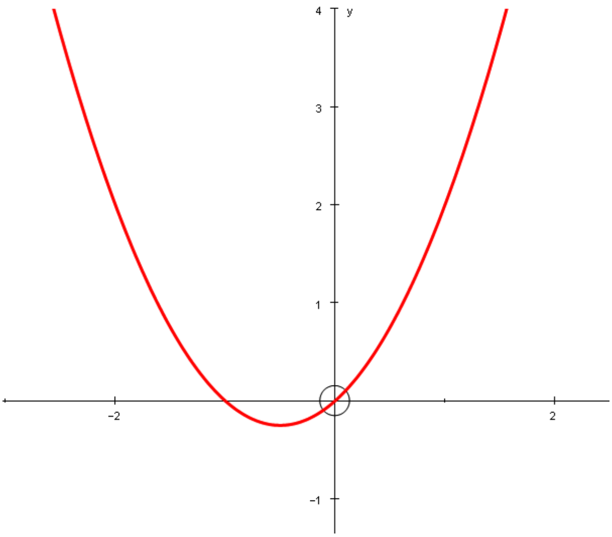



***Figure 3:*** *The graph of the function $y=x^2+x$ (Task 4)*

It is obvious that obtaining the correct solution of the tasks did not necessarily require carrying out a treatment in the same system of representation. What was required was the conversion of the algebraic representation of a function to the graphical one, on the basis of its relation with the corresponding representations of a given function.

Additionally, students were asked to solve two problems. One of the problems consisted of textual information about a tank containing an initial amount of petrol and a tank car filling the tank with petrol. Students were asked to use the information to draw the graphs of the two linear functions, i.e. the graph of the amount of petrol in the tank with respect to time and the graph of the amount of petrol in the tank car with respect to time and to find the time at which the amounts of petrol in the tank and in the car would be equal. The other problem involved a function in a general form $f(x) = ax^2+bx +c$. Numbers a, b and c were real numbers and the $f(x)$ was equal to 4 when $x=2$ and $f(x)$ was equal to -6 when $x=7$. Students were asked to find how many real solutions the equation $ax^2+bx +c$ had and explain their answer.

In light of the above, this study differs from the previous one in the following two basic characteristics:

- First the proposed conversions can be carried out geometrically by paying attention to the graphical representation of a given function in order to construct the representation of a second function or algebraically.

- Second, the study attempts to investigate how students' approaches to the conversions between different registers of functions are associated with their processes in problem solving on functions.

The results of this study indicated that the majority of students responded correctly in the first two tasks (T1: 73.2% and T2: 80%). Their rate of success was radically reduced in tasks involving quadratic functions involving complex transformations (T3: 41.1% and T4: 45.3%) and especially in solving complex geometric problems. More specifically, only 27.4% and 11.6% of the 95 participants provided appropriate solutions.

As regards students' approaches, more than 60% of the students that provided a correct solution followed a process perspective or the algebraic approach, which involved the construction of the function graph by finding pairs of values x and y. The other students used an object perspective or the geometric approach by observing and using the relation between the two functions. It is noteworthy that students who chose the algebraic approach applied it even in situations in which a geometric approach seemed easier and more efficient than the algebraic. Furthermore, in the second problem, most of the students (88.4%) failed to recognize or suggest a graphical solution as an option at all, even though the problem could not be solved algebraically.

For the similarity diagram and the implicative analysis of the data, students' answers to the tasks were codified as follow: (a) «A» was used to represent "algebraic approach – function as a process" to tasks and problems; (b) «G» stands for students who adopted a "geometric approach – function as an entity." The similarity diagram of students' responses to the tasks in Figure 4 involved two distinct clusters with reference to students' approaches. The first cluster represents the use of the algebraic approach (process perspective), while the second cluster refers to the use of the geometric approach (object perspective) and solving geometric problems. It is thus demonstrated that students who used the geometric approach in one task were likely to employ the same approach in all the other tasks. Similarly, students who used the algebraic approach employed it consistently in the tasks of the test. It can also be observed that the second cluster includes the variables corresponding to the solution of the complex geometric problems along with the variables representing the geometric approach. This means that students who effectively used the geometric approach for simple tasks on functions also succeeded in solving complex geometric problems on function. In line with the similarity diagram, success rates indicated that students who were able to use a geometric approach achieved better outcomes in solving complex function problems, probably because they were able to observe and use the connections and the relations in the problems flexibly. The formation of the two clusters reveals that students tended to solve tasks and problems in functions using the same approach, even in tasks where a different approach was more suitable, providing support for the emergence of the phenomenon of compartmentalization in students' processes.

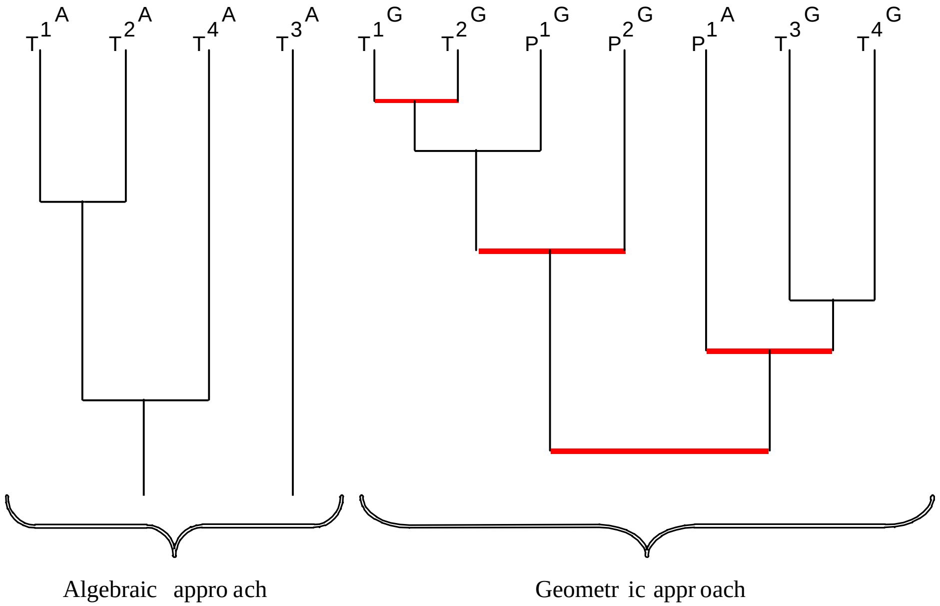



***Figure 4:*** *Similarity diagram of student teachers' approaches to the tasks*

*Note: The symbolization of the variables that were used to represent students' responses to the tasks are presented below.*

*1. Symbols "T1A", "T2A", "T3A" and "T4A" represent a correct algebraic approach to the tasks and "P1A" to the first problem (second problem could not be solved algebraically)*

*2. Symbols "T1G", "T2G", "T3G" and "T4G" represent a correct geometric approach to the tasks and "P1G" and "P2G", correct graphical solutions to the two problems*

The hierarchical tree in Figure 5 involves the implicative relationships between the variables. Three groups of implicative relationships can be identified. The first group and the third group of implicative relationships include variables concerning the use of the geometric approach – object perspective and variables concerning the solution of the geometric problems. The second group involves links among variables standing for the use of the algebraic solution-process perspective. These relations are in line with the findings derived from the similarity diagram. The establishment of these groups of links provides support once again for the consistency that characterizes students' provided solutions towards the function tasks and problems. Furthermore, the implicative relationships of the third group indicate that students who solved the second problem by applying the correct graphical solution have followed the object perspective – graphical representation for the other problem and the other two simple tasks. A possible explanation is that students who have a solid and coherent understanding of functions can recognize relations in complex geometric problems and thus can flexibly connect pairs of equations with their graphs and then easily apply the geometric approach in solving simple tasks on functions.

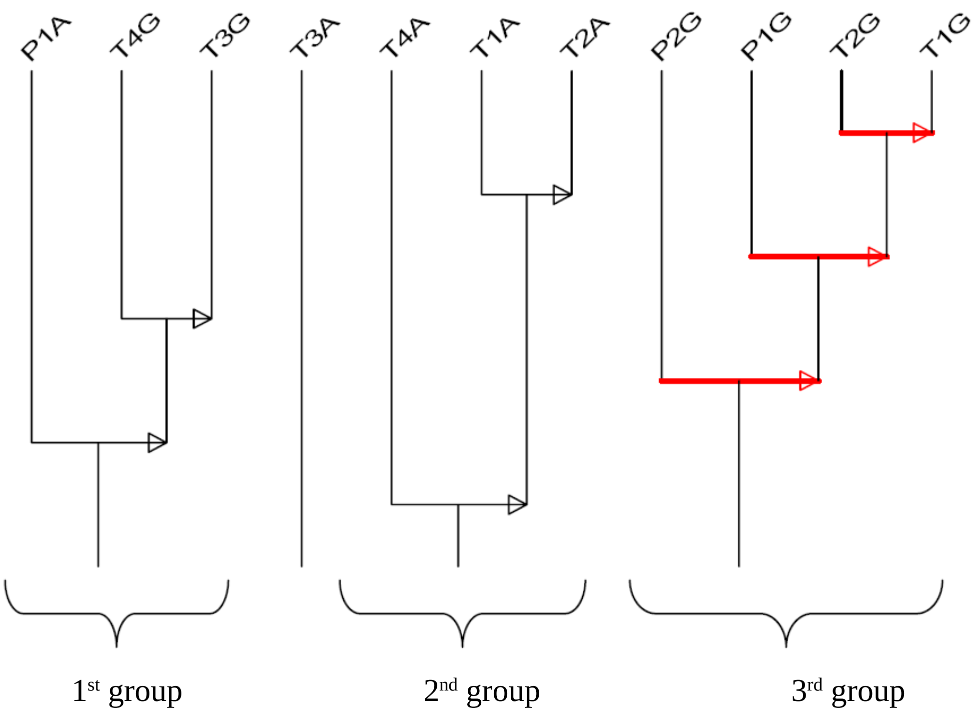



***Figure 5:*** *Hierarchical tree illustrating implicative relations among student teachers' approaches to the tasks*

*Note: The implicative relationships in bold colour are significant at a level of 99%*

## 5. CAN WE SUCCEED AT DE-COMPARTMENTALIZATION?

Since an important aspect of this paper is to examine whether the registers of representations and the problem solving cognitive processes in functions are compartmentalized in students' thinking, we will present data from two current investigations. These studies (study 3 and study 4) are related to the previously presented studies, with their objective being to replicate previous results and support further findings for accomplishing de-compartmentalization in functions.

### 5.1. First effort to succeed at de-compartmentalization (Study 3)

In an attempt to accomplish de-compartmentalization, an experimental study was designed by Gagatsis, Spyrou, Evangelidou and Elia (2004). The researchers developed two experimental programs for teaching functions to university students based on two different perspectives, which are presented below. Two similar tests were administered pre- and post- the intervention in order to investigate students' understanding of functions and to compare the effectiveness of each experimental design.

One hundred fifty-seven university students participated in this study. The participants were second year students of the Department of Education (prospective teachers) who attended the course "Contemporary Mathematics" at the University of Cyprus. The students were randomly assigned to two groups which were taught by two different professors. Experimental Group 2 was comprised of 68 students and Experimental Group 2 was comprised of 81 students. The students in both groups differed in the level and length of the mathematics courses that they had attended in school. Nevertheless, all of the students who participated in this study had received a similar curriculum on functions during the last three grades of high school.

The study was carried out in three stages. In the first stage, a pre-test was administered to both groups of students in order to investigate their initial understanding of the construct of function before the instruction. In the second stage, the two groups received instructional sessions spread over a period of the same duration for both groups. To compare the two groups, in the third stage, a post-test similar to the pre-test was used to assess students' understanding of functions.

The two experimental programs, conducted by two different university professors (Professors A and B), approached the teaching of the notion of function from two different perspectives.

Experimental Program 1 started by providing a revision of some of the functions that were already known to the students from school mathematics, physics and economics. Professor A reminded students about the difference between an equation and a function, which typically appear in a similar symbolic form. Different types of functions were presented next, starting from the simple ones and proceeding to the more complicated ones. At first, the program introduced different kinds of linear functions and described the various representations of functions in the form: $y=ax+b$. Functions with a disconnected domain were also presented. Discrete functions described by discrete types of range and the characteristic function of a set were also presented. Arrow diagrams were also introduced in order to demonstrate to the students a way to examine the ideas of one-to-one and many-to-one types of correspondence as a condition for the definition to be held. Next, the quadratic polynomial function of the form $ax^2+bx+c$ was taught. Special attention was given to the main features of the graph of the polynomial function (e.g., maximum and minimum points, possible roots, symmetry axis, possible qualitative manipulation of functions in the form $ax^2$). Various special cases and the general form of the rational function $y=\frac{c}{x}$ were also examined.

Trigonometric functions and their composition were studied next. The basic features and properties of the exponential functions were also discussed as well as the ill-defined functions of Weierstrass or Dirichlet without any reference to the geometrical representation. Reference was made to the inverse functions and to which functions can be inversed. The program ended by giving the set-theoretical definition of a function. The definition was then applied in order to identify whether each of the aforementioned types of relations as well as others, such as the formula of the circle, were functions or not.

Experimental Program 2 encouraged the interplay between the different modes of the representation of function in a systematic way. The instruction that was developed by Professor B on functions was based on two dimensions. The first dimension involved the intuitive approach and the definition of function. The second dimension emphasized the different representations of function. The instruction began with issues that are related to sets, the elements of a set and the operations of sets. The coordinate pairs and the Cartesian product were also discussed. The concept of correspondence was introduced, and equivalence and arrangement relations were defined. Then the activities for the study of the concept of function were based on the different relations between two sets, namely A and B, and examples of arrow diagrams, coordinate pairs and graphs were presented.

The second dimension of the instruction concerned representations. It included the following elements: theoretical models and interesting empirical studies on the connection of representations with mathematics learning, theories on the use of semiotic representations in the teaching of mathematics and the pedagogical implications as well as the concept of function. Then the solution of tasks in graphical and algebraic representations and examples of conversion of functions from one representation to another were presented.

In the light of the above, an essential epistemological difference can be identified between the two experimental programs. Experimental Program 1 involved instruction of a classic nature, widely used at the university level. In contrast, Experimental Program 2 was based on a continuous interplay between different representations of various functions.

The pre- and the post-tests involved conversion tasks that were similar to the tasks of the test used in the study 1 described above (Gagatsis & Elia, 2005b). In addition, another two questions asked what a function is and requested two examples of functions from their application in real life situations. The tests also included tasks asking students to identify, by applying the definition of the concept, whether mathematical relations in different modes of representation (verbal expressions, graphs, arrow diagrams and algebraic expressions) were presenting functions.

Comparing the success percentages of the students before and after instruction indicated great improvement with regards to the definition of function. In particular, while only 19% of the students gave an approximately correct definition (i.e. (i) accurate set-theoretical definition, (ii) correct reference to the relation between variables but without the definition of the domain and range, (iii) definition of a special kind of function, e.g. real, bijective, injective or continuous function) before the instruction, 69% of the students gave the corresponding definition after instruction. Students' success rates after instruction were also radically improved in most of the recognition and conversion tasks of the tests. For instance, the graph of the straight line $y=4/3$ was recognized as a function only by 26% of the students before instruction, while the graph of the line $y=-3$ was identified as a function by 82% of the students after instruction.

Analysis of the data gave four similarity diagrams. Two of the similarity diagrams involved the answers of the two experimental groups of students separately to the tasks of the test before instruction. The other two similarity diagrams included the answers of the two experimental groups of students separately, after instruction. Within the former two similarity diagrams distinct groups or subgroups of variables of students' responses in recognition tasks involving the same mode of representation of functions, i.e., in verbal form, in graphical form, in an algebraic form, in an arrow diagram, were formed separately. The particular finding revealed the consistency with which students dealt with tasks in the same representational format, but with different mathematical relations. However, lack of direct connections between variables of similar content, but different representational format, indicated that students were able to identify a function in a particular mode of representation (e.g., algebraic form), but not necessarily in another mode of representation (e.g., graphical). This inconsistent behaviour among different modes of representation was an indication of the existence of compartmentalization. This phenomenon also appeared in the similarity diagram referring to the students of Experimental Group 1, especially in the cases of the graphical representations and arrow diagrams. The compartmentalization was limited to a great extent, though, in the similarity diagram involving the responses of students of Experimental Group 2. Similarity connections were formed between students' performance in recognizing functions in different forms of representation, indicating that students dealt similarly with tasks irrespective of their mode of representation. In other words, success was independent from the mode of representation of the mathematical relation. This finding revealed that Experimental Program 2 was successful in developing students' abilities to flexibly use various modes of representations of functions and thus accomplished the breach of compartmentalization, i.e. de-compartmentalization, in their behaviour. The research in this direction, described briefly above, is still in progress.

### 5.2. Second effort to succeed at de-compartmentalization (Study 4)

Mousoulides and Gagatsis (2006) conducted a study exploring the effectiveness of computer based activities in de-compartmentalized registers of representations and problem solving processes in functions. A considerable number of research studies have examined the effects of technology usage on many aspects of students' mathematical achievement and attitudes, their understanding of mathematical concepts, and the instructional approaches in teaching mathematics. Despite this, only a limited number of researchers focused on the effects of using appropriately different modes of representations and making the necessary connections between them by using technological tools (Mousoulides & Gagatsis, 2006). The investigation presented here follows the investigation presented in Section 4.2. Researchers in the aforementioned study examined whether students' work with the aid of a mathematical software package could assist students in adopting and implementing effectively the "geometric approach" to solving problems in functions and therefore promote the de-compartmentalization of registers of representations in students' thinking.

The participants were ninety sophomore students in the Department of Education. Students were attending an undergraduate course on introductory calculus. Of these, 18% were males and 82% were females. The study was conducted in three phases. In the first phase, a questionnaire similar to the one that was developed in the second study, reported here, was administered at the beginning of the course. The second phase of the study was conducted over the course of the subsequent two weeks. During this period, forty of the 90 students were randomly selected to participate in four two-hour sessions. During these sessions students, working individually or in pairs, were asked to solve problems in functions using Autograph and to present and discuss their results in discussions with the whole class. Autograph (www.autograph-math.com), a visually compelling mathematical software, was used for the purposes of the study. Autograph and other similar software packages have various features which can facilitate a constructive approach to learning mathematics (Mousoulides, Philippou & Hoyles, 2005). Autograph allows the user to "grab and move" graphs, lines and points on the screen whilst observing changes in parameters, and vice versa. Additionally, with its multiple representation capabilities, it allows the user to switch easily between numeric, symbolic and visual representations of information. A sample problem that was discussed during the second phase is presented below:

*The following is the graph of the function $f(x) = ax^2+bx+c$. Suggest possible values for $a,b,c$ and explain your answers. Pose a related problem for the other students of your class that could be solved using your worksheet in Autograph.*

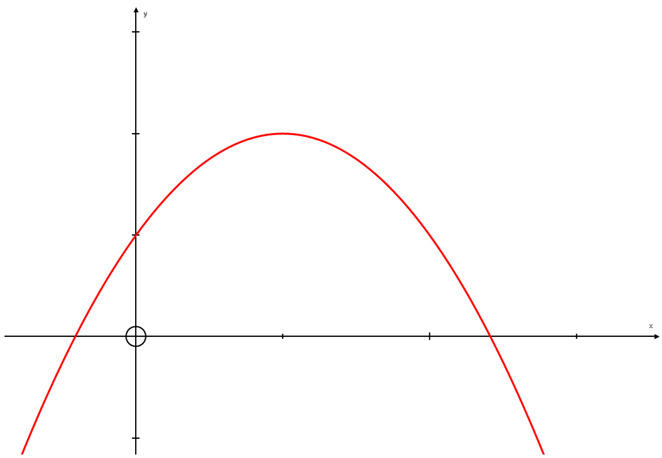


***Figure 6:*** *The graph of the function $f(x) = ax^2+bx+c$ presented in one problem*

A second test, involving a second set of four tasks and two problems in functions was administered ten days after the completion of the second phase. All items in the second test were similar to the ones of the first test administered in the first phase.

Similar to the study presented in Section 4.2, researchers proposed that conversions could be carried out geometrically by focusing their attention and efforts on the relation of the symbolic representations of the two functions in order to construct the second graph or, algebraically, by selecting pairs of points to construct the new graph by "*ignoring*" its relation to the other one. Additionally, the study attempted to investigate how students' approaches in the conversions between different registers of functions were associated with their processes in problem solving. The main focus of Mousoulides and Gagatsis (2006) investigation was to examine whether student work on problems on functions with the aid of the appropriate mathematical software could result in the de-compartmentalization of the different registers of representations and their use in problem solving in functions.

The results of the study duplicate earlier findings (Mousoulides & Gagatsis, 2004), indicating that most of the students can correctly answer tasks on graphing linear (with success percentages being higher than 80%) and quadratic functions (with success percentages being higher than 65%). At the same time, their successful performance in solving related problems was limited to less than 25%. An important finding related to students' approaches showed that, in all tasks, more students preferred using the algebraic than the geometric approach. It is noteworthy that students who chose the algebraic approach applied it even in situations in which a geometric approach seemed easier and more efficient than the algebraic. Of interest is the second problem, for which the great majority of students failed to recognize or suggest a graphical solution as an option at all, even though the problem could not be solved algebraically.

Analysis of the data from the second test showed that both groups of students improved their percentages in solving both simple tasks and problems in functions. Of interest, is the finding that students who participated in the intervention phase (Group 1) outperformed their counterparts (Group 2) in all tasks and problems. In detail, Group 1 students' percentages were higher than those of Group 2 students with percentage differences varying from 4 % to 12 % in solving tasks and from 10% to 12% in problems. Furthermore, Group 1 students significantly improved their selection of geometric approach in solving tasks and problems in functions, indicating that the exploration and discovery of open ended problems in the environment of mathematical software like Autograph might have an influence on students' selection and use of the geometric approach in functions.

The findings from the two similarity diagrams were also quite impressive. One of the similarity diagrams involved Group 2 student responses, while the second one presented the results from Group 1 students. The similarity diagram for Group 2 students involved two *distinct* clusters with reference to students' approach. In keeping with previous findings, students who used the algebraic approach employed it consistently in the tasks and problems of the test, even in cases where the use of the geometric approach was more suitable. The similarity diagram for Group 1 students showed that their responses again formed two clusters, but these clusters were not compartmentalized into algebraic and geometric approaches. Indeed, one of the clusters showed that students were flexible in selecting the most appropriate approach for solving tasks on functions. Additionally, students were eager to switch their approach in solving a problem, especially in a problem which could not be solved using an algebraic approach. This was not the case for students in Group 2.

## 6. DISCUSSION

### 6.1. Identifying the phenomenon of compartmentalization and seeking ways to breach it

A main concern of the present paper was to investigate students' understanding of the concept of function via two perspectives. The first point of view concentrates on students' ability to handle different modes of the representation of function in tasks involving treatment and conversion and the second perspective refers to students' approaches in conversion tasks and complex function problems. Furthermore, this paper entailed some considerations with regards to the difficulties confronted by the students when dealing with different modes of mathematical representations and more specifically the phenomenon of compartmentalization. Another aim of this paper was to present two on-going investigations which attempted to design and implement different intervention programs having a common objective, i.e. to help students develop flexibility in working with various representations of function and thus accomplish de-compartmentalization of the different registers of representations in students' thinking.

The first study reported in this paper examined student performance in the conversions of algebraic relations (including functions) from one mode of representation to another. It was revealed that success in one type of conversion of an algebraic relation did not necessarily imply success in another type of conversion of the same relation. Lack of implications or connections among different types of conversion (i.e., with different starting representations or even with different target representations) of the same mathematical content indicated the difficulty in handling two or more representations in mathematical tasks. This incompetence provided a strong case for the existence of the phenomenon of compartmentalization among different registers of representation in students' thinking, even in tasks involving the same relations or functions. The differences among students' scores in the various conversions from one representation to another, referring to the same algebraic relation or function provided support for the different cognitive demands and distinctive characteristics of different modes of representation. This inconsistent behaviour was also seen as an indication of students' conception that different representations of the same concept are completely distinct and autonomous mathematical objects and not just different ways of expressing the meaning of a particular notion. Inconsistencies were also observed in students' responses with reference to the different conceptual features of the mathematical relations involved in the conversions, i.e. functions or not.

The most important finding of the second study was that two distinct groups were formatted with consistency, that is the algebraic and the geometric approach groups. The majority of student work with functions was restricted to the domain of the algebraic approach. This method, which is a point to point approach giving a local image of the concept of function, was followed with consistency in all of the tasks carried out by the students. Many students have not mastered even the fundamentals of the geometric approach in the domain of functions. Most of the students' understanding was limited to the use of algebraic representations and the algebraic approach, while the use of graphical representations was fundamental in solving geometric problems. Only a few students used an object perspective and approached the function holistically, as an entity, by observing and using the association of it with the closely related function that was given. Only these students developed the ability to employ and select graphical representations, thus the geometric approach. The second study's findings are in line with the results of previous studies indicating that students cannot use the geometric approach effectively (Knuth, 2000). The fact that most of the students chose an algebraic approach (process perspective) and also demonstrated consistency in their selection of this approach, even in tasks and problems in which the geometric approach (object perspective) seemed more efficient, or the fact that they failed to suggest a graphical approach at all, is a strong indication of the phenomenon of compartmentalization in the students' processes in tasks and problems on functions involving graphical and algebraic representations.

Moreover, an important finding of the second study involved the relation between the graphical approach and geometric problem solving. This finding is consistent with the results of previous studies (Knuth, 2000; Moschkovich et al., 1993), indicating that the geometric approach enables students to manipulate functions as an entity, and thus students are capable of finding the connections and relations between the different representations involved in problems. The data presented in the second study suggested that students who had a coherent understanding of the concept of functions (geometric approach) could easily understand the relationship between symbolic and graphic representations in problems and thus were able to provide successful solutions.

In both studies presented above, the results of the statistical analysis of C.H.I.C. provided a strong case for the existence of the phenomenon of compartmentalization in students' ways of dealing with different tasks on functions. However, the findings of each of the two studies were substantial and gave different information regarding the acquisition and mastery of the concept of function. Lack of implications and similarity connections among different types of conversion of the same mathematical content in Study 1 indicated that students were not in a position to change systems of representation of the same mathematical content of functions in a coherent way. Lack of implicative and similarity connections between the geometric approach and the algebraic perspective in students' responses in Study 2 provided support for students' deficiency in flexibly employing and selecting the appropriate approach, in this case the geometric one, to sketch a graph or to solve a problem on functions. It can be asserted that registers of representations remained compartmentalized in students' minds and mathematical thinking was fragmentary and limited to the use of particular representations or a particular approach in both types of transformation, that is, treatment and conversion.

Compartmentalization, as indicated by Duval (1993; 2002) and explained empirically in the present paper, is a general phenomenon that appears not only in the learning of functions, but also in the learning of many different concepts, as pointed out at the beginning of this paper. All these findings indicate students' deficits in the coordination of different representations related to various mathematical concepts. Duval (1993; 2002) maintains that the de-compartmentalization of representations is a crucial point for the understanding of mathematical concepts.

Identifying the phenomenon of compartmentalization among the registers of representation in students' thinking on functions indicated that current instructional methods fail to help students develop a deep conceptual understanding of the particular construct. On the basis of the above findings, two current experimental efforts have been designed and carried out for the teaching of functions in order to accomplish de-compartmentalization. The former research effort (Study 3) involved two experimental programs. Experimental Program 1 involved instruction of a classic nature and one widely used at the university level. On the contrary, Experimental Program 2 was based on a continuous interplay between different representations of various functions. The other study (Study 4) involved an experimental program that promoted the exploration and discovery of open ended problems in the environment of a mathematical software program that provided multiple representation capabilities and allowed the students to switch easily between numeric, symbolic and visual representations of information. Students that participated in Experimental Program 1 of Study 3 did not show a significant improvement in the conversion tasks and continued to treat the various representations of function as distinct entities, thus demonstrating a compartmentalized way of working and thinking. As regards Experimental Program 2 of Study 3 and the experimental program of Study 4, despite their distinctive features they were both successful in stimulating a positive change in students' responses and in attaining the de-compartmentalization of representations in their performance. More specifically, the former experimental program succeeded in developing students' abilities in the conversion from one mode of representation to another. The latter program was successful in developing students' flexibility to select the most appropriate approach in solving tasks in functions and to use the geometric approach in function problems efficiently.

### 6.2. Recommendations for further research

Research on the identification of the phenomenon of compartmentalization in the learning of functions and other concepts should be expanded. The present paper provides support to the systematic use of appropriate statistical tools, such as the implicative statistical analysis of R. Gras (1996), to assess and analyze students' understanding of functions or other mathematical concepts. A continued research focus is needed to find ways to breach the compartmentalized way of thinking in students. The research directed towards finding ways to develop students' flexibility in using different registers of representations of functions and in moving from one to another, described briefly above, continues so as to provide explanations for the success of the two aforementioned experimental programs and to determine those features of the interventions that were particularly effective in accomplishing de-compartmentalization. There is a need for longitudinal studies in the area of registers of representations and problem solving in functions to enhance our understanding of the effectiveness and appropriateness of intervention studies like the aforementioned one. Additional studies of a qualitative nature are also needed to uncover students' difficulties in the particular domain, to expand the knowledge of how students interact with different modes of representations of functions in a conventional setting or a technological environment and how they move from a particular approach, i.e. an algebraic strategy to a more advanced one, i.e. a geometric approach in solving tasks on functions. The results of such attempts may help teachers and researchers at the university and high school levels to place emphasis on certain dimensions of the notion of function and the pedagogical approaches to teaching functions, so that students can be assisted in constructing a solid and deep understanding of the particular concept.

## References


Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 301-317.

Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). *CHIC : Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2 ,* Rennes : Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Cheng, P.C.H. (2000). Unlocking conceptual learning in mathematics and science with effective representational systems. *Computers and Education, 33*, 109-130.

D'Amore B. (1998). Relational objects and different representative registers: cognitive difficulties and obstacles. *L'educazione matematica*, *1*, 7-28.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992*).* The nature of the process conception of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). United States: The Mathematical Association of America.

Duval, R. (1993). Registres de Représentation Sémiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37-65.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 9-24). United States: Mathematical Association of America.

Elia, I., Gagatsis, A., & Gras, R. (2005). Can we "trace" the phenomenon of compartmentalization by using the I.S.A.? An application for the concept of function. In R. Gras, F. Spagnolo & J. David (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference I.S.A. Implicative Statistic Analysis* (pp. 175-185). Palermo, Italy: Universita degli Studi di Palermo.

Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I., & Gagatsis, A. (2004). University students' conceptions of function. In M. Johnsen Høines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 351-358). Bergen, Norway: Bergen University College.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121.

Gagatsis, A., & Elia, I. (2005a).A review of some recent studies on the role of representation in mathematics education in Cyprus and Greece. *Paper presented at CERME 4,* 2005, February, Saint Feliux de Guixols, Spain.

Gagatsis, A., & Elia, I. (2005b). Il concetto di funzione e le sue rappresentazioni nell'educazione secondaria. *Bollettino dei Docenti di Matematica, 50*, 41-54.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657.

Gagatsis, A., Elia, I., & Mougi, A. (2002). The nature of multiple representations in developing mathematical relations. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 39*(1), 9-24.

Gagatsis, A., Kyriakides, L., & Panaoura, A. (2004). Assessing the cross-cultural applicability of number lines in conducting arithmetic operations using structural equation modeling : A comparative study between Cypriot, Italian and Greek primary pupils. *World Studies in Education*, *5*(1), 85-101.

Gagatsis, A., Shiakalli, M.,& Panaoura, A.(2003). La droite arithmétique comme modèle géométrique de l' addition et de la soustraction des nombres entiers. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 8*, 95-112.

Gras, R. (1996). *L'implication statistique.* Collection associée à ' Recherches en Didactique des Mathématiques'. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Factors involved in the learning of mathematics: The case of graphic representations of functions. In H. Stenbring, M.G. Bartolini Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (pp. 271-288). Reston, Va: NCTM.

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Knuth, J. E. (2000). Student understanding of the Cartesian Connection: An exploratory study. *Journal of Research in Mathematics Education*, *31*(4), 500-508.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60,* 1–64.

Lerman, I.C. (1981). *Classification et Analyse Ordinale des Données.* Paris: Dunod.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Marcou, A., & Gagatsis, A. (2003). Rappresentazioni e apprendimento matematico: applicazioni nel campo delle frazioni. *La matematica e la sua didattica, 2,*124-138*.*

Markovits, Z., Eylon, B. and Bruckheimer, M. (1986)*. Functions today and yesterday.* For the Learning of Mathematics, 6*(2)* 18-28*.*

Michaelidou, N., Gagatsis, A., & Pitta-Pantazi, D. (2004). The number line as a representation of decimal numbers: A research with sixth grade students. In M. Johnsen Høines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). Bergen, Norway: Bergen University College.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 69–100). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mousoulides, N., & Gagatsis, A. (2004). Algebraic and geometric approach in function problem solving. In M. Johnsen Høines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. *3*, pp. 385-392). Bergen, Norway: PME.

Mousoulides, N., Philippou, G., Hoyles, C (2005). Mathematical discovery in the context of number sequences. *Paper presented at the 11th European for Research on Learning and Instruction, 2005, August.*

Mousoulides, N., & Gagatsis, A. (2006). The role of new technologies in improving problem-solving in functions. Pre-print, Department of Education, University of Cyprus.

Romberg, T. A., Fennema, E., & Carpenter, T. P. (Eds.). (1993). *Integrating research on the graphical representation of functions.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 59-84). United States: The Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-28). United States: The Mathematical Association of America.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-266.

Yerushalmy, M., & Schwartz, J. L. (1993). Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting. In T. A. Romberg, E. Fennema & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 41–68). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

**Athanasios Gagatsis**
Departament of Education
University of Cyprus
Cyprus

E-mail: gagatsis@ucy.ac.cy

**Iliada Elia**
Departament of Education
University of Cyprus
Cyprus

E-mail: iliada@ucy.ac.cy

**Nicholas Mousoulides**
Departament of Education
University of Cyprus
Cyprus

E-mail: n.mousoulides@ucy.ac.cy

# Learning Mathematics: Increasing the Value of Initial Mathematical Wealth

Adalira Sáenz-Ludlow [1]

*A sign may recall a certain concept or combination of concepts from somebody's memory, and can also prompt somebody to certain actions. In the first case we shall call a sign a symbol, in the second a signal. The (nature of the) effect of the sign depends on context and the actual mental situation of the reader.* Van Dormolen, 1986, p.157.

**RESUMEN**

Usando la teoría de signos de Charles Sanders Peirce, este artículo introduce la noción de riqueza matemática. La primera sección argumenta la relación intrínseca entre las matemáticas, los aprendices de matemáticas, y los signos matemáticos. La segunda, argumenta la relación triangular entre interpretación, objetivación, y generalización. La tercera, argumenta cómo el discurso matemático es un medio potente en la objetivación semiótica. La cuarta sección argumenta cómo el discurso matemático en el salón de clase, media el aumento del valor de la riqueza matemática del alumno, en forma sincrónica y diacrónica, cuando él la invierte en la construcción de nuevos conceptos. La última sección discute cómo maestros, con diferentes perspectivas teóricas, influyen en la dirección del discurso matemático en el salón de clase y, en consecuencia, en el crecimiento de la riqueza matemática de sus estudiantes.

- **PALABRAS CLAVE:** Riqueza matemática, interpretación, relación con signos, la tríada interpretación-objetivación-generalización.

**ABSTRACT**

Using the Peircean semiotic perspective, the paper introduces the notion of mathematical wealth. The first section argues the intrinsic relationship between mathematics, learners of mathematics, and signs. The second argues that interpretation, objectification, and generalization are concomitant semiotic processes and that they constitute a semiotic triad. The third argues that communicating mathematically is a powerful means of semiotic objectification. The fourth section presents the notion of mathematical wealth, the learners' investment of that wealth, and the synchronic-diachronic growth of its value through classroom discourse. The last section discusses how teachers, with different theoretical perspectives, influence the direction of classroom discourse and the growth of the learner's initial mathematical wealth.

*Fecha de recepción: Febrero de 2006/ Fecha de aceptación: Mayo de 2006*

1 Department of Mathematics and Statistics. University of North Carolina at Charlotte.

● **KEY WORDS:** Mathematical Wealth, Interpretation, Relationships with Signs, The Triad Intepretation-Objectification-Generalization.

## RESUMO

Usando a teoria de signos de Charles Sanders Peirce, este artigo introduz a noção de riqueza matemática. A primeira secção argumenta a relação intrínseca entre a matemática, os aprendizes de matemáticas, e os signos matemáticos. A segunda, argumenta a relação triangular entre interpretação, objetivação e generalização. A terceira, argumenta como o discurso matemático é um potente meio na objetivação semiótica. A quarta seção argumenta como o discurso matemático na sala de aula adequar o aumento do valor da riqueza matemática do aluno, em forma sincrônica e diacrônica, quando ele inverte a construção de novos conceitos. A última seção discute como maestros, com diferentes perspectivas teóricas, influem na direção do discurso matemático na sala de aula e, conseqüentemente, no crescimento da riqueza matemática de sus estudantes.

● **PALAVRAS CHAVES:** Riqueza matemática, interpretação, relação com signos, a tríade interpretação-objetivação-generalização.

## RÉSUMÉ

En utilisant la perspective sémiotique peircienne, cet article introduit la notion de richesse mathématique. La première section soutient qu'il y a une relation intrinsèque entre les mathématiques, les apprenants des mathématiques et les signes. La deuxième section soutient que l'interprétation, l'objectivation et la généralisation sont des processus sémiotiques concomitants et qu'ils constituent une triade sémiotique. La troisième section soutient que la communication mathématique est un puissant moyen sémiotique d'objectivation. La quatrième section présente la notion de richesse mathématique, l'investissement de cette richesse par les apprenants et la croissance synchronique et diachronique de sa valeur à travers le discours de la salle de classe. La dernière section discute de la façon dont les enseignantes et enseignants, avec des perspectives théoriques différentes, agissent sur l'orientation de la discussion dans la salle de classe et sur l'enrichissement de la pensée mathématique initiale des apprenants.

● **MOTS CLÉS:** Richesse mathématique, interprétation, relation avec des signes, la triade interprétation-objectivation-généralisation.

## Mathematics and its Intrisic Relationship with Signs

Since ancient times, philosophers and mathematicians alike have been concerned with the definition of mathematics as a scientific endeavor and as a way of thinking. These definitions have evolved both according to the state of the field at a particular point in time and according to different philosophical perspectives. Davis and Hersh, assert that "each generation and each thoughtful mathematician within a generation formulates a definition according to his lights" (1981, p. 8). To define *mathematics* is as difficult as to define *signs*. It is not easy to define either one without mentioning the other, as it is not easy to define them in a paragraph and even less in a couple of sentences. Mathematicians make use of and create mathematical signs to represent, "objectify", or encode their creations. On the other hand, learners interpret mathematical signs and their relationships both to decode the conceptual objects of mathematics and to objectify (i.e., encode) their own conceptualizations.

All kinds of signs and sign systems are ubiquitous in our lives but so is mathematics. Given the fascinating and ineludible dance between mathematics and signs, it is not surprising that some mathematicians become semioticians. Peirce, for example, dedicated several volumes to analyze the relationship between mathematical objects and mathematical signs (The New Elements of Mathematics, Vols. I, II, III, IV, 1976) as well as several essays to discuss the essence of mathematics (for example, the one published in Newman's *World of Mathematics*, 1956). Peirce defines mathematics as the science that draws necessary conclusions and its propositions as "fleshless and skeletal" requiring for their interpretation an extraordinary use of abstraction. He also considers that mathematical thought is successful only when it can be generalized. Generalization, he says, is a necessary condition for mathematical thinking.

Rotman (2000), inspired by Peirce's theory, has dedicated a book to define mathematics as a sign. At the beginning of his book, he gives an overarching definition of mathematics to conclude that mathematics is essentially a symbolic practice.

> Mathematics is many things; the science of number and space; the study of pattern; an indispensable tool of technology and commerce; the methodological bedrock of the physical sciences; an endless source of recreational mind games; the ancient pursuit of absolute truth; a paradigm of logical reasoning; the most abstract of intellectual disciplines. In all of these and as a condition for their possibility, mathematics involves the creation of imaginary worlds that are intimately connected to, brought into being by, notated by, and controlled through the agency of specialized signs. One can say, therefore, that mathematics is essentially a *symbolic practice* resting on a vast and never-finished language—a perfectly correct but misleading description, since by common usage and etymology "language" is identified with speech, whereas one doesn't speak mathematics but writes it. (2000, p. ix, emphasis added).

But *where* does this symbolic practice come from? Is mathematics, as an expression of the symbolic behavior of the human species, a part of all cultures? Davis and Hersh (1981) argue that mathematics is in books, in taped lectures, in computer memories, in printed circuits, in mathematical machines, in the arrangement of the stones at Stonehenge, etc., but first and foremost, they say, it must exist first *in people's minds*. They acknowledge that there is hardly a culture, however primitive, which does not exhibit some rudimentary kind of mathematics. There seems to be a common agreement among White (1956), Wilder (1973), Bishop (1988), and Radford (2006a) for whom mathematics is essentially a *cultural symbolic practice* that encapsulates the progressive accumulation of constructions, abstractions, generalizations, and symbolization of the human species. Progress, White contends, would have not been possible if it were not for the human ability *to give ideas an overt expression* through the use of different kinds of signs (or what he calls *the human symbolic behavior*). He asserts that human communication, as the most important and general of all symbolic behaviors, facilitates new combinations and syntheses of ideas that are passed from one individual to another and from one generation to the next. White also stresses that mathematics like language, institutions, tools, the arts, etc. is a cultural expression in the stream of the total culture. In fact, he argues that *mathematics is a synthesizing cultural process* in which concepts react upon concepts and ideas mix and fuse to form new syntheses. For White, culture is the locus of mathematical reality:

> Mathematical truths exist in the cultural tradition in which the individual is born and so they enter his mind from the outside. But apart from cultural tradition, mathematical concepts have neither existence nor meaning, and of course, cultural tradition has no existence apart from the human species. Mathematical realities thus have an existence independent of the *individual mind*, but are wholly dependent upon the *mind of the species*. (1956, pp. 2350-2351, emphasis added)

If mathematics is a symbolic practice, then the understanding of the nature of sign systems (i.e. the networking of signs over signs to create new sign-references according to a particular syntax, grammar, and semantics) is important for the teaching and learning of mathematics. Given that individuals, by nature, possess symbolic behavior and mathematics is a symbolic practice, then why do some students come to dislike mathematics as a subject and very soon fall behind? In general, semiotics theories give us a framework to understand the mathematical and the non-mathematical behavior of our students. Among different theoretical perspectives on semiotics, Peirce's theory of signs helps us to understand how we come to construct symbolic relationships based on associative iconic and indexical ones. A relation is iconic when it makes reference to the similarity between sign and object; it is indexical when it makes reference to some physical or temporal connection between sign and object; and it is symbolic when it makes reference to some formal or merely agreed upon link between sign and object, irrespective of the physical characteristics of either sign or object.

*Representation and interpretation* are two important aspects of Peirce's theory. He sees *representation* as the most essential mental operation without which the notion of *sign* would make no sense (Peirce, 1903) and considers that the mind comes to associate ideas by means of referential relations between the characteristics of sign-tokens and those of the objects they come to represent. As for *interpretation*, he considers that without the interpretation of signs, communicating with the self and with others becomes an impossible task (Peirce, CP vols. 2 and 4, 1974). That is, without being interpreted, a sign as a sign does not exist. What exists is a thing or event with the potential of being interpreted and with the potential of becoming a sign. Metaphorically speaking, a sign is like a switch; it becomes relevant and its existence becomes apparent only if it is turned on-and-off, otherwise, the switch is just a *thing* with the potential to become a switch. Likewise, a sign-token becomes a sign only when its relationship to an object or event is turned on in the flow of attention of the interpreting mind. That cognitive relationship between the sign-token and the interpreting mind is essential in Peirce's semiotic theory; in fact, it is what distinguishes his theory from other theories of signs. He crystallizes this interpreting relation between the sing-token and the individual as being the *interpretant* of the sign. This *interpretant* has the potential to generate a new sign at a higher level of interpretation and generalization. At this higher level, the new sign could, in turn, generate other iconic, indexical, or symbolic relationships with respect to the object of the sign. However, while the individual generates new *interpretants*, the object represented by the sign undergoes a transformation in the mind of the individual who is interpreting. That is, the object of the sign appears to be filtered by the continuous interpretations of the learner. In summary, Peirce considers the existence of the sign emerging both from the learner's intellectual labor to conceptualize the object of the sign and from the construction of this object in the learner's mind as a result of his intentional acts of interpretation.

> A sign stands *for* something *to* the idea that it *produces or modifies*. Or, it is a *vehicle* conveying into the mind something from without. That for which it stands is called its *object*; that which it conveys, its m*eaning*; and the idea to which it gives rise, its *interpretant*. (CP 1.339; emphasis added)

> By a Sign I mean anything whatever, real or fictile which is capable of a sensible form, is applicable to something other than itself...and that is *capable of being interpreted in another sign* which I call its Interpretant as to communicate *something that may have not been previously known about its* Object. There is thus a *triadic relation* between any Sign, and Object, and an Interpretant. (MS 654. 7) (Quoted in Pamentier, 1985; emphasis added).

Peircean semiotics helps to understand and explain many aspects of the complexity of the teaching and learning of mathematics. For example, teachers' and learners' expressions of their interpretations of mathematical signs by means of writing, reading, speaking, or gesturing; the interrelationship of the multiple representations of a concept without confounding the concept with any of its representations; and the dependency of mathematical notation on interpretation, cultural context, and historical convention. In trying to understand the semiotic nature of the teaching and the learning of mathematics, the above list about the semiotic aspects of the teaching-learning activity is anything but complete.

Brousseau, for example, contends that mathematicians and teachers both perform a "didactical practice" albeit of a different nature. Mathematicians, he says, do not communicate their results in the form in which they create them; they re-organize them, they give them the most general possible form; "they put knowledge into a communicable, decontextualized, depersonalized, detemporalized form" (1997, p. 227). This means, that they encode their creations using mathematical sign systems or they create new signs if necessary. That is, they objectify or symbolize their creations (i.e., knowledge objects) through spacio-temporal signs. On the other hand, the teacher undertakes actions in the opposite direction. She, herself, interprets mathematical meanings embedded in spacio-temporal signs (sign-tokens), decodes conceptual objects, and looks for learning situations that could facilitate the endowment of those sign-tokens with mathematical meanings in the minds of the learners. Thus, mathematicians and teachers of mathematics have a necessary interpretative relationship with the sign systems of mathematics (i.e., semiotic mathematical systems) because they continuously use them to encode, interpret, decode, and communicate the mathematical meanings of conceptual objects.

## Teacher's and Learner's Interpretations and Objectifications

The interpretation of signs is important for two reasons. First, signs are not signs if they are not interpreted; being a sign means being a sign *of* something *to* somebody. Second, the meaning of a sign is not only in the sign but also in the mind interpreting that sign. Now the question is: Does a sign objectify? According to Peirce's definition of signs, the answer is yes. A sign does objectify (i.e., It does make tangible) the object (conceptual or material) that it *stands for*. However, the sign not only objectifies but it also communicates (to the interpreting mind) something that has not been previously known about the object. Thus, Peirce's definition of signs implies a continuous process of interpretation and as a consequence, a concomitant process of gradual objectification.

Radford (2006b), on the other hand, considers that to objectify is to make visible and tangible something that could not be perceived before. He defines *objectification* as "an active, creative, imaginative, and interpretative social process of gradually becoming aware of mathematical objects and their properties". This definition is not in contradiction with Peirce's definition of signs. Radford (2003) also defines *means of objectification* as "tools, signs of all sorts, and artifacts that individuals intentionally use in social-meaning-making processes to achieve a stable form of awareness, to make apparent their intentions, and to carry out their actions to attain the goal of their activities" (p. 41). This definition is also in harmony with Peirce's definition of *interpretant.*

Since mathematical objects make their presence manifest only through signs and sign systems, how can teachers help learners to enter into the world of these semiotic systems and break the code, so to speak, to "see" those objects by themselves? Which mathematical objects do learners interpret from signs[2]? Or better, what "objects" do sign-tokens stand for in the minds of learners and teachers? Would

[2] Peirce gave several definitions of signs without contradicting previous definitions; instead he extended them. The invariant in his definitions is the triadic nature of the sign. The variation is in the names he gave to the sign-vehicle/ sign-token or material representation of the sign. First, he called *sign* the material representation of the sign, then sign-vehicle, and then representamen. Some mathematics educators have favored the sign triad object-sign-interpretant, others, like myself, have favored the sign triad object-representamen-interpretant because it does not use the word sign to indicate, at the same time, the triad and a term in the triad. In this paper, I use the words representamen, representation, and sign-token interchangeably. However, Peirce used the term representation in the general sense of being a necessary operation of the human mind.

learners and teacher 'interpret' the same mathematical objects (i.e., knowledge objects) from sign relations in mathematical sign systems? Who objectifies what? What are the "products or effects" of teacher's and learners' interpretations and objectifications? What are the teacher's interpretations of the learners' interpretations? It appears that teachers' and learners' interpretations and objectifications go hand in hand in the teaching-learning activity. Because of the triadic nature of the sign, there is a necessary and concomitant relationship between objectification and interpretation; there is no interpretation without objectification and no objectification without interpretation. In addition, these two processes are linked to a third concomitant process, the process of generalization.

Mathematicians objectify their creations inventing new mathematical signs or encoding them, using already established signs and sign systems. Teacher and learners re-create knowledge objects by interpreting mathematical signs in a variety of contexts; by doing so, they undergo their own processes of objectification. There seems to be running, in parallel, three processes of objectification: the objectification of the teacher, the objectification of the learners, and the teacher's objectification of the learners' objectifications. This seems to be a cumbersome play with words, although this is at the heart of the interrelationship between teaching and learning. Obviously, teacher and learners *objectify*, but do they objectify the same thing? Are these objectifications isomorphic or at least do they resemble each other? Is the teacher aware of these processes of objectification? If so, then the teacher has the potential: (a) to question and validate her own interpretations and objectifications; (b) to make hypotheses about the learners' objectifications; (c) to question the learners to validate her hypothesis in order to guide their processes of interpretation and objectification; and (d) to differentiate between her interpretations and objectifications and the learners' interpretations and objectifications.

When teachers and learners engage in the teaching-learning activity, w*ho* interprets and *what* is interpreted is somewhat implied, but it is nevertheless tacit, in the processes of objectification and interpretation. Obviously, in one way or another, teachers appear to play an important role in the learners' processes of interpretation and objectification. Brousseau appears to indicate these levels of interpretation. "The teacher's work … consists of proposing a *learning situation* to the learner in such a way that [the learner] produces her knowing as a *personal answer* to a question and uses it or modifies it in order to satisfy the constraints of the *milieu* [which is managed by necessary contextual and symbolic relationships] and *not* just the *teacher's expectations"* (1997, p. 228, emphasis added). Here, Brousseau points out the difference between learners' interpretations and teachers' interpretations and intentions. The question is whether or not the teacher's intentions and interpretations are realized in the students' interpretations and objectifications. In other words, do the teacher's and the learners' interpretations and objectifications, at least, resemble each other?

The teacher may design learning situations to induce learners' *construction* of mathematical objects and relationships among those objects; or the teacher may design learning situations in which the mathematical object is directly *delivered* as if it were a *cultural artifact* ready to be "seen" and memorized by the learners, while saving them the cost of their own abstractions and generalizations. In the latter case, the learners could be objectifying only the iconic or indexical aspects of the mathematical signs without capturing the symbolic aspects of those signs and their symbolic relations with other signs. In the former case, the learners capture both the symbolic aspects of the signs and their symbolic relations with other signs. This means that the learner is able to unfold those signs to "see" not only the symbolic aspects but also the indexical and iconic aspects embedded in them. Thus, learners and teacher could be interpreting different aspects of the mathematical signs (iconic, indexical, or symbolic) and, in consequence, interpreting the nature of mathematical objects from different levels of generalization and abstraction.

But what is the nature of the mathematical objects? How many types of objects could be interpreted from mathematical signs? Duval (2006) calls our attention to different types of *objects:*

*(1)* <u>*Objects*</u> as <u>*knowledge objects*</u> when attention is focused on the invariant of a set of phenomena or on the invariant of some multiplicity of possible representations. Mathematical objects like numbers, functions, vectors, etc. are all *knowledge objects.*

*(2)* <u>*Objects*</u> as <u>*transient phenomenological objects*</u> when the focus of attention is on this or that particular aspect of the representation given (e.g., shape, position, size, succession, etc.).

*(3)* <u>*Objects*</u> as <u>*concrete objects*</u> when the focus of attention is only on their perceptual organization.

Thus given a sign-token (i.e., a representamen or a representation), one could interpret at face value a *concrete object* if one focuses strictly on the material aspects of this semiotic means of objectification without constructing relationships with other representations. One could also interpret a *phenomenological object* if one goes beyond pure perception and focuses on aspects of those representations in space and time. Or one could also interpret a *knowledge object* if one focuses on the invariant relations in a representation or among representations. For example, Duval (2006) considers that the algebraic equation of a line and its graph could be seen as *phenomenological objects* when one focuses on the material aspects of these representations (i.e., iconic and iconic-indexical aspects of the sign-tokens or representations); they could be *knowledge objects* if one focuses on the invariance of these representations (i.e., symbolic aspects). Once one is able to interpret and to objectify *knowledge objects*, one should be able to unfold the phenomenological (i.e., iconic, iconic-indexical) and material (i.e., iconic) aspects of those objects. However, if one objectifies only *phenomenological* and *concrete objects*, one would not necessarily come up with the symbolic aspects of their corresponding *knowledge objects*.

In a nutshell, Duval's characterization of 'objects' points out the semiotic stumbling blocks of the teaching and learning of mathematics. In this characterization, the manifestation of a *knowledge object* depends not only on its representation but also on the human agency of the interpreter, user, producer, or re-producer of that object. *Objects* could be either the interpretation of pure symbolic relations embedded in the sign-tokens or representations (i.e., knowledge objects or pure signifieds); or they could be pure material tokens with no signifieds (i.e., concrete objects or concrete things); or they could be materially based tokens interpreted in time and space (i.e., phenomenological objects). The best case would be when the knowledge object is objectified in space and time with structured signifieds and with the potential of being used again in private and inter-subjective conceptual spaces; and, vice versa, when mathematical knowledge objects are decoded from the material sign-tokens or representations without escaping their extension in space and their succession in time.

As teachers and learners engage in the teaching-learning activity, *which* objects are the teacher referring to and *which* objects are the learners interpreting, objectifying, and working with? In the best of all scenarios, teacher and learners could interpret, from the same sign-token or representation, the same knowledge object. However, sometimes learners might only be interpreting concrete objects (i.e., concrete marks) or phenomenological objects missing, in the process, the knowledge object; meanwhile the teacher might be interpreting that learners are interpreting knowledge objects. This situation would clearly mark a conceptual rupture between teacher and learners. Therefore, interpreting in the classroom is a process that unfolds at three levels: (1) the level of those who send an intentional message (the teacher or the students); (2) the level of those who receive and interpret the message (the learners or the teacher); and (3) the level of the sender's interpretation of the receiver's interpretation. Thus, in the teaching-learning activity, the interpretation process is not only a continuous process of objectification but it is also a relative process (relative not only to teachers and learners but also relative to their prior knowledge, not to mention their beliefs about knowledge and knowing).

### Communicating Mathematically as a Means of Objectification

Communication in the mathematics classroom was viewed as depending exclusively on language (syntax and grammar), the active and passive lexicon of the participants, and the nature of the content of the message (Austin and Howson, 1979). Now, we have become aware that communication depends not only on natural language but also on the specific sublanguages of different fields of study, on linguistic and non-linguistic semiotic systems, and on a variety of social and cultural contexts in which the content of the message is embedded (Halliday, 1978; Habermas, 1984; Bruner, 1986; Vygotsky, 1987; Steinbring et al. 1998). Communication is also influenced by the behavioral dispositions and expectations of the participants as well as by their intersubjective relations of power (Bourdieu, 1991). Thus, perspectives on communication, in general, appear to have gained in complexity rather than in simplicity. Hence, perspectives on communication in the mathematics classroom have changed. This communication depends on natural language, mathematical sublanguage, and mathematical sign systems that mediate teacher's and learners' interpretations of mathematical objects.

Rotman (2000) points out a special feature of mathematical communication. He contends that in order to communicate mathematically, we essentially write. He contends that writing plays not only a *descriptive* but also a *creative* role in mathematical practices. He asserts that those *things* that are described (thoughts, signifieds, and notions) and the means by which they are described (*scribbles*) make up each other in a reciprocal manner. Mathematicians, as producers of mathematics, Rotman says, think their scribbles and scribble their thinking. Therefore, one is induced to think that learners of mathematics should do the same in order to produce and increase their personal 'mathematical wealth' as a product of their own mathematical labor. Such wealth does not accumulate all at once, but rather, it accumulates gradually in a synchronic as well as in a diachronic manner. We will enter the discussion of mathematical wealth and its synchronic-diachronic formation in the next section.

It appears that communicating mathematically is first and foremost an *act of writing* in the form of equations, diagrams, and graphs, supported all along by the specialized sublanguage of mathematics (mathematical dictionaries are a living proof that a mathematical sublanguage exists). We also need to consider that writing is not an isolated act. *Acts of writing* are concomitant with *acts of reading*, *listening*, *interpreting*, *thinking*, and *speaking*. All these acts intervene in semiotic processes of objectification resulting from personal processes of interpretation by means of contextualization and de-contextualization, concretization and generalization. That is, communicating mathematically depends on the synergy of the processes of interpretation, objectification, and generalization.

Gay (1980), Rossi-Landi (1980), and Deacon (1997) argue that any semiological system only has a finite lexicon but its semantics accounts for an unlimited series of acceptable combinations and that some of these combinations propose original ways of describing linguistic and extralinguistic reality. By the same token, the semiotic system of mathematics has a finite number of tokens and a finite set of axioms, theorems, and definitions (Ernest, 2006). When these elements are combined, they account for a large number of acceptable combinations that describe or justify, create or interpret, prove or verify, produce or decode already culturally structured mathematical objects. In discovering, constructing, apprehending, reproducing, or creating mathematical objects, reading and writing, listening and speaking become essential means for producing and interpreting combinations of referential relations (whether iconic, indexical, or symbolic) in a space that is both visible and intersubjective.

Vygotsky (1987) contends that in any natural language the writing and speaking acts are of different nature. Writing, he says, is a monological activity in which context is mental rather than physical and therefore it does not benefit from the immediate stimulation of others. This makes writing a demanding mental activity that requires not only the syntax and grammar of the language in use, but also the conceptual objects (i.e., knowledge objects) to be encoded or decoded using particular signs or combination of signs. In contrast, Vygostsky argues that oral dialogue is characterized by the dynamics of turn-taking determining the direction of speech: in oral dialogue, questions lead to answers and puzzlements lead to explanations. Written speech, instead, is not triggered by immediate responses as in oral dialogue. In writing, the unfolding of an argument is based much more on the personal and private labor of the individual. What Vygotsky argues about written and oral speech in the context of language can be transferred to the context of mathematical communication inside and outside of the classroom. It is one thing to clarify one's mathematical ideas when debating them and another to produce them as the result of one's own isolated mental labor and personal reflection. Both types of communication are commonly used among mathematicians (Rotman, 2000). In the last decades, oral and written modes of interacting in the classroom have been accepted as appropriate ways of communicating mathematically in the classroom (National Council of Teachers of Mathematics, Standards, 2000).

Rotman (2000) also considers that writing and thinking are interconnected and co-terminous, co-creative, and co-significant. There is no doubt that for professional mathematicians who are in the business of producing mathematical knowledge this should be the case. But are writing and thinking always interconnected, co-creative, and co-significant activities for the learners? Or are the learners using writing to take into account only the perceptual level of mathematical signs (i.e., sign-tokens or concrete objects) to automatically perform algorithmic computations in order to survive academically? Do multiple-choice exams interfere with the development of the learners' thinking-writing capacity? Do teachers make learners aware that reading, writing, listening, and speaking are effective means of objectifying mathematical knowledge objects? Do teachers make learners aware that communicating mathematically is also constituted by justifying in terms of explanation, verifications, making valid arguments, and constructing proofs?

To communicate mathematically in the classroom, the teacher has: (a) to flexibly *move* within and between different semiotic systems (e.g., ordinary language, mathematical sub-language, mathematical notations, diagrams, graphs, gestures, etc.) (Duval 2006); (b) to *refer* to mathematical objects that are other than visible and concrete (e.g., patterns, variance, and invariance across concepts) (see for example, Radford, 2003); (c) to *address* the learners in ways that are supposed to be meaningful to them (see for example, Ongstad, 2006); and (d) to *express* (verbally and nonverbally) the encoding and decoding of mathematical objects (Ongstad, 2006). Thus communicating mathematically between teacher and learners also requires the triad referring-addressing-expressing within and between several semiotic systems.

Interpreting mathematical signs is, in essence, a dynamic process of objectification in which the individual gradually becomes aware of knowledge objects represented in verbal, algebraic, visual, and sometimes imaginary representations (Davis and Hersh, 1981) and these representations have their own inherent properties. Becoming aware of knowledge objects through a variety of representations is in itself a demanding intellectual labor because of the characteristics of different representations. Skemp (1987), for example, points out differences between visual and verbal/algebraic representations: (1) Visual representations, such as diagrams, manifest a more *individual and analog* type of thinking; in contrast, verbal/algebraic representations manifest a more *socialized* type of thinking. (2) Visual representations tend to be *integrative or synthetic*; in contrast, verbal/algebraic representations are *analytical* and show detail. (3) Visual representations tend to be *simultaneous*; in contrast, verbal/algebraic representations tend to be *sequential*. (4) Visual representations tend to be *intuitive*; in contrast, verbal/algebraic representations tend to be *logical*. All these tacit differentiations are part and parcel of the tacit knowledge underpinning the classroom mathematical discourse and they may create difficulties for some learners (Presmeg, 1997). Yet another source of tacit knowledge in the classroom discourse is the variety of speech genres in mathematical discourse, for example, debating, arguing, justifying, and proving (Seeger, 1998). For Rotman, persuading, convincing, showing, and demonstrating are discursive activities with the purpose of achieving intersubjective agreement, generalization, and semiotic objectification.

This kind of *tacit knowledge* is not even remotely considered to be a part of the institutionalized school curriculum and many teachers are not even aware of it. The lack of explicitness of the tacit knowledge (expected to be understood by the learners) contributes to their abrupt and foggy entrance into the territory of the mathematical world, where those who will successfully accumulate 'mathematical wealth' are the ones who have the capacity of making *explicit* for themselves the *tacit* underpinnings of mathematical discourse and the triadic nature of the process of conceptualization (interpretation, objectification, and generalization).

To summarize, the emergence of mathematical objects and their meanings are in no way independent from intentional acts of interpretation and objectification mediated by reading and writing, speaking and listening. These acts are essential in the gradual mathematical growth of the *mathematical wealth* of the learners. Communicating mathematically in terms of reading, writing, listening, and debating should be considered *means of interpretation and objectification*. Hence, knowledge of semiotics appears to be a necessary conceptual tool in the classroom, not only for theoretical and explanatory purposes but also for pragmatic ones.

## Communicating Mathematically and Mathematical 'Wealth'

We would like to consider *mathematical wealth* as a metaphor to refer to the learner's continuous accumulation of mathematical knowledge as the product of his *intellectual labor* in an *intra-subjective* or *inter-subjective space*. This mathematical wealth is personal, although socially and culturally constituted, in addition to continuously being in the making.

As learners initiate and continue their journey in a mathematical world (which is planned by the institutionalized curriculum and/or by the learners' own interests), they continuously invest their existing mathematical wealth in order to increase its value. This investment is a continuous process of evolution, development, and transformation of the learner's referential relations using signs of iconic, indexical, and symbolic nature. Sign-tokens are not inherently icons, indices, or symbols; they are so only if interpreted in that way. The learner's interpretation of the referential relations of signs is manifested in his verbal and written responses. Say for example, that a learner is capable of keeping in memory the expression "*positive times positive is positive and negative times negative is positive*"(*). What is the meaning of this expression for a learner at different phases of his mathematical journey? Does it change? Does it remain the same?

It could be that he has memorized this expression as we memorize prayers when we are little; they just stick in our minds and we regurgitate them, even if we do not know what they mean. It could be that the learner interprets that expression as follows: "I remember that with a '-'and a '-' I can make a '+''; and with a '+' and a '+' I can only make a '+'". In these cases, the learner has only an iconic relationship *with* the expression (*). The learner is trying to make sense by focusing on the physical resemblances of the sign-tokens. Would he be able to ascend from the level of having an iconic relation *with* the expression (*) to the level of having an indexical relation *with* it? If the learner says, for example, "I know that 2 times 3 is 6 and -2 times -3 is 6", then the learner has an iconic-indexical relation *with* the expression (*) because he has a particular case that, in a way, indicates the *possibility* of the generality of this statement. However, when the learner comes to transform the above expression into an expression like "$xy$>0 only in cases when $x$>0 and $y$>0 or when $x$<0 and $y$<0" or to recognize that "-$x$" could be positive or negative depending on the value of $x$; then the learner has a symbolic relation *with* the expression (*). In the latter, the learner has come to enrich the meaning of the expression (*) as he works with variable quantities in the context of algebra.

In fact, as the learner comes to develop a symbolic relationship *with* this expression, or the expression (*) *becomes* symbolic *for* the learner, he will also come to have an iconic and iconic-indexical relationship *with* it. This is to say that once a learner has a symbolic relation *with* a sign, he would be able to unfold it into iconic and iconic-indexical relations whenever necessary. But the other way around is not necessarily true. A learner, who has an iconic or an iconic-indexical relationship *with* a sign-token (in this case the expression (*)) may not necessarily have a symbolic relationship *with* it (i.e., the sign-token does not yet stand for a knowledge object in the mind of the learner). What does this mean in terms of objects? A learner who has constructed either a concrete or a phenomenological object may very well have not yet constructed a knowledge object. However, if the learner has constructed a knowledge object, one can safely infer that he also has constructed the corresponding concrete and phenomenological objects (i.e., the learner could be able to deconstruct the knowledge object into phenomenological and concrete objects).

When a learner repeats the expression "positive times positive is positive and negative times negative is positive", it means that he could have an iconic, an iconic-indexical, or a symbolic relationship *with* the expression. What is the relationship that the learner has constructed? This is not evident until the learner has the opportunity to use it in different contextual situations. How does the teacher, who is in charge of guiding the learner, interpret the kind of relationship that the learner has *with* the expression? The teacher could have a symbolic relationship *with* the expression (*) and think that the learner also has a symbolic relationship *with* it. In addition, if the teacher considers that any sign-token or representation is inherently symbolic, independently of the learner's interpretation, she would firmly believe that the learner could have only a symbolic relationship *with* it. Henceforth, the teacher will not change her interpretation of the learner's interpretation, and this might rupture the semantic link in the communication between the teacher and the learner. The teacher's expectations would run at a level higher than the current level of the learner's possibilities. This could prompt the teacher to misjudge the capabilities of the learner and to give up on the learner instead of creating new learning situations to induce the construction of the learner's symbolic relationship *with* sign-tokens (in this case the expression (*)). The worst case would be when the learner stops increasing the value of his initial mathematical wealth and soon falls behind others and with feelings of not having any intellectual capacity for mathematics.

The teacher needs to understand that the expression (*) or any other sign could have iconic, iconic-indexical, or iconic-indexical-symbolic meanings *for* the learner at different points of his mathematical journey. That is, the teacher should be aware that what one routinely calls "symbols" are nothing else than sign-tokens that can be interpreted at different levels of generalization. The teacher who comes to understand *what* is symbolic and for *whom, what* is iconic-indexical and for *whom, what* is iconic and for *whom,* should also come to see her teaching deeply rooted in her own learning of mathematics and in her learning of her students' learning.

A teacher unaware of hers and the learners' possible iconic, indexical, and symbolic relationships *with* signs has no grounds for making hypotheses about the learners' interpretations. Then, the teacher will only interpret her own interpretations but not those of the learners. That is, the teacher comes to collapse the three levels of interpretation (her own interpretation, the learners' interpretation, and her interpretation of the learner's interpretation) making it only one muddled level that barely reflects the cognitive reality of those involved in the teaching-learning activity. In doing so, the teacher loses cognitive contact with the learner and thus the opportunity to support his personal processes of re-organization and transformation of his prior knowledge. It is not surprising, then, that Bauersfeld (1998) noticed that learners are alone in making their own interpretations and that there is a difference between "the matter taught" and "the matter learned". In our framework, this would translate as the existence of a difference between the matter interpreted by the teacher, the matter taught by the teacher, and the matter interpreted by the learners.

At any given moment, learners start with a particular set of mathematical conceptualizations to be transformed and re-organized. This initial set of conceptual elements, with whatever mathematical value (iconic, indexical, or symbolic) , is what we would like to call the *initial mathematical wealth*. This wealth, if invested *in* well designed learning situations using a variety of contexts, will allow the learner to embed iconic relationships into iconic-indexical relationships and to embed iconic-indexical relationships into symbolic ones. By doing so, the learner will come to construct mathematical patterns (at different levels of generalization), and regulated combinations of mathematical signs according to the structure of the mathematical sign systems he is working with at that moment. For example, learners' generalization, in the natural numbers, that multiplication makes bigger and division makes smaller, has to be re-conceptualized or re-organized when they start working with decimals. Later on, multiplication needs to be generalized as an operation with particular properties. And even later, division needs to be re-cognized and re-organized as a particular case of multiplication. That is, the learner's relationship *with* multiplication and its results needs to be transcended and attention needs to be focused on the nature of the operation itself, leaving implicit the indexicality of particular results as well as the iconicity of the sign-tokens "times" or "$x$" (like in 4 times 2 or $4x2$) used for multiplication in grade school. That is, multiplication, in the long run, should become a *symbolic operation* in the mind of the learner and not only the mere memorization of multiplication facts and the multiplication algorithm.

Hence, the nature of the investment of the learner's mathematical wealth resides in his capacity to produce new levels of interpretations and concomitantly new objects (concrete, phenomenological, and knowledge objects) at different levels of generality (iconic, indexical, or symbolic). This kind of investment increases the learner's mathematical wealth and goes beyond the manipulation of "sign-tokens [3]". That is, the value of the investment increases as the learner's interpretation of signs ascends from iconic, to iconic-indexical, to iconic-indexical-symbolic along his recursive and continuous personal processes of interpretation, transformation, and re-organization. Moreover, what becomes symbolic at a particular point in time in the learner's conceptual evolution could become the iconic or iconic-indexical root of a new symbolic sign at a higher level of interpretation. For example, our middle school knowledge of the real numbers with the operations of addition and multiplication becomes the root for interpreting, later on, the field structure of real numbers (i.e., the set of real numbers with the operations of addition and multiplication constitutes an additive group and a multiplicative group respectively and also the operation of multiplication distributives over the operation of addition).

In summary, learners who become mathematically wealthy are those who, along the way, are able to *interpret knowledge objects* from concrete *sign-tokens* and, in the process, are able to transcend their phenomenological aspects (i.e., iconic-indexical) and ascend to symbolic relationships *with* them through continuous acts of interpretation, objectification, and generalization. No matter through what lens one sees teaching and learning (i.e., learners discover, construct, or apprehend mathematical concepts), this triadic intellectual process (interpretation-objectification-generalization) is in reality a continuous recursive synchronic-diachronic process in their intellectual lives. This process is not only synchronic. It would be impossible for the learner to appreciate, all at once, current and potential meanings embedded in contextual interpretations of mathematical signs. Only when the learners have traveled the mathematical landscape for some time, they are able to "see" deeper meanings in mathematical signs as they interpret them in new contexts and in new relationships with other signs. Hence, the process is also diachronic. In the diachronicity of the process, the learner comes to understand the meaning potential of different signs.

Continuity and recurrence (i.e., going back in thought to consider something again under a new light) is the essence of this synchronic-diachronic process. Continuity and recursion allow learners (1) to carry on with their personal histories of conceptual development and evolution and (2) to transcend conceptual experiences in particular contexts through the observation of invariance and regularities as they see those experiences from new perspectives. That is, the sequential nature of the synchronic-diachronic process upholds all personal acts of interpretation, objectification, and generalization as well as of self-persuasion. Essentially, this is a mediated and a dialectical process between learner's knowing and knowledge in the permanent presence of the continuous flow of time, not only synchronically (in the short lived present) but also diachronically (across past, present, and future). As learners travel through the world of school mathematics, they construct and interpret for themselves a network of mathematical conceptualizations that is continuously re-organized through mathematical discourse

[2] It is worthwhile to notice that the expression *manipulation of symbols* becomes an oxymoron in Peirce's theory of signs and it could be replaced by the expression *manipulation of sign-tokens*.

(reading, writing, speaking, and listening) and de-contextualized through abstraction and generalization. As the learners' networks of mathematical conceptualizations become increasingly re-organized and transformed over time, the earlier value of their *mathematical wealth* also increases.

## Where do Learners Build up and Consolidate their Mathematical Wealth?

As learners travel through a particular territory of the mathematical world (e.g., the institutionalized school curriculum) they become *mathematically wealthier* because they become better acquainted with the ins and outs of the territory (i.e., they are able to produce symbolic interpretations of signs, or they relate to signs iconically and indexically but in a systematic manner). Others have a bird's eye view of the territory (i.e., they are able to produce only isolated iconic, or indexical interpretations of signs or they relate to signs iconically or indexically but in an unsystematic manner) and soon forget they have seen the landscape because they have made no generalizations. Still others are able to finish their journey traveling on automatic mode (i.e., using calculators and memorized manipulations) to establish their own peculiar relationships *with* the mathematical code or mathematical semiotic systems. Henceforth, they are able to produce, at best, only iconic interpretations from signs that soon will be forgotten.

The learners' mathematical wealth is built in a socio-cognitive classroom environment grounded on collective mathematical discourse as opposed to the unidirectional discourse from the teacher to the students. The quality of this discourse and the teacher's focus of attention on the learners' mathematical arguments influence the ways in which learners invest their mathematical wealth and how they become mathematically wealthier. It is well known that teachers, who are in charge of directing the classroom discourse, guide their practices according to conscious or unconscious theoretical perspectives on mathematics and the teaching of mathematics and they focus their attention on different aspects of classroom discourse. Sierpinska (1998) delineates the theoretical perspectives of teachers within three ample frameworks: *constructivist*, *socio-cultural*, and *interactionist* theories. Constructivist perspectives focus primarily on the learners' actions and speech while the actions and speech of the teacher are seen as secondary; that is, the constructivist teacher focuses essentially on the learners and their mathematics. Socio-cultural (i,e.,Vygotskian) perspectives focus on the social and historical character of human experience, the importance of intellectual labor, the mediating role of signs as mental tools, and the role of writing in the individual's intellectual development; that is, the socio-cultural teacher focuses essentially on culture and mediated socio-cognitive relations. Interactionist perspectives focus on language as a social practice; that is, the interactionist teacher focuses essentially on discourse and intersubjectivity. The *behaviorist* perspective could be added to those emphasized by Sierpinska. The behaviorist teacher focuses essentially on the learners' performance and pays little attention, if any, to the learners' ways of thinking. Finally, eclectic teachers seem to intertwine one or more theoretical frameworks according to the needs of the learners and their personal goals as teachers.

In any classroom, one needs to be cautions about what could be considered successful classroom communication. Successful classroom discourse may not be an indication of successful mathematical communication. Steinbring et al. (1998) contend that learners may be successful in learning only the rituals of interaction with their teachers or the routine and stereotyped frames of communication (like the well-known initiation-response-evaluation and funneling patterns). This kind of communication, they argue, leaves the learners speechless mathematically although keeping the appearance of an exchange of mathematical ideas. Brousseau (1997), and Steinbring et al. (1988), among others, present us with classical examples in which teachers, consciously or unconsciously, hurry up or misguide learners' processes of interpretation. Thus, communicating mathematically is more than simple ritualistic modes of speaking or the manipulation of sign-tokens; it is based on a progressive folding of meaningful interpretations passing from iconic, to iconic-indexical, to iconic-indexical-symbolic, and vice versa the unfolding of these relations in the opposite direction. Or as Deacon (1997) puts it: "symbolic relationships are composed of indexical relationships between sets of indices, and indexical relationships are composed of iconic relationships between sets of icons" (p. 75). That is, more complex forms of objectification emerge from simpler forms (i.e., simpler forms are transcended but remain embedded in more complex ones).

This is to say that the learner's process of mathematical interpretation is mediated by mathematical sign systems (icons, indexes, or symbols and their logical and operational relations) to constitute networks of conceptualizations and strategies for meaning-making. Communicating mathematically is, in fact, a *continuous* semiotic process of *interpretation, objectification,* and *generalization.* The construction of generalizations takes the learner from simple iconic relations, to indexical relations, and then to symbolic relation (i.e., folding of iconic relations into indexical ones, and then embedding indexical relations into symbolic ones) in order to make new interpretations and new objectifications that produce new generalizations. Moreover, deconstructing generalizations takes the learner in the opposite direction (i.e., unfolding of symbolic relations into iconic-indexical ones, and unfolding iconic-indexical relations into iconic ones) in order to exemplify, in particular cases, the skeletal invariance arrived at in generalization. Both directions are necessary because, together, they manifest not only the recursive and progressive constructive power of individual minds but also they manifest the human and socio-cultural roots of mathematical thinking.

## Concluding Remarks

Using a Peircean perspective on semiotics, this paper argues the notion of *mathematical wealth.* The initial cognitive mathematical wealth of any learner begins early in life. In his years of schooling and with the guidance of teachers, this initial wealth is progressively invested and its value gradually increased. The process of investment is, in essence, a mediated-dialectical process of decoding a variety of semiotic systems and, conversely, the encoding of thoughts and actions in those semiotic systems that intervene. Such systems could be of socio-cultural, pedagogical, or mathematical nature.

For mathematical wealth to increase in value in the process of investment, the learner has to decode not only the mathematical code but also the tacit code of socio-cognitive rules of engagement in the classroom. A priori and implicitly, he is expected to understand, that reading and writing, constructing and interpreting mathematical arguments, listening and speaking, and justifying in the form of explanation, verification, and proof are necessary activities for the learning of mathematics. He also has to understand that these activities can effectively mediate the appropriation and construction of mathematical meanings *from* mathematical signs and the encoding of his own interpretations and meaning-making processes back *into* mathematical signs.

The paper also argues three levels of interpretation in the classroom: (a) the learner's level of mathematical interpretation; (b) the teacher's own level of mathematical interpretation; and (c) the teacher's level of interpretation of the learners' mathematical interpretations. It is also argued that mathematical meanings are not only inherent in mathematical signs but also inherent in the learner's cognitive relationship *with* those signs. Such relationships could be of an iconic, indexical, or symbolic nature. These relationships are not necessarily disconnected since an iconic relationship could ascend and become an indexical relationship, and the latter could ascend and become a symbolic relationship. Vice versa, a symbolic relationship could be unfolded into an indexical relationship, and the indexical relationship could be unfolded into an iconic relationship. In fact, when learners manipulate sign-tokens, it is sometimes necessary, for efficiency, to keep symbolic relations implicit in one's mind. Keeping the ascending and descending directions of relationships *with* signs and sign systems allow learners to move from the particular to the general and from the general to the particular. The learners' relationships *with* mathematical signs and sign systems are the result of mediated-dialectical processes between the learner's knowing and knowledge in the synchronic and diachronic triadic process of *interpretation, objectification, and generalization*. The reader is referred to Radford (2003) and Sáenz-Ludlow (2003, 2004, and 2006) for other instances of learners' processes of interpretation, objectification, and generalization.

## References

Austin, J. L. & Howson A. G. (1979). Language and mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, *10*, 161-197.

Bauersfeld, H. (1998). About the notion of culture in mathematics education. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom*, (pp. 375-389). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bourdieu, P. (1991). *Language and symbolic power.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Edited by Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, and Virginia Warfield. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press.

Bruner, J. S. (1986). *Actual minds, possible worlds*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Boston: Houghton Mifflin Company.

Deacon, T. (1997). *The symbolic species: The coevolution of language and the brain*. New York: W. W. Norton & Company.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. In A. Sáenz-Ludlow, and N. Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics, Special Issue, Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. In A. Sáenz-Ludlow, & N. Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics, Special Issue, Educational Studies in Mathematics, 61*, 67-101.

Gay, W. (1980). Analogy and metaphor. *Philosophy and Social Criticism*, *7*(3-4), 299-317.

Habermas, J. (1984). *The theory of communicative action*. *2*. Boston: Beacon Press.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotics*. London: Arnold.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards of School Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Ongstad, S. (2006). Mathematics and mathematics education as triadic communication? In A. Sáenz-Ludlow, and N. Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics, Special Issue, Educational Studies in Mathematics, 61*, 247-277.

Parmentier, R. J. (1985). Signs' place in medias res: Peirce's concept of semiotic mediation. In E. Mertz & R.J. Parmentier (Eds.), *Semiotic mediation* (pp. 23-48). Orlando, Florida: Academic Press.

Peirce, C. S. (1903). The three normative sciences. In *The Essential Peirce*, *2*, (pp. 1893-1913) edited by The Peirce Edition Project, (pp. 196-207). Bloomington, Indiana: Indiana University Press.

Peirce, C. S. (1956). The essence of mathematics. In James R. Newman (Ed.), *The World of Mathematics*, *3*, (pp. 1773-1783), New York: Simon and Schuster.

Peirce, C. S. (1974). *Collected Paper (CP)*. C. Hartshorne, and P. Weiss (Eds.), *1-4*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. (Reference is made to volumes and paragraphs).

Peirce, C. S. (1976). *The New Elements of Mathematics (NEP)*. Carolyn Eisele (Ed), *1-4*. The Hague: Mouton Publishers.

Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 299-312). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to learners' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2006a). The anthropology of meaning. In A. Sáenz-Ludlow, & N. Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics, Special Issue, Educational Studies in Mathematics, 61*, 39-65.

Radford, L. (2006b). Glossary of internal document of the symposium of the Symbolic Cognition Group. Vermont, January 3-9, 2006.

Radford, L. (in press). Semiótica cultural y cognición. In R. Cantoral & O. Covián (Eds.), *Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica*. México.

Rossi-Landi, F. (1980). On linguistic money. *Philosophy and Social Criticism*, *7*(3-4), 346-372.

Rotman, B. (2000). *Mathematics as sign*. Stanford, California: Stanford University Press.

Sáenz-Ludlow, A. (2003). A collective chain of signification in conceptualizing fractions. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 181-211.

Sáenz-Ludlow, A. (2004). Metaphor and numerical diagrams in the arithmetical activity of a fourth-grade class. *Journal for Research in Mathematics Education, 1*(35), 34-56.

Sáenz-Ludlow, A. (2006). Classroom interpreting games with an illustration. In A. Sáenz-Ludlow, & N. Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics, Special Issue, Educational Studies in Mathematics, 61*, 183-218.

Seeger, F. (1998). Discourse and beyond: On the ethnography of classroom discourse. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp.85-101). Reston, Virginia: National

Council of Teachers of Mathematics.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-62). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Skemp, R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.

Steinbring, H., Bartolini Bussi, M. G., & Sierpinska, A. (Eds.) (1998). *Language and communication in the mathematics classroom*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. In B. Chirstiansen, A. G. howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education*, (pp. 141-171). Boston: B. Reidel Publishing Company.

Vygotsky, L. S. (1987). *Thinking and speech*. New York: Plenum Press.

White, L. A. (1956). The locus of mathematical reality: An anthropological footnote. In James R. Newman (Ed.), *The* World *of Mathematics*, *4*, (pp. 2348-2364). New York: Simon and Schuster.

Wilder, R. (1973/1968). *Evolution of mathematical concepts*. Milton Keyness, England: The Open University Press.

**Adalira Sáenz-Ludlow**
Department of Mathematics and Statistics
University of North Carolina at Charlotte
USA

E-mail: sae@email.uncc.edu

# Everyday and Mathematical Language 100 Years After the Publication of "On Denoting" by Bertrand Russell

Giorgio T. Bagni [1]

**RESUMEN**

El artículo "On denoting" (*en torno a la denotación*) de B. Russell, publicado en 1905, es un hito de la reflexión filosófica sobre el lenguaje. En este artículo, examinamos la reacción de los alumnos, de una frase inspirada de un ejemplo célebre introducido por Russell, y de un aserto expresado en lenguaje matemático. Apartándonos del análisis de los datos experimentales que encierra la interpretación de los conceptos clásicos de realidad y de racionalidad, proponemos algunas reflexiones que pasan por alto "la objetividad epistémica estándar de la certeza privada hacia la práctica de la justificación en el interior de una comunidad comunicativa" (J. Habermas). Concluimos que el lenguaje constituye un momento muy importante en el cual el sentido de una expresión está fijo; sin embargo, mantenemos presente en nuestra mente que "el lenguaje, así como cualquier otro sistema semiótico, funciona en el interior de una red de significados culturales" (L. Radford).

- **PALABRAS CLAVE:** Lenguaje, justificación, sentido, racionalidad, verdad, validez.

**ABSTRACT**

The article "On denoting" by B. Russell, published in 1905, is a milestone in philosophical reflection on language. In the present paper, we examine pupils' reactions both to a sentence inspired by a celebrated example introduced by Russell and to a statement expressed in mathematical language. We move away from an interpretation of experimental data confined to the classical concepts of truth and rationality and propose instead some reflections that shift "the standard of epistemic objectivity from the private certainty of an experiencing subject to the public practice of justification within a communicative community" (J. Habermas). We conclude that language is a very important moment in which the meaning of an expression is fixed, but we keep in mind that "language, like any other semiotic system, functions inside a cultural network of significations" (L. Radford).

- **KEY WORDS:** Language, justification, meaning, rationality, truth, validity.

*Fecha de recepción: Marzo de 2006/ Fecha de aceptación: Abril de 2006*

1 Department on Mathematics and Computer Science. University of Udine (Italy)

## RESUMO

O artigo “On denoting” (*em torno da denotação*) de B. Russell, publicado en 1905, é um sinal da reflexão filosófica sobre a linguagem. Neste artigo, examinamos a reação dos alunos, de uma frase inspirada em um exemplo célebre introduzido por Russell, e de uma afirmação expressada na linguagem matemática. Nos afastando da análise dos dados experimentais que contém a interpretação dos conceitos clássicos de realidade e de racionalidade, propomos algumas reflexiones que passam por alto “a objetividade epistemica padrão da certeza privada em direção à prática da justificação no interior de uma comunidade comunicativa” (J. Habermas). Concluímos que a linguagem constitui um momento muito importante no qual o sentido de uma expressão está fixo; entretanto, mantemos presente em nossa mente que “a linguagem, assim como qualquer outro sistema semiótico, funciona no interior de uma rede de significados culturais” (L. Radford).



- **PALAVRAS CHAVE:** Linguagem, justificação, significado, racionalidade, verdade, validade.



## RÉSUMÉ

L’article “On denoting” (*De la dénotation*) de B. Russell, publié en 1905, est un jalon de la réflexion philosophique sur le langage. Dans cet article, nous examinons la réaction des élèves à une phrase inspirée d’un célèbre exemple introduit par Russell et à une assertion exprimée en langage mathématique. En nous écartant de l’analyse des données expérimentales qui limite l’interprétation aux concepts classiques de vérité et de rationalité, nous proposons quelques réflexions qui amènent « l’objectivité épistémique standard de la certitude privée vers la pratique publique de la justification à l’intérieur d’une communauté communicative » (J. Habermas). Nous concluons que le langage constitue un moment très important par lequel le sens d’une expression est fixé, mais nous gardons présent à l’esprit le fait que « le langage, ainsi que n’importe quel autre système sémiotique, fonctionne à l’intérieur d’un réseau de significations culturelles » (L. Radford).



- **MOTS CLÉS :** Langage, justification, sens, rationalité, vérité, validité.


## 1. Introduction

Many recent works show that culture and mathematical thinking are strictly linked (see for instance Wartofsky, 1979; Crombie, 1995; Radford, 1997; Furinghetti & Radford, 2002). And language is an important element in this link. A quotation by Radford (making reference to Ilyenkov, 1977, p. 79) will help us to frame more precisely the focus of our work and its educational relevance: Radford states that “language is *one* of the means of objectification (albeit a very important one), but … there are also several others”; moreover, “as a means of objectification, language does not objectify indiscriminately. Language, like any other semiotic system, functions inside a cultural network of significations, from whence grammar and syntax draw their meaning” (Radford, 2003a, p. 141; 2003b)[2]. The question with which we are going to deal in this paper is the following: firstly, can we consider language as a sort of favourite or absolute moment in which the meaning of an expression is fixed? (Let us notice, for instance, that paradigmatic analysis seeks to identify the different pre-existing sets of signifiers which can be related to the content of texts: Sonesson, 1998). Secondly, let us remember that, according to R. Rorty, the discipline presently called philosophy of language has two different sources: one of them is the cluster of problems “about how to systematize our notions of meaning and reference in such a way as to take advantage of quantificational logic”; the latter, explicitly epistemological, “is the attempt to retain Kant’s picture of philosophy as providing a permanent ahistorical framework for inquiry in the form of a theory of knowledge” (Rorty, 1979, p. 518). In this paper we are going to discuss, on the basis of some experimental data, whether or not we can always make reference to a definite set of meanings for linguistic expressions and, in particular, to a clear notion of truth.

From the historical viewpoint, G. Vattimo points out that “almost all the most important and subtle problems of contemporary language philosophy were elaborated and faced, for the first time, in the Middle Ages” (Vattimo, 1993, p. 640; in this paper the translations are ours). The medieval doctrine of *suppositio* is deemed significant (Bocenski, 1956, pp. 219-230; Kneale & Kneale, 1962). According William of Shyreswood, “meaning is the representation [*praesentatio*] of an idea in the mind. The *suppositio* is the co-ordination [*ordinatio*] of the concept under another concept” (Bocenski, 1956, p. 217); Petrus Hispanus, too, in his *Summulae logicales*, pointed out the difference between *significatio* and *suppositio* (Geymonat, 1970, I, p. 549; Bagni, 1997); and in his *Summa Logicae* (I, 63, 2) William of Ockham (1281-1349) stated that the *suppositio* “is a property belonging to a term, just because [it is included] in a proposition” (Bocenski, 1956, p. 219).

Nevertheless we cannot completely develop this interesting issue through reference to the Logic of the Middle Ages. We shall introduce the subject of our study through a theoretical framework based upon some elements of 20th-century philosophical research: in section 2 we shall make reference to the paper *On denoting* by Bertrand Russell (1872-1970), published a century ago, together with its historical connection to Meinong and Frege (2.1); some positions of Wittgenstein’s (2.2), Quine’s and Brandom’s (2.3) will allow us to introduce Apel’s and Habermas’ approaches (2.4), which are to be considered crucial for our work. Through these we shall discuss (section 5) experimental data (sections 3 and 4).

## 2. Theoretical framework

### *2.1. Frege and Russell*

Let us consider first some reflections on “definite descriptions” (Penco, 2004, p. 54): we shall compare some ideas put forward by Gottlob Frege (1848-1925) and by

[2] Aristotle distinguished men from animals because of the presence of the logos (logos, often translated by “reason”; but H.G. Gadamer suggests a proper translation of this term by “language”: Gadamer, 2005, p. 155).

Russell. In order to introduce the problem, it is recalled that since Aristotle we have known that "through language we can correctly refer to things that do not exist [...] or to elements whose existence is possible but that can hardly be proved" (Lo Piparo, 2003, p. 165). It is moreover worth mentioning the theoretical approach of Alexius Meinong (1853-1920), who stated that "objects of knowledge do not necessarily exist" (Meinong, 1904, p. 27; Orilia, 2002).

The Fregean approach is based upon the Compositionality Principle (Frege, 1923, p. 36), according to which a statement containing a term without denotation has no truth value: for instance, a statement referring to a non-existing person is neither true nor false (Frege, 1892). On the contrary, according to Russell, statements containing definite descriptions (e.g. *the current President of the Italian Republic*) imply the existence of an individual (*Mr. Carlo Azeglio Ciampi*) to whom the considered property is referred (and this individual is unique), at least at the time when the sentence is stated (March 2006). The problem is that some definite descriptions (and names are definite descriptions too) do not refer to existing individuals: when we talk about *Ares* or *the father of Phobos and Deimos* we are not making reference to an existing individual.

In order to avoid ambiguity, in his article entitled *On denoting*, published in *Mind* a century ago, Russell suggested making the logical form of a definite description explicit. So, a proposition like *The father of Phobos and Deimos is the Greek god of war* would be *There is one and only one individual of whom it can be said: he is the father of Phobos and Deimos, and he is the Greek god of the war*. Frege's and Russell's approaches are very different. Let us consider, for instance, the sentence *The King of France is bald*: according to Frege it is neither true nor false because the term *the king of France* has no reference; according to Russell it is false because we can write it in the form: *There is one and only one king of France and he is bald* (Wittgenstein will make reference to a similar position: Wittgenstein, 1969a, p. 173).

Many years after the publication of *On denoting*, P.F. Strawson (1950) underlined an important distinction between a *sentence* and an *utterance* and this led us to distinguish between *denotation* and *reference*. Denotation links an expression and what it denotes (taking into account conventions and linguistic rules); reference links an expression and the object to which the speaker wants to make reference (Bonomi, 1973; Penco, 2004, p. 84). With *The King of France is bald*, Russell deals only with denotation, while Frege considers the speaker's idea to make reference to a non-existing object, so he concludes that the sentence has no truth value, such a reference being impossible. Of course if we consider a different context, e.g. a legend or a fiction where the king of France is actually bald, we would have to revise our position (it should be remembered that according to Frege, words must be considered only within a proposition: for instance, *Phobos and Deimos* could indicate either the sons of Ares and Aphrodite or the satellites of Mars; see: Frege, 1923).

### *2.2. Wittgenstein: from "Tractatus" to "Philosophical Investigations"*

The position of Russell's most important pupil, Ludwig Wittgenstein (1889-1951), is rather complex because it must be divided into two very different periods. In his *Tractatus logico-philosophicus* (published in 1921 with a preface by Russell himself)

Wittgenstein reprises (sometimes critically) and develops some ideas of Frege’s and of Russell’s: while Frege considers natural language as unavoidably imperfect, Russell wants to point out its logical form (Russell, 1910) and Wittgenstein states that “in fact, all the propositions of our everyday language, just as they stand, are in perfect logical order” (Wittgenstein, 1922, § 5.5563; but Wittgenstein’s position expressed in his *Tractatus*, reveals some tension; see: Marconi, 2000a, p. 54); so if our language “looks ambiguous, we must recognise that its essence or its true logical form are hidden” (Penco, 2004, p. 60).

The so-called second Wittgenstein proposed a very different approach (his *Philosophical Investigations* were published in 1953, two years after the philosopher’s death): the meanings of words must be identified in their uses within a context. The concept of ‘language-game» is fundamental: it is a context of actions and words in which an expression assumes its meaning; so a language game is both a tool for the study of the language and the “starting point” where “we can reflect on the language by describing the differences and similarities of language games, instead of looking for its essence, as done in the *Tractatus*” (Penco, 2004, p. 105; concerning the continuity between the first and the second Wittgenstein, see: Marconi, 2000b, pp. 95-101). In addition, Hilary Putnam developed this approach and concluded that the meaning of a word is to be found in (and in some ways distributed among) the community of speakers (Putnam, 1992).

Let us now examine a remark by Habermas (that we shall reprise later): through his descriptive approach to the use of language, Wittgenstein levels its cognitive dimension; as soon as the truth conditions that we must know in order to employ propositions correctly are derived just from linguistic praxis *to which we are used*, the difference between validity and social value vanishes (Habermas, 1999, p. 80): this suggests a revision of the concepts of ‘validity’ and ‘truth’. Of course Habermas’ position must be considered critical: he underlines that the justification cannot be based upon life, but rather must be related to fundability (Habermas, 1983, p. 80). We shall reprise this point later.

### *2.3. Some ideas by Quine and Brandom*

Willard Van Orman Quine (1908-2000) makes reference to the modality *de dicto* and *de re* (Quine, 1960; Kneale, 1962): “a *de re* belief is a belief expressed by the speaker about some properties of a certain object in the world; a *de dicto* belief is a belief expressed by the speaker about a proposition” (Penco, 2004, p. 161; interesting historical references can be found in: von Wright, 1951, pp. 25-28 and Prior, 1955, pp. 209-215). For instance, the proposition *John believes that Ares is the Greek god of war*, referring to a *de dicto* belief, cannot be replaced by *John believes that the father of Phobos and Deimos is the Greek god of war*: as a matter of fact we cannot be sure that John knows that *Ares* is *the father of Phobos and Deimos*. On the contrary, the proposition *about Ares John believes he is the Greek god of war*, referring to a *de re* belief, can be replaced by *concerning the father of Phobos and Deimos, John believes he is the Greek god of war*, where the speaker characterised *Ares* through a personal description, even if John does not know it. Some similar situations have been studied by Frege (see for instance: Frege, 1892; Origgi, 2000, pp. 110-123) and we shall reprise them in order to discuss our experimental data.

Brandom tries to revise some of Wittgenstein’s ideas and proposes replacing his language games with his 'game of giving and asking for reasons' (Brandom, 1994 and 2000). Although Brandom's conception of language has been considered restrictive (it does not consider aspects like calling, ordering etc.), his approach will be relevant to our research (see moreover: Habermas, 1999, pp. 102 and 140).

### *2.4. Apel and Habermas*

According to Karl-Otto Apel (1987), every speaker implicitly makes reference to norms for *meaningful* and intelligible discourse, *truth* (romantic correspondence between sentence and reality), *veracity* (correct expression of the speaker's state) and *normative correctness* (respect of community rules). As a consequence we are able to acquire the conditions for 'ideal' communication, which assumes the role of normative principle: the discussion's impartiality and the possibility to reach some agreement among the bargaining parties depend on those conditions (see moreover the "rational" discussion as introduced in Lakoff & Johnson, 1980, p. 111, and the "conversation", p. 102).

According to Habermas, the rationality of judgements does not imply their truth, but only their justified acceptability in a particular context (Habermas, 1999, p. 102). Jürgen Habermas distinguishes between the truth of a statement and its rational affirmability (Habermas, 1999, p. 11) and reprises Apel's ideas (criticised in Davidson, 1990) in order to highlight the fundamental possibility of an 'ideal' communication: he underlines the importance of the inclusion in a universal world of well-ordered interpersonal relations, and the crucial element in order to do that is the rigorous condition of communication (Habermas, 1999, p. 279).

Intersubjective validity does not derive only from a convergence that can be observed with reference to the ideas of different individuals: Habermas refers epistemic authority to a community of practice and not only to individual experience (Habermas, 1999, pp. 136 and 238). The structure of the discourse creates a connection between the structures of rationality itself. As a matter of fact, it has three different roots, closely related one to another: the predicative structure of knowledge at an institutional level (Cassirer, 1958, III, p. 329), the teleological structure of the action and the communicative structure of the discourse (Habermas, 1999, p. 99). These Habermasian considerations will be very important in interpreting our experimental data.

## 3. Methodology

In this work, we are going to analyse the discussion of a group of students aged 15-16 years (5th class of a *Ginnasio-Liceo Classico*, in Treviso, Italy) regarding a question about the truth of two sentences in some ways similar to *The King of France is bald* (Russell, 1905)[3].

During a lesson in the classroom, pupils were divided into groups of three pupils each. The division was at random. The researcher (who was not the mathematics teacher of the pupils but who was however present in the

3 The *Ginnasio-Liceo Classico* is a school with high educational standards, in which pupils are asked to study many classical subjects, in disciplines such as Italian Literature, Latin and Greek Literature, History and so on; the mathematical curriculum is based upon elementary Algebra and Euclidean Geometry, and some basic elements of Logic are included (in particular, pupils knew the notion of proposition as a 'statement that can assume one and only one truth value, true or false': for instance, sentences including predicates related to subjective evaluations cannot be considered propositions).

classroom with the teacher and the pupils) proposed two sentences to the pupils and invited all the groups to decide if the given sentences were true or false. In particular, we are going to focus on the discussion that occurred in one of the groups.

The question was proposed while taking into account the importance of avoiding the suggestion of a strict dilemma (‘true or false?’), forcing the students to give a specific answer. As we shall see, the first sentence (*The King of the inhabitants of the Moon is bald*) makes reference to Russell’s aforementioned example; after some minutes, the second sentence ($1/0+1/0+1$ *is odd*) was added, in order to see the effect of asking such kinds of questions in sentences expressed in algebraic language[4].

## 4. Experimental data

The researcher writes the first sentence on the blackboard. The second sentence will be added after ten minutes:

*For each sentence say: Is it a true sentence? Is it a false sentence?*

*(1) The King of the inhabitants of the Moon is bald (2) …*

*Discuss your answer in the group and write it on a sheet of paper.*

Here is the (translated) transcription of the conversation that took place in the group formed by A., B., C.

### *4.1. Transcription*

- [01] A.: (*smiles*) What is it?
- [02] B.: (*in a low voice*) *The King of the inhabitants of the Moon is bald*.
- [03] A.: The King of the inhabitants of the Moon, what does that mean?
- [04] C.: Well, I say, the Moon is something with no hair, if we consider the sun and its beams…
- [05] B.: (*ironically*) But what are you talking about?
- [06] C.: No, no, I am joking, there are no inhabitants on the Moon. If they existed, I would be able to state something.
- [07] B.: (*looks around*) But what does it mean, true or false?
- [08] A.: I do not know who the inhabitants of the Moon are, and then, come on, there are no inhabitants on the Moon and so there is not a king.
- [09] B.: Then it is false.
- [10] C.: It’s not as easy as it seems, in my opinion there is something unclear. They are playing with words and so we don’t understand. Let’s read carefully. There is not a king, and the inhabitants, what does it mean? On the Moon there is nobody, hence the king of the Moon is the Moon itself.
- [11] A.: Perhaps there are some micro-organisms, something that we cannot see, entities different from us.
- [12] C.: (*gesticulating*) Or think, perhaps someone saw an astronaut with his helmet, so that he looks bald and when he talks about it, so perhaps it is true.
- [13] A.: (*sure*) No, it is not relevant, it says the inhabitants of the Moon, it doesn’t say the Moon or the king of the Moon is false, I mean bald. We must see the inhabitants and then the king.
- [14] B.: Well, in this case it’s false, there are no inhabitants, no king, hence of course he’s not bald.

4 Of course, a full evaluation of this important aspect ought to be based upon particular and detailed research.

- [15] A.: Watch out, perhaps there's a trap, as he says (*C.*), perhaps the exercise cannot be done.
- [16] B.: I'll divide this sentence up: when I say that the king of the inhabitants does not exist, full stop, it is false, and what follows is also false. If I say, later, that he is bald or not, this is not important, do you understand?
- [17] A.: (*doubtful*) So let's say that the sentence… would be false.
- [18] C.: Yes, the simplest thing to do is to answer that it's false. But if the question deals with a film or a tale with a king of the Moon that is bald, in that tale it's true.
- [19] A.: Just a moment, it's better to emphasize the king of the Moon, in our answer. The king is false. If we want to say that the whole sentence is false we must be able to see the king, with his hair and …
- [20] B.: (*interrupting*) No, it's impossible to see him, he doesn't exist. (*To C.*) It's no tale, otherwise they would have told us. So it's false.
- [21] A.: (*after a while*) In short, one thing is to say that a sentence is false, I say that something is not true and so there is something wrong in the sentence. Another thing is to talk about someone and then say he is, for instance, bald or not; when I talk about a person, I suppose he exists.
- [22] B.: No, wait, but in your opinion is it enough to say something about someone who doesn't exist in order to make him real? If he doesn't exist, he's false.
- [23] A.: He is not false, the king; the problem is whether it's false that he is bald. Let's think carefully, before answering. It seems false, but perhaps it's not so.
- [24] B.: Listen, think about the question as a whole, they say the king is bald, it can be false because the king is not bald or because there is no king at all. If we want it to be true we must have the king and he must be bald.
- [25] C.: (*looking at A., a bit impatient*) Come on, it's clearly false! You make us wrong, if you say that it's not false, then it is true, and what do you mean? Do you mean that the inhabitants of the Moon are bald?
- [26] A.: Eh, it's not true, it's obvious. However it is not easy to understand. (*Looking at B.*) No, you are right, let's write false, I agree.

Now the Researcher completes the task on the blackboard:

*For each sentence say: Is it a true sentence? Is it a false sentence?*

*(1) The King of the inhabitants of the Moon is bald* (2) $1/0+1/0+1$ *is odd*

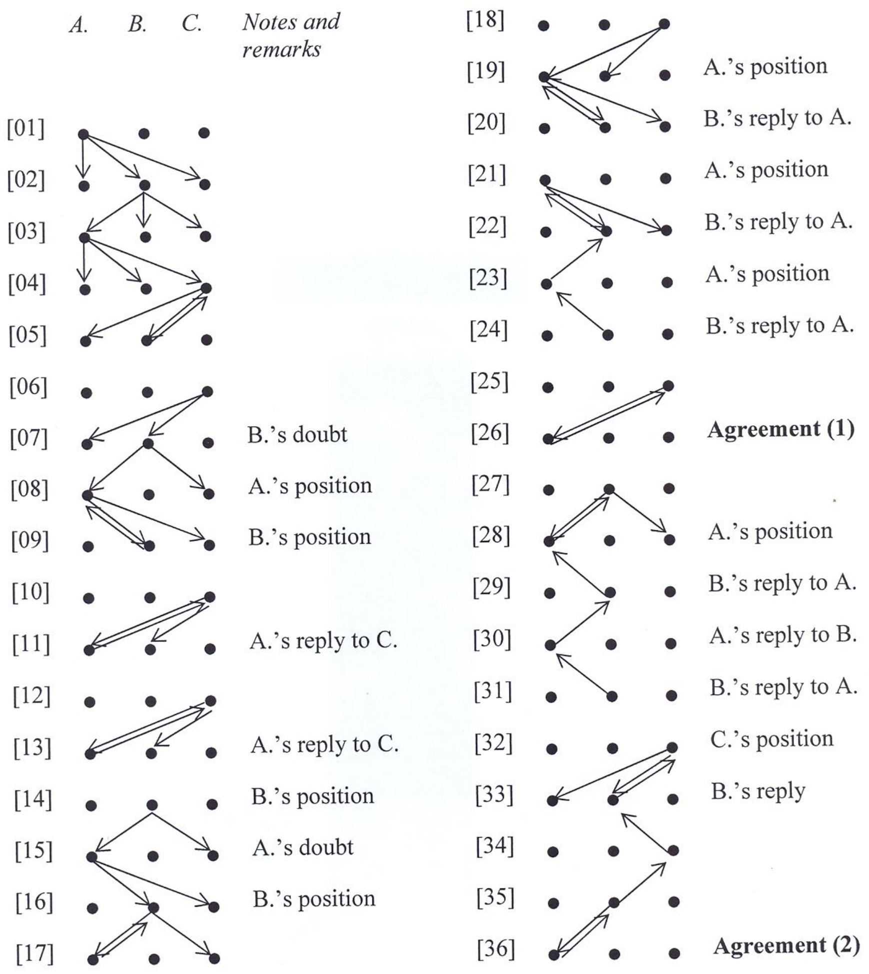
*Discuss your answer in the group and write it on a sheet of paper.*

- [27] B.: Yes, it's like before. False.
- [28] A.: (*doubtful*) Just a moment… if we say false, it's even. Maybe this exercise is impossible.
- [29] B.: No, why do you think even? It's different. Here it's odd, we must look at this sentence.
- [30] A.: Watch out, it's not like the first sentence. And what about if they had said even?
- [31] B.: False. It would be false, 1/0 is not a number.
- [32] C.: $1/0$ means infinity.
- [33] B.: No, the teacher told us it isn't true, $1/0$ is impossible.

- [34] C.: It’s not infinity but it’s a very very big number. How can I say if it’s odd or even?
- [35] B.: No, no, it’s not a number, it would be very big but actually it doesn’t exist.
- [36] A.: Come on, there is a trick: they make you think it’s odd because it’s like 2+2+1 that would be 5, but the starting number doesn’t exist. It’s false, once again.

### *4.2. Interaction flow chart*

In the following flow chart (Sfard & Kieran, 2001; Ryve, 2004) different arrow directions are used to distinguish *proactive* and *reactive* utterances. In the case considered, the essential connection with everyday language prompted us to avoid the distinction between *object-level* and *non-object-level* utterances.




In the next section we are going to analyse our experimental data (transcriptions and flow chart) on the basis of our framework.

## 5. Discussion

### *5.1. First sentence*

In [03] A. proposes the problem of reference and in [04] C. seems to suggest the possibility of an unusual interpretation of 'bald' ("the Moon is something with no hair, if we consider the sun and its beams…"). However the student himself, turns back in [06] to a more usual meaning ("No, no, I am joking, there are no inhabitants on the Moon"). A.'s next utterance, [08], can be connected to the Compositionality Principle: "Come on, there are no inhabitants on the Moon and so there is not a king".

C.'s utterance [10] is interesting: "they are playing with words and so we don't understand. Let's read carefully. There is not a king, and the inhabitants; what does it mean? On the Moon there is nobody, hence the king of the Moon is the Moon itself". He does not recognise the "perfect logical order" of common language (Wittgenstein, 1922, p. 5.5563): as well as 'referential opacity' (Quine, 1960), he considers the semantic aspect and proposes an unusual *suppositio* (if "on the Moon there is nobody", we could say that "the king of the Moon is the Moon itself").

C.'s next utterance [12] is also interesting ("Or think, perhaps someone saw an astronaut with his helmet, so that he looks bald and when he talks about it, so perhaps it is true"): the communication function of the language is explicitly considered (Dummett, 1993, p. 166; see moreover: Habermas, 1999, p. 105) and this is the one point in which falsehood, although in *de dicto* modality, does not refer only to the problem of existence. A's utterance [13] ("no, it is not relevant, it says the inhabitants of the Moon, it doesn't say the Moon or the king of the Moon is false, I mean bald. We must see the inhabitants and then the king") is not completely clear, but brings the discussion back to the main question.

Now we can consider the direct comparison of B.'s ideas with A.'s. In [14] B. says: "well, in this case it's false, there are no inhabitants, no king, hence of course he's not bald". A.'s utterance [15] expresses some doubts ("perhaps the exercise cannot be done"): he seems to choose a 'Fregean' approach, and a conclusion avoiding the assignment of a truth value, but in [16] B. expresses his viewpoint further: "I'll divide this sentence up: when I say that the king of the inhabitants does not exist, full stop: it is false, and also what follows is false. If I say, later, that he is bald or not, this is not important, do you understand?" The Compositionality Principle is once again followed, but B. seems to consider a 'Russellean' denotation. A.'s utterance [17] ("so let's say that the sentence… would be false") does not show conviction.

C.'s utterance [18] refers to the importance of the context (see moreover the *suppositio*): now the connection between an expression's meaning and its use in a context is clear: "but if the question deals with a film or a tale with a king of the Moon that is bald, in that tale it's true".

In [19] A. declares his willingness to accept the falsehood of the sentence considered, but underlines that it mainly refers to the existence of the king of the Moon: "just a moment, it's better to emphasize the king of the Moon, in our answer. The king is false". This point is interesting: like in [17], A. shows a positive frame of mind with reference to B.'s position, but according to him "if we want to say that the whole sentence is false we must be able to see the king, with his hair and …".

After B.’s reply [20], taking into account C.’s objections too (“It’s no tale, otherwise they would have told us”) and after a while, in [21] A. says: “One thing is to say that a sentence is false. I say that something is not true and so there is something wrong in the sentence. Another thing is to talk about someone and then say he is, for instance, bald or not; when I talk about a person I suppose he exists.” So A. seems to propose a distinction between a *de dicto* modality and a *de re* modality: the pupil would distinguish a statement like *I say that the king of the Moon is bald* and a statement like *I say about the king of the Moon that he is bald* (Penco, 2004, p. 191). The second expression, in A.’s opinion, would be divided up in the following way: *I am talking about the king of the Moon and (later) I say he is bald*: so the expressions examined would bind the speaker.

As we can see from the flow-chart, a direct comparison between A. and B. now resumes ([21]-[24]): B.’s reply [22] is interesting (“but in your opinion is it enough to say something about someone who doesn’t exist in order to make him real?” This brings to mind Meinong’s position according to which “objects of knowledge do not necessarily exist”: Meinong, 1904, p. 27). Nevertheless, A. is not completely persuaded and certainly, in this ‘ game of giving and asking for reasons’: he acknowledges in [23] the plausibility of B.’s conclusions (“it seems false, but perhaps it’s not so”) but at the same time confirms his ‘Fregean’ approach (“he is not false, the king; the problem is whether it’s false that he is bald”). However, the first part of the discussion is about to finish: as a matter of fact, in [24] B. states once again his ‘Russellean’ viewpoint: “listen, think about the question as a whole, they say the king is bald, it can be false because the king is not bald, or because there is no king at all. If we want it to be true we must have the king and he must be bald”.

While [14], [16] and [22] did not completely persuade A., this utterance is crucial and conclusive (C.’s utterance [25], “come on, it’s clearly false” can be compared with a well-known note of Wittgenstein’s: “all I should further say as a final argument against someone who did not want to go that way, would be: ‘Why, don’t you see…!’ – and that is no *argument*”: Wittgenstein, 1956, I,§ 34). In [26], after pointing out the lack of clarity in the expression examined (“Eh, it’s not true, it’s obvious, however it is not easy to understand”: and A. makes reference to a ‘non-truth’, perhaps in order to underline its difference from a ‘falsehood’) A. accepts B.’s conclusions.

With reference to Apel’s perspective, A.’s doubts do not seem to be related to comprehension of the meaning of the discourse: its ‘truth’ (correspondence between sentence and reality) is connected with or perhaps set against its *normative correctness* (respect of community rules), mainly if we consider the features of a critical analysis of the sentence itself, of the “definite descriptions” (Penco, 2004, p. 54) that we find in it and of the coordination of its parts ([24]: “it can be false because the king is not bald, or because there is no king at all”). If we keep in mind the distinction between the truth of a statement and its rational affirmability (Habermas, 1999, p. 11) and if we interpret ‘correctness’ as acceptability according to rigorous conditions of communication (Habermas, 1999, p. 279), we can say that A. is induced to accept the correctness of the shared final choice thanks to the argument developed by the group of students (in particular by B.). We shall reprise these considerations in the final section of our work.

### *5.2. Second sentence*

B.’s role is now sure and, as shown by the flow-chart, the discussion about the second sentence can be divided into two moments: a first debate between A. and B. ([27]-[31]) and a second debate between C. and B. ([32]-[35]). In both these moments, B. expresses his positions properly, taking into account the results of the previous discussions about the first sentence (see for instance the utterance [27]).

A.'s doubt [28] is interesting (the utterance is similar to [15], but now it is based upon a different argument). According to A., to say that '$1/0+1/0+1$ *is odd' is false* would correspond to saying that '$1/0+1/0+1$ *is even' is true*: let us note that a similar argument (to say that *'The king of the inhabitants of the Moon is bald' is false* would correspond to saying that *'The king of the inhabitants of the Moon is hairy' is true*) was not considered by A. in the previous part of the discussion (only C.'s utterance [25] can be connected to this argument). Such a difference seems to be related to the different contexts: the mathematical one, with its particular language and symbols, can suggest the use of *tertium non datur*.

B.'s strong utterance [31] ("$1/0$ isn't a number") is very important: the student interprets the sentence $1/0+1/0+1$ *is odd* as $1/0+1/0+1$ *is an odd number* and, more precisely, $1/0+1/0+1$ *is a number and this number is odd*. The first part of this sentence is false (the analogy with B.'s utterance [16] is clear: we have once again a 'Russellean' denotation) so all the sentence must be considered false.

The discussion between C. and B. deals with the 'nature' of $1/0$: in [32] C. states "1/ 0 means infinity" and, because of B.'s objection ([33]: "no, the teacher told us it isn't true, $1/0$ is impossible"), in [34] C. changes his mind and states that "it's a very very big number", so "how can I say if it's odd or even?" However in [35] B. points out: "no, no, it's not a number, it would be very big but actually it doesn't exist" and the discussion leads A. to accept B.'s justified position explicitly ([36]: "the starting number doesn't exist. It's false, once again").

It should be noted that the syntactic structure $n+n+1$ to which the second sentence makes reference can lead the students to consider an odd number. This element is very relevant, and in our opinion this is the crucial point with reference to the role of algebraic language: in the first sentence, the existence of the king of the inhabitants of the Moon would have no consequences about his hair, but now if $n$ is an integer, $n+n+1$ would really be an odd number (in [36] A. says that "they make you think it's odd because it's like $2+2+1$ that would be $5$, but the starting number doesn't exist"). But this factor did not influence the students.

## 6. Concluding remarks

Let us now turn back to the questions proposed in the Introduction. Clearly experimental data can lead us to state once again that language is a very important moment in which the meaning of an expression is fixed; but clearly we must also keep in mind that "language, like any other semiotic system, functions inside a cultural network of significations" (Radford, 2003a, p. 141). It is impossible to make reference to a completely sure set of meanings and to a single, absolute notion of truth (moreover, relevant issues concern the connection between the acquisition of a representation, namely a linguistic one, with the full conceptual acquisition of an object: D'Amore, 2001b; see moreover: Duval, 1998, D'Amore, 2001a, 2003a and 2003b).

The experience described brings to mind a position held by Putnam (1992) according to which the meaning (and we are thinking about a whole sentence, more than about a single word) is to be found in the community of the speakers and refers to different ways of considering the sentence (and, as we shall see, to the three “different roots of rationality”: Habermas, 1999, p. 99). Rorty notices that a merely ‘subjective’ argument must be disregarded by the reasonable partners of a conversation (Rorty, 1979, p. 368): we realized that a meaning has been built by collective negotiation, a real ‘game of giving and asking for reasons’ (Brandom, 2000); but in our opinion it is trivial to conclude that both arguments by B. and by A. are plausible (Strawson, 1950). As a matter of fact, this plausibility of both positions and their evolution lead us to posit: is it correct to propose a similar ‘truth evaluation’?

Of course both sentences were ambiguous, while the choice true-false can be considered only if the assigned sentence is a real ‘proposition’: but how can our pupils recognise real ‘propositions’? The traditional answer ‘a proposition is a statement that assumes one and only one truth value’, in this case, can be circular. Moreover, it is important to realize that the ambiguity considered is not connected to the structure of the assigned sentences (for instance, $3/6+3/6+1$ *is odd* is clearly a… perfect proposition!).

The task considered is neither connected only to an isolated epistemic rationality, nor refers only to coherence (Rorty, 1979, p. 199; Williams, 1996, p. 267; certain and coherent proofs can coexist with “conceptual confusion”: Wittgenstein, 1953, pp.II-XIV) or analogy: the comparison [27]-[31] demonstrates that the difference in the contexts (the first sentence is expressed in common language, the second refers to a mathematical context) does not authorize us to transfer the truth value from the first to the second sentence uncritically. Moreover, the term ‘false’ can have different values in different contexts (Lakoff & Johnson, 1980 p. 153).

So, should we doubt everything? This question is misleading (“if you tried to doubt everything you would not get as far as doubting anything. The game of doubting itself presupposes certainty”: Wittgenstein, 1969b, p. 115; from the logical viewpoint we agree with Lolli, 2005, p. 13-17). Furthermore, a charge of a conventionalistic reduction of the concept of truth would be groundless (Andronico, 2000, p. 252); Wittgenstein himself would reply: “‘So you are saying that human agreement decides what is true and what is false?’ – It is what human beings *say* that is true and false; and they agree in the *language* they use. That is not agreement in opinions but in form of life” (Wittgenstein, 1953, p. 241).

As noted in 2.4, this position has been elaborated by some authors. It is important to consider our traditional notions of ‘truth’ and ‘validity’: knowledge’s objectivity criterion is founded on public praxis instead of private certainty, so ‘truth’ becomes a ‘three members’ concept of validity (Habermas, 1999, p. 239), a validity justified with reference to a public (Schnädelbach, 1992).

The discussion of our experimental data does not allow us to conclude only that working together (in groups) is useful: such a conclusion would be induced by our opting to propose the exercise to some groups of pupils. The final common decision of the students was achieved after an active discussion, and had some consequences (Habermas, 1999, p. 137; in our case, for instance, the group must declare its decision to the Researcher, to the Teacher and to other students); so we must surpass the sphere of propositions (and texts) and take into account the sphere of actions, e.g. in using a predicate (as noticed by Kambartel, 1996, p. 249). With regard to the students' behavior, the discussion (in the perspective of a decision to be taken) seems to interpret the mentioned position and to develop the different roots of rationality (Habermas, 1999, p. 99). Of course the debate, under the explicit influence of the text of the assigned exercise, is still far from the 'ideal' communication described by Habermas and by Apel (C.'s role, for instance, is often minor, although his utterances related to the *suppositio* are really interesting); in other groups of students, the discussion developed without a final agreement (Lakoff & Johnson, 1980); nevertheless our experimental data (in particular utterances [19], [21]-[24], [28]-[31] and [32]-[35], too) enables us to state that the discussion did not lead the pupils only to a convergence of different ideas, but to a real change of viewpoint (see Habermas, 1999, p. 238 e 254). This fundamental moment can be highlighted in the utterances [24] and [35].

We would like to make a final reflection: we provided out students with a stimulating question about the truth (and the falsehood) of some sentences in different contexts, and this is quite a traditional exercise; but how can we speak about 'truth' with any certainty? Rorty asks himself if the truth of a sentence can really be considered as independent from the context of the justification (Rorty, 1994) and our experience seems to bear out his doubt: the behavior of some students did change after the passage from a non-mathematical context to a mathematical one; for instance, in [28]-[30] and in [36] the influence of algebraic syntax is clear (A.: "they make you think it's odd because it's like $2+2+1$ that would be $5$, but the starting number doesn't exist"; let us remember that the mathematical curriculum of the Italian *Ginnasio-Liceo Classico* includes several chapters devoted to algebraic syntax; nevertheless, as previously noted, algebraic language's general role in pupils' behavior should be investigated more deeply).

Reflection on these issues is important (Lakoff & Johnson, 1980, p. 197-222): a distinction between 'validation' (*Geltung*) and 'validity' (*Gültigkeit*) is fundamental and can lead us to weaken the traditional distinction between the 'validation' of a statement that is approved and the 'validity' of a statement that *deserves* intersubjective acknowledgment because it is true (Habermas, 1999, p. 277). If we accept that a truth predicate can be considered (also) in the language game of the argumentation, we can point out its importance (also) with reference to its functions in this language game and hence in the pragmatic dimension of a particular use of the predicate (Habermas, 1999, p. 246) and we must take into account some important consequences. Truth itself must be related to a particular culture (to a particular language system): probably students belonging to different cultures would express their arguments in a different way (as previously noted, in Italy, the *Ginnasio-Liceo Classico* is considered a school with high educational standards). Truth is relative to comprehension, so there are no points of view allowing us to obtain 'absolutely objective truth' (Lakoff & Johnson, 1980, p. 236 and 283).

Thus, the intercultural aspect must be considered and this point is expressed in Wittgenstein too: "if anyone believes that certain concepts are absolutely the correct ones, and that having different ones would mean not realizing something that we realize – then let him imagine certain very general facts of nature to be different from what we are used to, and the formation of concepts different from the usual ones will become

intelligible to him" (Wittgenstein, 1953,§ II-XII). This point of view has been examined by M. Messeri, who concludes: "so there is something intrinsically misleading in ethnocentric behavior according to which different cultures are incomplete, rough and unsatisfactory" (Messeri, 2000, p. 190).
Moreover, some influences of didactical contract can be considered: probably students' arguments would be different if used outside the school, in a different context. So, does the predicate of truth have different uses? Is 'school rationality' different from 'everyday rationality'? What are the consequences in the educational sphere? Further research can be devoted to examining these important points more deeply.

## References


Andronico, M. (2000). Giochi linguistici e forme di vita. In Marconi, D. (Ed.), *Guida a Wittgenstein*. Laterza, Roma-Bari, 241-288.

Apel, K.-O. (1987). Fallibilismus, Konsenstheorie der Wahrheit und Letzbegründung. Forum f. Philosophie. *Philosophie und begründung*. Suhrkamp, Frankfurt a.M., 116-211.

Bagni, G.T. (1997). *Elementi di storia della logica formale*. Pitagora, Bologna.

Bocenski, J.M. (1956). *Formale Logik*. Verlag Karl Alber, Freiburg-München (page numbers refer to the Italian translation: *La logica formale.* Einaudi, Torino 1972).

Bonomi, A. (1973). *La struttura logica del linguaggio*. Bompiani, Milano.

Brandom, R. (1994). *Making it Explicit*. Harvard University Press, Cambridge MA.

Brandom, R. (2000). *Articulating Reasons. An Introduction to Inferentialism*. Harvard University Press, Cambridge MA.

Cassirer, E. (1958). *Philosophie der symbolischen Formen*. WBG, Darmstadt.

Crombie, A.C. (1995). Commitments and styles of European scientific thinking. *History of Sciences 33*, 225-238.

D'Amore, B. (2001a). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis* XXXVIII, *1*, 17-46.

D'Amore, B. (2001b). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis* XXXVIII, *2*, 143-168.

D'Amore, B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manqué. *For the learning of mathematics, 23*(1), 47-51.

D'Amore, B. (2003b). The noetic in mathematics. *Scientia Pedagogica Experimentalis* XXXIX, *1*, 75-82.

Davidson, D. (1990). The Structure and Content of Truth. *The Journal of Philosophy, 87*, 279-328.

Dummett, M. (1993). Language and Communication. In *The Seas of Language*. Oxford University Press, Oxford, 166-187.

Duval, R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6*, 139-163.

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, 100*, 25-50 (Senso e riferimento. *Senso, funzione e concetto*, Laterza, Roma-Bari, 2001).

Frege, G. (1923). Logische Untersuchungen, Dritter Teil: Gedankegefuge. *Beitrage zur Philopsophie des Deutschen Idealismus, 3*, 36-51 (page numbers refer to Italian translation: *Ricerche logiche*. Guerini, Milano 1992).

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In English L. (Ed.), *Handbook of International Research in mathematics education*. Erlbaum, Hillsdale, 631-654.

Gadamer, H.G. (2005). *Linguaggio*. Laterza, Roma-Bari.

Geymonat, L. (1970). *Storia del pensiero filosofico e scientifico*. Garzanti, Milano.

Habermas, J. (1983). *Moralbewusstsein und kommunikatives Handeln*. Suhrkamp, Frankfurt a.M. (page numbers refer to Italian translation: *Etica del discorso*. Laterza, Roma-Bari 1985).

Habermas, J. (1999). *Wahrheit und Rechtfertigung. Philosophische Aufsätze*. Suhrkamp, Frankfurt a.M. (page numbers refer to Italian translation: *Verità e giustificazione*. Laterza, Roma-Bari 2001).

Ilyenkov, E. (1977). The concept of the ideal. In *Philosophy in the USSR. Problems of Dialectical Materialism*. Progress Publishers, Moskwa, 71-79.

Kambartel, F. (1996). Universalität, richtig verstanden. *Deutsche Zeitschrift für Philosophie, 44*, 249.

Kneale, W.C. (1962). *Modality "De Dicto" and "De Re"*. In Nagel, E., Suppes, P. & Tarsky, A. (Eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, I. The University Press, Stanford, 622-633.

Kneale, W.C. & Kneale, M. (1962). *The Development of Logic*. Clarendon Press, Oxford.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. University of Chicago Press, Chicago (page numbers refer to Italian translation: *Metafora e vita quotidiana*. Bompiani, Milano 1998).

Lolli, G. (2005). *QED Fenomenologia della dimostrazione*. Bollati Boringhieri, Torino.

Lo Piparo, F. (2003). *Aristotele e il linguaggio*. Laterza, Roma-Bari.

Marconi, D. (2000a). Il Tractatus. In *Guida a Wittgenstein*. Laterza, Roma-Bari, 15-58.

Marconi, D. (2000b). Transizione. In *Guida a Wittgenstein*. Laterza, Roma-Bari, 59-102.

Meinong, A. (1904). Über Gegenstandstheorie. In Meinong, A., Ameseder, R. & Mally, E., *Untersuchungen zur Gegenstandstheorie und Psychologie*. Barth, Leipzig, 1-50 (page numbers refer to Italian translation: *Teoria dell’oggetto*. Quodlibet, Macerata 2003).

Messeri, M. (2000). Seguire la regola. In Marconi, D. (Ed.), *Guida a Wittgenstein*. Laterza, Roma-Bari, 151-192.

Origgi, G. (2000). *Introduzione a Quine*. Laterza, Roma-Bari.

Orilia, F. (2002). *Ulisse, il quadrato rotondo e l’attuale re di Francia*. ETS, Pisa.

Penco, C. (2004). *Introduzione alla filosofia del linguaggio*. Laterza, Roma-Bari.

Prior, A.N. (1955). *Formal Logic*. Oxford University Press, London.

Putnam, H. (1992). Significato, riferimento e stereotipi. In Bottani A. & Penco, C. (Eds.), *Significato e teorie del linguaggio*. Franco Angeli, Milano.

Quine, W.V.O. (1960). *Word and Object*. MIT Press, Cambridge MA.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of mathematics*, *17*(1), 26-33.

Radford, L. (2003a). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(2), 123-150.

Radford, L. (2003b). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought, In Anderson, M. & Al. (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis*. Legas, Ottawa, 49-79.

Rorty, R. (1979). *Philosophy and the Mirror of Nature*. Princeton University Press, Princeton NJ (page numbers refer to the German translation: *Der Spiegel der Natur*. Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1981).

Rorty, R. (1994). Sind Aussagen universelle Geltungsansprüche? *Deutsche Zeitschrift für Philosophie*, *42*(6), 975-988.

Ryve, A. (2004). Can collaborative concept mapping create mathematical productive discourses? *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 157-177.

Russell, B. (1905). On Denoting. *Mind*, *14*, 479-493.

Russell, B. (1910). Knowledge by Acquaintance and Knowledge by Description. *Proceedings of the Aristotelian Society*, *11*, 108-128.

Schnädelbach, H. (1992). Thesen über Geltung und Wahrheit. *Zur Rehabilitierung des animal rationale*. Suhrkamp, Frankfurt a.M., 104-115.

Sfard, A. & Kieran, C. (2001). Cognition as communication. Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, Activity*, *8*(1), 42-76.

Sonesson, G. (1998). The Concept of Text in Cultural Semiotics. *Trudy po znakyvym sistemam - Sign System Studies 26*, Tartu University Press, Taru, 88-114.

Strawson, P.F. (1950). On Referring. *Mind*, 59, 320-344 (Flew, A., Ed.: *Essays in Conceptual Analysis*. Macmillan, London 1960, 21-52).

Vattimo, G. (Ed.) (1993). *Enciclopedia Garzanti di Filosofia*. Garzanti, Milano.

Von Wright, G.E. (1951). *An Essay in Modal Logic*. North-Holland, Amsterdam.

Wartofsky, M. (1979). Perception, representation and the forms of action: towards an historical epistemology. In *Models. Representation and the scientific understanding*. Reidel, Dordrecht, 188-209.

Williams, M. (1996).*Unnatural doubts*. Princeton University Press, Princeton NJ.

Wittgenstein, L. (1922). *Tractatus logico-philosophicus*. Routledge and Kegan Paul, London.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophische Untersuchungen*. Blackwell, Oxford.

Wittgenstein, L. (1956). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Blackwell, Oxford.

Wittgenstein, L. (1969a). *Philosophische Grammatik*. Blackwell, Oxford (page numbers refer to the Italian translation: *Grammatica filosofica*. La Nuova Italia, Firenze 1990).

Wittgenstein, L. (1969b). *Über Gewissheit*. Blackwell, Oxford.

**Giorgio T. Bagni**
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
Italia

E-mail: bagni@dimi.uniud.it

# Semiosis as a Multimodal Process

Ferdinando Arzarello [1]

## RESUMEN

Las aproximaciones semióticas clásicas resultan ser muy estrechas para investigar los fenómenos didácticos del salón de clase de matemáticas. Además de los recursos semióticos estándares utilizados por los alumnos y los maestros (como los símbolos escritos y el lenguaje hablado), otros recursos semióticos importantes son los gestos, las miradas, los dibujos y los modos extra-lingüísticos de expresión. Sin embargo, estos últimos caben difícilmente en las definiciones clásicas de los sistemas semióticos. Para superar esta dificultad, en este artículo adopto una perspectiva vygotskiana y presento una noción extendida de sistema semiótico, el haz semiótico*,* que se revela particularmente útil para incluir todas los recursos semióticos que encontramos en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. En este artículo subrayo algunos puntos críticos en la descripción usual de los sistemas semióticos; discuto acerca del paradigma multimodal y encarnado que ha venido emergiendo en los últimos años en investigaciones realizadas en psicolinguística y neurociencia y analizo los gestos desde un punto de vista semiótico. Luego, introduzco la noción de paquete semiótico y lo ejemplifico a través de un estudio de casos.

- **PALABRAS CLAVES:** Recursos semióticos, encarnamiento, multimodalidad, gestos, inscripciones.

## ABSTRACT

Classical semiotic approaches are too narrow to investigate the didactical phenomena in the mathematics classroom. In addition to the standard semiotic resources used by students and teachers (e.g. written symbols and speech), other important semiotic ressources include also gestures, glances, drawings and extra-linguistic modes of expressions. However, these semiotic ressources fit with difficulties within the constraints of the classical definitions of semiotic systems. To overcome such difficulties I adopt a vygotskian approach and present an enlarged notion of semiotic system, the *semiotic bundle*, which reveals particularly useful for framing all the semiotic resources we find in the learning processes in mathematics. The paper stresses some critical points in the usual description of the semiotic systems; it discusses the multimodal and embodied paradigm, which is emerging in these last years from researches in psycholinguistics and neuroscience and analyses gestures from a semiotic point of view. Then it introduces the notion of semiotic bundle and exemplifies it through a case study.

*Fecha de recepción: Junio de 2006/ Fecha de aceptación: Julio de 2006*

1 Dipartimento di Matematica, Università di Torino, Italy.

• **KEY WORDS:** Semiotic resources, embodiment, multimodality, gestures, inscriptions.

## RESUMO

As aproximações clássicas semióticas resultam ser muito limitadas para investigar os fenômenos didáticos de sala de aula de matemática. Além aos recursos padrão dos semióticos usados pelos estudantes e pelos professores (como os símbolos escritos e a língua falada), outros recursos importantes dos semióticos são os gestos, os olhares, os desenhos e as maneiras extra-lingüísticas da expressão. Não obstante, estes últimos não se adaptam bem nas definições clássicas dos sistemas dos semióticos. A fim superar esta dificuldade, neste artigo eu adoto um perspectiva vygotskiana e apresento uma noção estendida do sistema do semiótico ao pacote semiótico que é particularmente útil incluir todos os recursos dos semióticos que nós encontramos nos processos da aprendizagem da matemática. Neste artigo eu enfatizo alguns pontos críticos na descrição usual dos sistemas semióticos.Discuto sobre o paradigma multimodal e personificado que tem emergido nos últimos anos das investigações feitas na psicolinguística e na neurociência e analiso os gestos sob um ponto da vista do semiótico. Logo, eu introduzo a noção do pacote do semiótico e a exemplifico com um estudo dos casos.

• **PALAVRAS CHAVE:** Recursos semióticos, significação, multimodalidade, gestos, inscrições.

## RÉSUMÉ

Les approches sémiotiques classiques sont trop étroites pour étudier les phénomènes didactique de la salle de classe de mathématiques. En plus des ressources sémiotiques traditionnelles (comme les symboles écrits et la langue) utilisées par les élèves et les enseignants, d'autres ressources sémiotiques importantes comprennent les gestes, les regards, les dessins et les modes extra-langagiers d'expression. Ces dernières rentrent difficilement dans les définitions classiques des systèmes sémiotiques. Afin de surmonter cette difficulté, dans cet article j'adopte une perspective vygotskienne et je présente une notion élargie de système sémiotique, le faisceau sémiotique, qui s'avère particulièrement utile afin d'inclure toutes les ressources sémiotiques que nous rencontrons dans les processus d'apprentissage des mathématiques. Dans cet article je souligne quelques points critiques concernant la description usuelle des systèmes sémiotiques; j'offre une discussion du paradigme multimodal et incarné lequel a émergé ces dernières années dans le cadre des recherches menées en psycholinguistique et neuroscience. Suite à cela j'analyse les gestes d'un point de vue sémiotique. Après j'introduis la notion de paquet sémiotique et l'exemplifie à travers une étude de cas.

• **MOTS CLÉS:** Ressources sémiotiques, incarnement, multimodalité, gestes, inscriptions.

## Introduction.

Semiotics is a powerful tool for interpreting didactical phenomena. As Paul Ernest points out,

> *"Beyond the traditional psychological concentration on mental structures and functions 'inside' an individual it considers the personal appropriation of signs by persons within their social contexts of learning and signing. Beyond behavioural performance this viewpoint also concerns patterns of sign use and production, including individual creativity in sign use, and the underlying social rules, meanings and contexts of sign use as internalized and deployed by individuals. Thus a semiotic approach draws together the individual and social dimensions of mathematical activity as well as the private and public dimensions. These dichotomous pairs of ideas are understood as mutually dependent and constitutive aspects of the teaching and learning of mathematics, rather than as standing in relations of mutual exclusion and opposition."* (Ernest, 2006, p.68)

However, the classical semiotic approach places strong limitations upon the structure of the semiotic systems it considers. They generally result in being too narrow for interpreting the complexity of didactical phenomena in the classroom. As we shall discuss below, this happens for two reasons:

(i) As observed by L. Radford (2002), there are a variety of semiotic resources used by students and teachers, like gestures, glances, drawings and extra-linguistic modes of expression, which do not satisfy the requirements of the classical definitions for semiotic systems as discussed in literature (e.g. see Duval, 2001).

(ii) The way in which such different registers are activated is multimodal. It is necessary to carefully study the relationships within and between registers, which are active at the same moment and their dynamics developing in time. This study can only partially be done using the classic tools of semiotic analysis.

To overcome these two difficulties, I adopt a Vygotskian approach for analyzing semiotic resources and present an enlarged notion of semiotic system, which I have called *semiotic bundle*. It encompasses all the classical semiotic registers as particular cases. Hence, it does not contradict the semiotic analysis developed using such tools but allows us to get new results and to frame the old ones within a unitary picture.

This paper is divided into three main chapters. *Chapter 1* summarizes some salient aspects of (classical) Semiotics: it shows its importance for describing learning processes in mathematics (§ 1.1), points out two opposite tendencies in the story of Semiotics, which reveal the inadequacy of the classical approach when it is used in the classroom (§1.2), and discusses the semiotic role of artefacts, integrating different perspectives from Vygotsky to Rabardel (§1.3).

*Chapter 2* develops the new concept of semiotic bundle (§2.1), discusses the multimodal and embodied paradigm, which has emerged in recent years from research in psycholinguistics and neuroscience

(§2.2), and analyses gestures from a semiotic point of view (§2.3).

*Chapter 3* introduces a case study, which concretely illustrates the use of semiotic bundles in interpreting the didactical phenomena.

A *Conclusion*, with some comments and open problems, ends the paper.

## 1. The semiotic systems: a critical approach

### *1.1 Semiotics and mathematics*

Charles S. Peirce points out a peculiar feature of mathematics which distinguishes it from other scientific disciplines:

> *"It has long been a puzzle how it could be that, on the one hand, mathematics is purely deductive in its nature, and draws its conclusions apodictically, while on the other hand, it presents as rich and apparently unending a series of surprising discoveries as any observational science. Various have been the attempts to solve the paradox by breaking down one or other of these assertions, but without success. The truth, however, appears to be that all deductive reasoning, even simple syllogism, involves an element of observation; namely, deduction consists in constructing an icon or diagram, the relations of whose parts shall present a complete analogy with those of the parts of the object of reasoning, of experimenting upon this image in the imagination, and of observing the result so as to discover unnoticed and hidden relations among the parts. ... As for algebra, the very idea of the art is that it presents formulae, which can be manipulated and that by observing the effects of such manipulation we find properties not to be otherwise discerned. In such manipulation, we are guided by previous discoveries, which are embodied in general formulae. These are patterns, which we have the right to imitate in our procedure, and are the icons par excellence of algebra".* (Hartshorne & Weiss, 1933, 3.363; quoted in Dörfler, n.d.).

In fact, mathematical activities can develop only through a plurality of palpable registers that refer to its ideal objects:

> *"…the **oral** register, the **trace** register (which includes all graphic stuff and writing products), the **gesture** register, and lastly the register of what we can call the **generic materiality**, for lack of a better word, namely the register where those ostensive objects that do not belong to any of the registers above reside"* ([2]).
>
> (Bosch & Chevallard, 1999, p. 96, emphasis in the original)

These observations are the root of all semiotic approaches to mathematical thinking, some of which I shall briefly review below.

---

2 "...[le] registre de *l'oralité*, registre de *la trace* (qui inclut graphismes et écritures), registre de *la gestualité*, enfin registre de ce que nous nommerons, faute de mieux, *la matérialité quelconque*, où prendront place ces objets ostensifs qui ne relèvent d'aucun des registres précédemment énumérés. "

Peirce's observations point out different aspects of the semiotic approach:

(i) the introduction of signs, namely perceivable (spatio-temporal) entities, like *"icons or diagrams, the relations of whose parts shall present a complete analogy with those of the parts of the object of reasoning"*;

(ii) the manipulation of signs, namely *"experimenting upon this image in the imagination"* and/or *"manipulating it"* concretely and *"observing the effects of such manipulation"*;

(iii) the emergence of rules and of strategies of manipulation: *"in such activities we are guided by previous discoveries, which are embodied in the signs themselves*", e.g. in the general formulae of algebra, and *"that become patterns to imitate in our procedure*". Typical examples are the signs of Algebra and of Calculus, Cartesian graphs, arrow diagrams in Graph Theory or Category Theory, but also 2D figures or 3D models in Geometry. Generally speaking, such signs are *"kind[s] of inscriptions of some permanence in any kind of medium (paper, sand, screen, etc)"* (Dörfler, n.d.) that allow/support what has been sometimes called (e.g. Dörfler, *ibid.*) *diagrammatic reasoning*. The paper of Dörfler provides some examples, concerning Arithmetic, Algebra, Calculus and Geometry. Other examples, albeit with different terminology, are in Duval (2002, 2006).

However, as the quotation from Peirce shows, the semiotic activities are not necessarily limited to the treatment of inscriptions since they also deal with images that are acted upon in imagination (whatever it may mean): *"A sign is in a conjoint relation to the thing denoted and to the mind. If this relation is not of a degenerate species, the sign is related to its object only in consequence of a mental association, and depends upon a habit."* (Hartshorne & Weiss, 1933, 3.360).

I shall discuss this point below after having considered the more standard approaches to semiotic systems, which study inscriptions (signs in a more or less wide sense) and operations upon them. E.g., according to Ernest (2006, pp. 69-70), a *semiotic system* consists of three *components*:

1. A set of signs, the tokens of which might possibly be uttered, spoken, written, drawn or encoded electronically.

2. A set of rules of sign production and transformation, including the potential capacity for creativity in producing both atomic (single) and molecular (compound) signs.

3. A set of relationships between the signs and their meanings embodied in an underlying meaning structure.

An essential feature of a semiotic system has been pointed out by Duval (2002), who introduced the concept of *semiotic representations.* The signs, relationships and rules of production and transformation are semiotic representations insofar as they bear an intentional character (this is also evident in the quotation of Peirce). This intentional character is not intrinsic to the sign, but concerns people who are producing or using it. For example, a footprint in the sand generally is not a semiotic representation in this sense: a person who is walking on the beach has no interest in producing or not producing it; however, the footprint that Robinson Crusoe saw one day was the sign of an unsuspected inhabitant of the deserted island, hence he gave it a semiotic function and for him the footprint became a semiotic representation.

Other important aspects of semiotic systems are their *semiotic functions,* which can be distinguished as *transformational* or *symbolic* (see: Duval, 2002 and 2006; Arzarello et al., 1994).

The *transformational* function consists in the possibility of transforming signs within a fixed system or from one system to another, according to precise rules (algorithms). For example, one can transform the sign $x(x+1)$ into $(x^2 + x)$ within the algebraic system (register) or into the graph of a parabola from the Algebraic to the Cartesian system. Duval (2002, 2006) calls *treatment* the first type of transformation and the second one *conversion*. According to Duval (2002), conversions are crucial in mathematical activities:

> *"The characteristic feature of mathematical activity is the simultaneous mobilization of at least two registers of representation, or the possibility of changing at any moment from one register to another."*

The *symbolic* function refers to the possibility of interpreting a sign within a register, possibly in different ways, but without any material treatment or conversion on it. E.g. if one asks if the number $n(n+1)$ is odd or even one must interpret $n$ and $(n+1)$ with respect to their oddity and see that one of the two is always even. This is achieved without any transformation on the written signs, but rather by interpreting differently the signs $n$, $(n+1)$ and their mutual relationships: the first time as odd-even numbers and then as even-odd numbers. The symbolic function of signs has been described by different authors using different words and from different perspectives: C.S. Peirce, C.K.Ogden & I. A. Richards (semiotics); G. Frege (logic); L. Vygotsky (psychology) and others: see Steinbring (2005, chapter 1) for an interesting summary focusing on the problem from the point of view of mathematics education. The symbolic function possibly corresponds to the activity of *"experimenting upon an image in the imagination"*, mentioned by Peirce. All of the aforementioned authors point out the triadic nature of this function, namely that it consists in a complex (semiotic) relationship among three different components (the so called semiotic triangle), e.g. using Frege´s terminology, among the Sense (Sinn), the Sign (Zeichen) and the Meaning (Bedeutung). Peirce spoke of *"a triple relation between the sign, its object and the mind"*; Frege (1969) was more cautious and avoided putting forward in his analysis what he called the *third world*, namely the psychological side.

Semiotic systems provide an environment for facing mathematics not only in its structure as a scientific discipline but also from the point of view of its learning, since they allow us to seek the cognitive functioning underlying the diversity of mathematical processes. In fact, approaching mathematical activities and products as semiotic systems also allows us to consider the cognitive and social issues which concern didactical phenomena, as illustrated by the quotation of Ernest in the Introduction.

Transformational and symbolic functions of signs are the core of mathematics and they are very often intertwined. I shall sketch here a couple of examples. An interesting historical example, where both transformational and symbolic functions of semiotic registers are present is the method of completing the square in solving second order equations. This can be done within the algebraic as well as the geometric register. Another important example of the creative power of the symbolic function is given by the novelty of the Lebesgue integral (of a real function $f$ in an interval $[a,b]$) with respect to the Riemann one. In the latter, one collects data forming the approximating integral sums subdividing the interval $[a,b]$ in intervals $\Delta_i$, each of length $\delta_i$ less than some $\delta$ : the basic signs are the products $l_i\delta_i$, where $l_i$ is some value of the function $f$ in $\Delta_i$ (or its sup or inf in it) and the final sum $\sum l_i \delta_i$ is made considering the values $i$ corresponding to all the intervals $\Delta_i$ of the subdivision. In the former, the subdivision is made considering, for each value $l$ of $f$, the set $\Delta_l$ of $x$'s such that $f(x) = l$: the basic signs are the products $l\,|\Delta_l|$, and the final sum $\sum l\,|\Delta_l|$, is made considering all the values $l$ that the function assumes while $x$ varies in $[a,b]$.

### *1.2 Two opposite tendencies*

Within the main components of a semiotic system (signs and operations on them), there is a tension between two opposite modalities, which is particularly evident when a semiotic lens is used to analyse didactical processes and not only mathematical products. This tension is in fact a by-product of the two contrasting features of mathematics pointed out by Peirce, that is, its apodictic and observational aspects.

The first one consists in the strong tendency to formalize in mathematics:

> *"The more important for the mathematical practice is the availability of a calculus which operates on diagrams (function terms) and permits to evaluate derivatives, anti-derivatives and integrals according to established diagrammatic operation rules. … Here again we find the striving for manipulable diagrams which can be taken to accurately reflect the related non-diagrammatic structures and processes."* (Dörfler, n.d.)

Different crucial examples of this tendency are: the algebraic language, which (Harper, 1987) introduced suitable formalism to treat classes of arithmetic problems (equations included); Cartesian geometry, which allowed for the translation of the geometric figural register into the algebraic one; and arrow-diagrams in Category Theory. All such new inscriptional entries also allowed for new forms of reasoning and solving problems and hence had a strong epistemological and cognitive impact. A culminating case in this tendency toward formalization consists in the idea of formal system, elaborated by Hilbert (see Detlefsen, 1986).

The construction of a (formal) axiomatization in the sense of Hilbert's formalist program can be considered another method of translating into diagrams. Let us take, for instance, an axiom system for the structure of real numbers: it consists of formulas in a precise formal language together with the rules inference, e.g. first order predicate logic. These can be viewed as diagrams in the sense intended by Peirce. Proofs and theorems are then obtained by manipulating such diagrams and observing the outcomes of the manipulations (the logical deductions). One could therefore interpret (formal) axiomatization as a kind of diagrammatization (see Dörfler, n.d.).

Moreover, if one looks carefully at some logical ideas in Mathematical Logic developed at the turn of the twentieth century, the tendency toward formalism shows a further mathematical aspect of semiotic conversions, namely the idea of the interpretation of one theory into another. As an example, I call to mind the second part of the book *Foundation of Geometry* (Hilbert, 1962), where Hilbert typically interprets geometrical objects and statements into real numbers or into some subfield of reals to build models where some specific axiom of geometry does not hold. The concept of interpretation is the logical and mathematical counterpart of the idea of conversion from one register to another. Its roots are in the conversion/interpretation of one model into another one: typically, the interpretation of a model for hyperbolic geometry within the Euclidean model, namely the Klein disk and the Poincaré disk or half-plain. The rationale behind such logical approaches is that the relationships among objects represented in different ways within different registers can be shown better in one register than in another, exactly because of the specificity of the register, possibly because of the symbolic function it promotes. For instance, we can note the validity or less of an axiom of geometry in the usual Euclidean model (first register) or in a model built using only a subfield of real numbers (second register). A very recent area of research that has developed in line with this approach is the project of *Reverse Mathematics* (Sympson, 1999), where typically an important theorem T is proved carefully within a formal system ***S*** using some logical hypothesis H. For example, the Heine-Borel theorem in Analysis using as logical hypothesis a (weak) form of König lemma. Reverse Mathematics then tries to answer to the following 'reverse' question: does it exist within ***S*** a proof of H using T as hypothesis? Namely, one tries to prove the equivalence between T and H within a suitable system ***S***, namely the equivalence between sentences whose meaning is within two different registers (e.g. the analysis and the logical one).

The concept of interpretation has carefully refined the transformational and symbolic functions of mathematical signs during the years, from the pioneering semantic interpretations of geometrical models to the elaborate formal theories studied in Reverse Mathematics.

On the one hand, this approach has enlarged the horizon of semiotic systems from within mathematics (*inner enlargement*): think of the different models of reasoning induced by the Calculus inscriptions with respect to those pertaining to the algebraic ones, or to those induced by the «reasoning by arrows» in Category Theory. But on the other hand, it has also narrowed the horizon within which mathematical semiotic activities are considered, limiting them to their strictly formal aspects.

Unfortunately, this is not enough when cognitive processes must be considered, e.g. in the teaching-learning of mathematics. In such a context, it is the same notion of signs and of operations upon them that needs to be considered with a greater flexibility and within a wider perspective. In the classroom, one observes phenomena which can be considered as signs that enter the semiotic activities of students[3] but which are not signs as defined above and are not processed through specific algorithms. For example, observing students who solve problems working in group, their gestures, gazes and their body language in general are also revealed as crucial semiotic

[3] *Semiotic Activity* is classically defined as any "communicative activity utilizing signs. This involves both sign 'reception' and comprehension via listening and reading, and sign production via speaking and writing or sketching." The main purpose of the paper is to widen this definition.

resources. Namely, non-written signs and non-algorithmic procedures must also be taken into consideration within a semiotic approach. Roughly speaking, it is the same notion of sign and of operations upon them that needs to be broadened. In fact, over the years, many scholars have tried to widen the classical formal horizon of semiotic systems, also taking into consideration less formal or non formal components.

While formalism represents the first tendency of the aforementioned tension in Semiotics, these broadening instances from outside mathematics constitute the other tendency (*outer enlargement*). This tendency can already be found in the complex evolution of the sign definition in Peirce and is also contained in some pioneering observations by Vygotsky concerning the relationships between gestures and written signs, such as the following:

> *"The gesture is the initial visual sign that contains the child's future writing as an acorn contains a future oak. Gestures, it has been correctly said, are writing in air, and written signs frequently are simply gestures that have been fixed."* (Vygotsky, 1978, p. 107; see also: Vygotsky, L. S. 1997, p. 133.).

This was also anticipated by Ludwig Wittgenstein, who changed his mind about the centrality of propositions in discourse and the role of gestures, passing from the *Tractatus* to the *Philosophische Untersuchungen,* as the following well known episode illustrates:

> *"Wittgenstein was insisting that a proposition and that which it describes must have the same 'logical form', the same 'logical multiplicity', Sraffa made a gesture, familiar to Neapolitans as meaning something like disgust or contempt, of brushing the underneath of his chin with an outward sweep of the finger-tips of one hand. And he asked: 'What is the logical form of that?' Sraffa's example produced in Wittgenstein the feeling that there was an absurdity in the insistence that a proposition and what it describes must have the same 'form'. This broke the hold on him of the conception that a proposition must literally be a 'picture' of the reality it describes."* (Malcom & Wright, 2001, p. 59)

But it is specifically in some recent research in the field of Mathematical Education that semiotic systems are being studied explicitly within a wider (outer) approach (e.g. see: Duval, 2002, 2006; Bosch & Chevallard, 1999; Steinbring, 2005, 2006; Radford, 2003a; Arzarello & Edwards, 2005). Such research deepens the original approaches by people like Peirce, Frege, Saussurre, Vygotsky and others.

I will sketch some examples: the semiotic means of objectification, the notion of semiotic systems (both due to Luis Radford), the concept of Representational Infrastructure (due to J. Kaput and to R. Noss) and the so-called extra-linguistic modes of expressions (elaborated by psycholinguists). Radford introduces the notion of *semiotic means of objectification* in Radford (2003a). With this seminal paper, Radford makes explicit the necessity of entertaining a wider notion of semiotic system. He underlines that:

> *"Within this perspective and from a psychological viewpoint, the objectification of mathematical objects appears linked to the*

> *individuals' mediated and reflexive efforts aimed at the attainment of the goal of their activity. To arrive at it, usually the individuals have recourse to a broad set of means. They may manipulate objects (such as plastic blocks or chronometers), make drawings, employ gestures, write marks, use linguistic classificatory categories, or make use of analogies, metaphors, metonymies, and so on. In other words, to arrive at the goal the individuals rely on the use and the linking together of several tools, signs, and linguistic devices through which they organize their actions across space and time."*

Hence he defines this enlarged system as semiotic means of objectification, that is:

> *"These objects, tools, linguistic devices, and signs that individuals intentionally use in social meaning-making processes to achieve a stable form of awareness, to make apparent their intentions, and to carry out their actions to attain the goal of their activities."*

The semiotic means of objectification constitute many different types of signs (e.g. gestures, inscriptions, words and so on). They produce what Radford calls *contextual generalization*, namely a generalization which still refers heavily to the subject's actions in time and space and in a precise context, even if he/she is using signs that have a generalizing meaning. In contextual generalization, signs have a two-fold semiotic nature: they are going to become symbols but are still indexes. We use these terms in the sense of Peirce (see: Hartshorne, C. & Weiss, 1933): an index gives an indication or a hint on the object, like an image of the Golden Gate makes you think of the town of San Francisco *("it signifies its object solely by virtue of being really connected with it"*, Hartshorne & Weiss, 1933, 3.361). A symbol is a sign that contains a rule in an abstract way (e.g. an algebraic formula).

The semiotic means of objectification also embody important cultural features. In this sense, Radford speaks of *semiotic systems of cultural meanings* (Radford, this volume; previously called *Cultural Semiotic Systems*, Radford, 2003a), that is, those systems which make available varied sources for meaning-making through specific social signifying practices; such practices are not to be considered strictly within the school environment but within the larger environment of society as a whole, embedded in the stream of its history. Furthermore, cultural semiotic systems are an example of outer enlargement of the notion of semiotic system.

A similar example of enlargement of the notion of semiotic system is the concept of *representational infrastructure*, introduced by J. Kaput et al. (2002), which exploits some cultural and social features of signs. Discussing the appearance of new computational forms and literacies that are pervading the social and economic lives of individuals and nations alike, they write:

> *"…The real changes are not technical, they are cultural. Understanding them… is a question of the social relations among people, not among things. The notational systems we use to present and re-present our thoughts to ourselves and to others, to create and communicate records across space and time, and to support reasoning and computation constitute a central part of any civilization's infrastructure. As with*

> *infrastructure in general, it functions best when it is taken for granted, invisible, when it simply 'works'."* (Kaput et al., 2002, p. 51).

An example both of cultural semiotic system and of representational infrastructure, discussed in Radford (2003a) and in Kaput et al. (2002), consists in the developing of algebraic symbolism, which *"in more than one millennium gradually freed itself from written natural language and developed within a representational infrastructure".*

As a last example of a broader notion of semiotic system, I refer to the distinction made by psycho-linguists between linguistic and extra-linguistic modes of expression. They describe the former as the communicative use of a sign *system*, the latter as the communicative use of a *set* of signs (Bara & Tirassa, 1999):

> *"Linguistic communication is the communicative use of a symbol system. Language is compositional, that is, it is made up of constituents rather than parts... Extra-linguistic communication is the communicative use of an open set of symbols. That is, it is not compositional: it is made up of parts, not of constituents. This makes for crucial differences from language..."*

### *1.3 The semiotic mediation of artefacts*

In keeping with this perspective, artefacts as representational infrastructures also enter into semiotic systems. Realizing the semiotic similarity between signs and artefacts constitutes a crucial step in the story of outer semiotic enlargements. This similarity has two aspects. One is ergonomic and is properly focused if one considers the dialectic between artefact and instrument developed by Verillon & Rabardel (1995) who introduced the notion of *instrumental genesis*. The other is psychological and has been pointed out by Vygotsky, who described the dialectic relationships between signs and instruments by what he called *process of internalization*. I shall describe both in some detail since they allow us to understand more deeply the relevance of the outer enlargements sketched above and are at the basis of my definition of *semiotic bundle*, which I shall introduce below.

Let me start with the ergonomic theory of Verillon and Rabardel[4]: an artefact has its schemes of use (for example, the rules according to which one must manage a compass or a software) and as such it becomes an instrument in the hands of the people who are using it. This idea develops in a fresh way the notion of transformation on a semiotic system. In the ergonomic approach, the technical devices are considered with two interpretations. On the one side, an object has been constructed according to a specific knowledge that assures the accomplishment of specific goals; on the other side, a user interacts with this object, using it (possibly in different ways). The object in itself is called an artefact, that is, a particular object with its features realized for specific goals and it becomes an instrument, that is, an artefact with the various modalities of use, as elaborated by the individual who is using it. The instrument is conceived as the artefact together with the actions made by the subject, organized in collections of operations, classes of invariants and

[4] This part of the paper is taken from Arzarello & Robutti (2004).

utilizations schemes. The artefact, together with the actions, constitutes a particular instrument: thus, the same subject can use the same artefact as different instruments.

The pair instrument-artefact can be seen as a semiotic system in the wider sense of the term. The instrument is produced from an artefact introducing its rules of use and, as such, it is a semiotic representation with rules of use that bear an intentional character: it is similar to a semiotic representation. As semiotic representations, instruments can play a fundamental role in the objectification and in the production of knowledge. For example: the compass is an artefact which can be used by a student to trace a circle as the locus of points in a plane at the same distance from a fixed point. A cardboard disk can be used for the same purpose as the compass, but the concept of circle induced by this use may be different.

The transformation of the artefact into an instrument is made through suitable treatment rules, e. g. for the compass, the action of pointing it at a point and tracing a curve with a fixed ray; for the cardboard disk, the action of carefully drawing a line along its border. In a similar way, students learn to manage algebraic symbols: the signs of Algebra or of Analysis, e.g., $a^2$-$b^2$ or $\mathrm{D}x^2$, are transformed according to suitable treatment rules, e.g. those producing $(a+b)(a-b)$ or $2x$. Just like an artefact becomes an instrument when endowed with its using rule, the signs of Algebra or of Analysis become symbols, namely signs with a rule (recall the Peirce notion quoted above), because of their treatment rules (see also the discussion about techniques and technologies in Chevallard, 1999).

In both cases, we get semiotic systems with their own rules of treatment. As the coordinated treatment schemes are elaborated by the subject with her/his actions on/with the artefacts/signs, the relationship between the artefact/signs and the subject can evolve. In the case of concrete artifacts, it causes the so-called process of *instrumental genesis*, revealed by the schemes of use (the set of organized actions to perform a task) activated by the subject. In the example above, the knowledge relative to the circle is developed through the schemes of use of the compass or of the cardboard. In the case of algebraic signs, the analogous of the instrumental genesis produced by syntactic manipulations may produce different types of knowledge relative to the numerical structures (see the notion of theory as emerging from the techniques and the technologies, discussed in Chevallard, 1999). Hence, the ergonomic analysis points to an important functional analogy between artefacts and signs [5].

Within a different perspective, Vygotsky had also pointed out a similar analogy between tools [6], which can support human labour, and signs, which can uphold the psychological activities of subjects:

> *"...the invention and use of signs as auxiliary means of solving a given psychological problem (to remember, compare something, report, choose and so on) is analogous to the invention of tools in one psychological*

5 A similar analogy is achieved within a different framework by Chevallard (1999).

6 In the Cambridge Dictionary, a tool is defined as *"something that helps you to do a particular activity"*, an instrument is *"a tool that is used for doing something",* while an artefact is an *"object".* Following this definition, I consider the instrument as a specific tool.

*respect. The signs act as instrument of psychological activity in a manner analogous to the role of a tool in labour."* (Vygotsky, 1978, p. 52)

As I anticipated above, this common approach to signs and tools is based on the notion of *semiotic mediation* [7], which is at the core of the Vygotskian frame: for a survey see Bartolini & Mariotti (to appear) a paper from which I take some of the following comments.

Vygotsky pointed out both a functional analogy and a psychological difference between signs and instruments. The analogy is illustrated by the following quotation, which stresses their semiotic functions:

> *"...the basic analogy between sign and tools rests on the mediating function that characterizes each of them"* (*ibid.,* p. 54).

The difference between signs and tools is so described:

> *"the tool's function is to serve as the conductor of human influence on the object of activity; it is <u>externally</u> oriented...The sign, on the other hand, changes nothing in the object of a psychological operation. It is a means of internal activity aimed at mastering oneself: the sign is <u>internally</u> oriented."* (*ibid*., p. 55)

This distinction is central in the Vygotskyan approach, which points out the transformation from externally oriented tools to internally oriented tools (often called *psychological tools*) through the process of *internalization*. According to Vygotsky, in the process of internalization, interpersonal processes are transformed into intrapersonal ones. The process of internalization (through which the 'plane of consciousness' is formed, see Wertsch & Addison Stone, 1985, p.162) occurs through semiotic processes, in particular by the use of semiotic systems, especially of language, in social interaction:

> *"...the Vygotskian formulation involves two unique premises...First, for Vygotsky, internalisation is primarly concerned with <u>social</u> processes. Second, Vygotsky's account is based largely on the analysis of the semiotic mechanisms, especially language, that mediate social and individual functioning....Vygotsky's account of semiotic mechanisms provides the bridge that connects the external with the internal and the social with the individual...Vygotsky's semiotic mechanisms served to bind his ideas concerning genetic analysis and the social origins of behaviour into an integrated approach...it is by mastering semiotic mediated processes and categories in social interaction that human consciousness is formed in the individual"* (Wertsch & Addison Stone, 1985, pp.163-166)

As Bartolini Bussi & Mariotti (Bartolini & Mariotti, to appear) point out, Vygotsky stresses the role and the dynamics of semiotic mediation: first, externally oriented, a sign or a tool is used in action to accomplish a specific task; then, the actions with the sign or the tool (semiotic activity, possibly under the guidance of an expert), generate new signs (words included), which foster the internalization process and produce a new

[7] It is described in Vygotsky (1978, especially p. 40 and ff).

psychological tool, internally oriented, completely transformed but still maintaining some aspects of its origin.

Vygotsky describes such dynamics without any reference to mathematics; hence, his observations are general; many recent studies have adapted his framework to fit the specificity of mathematics (e.g. see Radford, 2003a; Bartolini & Mariotti, to appear).

## 2. A new theoretical frame: the semiotic bundle

### *2.1 Definition and examples*

My framework is also specific for mathematics; it allows for better combining the two issues described above, the one from semiotics, in the spirit of the quoted Ernest definition of semiotic systems, and the other from psychology, according to the Vygotskian approach. Both pictures are essential for analyzing the learning processes in mathematics; they are here integrated within a wider model.

On the one hand, it is necessary to broaden the notion of semiotic system in order to encompass all the variety of phenomena of semiotic mediation in the classroom, as already suggested by Radford, who introduced a new notion of semiotic system:

> *The idea of semiotic system that I am conveying includes classical system of representations – e.g. natural language, algebraic formulas, two or three-dimensional systems of representation, in other terms, what Duval (2001) calls discursive and non-discursive registers – but also includes more general systems, such as gestures (which have an intuitive meaning and to a certain extent a fuzzy syntax) and artifacts, like calculators and rulers, which are not signs but have a functional meaning.* (Radford, 2002, p. 21, footnote 7).

On the other hand, the psychological processes of internalization, so important in describing the semiotic mediation of signs and tools, must fill a natural place within the new model.

A major step towards the common frame consists in reconsidering the notion of semiotic system along the lines suggested by Radford. Once we have a more suitable notion of semiotic system, we shall come back to the Vygotskian approach and show that this fresh notion encompasses it properly, allowing for a deeper understanding of its dynamics.

This fresh frame takes into account the enormous enlargement of the semiotic systems horizon, both from the inner and from the outer side that has been described above. Once the semiotic systems have been widened to contain gestures, instruments, institutional and personal practices and, in general, extra-linguistic means of expression, the same idea of operation within or between different registers changes its meaning. It is no longer a treatment or conversion (using the terminology of Duval) within or between semiotic representations according to algorithmic rules (e.g. the conversion from the geometric to the Cartesian register). On the contrary, the operations (within or between) must be widened to also encompass phenomena that may not be strictly algorithmic: for example, practices with instruments, gestures and so on.

At this point of the discussion, the above definition by Ernest can be widened to encompass all the examples we have given. We thus arrive at the notion that I have called *semiotic bundle* (or bundle of semiotic sets). To define it, I need first the notion of *semiotic set*, which is a widening of the notion of semiotic system.

A semiotic set is:

a) A set of signs which may possibly be produced with different actions that have an intentional character, such as uttering, speaking, writing, drawing, gesticulating, handling an artefact.

b) A set of modes for producing signs and possibly transforming them; such modes can possibly be rules or algorithms but can also be more flexible action or production modes used by the subject.

c) A set of relationships among these signs and their meanings embodied in an underlying meaning structure.

The three components above (signs, modes of production/transformation and relationships) may constitute a variety of systems, which span from the compositional systems, usually studied in traditional semiotics (e.g. formal languages) to the open sets of signs (e.g. sketches, drawings, gestures). The former are made of elementary constituents and their rules of production involve both atomic (single) and molecular (compound) signs. The latter have holistic features, cannot be split into atomic components, and the modes of production and transformation are often idiosyncratic to the subject who produces them (even if they embody deeply shared cultural aspects, according to the notion of *semiotic systems of cultural meanings* elaborated by Radford, quoted above ). The word set must be interpreted in a very wide sense, e.g. as a variable collection.

A semiotic bundle is:

(i) A collection of semiotic sets.
(ii) A set of relationships between the sets of the bundle.

Some of the relationships may have conversion modes between them.

A semiotic bundle is a *dynamic structure* which can change in time because of the semiotic activities of the subject: for example, the collection of semiotic sets that constitute it may change; as well, the relationships between its components may vary in time; sometimes the conversion rules have a genetic nature, namely, one semiotic set is generated by another one, enlarging the bundle itself (we speak of *genetic conversions*).

Semiotic bundles are semiotic representations, provided one considers the intentionality as a relative feature (see the above comment on the sand footprint).

An example of semiotic bundle is represented by the unity speech-gesture. It has been a recent discovery that gestures are so closely linked with speech that "*we should regard the gesture and the spoken utterance as different sides of a single underlying mental process*" (McNeill, 1992, p.1), namely "*gesture and language are one system*" (*ibid.*, p.2). In our terminology, gesture and language are a semiotic bundle, made of two deeply intertwined semiotic sets (only one, speech, is also a semiotic system). Research on gestures has uncovered some important relationships between the two (e.g. match and mismatch, see Goldin-Meadow, 2003). A semiotic bundle must not be considered as a juxtaposition of semiotic sets; on the contrary, it is a unitary system and it is only for the sake of analysis that we distinguish its components as semiotic sets. It must be observed that if one limits oneself to examining only the semiotic systems and their bundles, many interesting aspects of human discourse are lost: only by considering bundles of semiotic sets can new phenomena be discovered.

This wider approach is particularly fruitful when the processes and activities of people learning mathematics are scrutinized. In the research carried out by the Turin team[8] we investigate semiotic bundles made of several semiotic sets: e.g. gesture, speech and written inscriptions (e.g. mathematical symbols, drawings). The results consist in describing some of the relationships and conversion rules within such a complex bundle.

Semiotic bundles allow us to frame the Vygotskian notion of semiotic mediation sketched above in a more comfortable setting. The dynamics in the process of internalization, according to Vygotsky, is based on semiotic activities with tools and signs, externally oriented, which produce new psychological tools, internally oriented, completely transformed but still maintaining some aspects of their origin. According to Vygotsky, a major component in this internalization process is language, which allows for the transformations. Moreover, such transformations 'curtail' the linguistic register of speech into a new register: Vygotsky calls it *inner speech* and it has a completely different structure. This has been analyzed by Vygotsky in the last (7th) chapter of *Thought and Language* (Vygotsky, 1992), whose title is *Thought and Word*. Vygotsky distinguishes two types of properties that allow us to distinguish the inner from the outer language: he calls them *structural* and *semantic properties*.

The structural properties of the inner language are its *syntactic reduction* and its *phasic reduction*: the former consists in the fact that inner language reduces to pure juxtaposition of predicates minimizing its syntactic articulation; the latter consists in minimizing its phonetic aspects[9], namely curtailing the same words.

According to Vygotsky's frame, the semantic properties of the inner language are based on the distinction made by the French psychologist Frederic Pauhlan between the *sense* and the *meaning* of a word and by *"the preponderance of the sense [smysl] of a word over its meaning [znachenie]"* (Vygotsky, 1978, p. 244):

> *"the sense is...the sum of all the psychological events aroused in our consciousness by the word. It is a dynamic, fluid, complex whole, which has several zones of unequal stability. Meaning is only one of the zones of sense, the most stable and precise zone. A word acquires its sense from the context in which it appears; in different contexts, it changes its sense. "* (*ibid.,* p. 244-245).

8 This is being done by our colleagues Luciana Bazzini and Ornella Robutti, by some doctoral and post-doc students, like Francesca Ferrara and Cristina Sabena, and by many teachers (from the elementary to the higher school level) that participate actively to our research, like Riccardo Barbero, Emilia Bulgarelli, Cristiano Dané, Silvia Ghirardi, Marina Gilardi, Patrizia Laiolo, Donatella Merlo, Domingo Paola, Ketty Savioli, Bruna Villa and others.

9 To make an analogy with the outer language, Vygotsky recalls an example, taken from Le Maitre (1905), p. 41: a child thought to the French sentence "Les montagnes de la Suisse sont belles" as "L m d l S s b" considering only the initial letters of of the sentence. Curtailing is a typical feature of inner language.

In inner language, the sense is always overwhelming the meaning. This prevailing aspect of the sense has two structural effects on inner language: the *agglutination* and the *influence*. The former consists in gluing different meanings (concepts) into one expression[10]; the latter happens when the different senses 'flow' together[11] into one unity.

To explain the properties of inner speech, Vygotsky uses analogies that refer to the outer speech and these give only some idea of what he means: in fact, he uses a semiotic system (written or spoken language) to describe something which is not a semiotic system. The grounding metaphors through which Vygotsky describes inner speech show its similarity to semiotic sets: properties like *agglutination* and *influence* make inner speech akin to some semiotic sets, like drawings, gestures and so on. Also, the syntactic phenomena of syntactic and phasic reduction mean that the so-called linear and compositional properties of semiotic systems are violated. Vygotsky's description through the lens of semiotic systems makes this aspect only partially evident.

The notion of semiotic bundle properly frames the most important point in Vygotsky's analysis, namely, the semiotic transformations that support the transformation from outer to inner speech (internalization). The core of Vygotsky's analysis, namely, the internalization process, consists exactly in pointing out a genetic conversion within a semiotic bundle: it generates a fresh semiotic component, the inner speech, from another existing one, the outer speech. The description is given using the structure of the former, which is clearly a semiotic system, to build grounding metaphors in order to give an idea of the latter, which is possibly a semiotic set. The whole process can be described as the enlarging of a bundle through a genetic conversion process.

The main point of this paper consists in using the notion of semiotic bundle to frame the mathematical activities that take place in the classroom. I will argue that learning processes happen in a multimodal way, namely in a dynamically developing bundle, which enlarges through genetic conversions and where more semiotic sets are active at the same moment. The enlargement consists both in the growing of (the number of) active semiotic sets within the bundle and in the increase of the number of relationships (and transformations) between the different semiotic sets.

Their mutual relationships will be analyzed through two types of lenses, which I have called synchronic and diachronic since they analyze the relationship among processes that happen simultaneously or successively in time. The two approaches, which will be discussed below, allow us to frame many results in a unitary way: some are already known but some are new. In particular, I shall investigate the role of gestures in the mathematical discourses of students[12]. I will argue that they acquire a specificity in the

---

[10] Vygotsky makes the analogy with the outer language alluding to so-called agglutinating languages which put together many different words to constitute a unique word.

[11] To give an idea of influence, Vygotsky makes reference to *The Dead Souls* by N.V. Gogol whose title, by the end of the book, should mean to us *"not so much the defunct serfs as all the characters in the story who are alive physically but dead spiritually"* (*ibid.*, p. 247)

[12] Another research project that our group is pursuing concerns the role of teachers' gestures with respect to the learning processes of students: how they are shared by students and how they influence their conceptualization processes.

construction of meaning in mathematical activities because of the rich interplay among three different types of semiotic sets: speech, gestures and written representations (from sketches and diagrams to mathematical symbols). They constitute a semiotic bundle, which dynamically evolves in time.

To properly describe this interplay and the complex dynamics among the different semiotic sets involved in the bundle, I need some results from psychologists, who study gesture. In the next two sections (2.2 and 2.3) I will sketch out some of these.

### *2.2 Semiotic bundles and multimodality*

In mathematics, semiotic representations are deeply intertwined with mental ones (see the discussion in Duval, 2006, pp. 106-107). On the one side, there is a genetic relationship between them: *«the mental representations which are useful or pertinent in mathematics are always interiorized semiotic representations»* (Duval, 2002, p.14). See also the discussion on the internalisation processes in Vygotsky.

On the other side, very recent discoveries in Neuropsychology underline the *embodied* and *multimodal* aspects of cognition. A major result of neuroscience is that *"conceptual knowledge is embodied, that is, it is mapped within the sensory-motor system"* (Gallese & Lakoff, 2005, p.456). *"The sensory-motor system not only provides structure to conceptual content, but also characterizes the semantic content of concepts in terms of the way in which we function with our bodies in the world"* (*ibid.*). The sensory-motor system of the brain is multimodal rather than modular; this means that

> *"an action like grasping...(1) is neurally enacted using neural substrates used for both action and perception, and (2) that the modalities of action and perception are integrated at the level of the sensory-motor system itself and not via higher association areas." (ibid., p. 459).*
>
> *"Accordingly, language is inherently multimodal in this sense, that is, it uses many modalities linked together—sight, hearing, touch, motor actions, and so on. Language exploits the pre-existing multimodal character of the sensory-motor system."* (ibid., p. 456).

The paradigm of multimodality implies that *"the understanding of a mathematical concept rather than having a definitional essence, spans diverse perceptuomotor activities, which become more or less active depending of the context."* (Nemirovsky, 2003; p. 108).

Semiotic bundles are the real core of this picture: they fit completely with the embodied and the multimodal approach. At least one consequence of this approach is that the usual *transformations* and *conversions* (in the sense of Duval) from one register to the other must be considered as the basic producers of mathematical knowledge. Furthermore, its essence consists in the *multimodal interactions* among the different registers within a unique integrate system composed of different modalities: gestures, oral and written language, symbols, and so on (Arzarello & Edwards, 2005; Robutti, 2005). Also, the symbolic function of signs is absorbed within such a picture.

Once the multimodal nature of processes is on the table, manipulations of external signs and of mental images show a common psychological basis: transformational and symbolic functions are revealed as processes that have a deep common nature.

I will argue that if we mobilize a rich semiotic bundle with a variety of semiotic sets (and not only semiotic systems) with their complex mutual relationships (of transformation, conversion, symbolic functions as multimodal interactions among them) students are helped to construct integrated models for the mathematical knowledge they are supposed to learn and understand. In fact, mathematical activity is featured by the richness of the semiotic bundle that it activates. However, things may not be so in the school, where two negative phenomena can push the process in the opposite direction. I call them the Piaget and the Wittgenstein effect, respectively:

a) (*Piaget effect*). Piaget made the *search for isomorphisms* one of the key principles for analyzing knowledge development in children. This emphasis risks underestimating the relevance of the different registers of representation:

> « *Dismissing the importance of the plurality of registers of representation comes down to acting as if all representations of the same mathematical object had the same content or as if the content of one could be seen from another as if by transparency!"* (Duval, 2002, p.14).

b) (*Wittgenstein effect*). Recall the story about Sraffa and Wittgenstein. The author of *Tractatus* in the first phase of his research revealed a sort of *blindness to semiotic sets* (in that case, the gesture register). This is also the case for many mathematicians and teachers: they are possibly interested in semiotic systems as formal systems, while the wider semiotic sets are conceived as something that is not relevant for mathematical activities, especially at the secondary school level.

A consequence of these effects in the classroom is that only some semiotic systems are considered, while semiotic bundles (generally not even restricting oneself to the bundles of semiotic systems) are not taken into account. And even when different semiotic systems are considered, they are always conceived as signifiers of the same object. On the contrary, the representations within a semiotic bundle have their own specificity in promoting an integrated mental model according to the multimodal paradigm, as we shall show in the next chapter.

### *2.3 Gestures within semiotic bundles*

Among the components of semiotic bundles, the semiotic set of gestures has an important role, especially when its relationship with speech and written signs are considered within a multimodal picture. Psychologists have mainly studied gestures in day to day conversation: I shall go over some of their findings in the remaining part of this chapter and I will describe the relationship of gestures (and speech) to written signs in Chapter 3. To do this, I will elaborate upon some of the papers in Arzarello & Edwards (2005), especially the Introduction, and I will also quote some results of Bucciarelli (in print).

Two main points from psychology are important to discuss the way gestures enter into the multimodal semiotic analysis within which we frame the understanding of mathematical concepts in students.

The first point concerns the so-called *Information Packaging Hypothesis*. It expands the idea that "*gestures, together with language*, <u>*help constitute thought*</u>" (McNeill, 1992, p. 245). According to McNeill (p. 594-5), gesture plays a role in cognition—not just in communication—since it is involved in the *conceptual planning* of the messages and plays a role in speech production because it plays a role in the process of conceptualization. Gesture *"helps speakers organize rich spatio-motoric information into packages suitable for speaking [...] by providing an alternative informational organization that is not readily accessible to analytic thinking, the default way of organizing information in speaking"* (Kita, 2000).

Spatio-motoric thinking (constitutive of what Kita calls representational gestures) provides an alternative informational organization that is not readily accessible to analytic thinking (constitutive of speaking organization). Analytic thinking is normally employed when people have to organize information for speech production, since speech is linear and segmented (composed of smaller units); namely, it is a semiotic system. On the other hand, spatio-motoric thinking is instantaneous, global and synthetic, not analyzable into smaller meaningful units, namely, it is a semiotic set. This kind of thinking and the gestures that arise from it are normally employed when people interact with the physical environment, using the body (interactions with an object, locomotion, imitating somebody else's action, etc.). It is also found when people refer to virtual objects and locations (for instance, pointing to the left when speaking of an absent friend mentioned earlier in the conversation) and in visual imagery. Within this framework, gesture is not simply an epiphenomenon of speech or thought; gesture can contribute to creating ideas:

> *"According to McNeill, thought begins as an image that is idiosyncratic. When we speak, this image is transformed into a linguistic and gestural form. ... The speaker realizes his or her meaning only at the final moment of synthesis, when the linear-segmented and analyzed representations characteristic of speech are joined with the global-synthetic and holistic representations characteristic of gesture. The synthesis does not exist as a single mental representation for the speaker until the two types of representations are joined. The communicative act is consequently itself an act of thought. ... It is in this sense that gesture shapes thought."* (Goldin-Meadow, 2003, p. 178).

A second point, claimed by Bucciarelli (in press), concerns the relationships between Mental Models (see Johnson Laird, 1983, 2001) and gestures. Many studies in psychology claim that the learning of declarative knowledge involves the construction of mental models. Bucciarelli argues that gestures accompanying discourse can favour the construction of such models (and therefore of learning). In Cutica & Bucciarelli (2003) it is shown that when gestures accompany discourse the listener retains more information with respect to a situation in which no gestures are performed: *"The experimental evidence is in favour of the fact that gesture do not provide redundancy, rather they provide information not conveyed by words"* (Bucciarelli, in press).

Hence, gestures lead *"to the construction of rich models of a discourse, where all the information is posited in relation with the others"* (*ibid.*).

In short, the main contribution of psychology to the theory of semiotic bundles consists in this: the multimodal approach can favour the understanding of concepts because it can support the activation of different ways of coding and manipulating the information (e.g. not only in an analytic fashion) within the semiotic bundle. This can foster the construction of a plurality of mental models, whose integration can produce deep learning.

Of course these observations are general and concern general features of learning. In the next chapter, I shall discuss how this general frame can be adapted to the learning of mathematics.

This attention to semiotic bundles underlines the fact that mathematics is inseparable from symbolic tools but also that it is *"impossible to put cognition apart from social, cultural, and historical factors"* (Sfard & McClain, 2002, p. 156), so that cognition becomes a *"culturally shaped phenomenon"* (*ibid.*). In fact, the embodied approach to mathematical knowing, the multivariate registers according to which it is built up and the intertwining of symbolic tools and cognition within a cultural perspective are the basis of a unitary frame for analyzing gestures, signs and artefacts. The existing research on these specific components finds a natural integration in such a frame (Arzarello & Edwards, 2005).

In the next chapter, I will focus the attention on the ways in which semiotic bundles are involved in the processes of building mathematical knowledge in the classroom.

## 3. Semiotic bundles in mathematics learning.

### *3.1 Synchronic and diachronic analysis*

In this chapter, I will illustrate how the notion of semiotic bundle can suitably frame the mathematising activities of young students who interact with each other while solving a mathematical problem. What we will see is a consequence of these social interactions, which can happen and develop because of the didactical situations to which the students are exposed. As I shall sketch below, they are accustomed to developing mathematics discussions during their mathematics hours. The richness of the semiotic bundle that they use depends heavily on such a methodology; in a more traditional classroom setting, such richness may not exist and this may be the cause of many difficulties in mathematical learning: see the comments in Duval (2002, 2006), already quoted, about this point.

The example under consideration concerns elementary school and has been chosen for two reasons: (1) it is emblematic of many phenomena that we have also found at different ages; (2) the simplicity of the mathematical content makes it accessible for everyone.

In the example, I shall show that students in a situation of social interaction use a variety of semiotic sets within a growing semiotic bundle and I shall describe the main mutual relationships among them. To do that, I will use two types of analysis, each focusing on a major aspect of such relationships. The first one is *synchronic analysis*, which studies the relationships among different semiotic sets activated simultaneously by the subject. The second is *diachronic analysis*, which studies the relationships among semiotic sets activated by the subject in successive moments. This idea has been introduced by the authors in Arzarello & Edwards (2005) under the names of *parallel* and *serial analysis*. I prefer the terminology "à la Saussurre" ([13]) because it underlines the

13 Saussure distinguishes between *synchronic* (static) linguistics and *diachronic* (evolutionary) linguistics. Synchronic linguistics is the study of language at a particular point in time. Diachronic linguistics is the study of the history or evolution of language.

time component that is present in the analysis. However, our time grain is at a different scale, that is, while Saussurre considers long periods of time concerning the historical evolution of at most two semiotic systems (spoken and written language), I consider the interactions among many different semiotic sets over very short periods of time.

Synchronic analysis, even if under a different name, is present in the study of gestures: e.g. the distinction made by Goldin-Meadow between matching and mismatching considers gesture and speech produced at the same moment and conveying equal or different information. Another example of synchronic analysis can be made in mathematics when considering the production of drawings (or formulas) and of speech by students who are solving a problem (see e.g. Arzarello, 2005; but the literature is full of examples). A further example is the semiotic node, discussed by Radford et al. (2003b).

Also, diachronic analysis is not completely new in the literature on signs: e.g. see the notion of mathematical objectification in Radford, or that of conversion in Duval, both discussed above. The power of diachronic analysis changes significantly when one considers the semiotic bundles. In fact, the relationship between sets and systems of signs cannot be fully analyzed in terms of translation or of conversion because of the more general nature of the semiotic sets with respect to the semiotic systems. The modes of conversion between a semiotic set and a semiotic system make evident a genetic aspect of such processes, since a genuine transformation (conversion) is a priori impossible. In fact, a transformation presupposes an action between two already existing systems like in the translation from one language to another. In our case, on the contrary, there is a genesis of signs from a set or a system to a system or a set. The fresh signs with the new set (system) are often built preserving some features of the previous signs (e.g. like the icon of a house preserves some of the features of a house according to certain cultural stereotypes). The preservation generally concerns some of the extralinguistic (e.g. iconic) features of the previous signs, which are generating new signs within the fresh semiotic set (or system); possibly, the genesis continues with successive conversions from the new sets (systems) into already codified systems. Hence, the process of conversion described by Duval concerns mainly the last part of the phenomenon, which involves the transformation between already existing systems. Our analysis shows that such process starts before and has a genetic aspect, which is at the root of the genesis of mathematical ideas.

The main point is that only considering semiotic sets allows us to grasp such a phenomenon, possibly through a diachronic analysis. In fact, nothing appears if one considers only semiotic systems or considers synchronic events.

One could think that such a genesis is far from the sophisticated elaborations of more advanced mathematics. But things are not so; I have examples of this genesis concerning the learning of Calculus (see: Arzarello & Robutti, to appear).

The two analyses, synchronic and diachronic, allows us to focus on the roles that the different types of semiotic sets involved (gestures, speech, different inscriptions, from drawings to arithmetic signs) play in the conceptualization processes of pupils. The general frame is that of multimodality, sketched above.

### *3.2 The example* [14]

The activity involves pupils attending the last year of primary school (5th grade, 11 y.o.); the teacher gives them a mathematical story that contains a problem to solve, taken from the legend of Penelope's cloth in Homer's Odyssey. The original text was modified to get a problem-solving situation that necessitated that the students face some conceptual nodes of mathematics learning (decimal numbers; space-time variables). The text of the story, transformed, is the following:

> *… On the island of Ithaca, Penelope had been waiting twenty years for the return of her husband Ulysses from the war. However, on Ithaca a lot of men wanted to take the place of Ulysses and marry Penelope. One day the goddess Athena told Penelope that Ulysses was returning and his ship would take 50 days to arrive in Ithaca. Penelope immediately summoned the suitors and told them: "I have decided: I will choose my bridegroom among you and the wedding will be celebrated when I have finished weaving a new piece of cloth for the nuptial bed. I will begin today and I promise to weave every two days; when I have finished, the cloth will be my dowry." The suitors accepted. The cloth had to be 15 spans in length. Penelope immediately began to work, but one day she would weave a span of cloth, while the following day, in secret, she would undo half a span… Will Penelope choose another husband? Why?*

When the Penelope's story was submitted to the students (Dec. 2004- Feb. 2005) they were attending the last year of primary school (5th grade). Later, in April-May 2005, in the same school six more teachers submitted the story to their classrooms, as part of an ongoing research project for the Comenius Project DIAL-Connect (Barbero et al., in press). Students were familiar with problem solving activities, as well as with interactions in group. They worked in groups in accordance with the didactical contract that foresaw such a kind of learning. The methodology of the mathematical discussion was aimed at favouring the social interaction and the construction of shared knowledge. As part of the didactical contract, each group was also asked to write a description of the process followed to reach the problem solution, including doubts, discoveries, heuristics, etc. The students' work and discussions were videotaped and their written notes were collected. The activity consisted of different steps that we can summarize as follows. First, the teacher reads the story and checks the students' understanding of the text; the story is then delivered to the groups. Different materials are at the students' disposal, among which paper, pens, colours, cloth, scissors, glue. In a second phase, the groups produce a written solution. The teacher invites the groups to compare the solutions in a collective discussion; she analyses strategies, difficulties, misconceptions, thinking patterns and knowledge content to be strengthened. Then, a poster with the different groups' solutions is produced. In the final phase, the students are required to produce a number table and a graph representing the story; they work individually using Excel to construct the table and the graph of the problem solution. Again, they discuss about different solutions and share conclusions.

---

14 This part of the paper is partially taken from Arzarello et al. (2006), with the permission of the other authors.

The part of the activity analyzed below is a small piece of the initial phase (30'); it refers to a single group composed of five children: D, E, M, O, S, all of them medium achievers except M, who is weak in mathematical reasoning.

### *3.3 Analysis: a story of signs under the lenses of diachronic and synchronic analysis.*

The main difficulty of the Penelope problem is that it requires two registers to be understood and solved: one for recording the time, and one for recording the successive steps of the cloth length. These registers must be linked in some way, through some relationship (mathematicians would speak of a function linking the variables time and cloth length). At the beginning, these variables are not so clear for the students. So, they use different semiotic sets to disentangle the issue: gestures, speech, written signs. They act with and upon them; they interact with each other; they repeatedly use the text of the story to check their conjectures; they use some arithmetic patterns.

We see an increasing integration of these components within a semiotic bundle: in the end, they can grasp the situation and objectify a piece of knowledge as a result of a complex semiotic and multimodal process. We shall sketch some of the main episodes and will comment a few key points in the final conclusion (numbers in brackets indicate time).

### Episode 1. The basic gestures (synchronic analysis).

After reading the text, the children start rephrasing, discussing and interpreting it. To give sense to the story, they focus on the action of weaving and unraveling a span of cloth which is represented by different gestures: a hand sweeping across the desk (Fig. 1), the thumb and the index extended (Fig. 2), two hands displaced parallel on the desk (Figs. 3 and 4). Some gestures introduced by one student are easily repeated by the others and become a reference for the whole group.

This is the case of the two parallel hands shown in Figs. 3 and 4. Attention is focused on the action, and the gestures occur matching either the verbal clauses or the "span", as we can see from the following excerpt:

(6'58'') **S:** She makes a half (*hand gesture in Fig. 2*), then she takes some away (*she turns her hand*), then she makes… (*again, her hand is in the position of Fig. 2*) […]

***Figure 1***

***Figure 2***

***Figure 3***

***Figure 4***

**E**: “It is as if you had to make a piece like this, it is as if you had to make a piece of cloth like this, she makes it (*gesture in Fig. 3*). Then you take away a piece like this (*gesture in Fig. 5*), then you make again a piece like this (*gesture in Fig. 3*) and you take away a piece like this (*gesture in Fig. 5*)”

**O**: “No, look… because… she made a span (*Fig. 4*) and then, the day after, she undid a half (*O carries her left hand to the right*), and a half was left… right? … then the day after…”

**D**: (*D stops O*) “A half was always left”

***Figure 5***

The dynamic features of gestures that come along with speech condense the two essential elements of the problem: time passing and Penelope’s work with the cloth. Their existence as two entities is not at all explicit at this moment, but, through gesturing, children make the problem more tangible. The function of gestures is not only to enter into the problem, but also to create situations of discourse whose content is accessible to everyone in the group. The rephrasing of similar words and gestures by the students (see the dispositions of the hands in Fig. 4) starts a dynamics for sharing various semiotic sets, with which the group starts to solve the problem. At the moment, the semiotic bundle is made up of their gestures, gazes and speech .

### Episode 2. A new semiotic set: from gestures to written signs (diachronic analysis).

After having established a common understanding of what happens in Penelope’s story, the children look for a way to compute the days. S draws a (iconic) representation of the work Penelope does in a few days, actually using her hand to measure a span on paper. The previous gesture performed by different students (Figs. 3-5) now becomes a written sign (Fig. 6). As had happened before with words and gestures, the drawing is also imitated and re-echoed by the others (Fig. 7): even these signs, generated by the previous gestures, contribute to the growth of the semiotic bundle. The use of drawings makes palpable to the students the need of representing the story using two registers. See the two types of signs in Figs. 7-8: the vertical parallel strokes (indicating spans of cloth) and the bow sign below them (indicating time).

### Episode 3. The mutimodality of semiotic sets I: towards a local rule (diachronic + synchronic analysis).

In the following excerpts, the children further integrate what they have produced up to now (speech, gestures and written representations) and also use some arithmetic; their aim is to grasp the rule in the story of the cloth and to reason about it. They can now use the written signs as *“gestures that have been fixed”* (Vygotsky, 1978; p. 107) and represent the story in a condensed way (see Fig. 8); moreover, they check their conjectures reading again the text of the problem:

(10'30'') **S:** From here to here it is two spans (*she traces a line, mid of Fig. 8*). If I take half, this part disappears (*she traces the horizontal traits in Fig. 8*) and a span is left; therefore in two days she makes a span

**O**: No, in four days, in four, because…

**S**: In four days she makes two spans, because (*she traces the curve under the traits in Fig. 8*)…plus this

**O:** In four days she makes one, because (*she reads the text*), one day she wove a span and the day after she undid a half…

As one can see in Fig. 7, S tries to represent on paper Penelope's work of weaving and also of unraveling, which causes troubles, because of the necessity of marking time and length in different ways. These two aspects naturally co-existed in gestures of Figg. 1-3. O finds the correct solution (4 days for a span), but the group does not easily accept it and O gets confused. The drawing introduced by S (Fig. 8) represents the cloth, but with holes; due to the inherent rigidity of the drawing, students easily see the span, but not half a span. A lively discussion on the number of days needed to have a span begins. Numbers and words are added to the drawings (Figs. 9-10) and fingers are used to compute (Fig. 11). New semiotic resources enter the scene within different semiotic sets which are integrating each other more and more, not by juxtaposition or translation but by integration of their elements: they all continue to be active within the semiotic bundle, even later, as we shall see below.

**Episode 4. The multimodality of semiotic sets II: towards a global rule (diachronic analysis).**

Once the local question of "how many days for a span" is solved, the next step is to

***Figure 6***

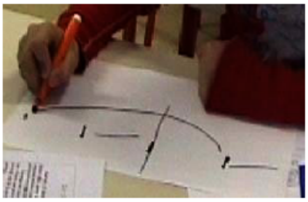


***Figure 7***

***Figure 8***

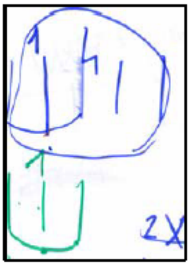



***Figure 9***

***Figure 10***

***Figure 11***

solve the problem globally. To do that, the rule of "4 days for a span" becomes the basis (Fig.12) of an iterative process:

(13'30'') **O, E:**… it takes four days to make a whole span (*E traces a circle with the pen all around*: Fig. 12)

**D:** and another four to make a span (*D shows his fingers*) and it adds to 8 (*D counts with fingers*)

**S:** so, we have to count by four and arrive at 50 days (*forward strategy*: Fig. 13) [...] (14'25'') **O**: no, wait, for 15 spans, no, 4 times 15

**S**: no, take 15, and always minus 4, minus 4, minus 4 (or: 4 times 5), minus 2, no, minus 1 [*backward strategy*: Fig. 14]

Two solving strategies are emerging here: a *forward strategy* (counting 4 times 15 to see how many days are needed to weave the cloth) and a *backward strategy* (counting "4 days less" 15 times to see if the 50 days are enough to weave the cloth). The two strategies are not so clear to the children and conflict with each other.

In order to choose one of them, the children use actual pieces of paper, count groups of four days according to the forward strategy and so they acquire direct control over the computation. Only afterwards do they compute using a table and find that 60 days are needed for 15 spans of cloth. In this way, they can finally answer the question of the problem and write the final report: Penelope will not choose another bridegroom.

## Conclusions

The story of signs described in the example illustrates the nature of semiotic bundles. The first signs (gestures, gazes and speech) constitute a first basic semiotic bundle, through which the children start their semiotic activities. Through them, the bundle is enriched with new semiotic sets (drawings and numbers) and with a variety of fresh relationships among them. The enlargement occurs through genetic conversions, namely through a genetic process, where the previous semiotic sets (with their mutual relationships) generate new semiotic components and change because of this genesis, becoming enriched with fresh mutual relationships. By so doing, not only do the students produce new semiotic sets, but the sense—in the Vygotskian meaning of the word—of the older ones is transformed, still maintaining some aspects of their origin. All these processes develop within a gradually growing and multimodal cognitive environment that we have analyzed through the lens of the semiotic bundle.

The story of the bundle starts with the gesture of the two hands displaced parallel on the desk (episode 1). This gesture later generates a written iconic representation

***Figure 12***

***Figure 13***

***Figure 14***

***Figure 15***

(episode 2), successively enriched by numerical instances (episode 3) and by arithmetic rules (episode 4), expressed through speech and (new and old) gestures. Gesture, speech, written signs and arithmetic representations grow together in an integrated way supporting the semiotic activities within the semiotic bundle which enlarges more and more. Students develop their semiotic activities and share them: it is exactly through such activities that they can grasp the problem, explore it and elaborate solutions.

All the components are active in a multimodal way up to the end. This is even evident when the students discuss how to write the solution in the final report (Fig. 15: 27' 32"). Gestures and speech intervene first as cognitive means for understanding the story of the cloth; later as means of control for checking the conjectures on the rule. Information is condensed in gestures, entailing a global understanding of the story. The two variables (time and cloth development), first condensed in gesture (an agglutination example in the sense of Vygotsky), generate two different signs in the fresh semiotic set (drawings) that they themselves have generated within the semiotic bundle: it is exactly this disentanglement that allows children to grasp the story separating its structural elements. On its own, speech objectifies the structure of the story, first condensing the local rule in a sentence (episode 3), then exploiting the general rule as an iterative process (episode 4).

The semiotic objectification in this story happens because of the semiotic activities within the semiotic bundle. It is evident that it constitutes an integrated semiotic unity; the activity within it does not consist of a sequence of transcriptions from one register to another, as posited in other studies (e.g. Duval, 1993). On the contrary, it develops in a growing, holistic and multimodal way, which, in the end, produces the objectification of knowledge.

The lenses of semiotic bundles allow us to frame the semiotic phenomena that occur in the classroom within a unitary perspective. Moreover, a semiotic bundle also incorporates dynamic features, which can make sense of the complex genetic relationships among its components, e.g. the genetic conversions and the Vygotskian internalization processes.

This study leaves many problems open: I list only some of those I am interested in studying in the near future:

1. Elsewhere (Arzarello, in press), I introduced the notion of *Space of Action, Production and Communication* (APC-space) as an environment in which cognitive processes develop through social interaction; its components are: culture, sensory-motor experiences, embodied templates, languages, signs, representations, etc. These elements, merged together, shape a multimodal system through which didactical phenomena are described. An interesting problem consists in studying the relationships between the semiotic bundles and the APC-space.

2. The time variable is important in the description of semiotic bundles, e.g. it is relevant to the diachronic and synchronic analysis. What are the connections between this frame and the didactic phenomena linked to students 'inner times[15]', like those described in Guala & Boero (1999)? There, the authors

[15] I thank Paolo Boero for suggesting this problem to me.

list different types of inner times in students' problem solving activities (the 'time of past experience', the 'contemporaneity time', the 'exploration time', the 'synchronous connection time'), which make sense of their mental dynamics. Of course, such activities can be analyzed with semiotic lenses. How do the different inner times enter into a semiotic bundle? Which kinds of conversions or treatments can they generate from one semiotic set to another or within the same semiotic set?.

3. In the processes of students who build new knowledge, there are two dual directions in the genetic conversions within the semiotic bundle: from semiotic sets to semiotic systems (e.g. from gestures to drawings and symbols) or the opposite. The episodes in Penelope's story are an example of the first type, while Vygotsky describes the second type in the internalization processes (a similar example is described in Arzarello & Robutti, to appear). It would be interesting to clarify the nature of this duality of processes.

## Aknowledgments

Research program supported by MIUR, the Università di Torino and the Università di Modena e Reggio Emilia (PRIN Contract n. 2005019721).
I thank L. Bazzini, R. Barbero, F. Ferrara, D. Paola, O. Robutti, C. Sabena, and B. Villa, without whose work and encouragement this paper would not exist.

## References

Arzarello, F. (in press). Mathematical landscapes and their inhabitants: perceptions, languages, theories, *Proceedings ICME 10*, Plenary Lecture.

Arzarello F., L.Bazzini, Chiappini G.P. (1994), Intensional semantics as a tool to analyse algebraic thinking, *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Torino*, 52 (1), 105-125.

Arzarello, F & Edwards, L. (2005). Gesture and the Construction of Mathematical Meaning (Research Forum 2), *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 122-145). Melbourne, AU: PME.

Arzarello F. & Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments. In: R. Nemirovsky, M. Borba & C. DiMattia (eds.), Bodily Activity and Imagination in Mathematics Learning, *PME Special Issue of Educational Studies in Mathematics,* 57.3, CD-Rom, Chapter 1.

Arzarello, F., Ferrara, F., Paola, D., Robutti, O., (2005). The genesis of signs by gestures. The case of Gustavo, *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 73-80). Melbourne, AU: PME.

Arzarello, F., Bazzini, L., Ferrara, F., Robutti, O., Sabena, C., Villa, B. (2006). Will Penelope choose another bridegroom? Looking for an answer through signs, *Proc. 30th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*. Prague.

Arzarello, F. & Robutti, O. (to appear). Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm, in: Lyn English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh e D. Tirosh (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (LEA, USA), 2nd revised edition.

Bara, B.G. & Tirassa, M. (1999). A mentalist framework for linguistic and extralinguistic communication. In: S. Bagnara (ed.), *Proceedings of the 3rd European Conference on Cognitive Science*. Siena, Italy. Roma: Istituto di Psicologia, CNR.

Barbero R, Bazzini L., Ferrara F., Villa B. (in press). The Penelope's story: learning through action, speech and gestures, *Proc. CIEAEM 57*, Piazza Armerina, Italy, July 2005.

Bartolini, M.G. & Mariotti, M.A. (to appear). Semiotic mediation in the mathematics classroom, in: Lyn English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh e D. Tirosh (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (LEA, USA), 2nd revised edition.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (1), 77-124.

Bucciarelli, M. (in press). How the construction of mental models improve learning, *Mind and Society*.

Chevallard, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-266.

Cutica, I. & Bucciarelli, M. 2003. Gestures and the construction of models. *The 2nd International Conference on Reasoning and Decision Making,Reasoning and understanding: Mental models, relevance and limited rationality approaches*, Padova, March, the 17-18, 11.

Detlefsen, M., 1986, *Hilbert's Program*, Dordrecht: Reidel.

Dörfler, W. (n.d.) How diagrammatic is mathematical reasoning? Retrieved May 4 2006, from http://www.math.uncc.edu/~sae/dg3/dorfler2.pdf

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65. ULP, IREM Strasbourg.

Duval, R. (1999). Conversion et articulation des représentations analogiques. Lille, France: I.U.F.M. Nord pas de Calais.

Duval, R. (2001). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Paper presented at the Semiotics Discussion Group of the 25th PME International Conference*, Freudenthal Institute, The Netherlands, July 2001.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), 1-16.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, (61), 103-131.

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: the case of number, *Educational Studies in Mathematics*, (61), 67-101

Frege, G. (1969). *Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien*. Göttingen: Vandenhoeck & Company.

Gallese, V. & Lakoff, G. (2005). The Brain's Concepts: The Role of the Sensory-Motor System in Conceptual Knowledge. *Cognitive Neuropsychology*, 22(3/4), 455-479.

Guala & Boero, 1999 Time complexity and Learning, *Annals of the New York Academy of Sciences*, June 30, 1999, 164-7.

Goldin-Meadow, S. (2003). *Hearing gestures: How our hands help us think*. Chicago: Chicago University Press.

Harper, E.. (1987). Ghosts of Diophantus, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 18, (75-90).

Hilbert, D. (1962). *Grundlagen der Geometrie*, Stuttgart: Teubner (original edition in 1899).

Lemaitre, A. (1905). *Observations sur le langage interieur des enfants*, Archives de psychologie, n.4,1-43

Johnson-Laird P.N. 1983. *Mental models: Towards a cognitive science of language, and consciousness*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Johnson-Laird, P.N. 2001. Mental models and human reasoning. In Dupoux, E. (Ed.), *Language, brain, and cognitive development: Essays in honor of Jacques Mehler*, pp. 85-102. Cambridge, MA: The MIT Press.

Kaput, J., Noss, R. & Hoyles, C.: 2002, Developing New Notations for a Learnable Mathematics in the Computational Era, in: English, L.D. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*: Lawrence Erlbaum Assoc., NJ, 51-75.

Kita, S. (2000). How Representational Gestures Help Speaking. In McNeill, D. (ed.), *Language and Gesture*, pp. 162-185. Cambridge: Cambridge University Press.

Malcom, N. & von Wright, G.H. (2001). Ludwig Wittgenstein : A Memoir. Oxford: Oxford University Press.

McNeill, D. (1992) *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. Chicago: Chicago University Press.

Hartshorne, C. & Weiss, P. (Eds.) (1933), *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vol. III, Cambridge (MA): Harvard University Press

Kita, S. (2003). Interplay of gaze, hand, torso orientation, and language in pointing. In: S. Kita (ed.), *Pointing. Where language, culture, and cognition meet*. Mahwah: Erlbaum.

Nemirovsky, R. (2003). Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J.T. Zilliox (Eds.), *Proc. 27th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 103-135). Honolulu, Hawai'I: PME.

Ogden, C.K. & Richards, I.A. (1923). *The Meaning of Meaning*. London: Routledge & Kegan.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge.*For the Learning of Mathematics,* 22(2), 14-23.

Radford, L. (2003a). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J. and Cerulli, M. (2003b). Calculators, graphs, gestures and the production of meaning, in: N. Pateman, B. Dougherty and J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27 Conference of the international group for the psychology of mathematics education* (PME27 –PMENA25), University of Hawaii, Vol. 4, pp. 55-62.

Radford, L. (2006). The Anthropology of Meaning, *Educational Studies in Mathematics*, (61), 39-65.

Robutti, O. (2005). Hearing gestures in modelling activities with the use of technology, in F. Olivero & R. Sutherland (eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, University of Bristol, 252-261.

Simpson, S.G: (1999). *Subsystems of second order Arithmetic*. New York: Springer.

Sfard A. & McClain, 2002, Analyzing Tools: Perspectives on the Role of Designed Artifacts in Mathematics Learning, *The Journal of the Learning Sciences*, Volume 11, Numbers 2&3, Special Issue, 153-162.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. New York: Springer.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? An epistemological perspective on mathematical interaction, *Educational Studies in Mathematics*, (61), 133-162.

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Artefact and cognition: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education,* vol. IX, n°3.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1997). *Collected works*, Vol. 4 (R. Rieber, Ed.). New York: Plenum.

Vygotsky, L.S. (1986), *Thought and Language*, Cambridge (MA): MIT Press.

Wertsch, J. V., & Stone, C. A. (1985). The concept of internalization in Vygotsky's account of the genesis of higher mental functions. In J.V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives.* Cambridge: Cambridge University Press.

**Ferdinando Arzarello**
Dipartimento di Matematica
Università di Torino
Italia

E-mail: ferdinando.arzarello@unito.it

# Conclusiones y perspectivas de investigación futura

Bruno D'Amore

No cabe duda de que la semiótica, disciplina surgida de un género de estudio del todo diverso (véase la *Introducción* de Luis Radford en esta misma revista), ha conquistado un lugar importante en los estudios de Didáctica de la Matemática.

Respecto a su ingreso en dicho campo, la visión semiótica inició solidificando sus diversos aspectos con trabajos que explicaban el pasaje del concepto a sus representaciones, para después abrir su camino en direcciones diferentes, como lo demuestra la amplia colección de estudios que en esta publicación aparecen. Ahora, el desafío consiste en tratar de entender hacia qué tendencia se moverá la investigación en el futuro. Para poder plantear algunas hipótesis, considero útil un ulterior análisis de la historia reciente y de las mismas bases culturales.

Una problemática importante –y todavía central– es la tocante a la representación de los objetos matemáticos. Por lo general, en Didáctica de la Matemática decimos "pasar de un concepto a sus representaciones"; sin embargo, ¿qué es un *concepto*? La pregunta aún continúa siendo fundamental. En D'Amore, 2006 (pp. 205-220) intenté plantear las bases para responder a dicha cuestión, aparentemente ingenua; empero, lo que se llega a constatar, con certeza absoluta, es que la *definición* revela, por muchos motivos, una complejidad inmensa.

Entre las dificultades que presenta la definición, está que en la idea de *concepto* intervienen muchos factores y causas. Para decirlo brevemente (y, por tanto, en modo incompleto), no parece correcto afirmar que *un concepto matemático es aquel que se halla en la mente de los científicos que a este tema han dedicado su vida de estudio y reflexión*. Parece más correcto señalar que hay una fuerte componente *antropológica*.

Así, en la *construcción de un concepto* participarían tanto la parte institucional (el Saber) como la personal (de quien tiene acceso a tal Saber, que implica no sólo el científico). Esta propuesta la han expuesto diferentes autores; yo me limito a sugerir el trabajo de Godino y Batanero, 1994, porque hace hincapié en la importancia del debate en el cual estoy tratando de inserirme, al tratar las relaciones entre significados institucionales y personales de los objetos matemáticos.

Distinguir el *concepto* de su construcción no es fácil y, quizá, no es ni posible ni deseable, ya que un concepto se halla continuamente en fase de construcción; aquí estriba su parte más problemática, pero también la más rica de su significado. Podríamos llamar a tal construcción *conceptualización*, y reflexionar sobre qué es y cómo se da. En el intento por clarificar dicho argumento, muchos investigadores han propuesto hipótesis y teorías que no detallaré; basta recordar las contribuciones –muchas veces en franca oposición–

de Vygotski, Piaget, Gal'perin, Bruner o Gagné. Para una rápida recapitulación, puede consultarse D'Amore, 2006.

Adentrarse en esta aventura nos conduce, por lo menos, a darnos cuenta de un hecho: la segunda pregunta, *¿qué es* o *cómo se llega a la conceptualización*?, es un misterio. La cuestión pasa a través de un recorrido por los famosos *triángulos* (hay bibliografía específica en D'Amore, 2006):

- El de Charles Sanders Peirce (1839-1914), publicado en 1883: *intérprete*, *representante*, *objeto*
- El de Gotlob Frege (1848-1925), publicado en 1892: *Sinn* [sentido], *Zeichen* [expresión], *Bedeutung* [indicación]
- El de C. K. Ogden e I. A. Richards, que quería ser un compendio de los otros dos, y apareció en 1923: *referencia*, *símbolo*, *referente*
- El de G. Vergnaud (1990), por el cual un concepto C es la terna (S, I, *S*), donde S es el referente, I el significado y *S* el significante

Queda claro que *apropiarse* de un concepto, independientemente de lo que esto signifique, necesita siempre de algo más que *nombrarlo* (la cuestión se originó por lo menos en la Edad Media, apunta D'Amore, 2006) y *representarlo*, lo cual nos lleva a la famosa *paradoja* de Duval, 1993 (p. 38).

Kant, en la *Crítica de la razón pura*, señala que el conocimiento es resultado de un contacto entre un sujeto que aprende y un objeto de conocimiento. Él recurre a una comparación: así como el líquido adopta la forma del recipiente que lo contiene, las impresiones sensoriales adoptan las formas que le imponen las estructuras cognitivas. Pero para que eso suceda (y es la bien conocida *hipótesis fuerte* de Kant) se requieren de formas innatas de sensibilidad, como espacio, tiempo, causalidad, permanencia del objeto y uso de experiencias precedentes.

El conocimiento no es una simple representación de la realidad externa, sino el resultado de la interacción entre el sujeto que aprende (sus estructuras cognitivas) y sus *experiencias sensoriales*. Además, el sujeto que aprende abandona la típica pasividad (cartesiana o lockiana), pues construye y estructura sus experiencias; de este modo, participa activamente en el proceso de aprendizaje y lo transforma en una verdadera y propia *construcción*. Un objeto de conocimiento, al entrar en contacto con un sujeto que aprende, se modifica y reconstruye por los instrumentos cognitivos del sujeto.

Pero, ¿de dónde provienen esos instrumentos cognitivos que sirven para transformar las experiencias del sujeto? La epistemología del aprendizaje de Kant, para usar una terminología moderna, se refiere a un aprendiz adulto, dotado de un lenguaje desarrollado, con capacidad de abstracción y de generalización. Aquí es pertinente la siguiente pregunta: ¿cómo cambia todo esto si hablamos de aprendizaje en ambiente escolar, de aprendices no adultos (niños, adolescentes o jóvenes) y a las primeras armas, con lenguajes aún en elaboración?

No es del todo absurdo pensar que la epistemología constructivista de Piaget, formulada en los años treinta[1], surgió por la necesidad de dar respuesta a este

1 Estoy pensando en Piaget (1937), por ejemplo.

problema. Por tanto, el *saber adquirido* puede verse como el producto de la elaboración de la experiencia con la que entra en contacto el sujeto que aprende. Y esta elaboración consiste no sólo en la interacción entre el individuo y su ambiente, sino también en el modo como aquél interioriza el mundo externo. Independientemente de las peculiaridades de tales *actividades*, el sujeto que aprende debe comprometerse en algo que necesariamente lo lleva a simbolizar. Esta es una necesidad típicamente humana, ya que es una elaboración (con características internas o sociales, e incluso ambas) organizada alrededor de o en los sistemas semióticos de representación.

Se puede agregar que el *conocimiento es la intervención y el uso de los signos*. Así, el mecanismo de producción y de uso, subjetivo e intersubjetivo, de estos signos, y el de la representación de los *objetos* de la adquisición conceptual, resulta crucial para el conocimiento.

Todo eso había sido ya previsto en el programa de la epistemología constructivista, enunciada por Piaget y Garcia (1982), particularmente en el capítulo IX. Al hablar sobre la experiencia del niño, indican que las situaciones que él encuentra son generadas por su entorno social y los objetos aparecen situados en contextos que les dan el significado específico. Por tanto, este niño no asimila objetos puros, sino las situaciones en las cuales los objetos tienen roles específicos; a medida que su sistema de comunicación se hace más complejo, la experiencia directa de los objetos queda subordinada al sistema de interpretaciones suministrado por el entorno social.

No hay duda de que el conocimiento en la escuela y su aprendizaje como construcción se hallan condicionados por situaciones específicas de la institución. Por ende, el aprender en la escuela *¡no es el aprender total!* Los problemas del aprendizaje matemático en la escuela, aún antes de ser de orden epistemológico, pertenecen a un ambiente sociocultural.

Si aceptamos que todo conocimiento (matemático, en particular) refleja al mismo tiempo una dimensión social y una personal, la escuela no es una excepción; incluso, en ella queda institucionalizada esa doble naturaleza. Durante el aprendizaje de las matemáticas se introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, tanto conceptual como simbólico –sobre todo, representativo–, que no es fruto de una construcción solitaria, sino de una verdadera y compleja interacción con los miembros de la microsociedad, de la cual forma parte el sujeto que aprende: los propios compañeros, los maestros y la *noosfera* (a veces borrosa, otras evidente).

Es mediante un continuo debate social que el sujeto que aprende toma conciencia del conflicto entre *conceptos espontáneos* y *conceptos científicos*. Así, enseñar no consiste sólo en el intento de generalizar, amplificar, volver más crítico el *sentido común* de los estudiantes, sino se trata de una acción más bien compleja, como nos ha enseñado Vygotski en *Pensamiento y lenguaje* (1962), cuando afirma que un concepto es algo más que la suma de ciertos vínculos asociativos formados por la memoria, pues consiste en un auténtico y complejo acto del pensamiento al que se puede llegar sólo cuando el desarrollo mental del niño ha alcanzado el nivel requerido. Sin embargo, el desarrollo de los conceptos presupone el de muchas funciones intelectuales (atención, memoria lógica, abstracción, capacidad de comparación y diferenciación); la experiencia ha demostrado que la enseñanza directa de los conceptos es imposible y estéril.

En matemáticas, la asimilación conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas (Chevallard, 1991; Duval, 1993, 1999; Godino y Batanero, 1994), lo cual nos obliga a aceptar la afirmación de Husserl, pero centrada por Duval hacia la Didáctica de la Matemática, que *no existe noética sin semiótica*.

Como sugiere Duval, la construcción de los conceptos matemáticos depende, estrechamente, de la capacidad de usar *más* registros de sus representaciones semióticas:

- De *representarlos* en un registro dado
- De *tratar* tales representaciones en un mismo registro
- De *convertir* tales representaciones de un registro dado a otro

El conjunto de estos tres elementos, al igual que las consideraciones de los párrafos anteriores, evidencian una profunda relación entre noética y constructivismo. Así, la *construcción del conocimiento en matemáticas* se puede pensar como la unión de tres *acciones* sobre los conceptos: la expresión misma de la capacidad de *representar* los conceptos, de *tratar* las representaciones obtenidas en un registro establecido y de *convertirlas* de un registro a otro.

Todo esto constituye, en mi opinión, sólo el punto de partida para especificar y explicar históricamente la importancia que la Didáctica de la Matemática reconoció a los estudios sobre la semiótica, en el momento en que ingresaron a su campo de investigación. Hoy se prefiere seguir una vía de carácter no nominalista, que podríamos llamar de pensamiento entendido como praxis reflexiva sensorial-intelectual, apoyada en sistemas semióticos de significado cultural. Según esta línea, trazada por Luis Radford, estos sistemas semióticos, construidos socialmente por los individuos a partir de su realidad concreta, transformados activamente de generación en generación, "naturalizan" la realidad de los individuos, enmarcan lo que se entiende por evidencia, argumentos convincentes, demostraciones, etc. y subtienden las reflexiones que los individuos hacen de su mundo.

Pero, volvamos a la pregunta inicial. ¿Qué dirección tomarán estos estudios en el futuro? Podemos ver ya importantes señales, que emergen en las páginas que aquí quisimos recoger. Quizás una gran influencia tendrán particularmente los estudios sobre la comunicación, sobre las acciones de las comunidades de práctica, las reflexiones sobre la dimensión ontogenética, así como la contribución de análisis críticos de temas que han fundado nuestra disciplina y que ya se delinean como evoluciones de un futuro próximo.

En este número especial de la revista *Relime*, reunimos a varios especialistas con el fin de presentar el estado del arte de las diversas tendencias que conforman, actualmente, el estudio de la semiótica en nuestro sector. Algunos de estos trabajos contribuyen a dar una respuesta adecuada a muchas de las preguntas precedentes.

La respuesta a la primera pregunta, *¿qué es un concepto?*, plantea problemas teóricos. Seguir profundizando en ellos parece ser un campo donde la semiótica puede dar importantes resultados en un futuro cercano. Varios textos aquí reunidos sugieren que las respuestas a esta pregunta, y a las que planteé en el curso de este artículo, deben incluir el aspecto institucional (Godino y colaboradores), pero también el contexto cultural (Radford, Cantoral y colaboradores) y cognitivo (Arzarello, Radford, Duval, Otte, Arzarello).

Es así como Godino y sus colaboradores presentan una actividad concreta del EOS en el análisis de textos escolares, en el cual utilizan los criterios de idoneidad tanto *epistémica* como *cognitiva*; un análisis de este tipo puede tener repercusiones profundas de carácter institucional.

Cantoral y sus colaboradores abordan la socioepistemología, mediante la cual la actividad matemática se sitúa en un contexto cultural de práctica social.

Radford basa su aporte en la idea de *praxis reflexiva* y expone una *teoría cultural de la objetivación*. Tal propuesta tiene una doble valencia: la cultural (de análisis crítico de posiciones, en algunos casos ampliamente compartidas) y la cognitiva.

Duval insiste en la importancia del análisis semiótico complejo en el ámbito matemático y cognitivo. Vuelve a los orígenes de la semiótica con el fin de sugerir motivaciones para el análisis de los signos, así como de las relaciones de semejanza, referencia, causalidad y oposición. Esta modalidad de afrontar la problemática es útil tanto para el desarrollo de las matemáticas como para el análisis de su aprendizaje.

Otte propone que la explicación es consubstancial de la exhibición de signos y sentido, ya que no hay diferencia entre idea y símbolo a pesar de lo que sostienen el idealismo filosófico y el mentalismo cognitivista, lo cual ejemplifica al tratar el tema de la demostración en matemáticas.

Arzarello muestra en primer lugar un análisis crítico e histórico sobre la idea misma de semiótica. Parte de su fundamento teórico y propone diversas interpretaciones y luego enfoca a la semiótica como aproximación modal, que también ofrece análisis de eventos sucedidos en el aula.

La semiótica que nos interesa, de manera específica, atañe al uso de signos y al desarrollo conceptual en el salón de clases. Muchos de los artículos aquí reunidos atienden este aspecto.

Así, Koukkoufis y Williams emplean la teoría de la objetivación para estudiar la manera en que generalizan jóvenes alumnos.

Adalira Sáenz-Ludlow enfoca su atención, fuertemente teórica, en una idea muy concreta, la de *riqueza matemática del alumno*, y en la influencia de los maestros en el discurso matemático.

Gagatsis y sus colaboradores dan a conocer estudios críticos sobre los cambios de representación de objetos relacionados con el concepto de función.

Bagni ofrece un estudio experimental hecho con alumnos de secundaria que intentan dar sentido a frases paradójicas.

D'Amore propone un ejemplo de aula donde se presenta un cambio de sentido frente a diferentes representaciones del mismo objeto, conseguidas por tratamiento semiótico.

Este número especial de *Relime* se inspira en las discusiones colectivas precedentes que menciona Luis Radford en su *Introducción*. Quiere ser una modesta contribución analítica y problemática al tema de la semiótica en el ámbito de la Educación Matemática.

Me agrego a los agradecimientos de Luis, extendiéndolos a nuestros autores y a todos los lectores.

## Referencias

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio. [Primera edición en italiano, 1999, Bologna: Pitagora].

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5*, 37-65.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle. [Primera edición en francés 1995, Berne: Peter Lang].

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 3*, 325-355.

Piaget, J. (1937). *La construction du réel chez l'enfant.* Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. & Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris, France: Flammarion.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*, 133-169.

Vygotsky, L. (1962). *Thought and language*. Cambridge, USA: MIT Press.

Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla

**Bruno D'Amore**
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna
Italia

E-mail: damore@dm.unibo.it

## SUGERENCIAS PARA LA PREPARACIÓN DE ARTÍCULOS

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo en no más de 10 renglones en español, y no más de 5 palabras clave. Todo esto, junto con el título debe ser incluido con su traducción al inglés, francés y portugués.

2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).

3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.

4) Justificación de la metodología usada.

5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.

6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).

2) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.

3) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición.

4) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.

5) Incluir referencias bibliográficas.

Los artículos serán evaluados por tres investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. Específicamente se tomará en cuenta la atención a los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa.

## GUÍA PARA LA PRESENTACIÓN DE ARTÍCULOS
## (Relime acepta artículos en español y en portugués para su publicación)

***Características de los artículos:***

1) Extensión máxima de 30 páginas a espacio sencillo. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción podrá considerar la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista; en otro caso, su artículo será remitido para su consideración en otra de las publicaciones del Clame (libros, ensayos, etcétera).

2) Todos los artículos deberán ser trabajos inéditos de investigación. No se aceptarán traducciones previamente publicadas en su lengua original.

3) Los trabajos deberán acompañarse de:

* Portada que indique el título del texto (no mayor de ocho palabras), con su traducción al inglés, francés y portugués, nombre completo del autor y del centro de adscripción.

* Sinopsis o resumen, no mayor de 10 renglones, que explique el tema, los objetivos y la metodología del texto, que plantee las conclusiones principales y que incluya la traducción del resumen a fin de que aparezca en castellano, portugués, francés e inglés.

* Palabras clave, no más de 5 que recojan las ideas centrales y su traducción al inglés, francés y portugués.

* Datos generales del autor (notas curriculares, dirección, número telefónico particular y laboral y de ser posible número de fax y cuenta de correo electrónico).

4) Se solicita a los autores enviar los trabajos en CD o disquete para PC (3.5”) utilizando el procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman y tamaño de 12 puntos. Para las expresiones matemáticas se solicita usar texto con el siguiente formato; las literales en itálica, números y signos matemáticos en letra normal, tal como se muestra en el ejemplo:

$$f\,(x) = 3x + 1$$

O bien, utilizar el editor de ecuaciones de Word, respetando el mismo formato. Adicionalmente se enviarán cuatro copias impresas del mismo trabajo, tres de las cuales habrán de omitir los datos del autor.

5) Con el propósito de facilitar el proceso de publicación, los trabajos se escribirán de la siguiente manera:

* Usar márgenes de una pulgada (2.5 centímetros) en ambos lados de la página tamaño carta.
* Mecanografiar o imprimir de un solo lado del papel.
* No usar sangrías.
* Colocar un solo espacio después de punto y seguido.
* No usar guiones de separación de palabras.
* Diferenciar bien los títulos de los subtítulos.

* Las palabras, frases o señalamientos especiales que se deseen destacar llevarán cursivas o negrillas (no usar subrayado).

* Bibliografía, referencias y notas: solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 4th ed., 1994) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía.

Ejemplos:

***Revista especializada:***

Sepúlveda, G. (1989). El paradigma de la educación actual. *La Educación 104,* 57-68.

Brousseau, G. (1980). Pròblemes de l’enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques 1* (1)**,** 11-59.

***Revista de interés general* (*publicación periódica*):**

Vélez, E. (1984, mayo). Logros ocupa-cionales del bachiller colombiano: El caso de la Cohorte de 1978. *Educación, Formación Profesional y Empleo* (pp. 167-194). Bogotá, Colombia: SENA.

***Libro:***

Lakatos, I. (1977). *Proofs and refutations, the logic of mathematical discovery*. Cambridge, USA: Cambridge University Press.

***Capítulo de libro:***

Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: Cognitive difficulties and teaching practice. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 109-132). Washington, DC, EE. UU.: Mathematical Association of America.

Dauben, J. (1984). El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (pp. 235-282). Madrid, España: Alianza Editorial. (Versión original en inglés publicada en 1980).

***Organizaciones y documentos:***

UNESCO (1983). Anuario Estadístico. París: UNESCO.

***Memorias de Reuniones y Simposia:***

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar y matemática educativa. En R. Farfán (Ed.), *Publicación de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Inves-tigación en Matemática Educativa* (volumen 1, pp. 1-10). La Habana, Ministerio de Educación, Cuba: Cinvestav.

***Tesis:***

Flores, R. (1992). *Sobre la construcción del*

*concepto de convergencia en relación al manejo heurístico de los criterios.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

***Referencias Electrónicas***

***Publicación periódica en línea:***

Candela, A. (1999). Prácticas discursivas en el aula y calidad educativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 4*(8), 273-298. Obtenido en junio 7, 2004, de http://www.comie.org.mx/revista/Pdfs/Carpeta8/8invest3.pdf

***Documento en línea:***

PISA (2003). *Aprender para el mundo de mañana: Resumen de resultados.* Obtenido en abril 4, 2005, de http://www.ince.mec.es/pub/pisa2003resumenocde.pdf

***Artículos de Internet basados en una fuente impresa:***

Parnafes, O. & Disessa, A. (2004). Relations between types of reasoning and computational representations. [Versión Electrónica]. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 9*(3), 251-280.

***Documento sin fecha ni autor identificado:***

Si el autor de un documento no está identificado, comience la referencia con el título del documento:

Calculadoras y Educación (s.f.). Obtenido en enero 12, 2000, de http://www.agapema.com/period/dijo.htm

***Documento disponible en la página web de una Universidad o Departamento:***

Chou, L., McClintock, R., Moretti, F., & Nix, D. H. (1993). *Technology and education: New wine in new bottles: Choosing pasts and imagining educational futures.* Obtenido en agosto 24, 2000, del sitio web de Columbia University, Institute for Learning Technologies: http://www.ilt.columbia.edu/publications/papers/newwine1.html

***Referencia de texto:***

Las referencias de texto irán al final de la oración, frase o texto como se muestra en los siguientes ejemplos:

- Una fuente con dos autores: (Gubar & Hebin, 1980).
- Una fuente con más de tres autores: (Agard et al., 1990).
- Una referencia a varios trabajos, separarlas citas con punto y coma: (Gómez, 1992; Cordero, 1995; García, 1994).

***Citas de Notas:***

El formato para citar una fuente será en forma de referencia de texto. Es posible incluir notas al pie de página para proveer información adicional de una referencia textual o aclarar una idea del texto. Si se utilizan notas al pie de página, el autor deberá colocarlas en la parte inferior de la página de referencia. Si se utilizan notas finales, se colocarán al final del artículo siguiendo una numeración ascendente.

***Información complementaria***

1) No se devolverán los disquetes ni los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente 2 ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en **Relime**.

Para mayores informes, puede visitar la página web : http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico :

relime@clame.org.mx

## Suscripción a Relime

*Datos personales*

Nombre ______________________ ______________________ ______________________
nombres apellido paterno apellido materno

Dirección particular ___________________________ _____ ______________________
calle número colonia

__________________ __________________ ___________________ ________________
ciudad, estado, código postal país

Tel. ____________ Fax____________ E-mail _____________________________________

*Datos de su institución*

Escuela o Institución donde trabaja _______________________________________________

Dirección _______________________________ ________ ________________________
calle número colonia

__________________ _________________ ___________________ _________________
ciudad, estado, código postal país

Teléfono particular _____________________ Fax __________________________

*Datos sobre sus actividades*

Si es estudiante,
nombre de la licenciatura, ingeniería o posgrado que estudia
_____________________________________________________________________________

Institución donde estudia _______________________________________Semestre _______

Si es profesor,
nivel que imparte____________________
Nombre de la(s) asignatura(s) que imparte ___________________ _____________________
________________ _________________Nivel educativo donde trabaja__________________

Si es investigador,
Institución a que pertenece _______________________________________________

Línea de investigación que trabaja _____________________________________________

Nivel educativo más frecuente donde hace sus investigaciones _______________________

Costo del volumen 9 (tres numeros)
Suscripción institucional: 120 dls
Suscripción individual: 50 dls
Suscripción para miembros de Clame: 20 dls
Costo por un numero: 15 dls

Estos precios no incluyen costos por envio ni cargo por depósito en cuenta bancaria. Para cotización actual, favor de pedir informes a suscripción-relime@clame.org.mx

*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Número Especial.*

Se imprimió en los talleres de
Impresora MMC
5a Cerrada de Barranca, Manzana 4, Lote 5
Col. El manto, Iztapalapa. México, DF.

Septiembre de 2006.
Tiraje: 2000 ejemplares más sobrantes

ISSN 1665-2436