RELIME

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Número Especial

Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático
Semiotics, Culture and Mathematical Thinking
Sémiotique, Culture et Pensée Mathématique

Editores Invitados:

Luis Radford
Bruno D'Amore

Número Especial, 2006

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Número Especial, 2006

RELIME

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático
Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking
Sémiotique, Culture et Pensée Mathématique

Editores Invitados:

Luis Radford
Bruno D'Amore

Publicación Oficial de Investigación del
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Clame. Consejo Directivo: *Presidente:* Gustavo Martínez (presidencia@clame.org.mx) – México; *Secretario:* Germán Beitía (secretario@clame.org.mx) – Panamá; *Tesorero:* Joaquín Padovani (tesorero@clame.org.mx) – Puerto Rico; *Vocal Norteamérica:* Gisela Montiel (vocal_norteamerica@clame.org.mx) - México; *Vocal Caribe:* Juan Raúl Delgado (vocal_caribe@clame.org.mx) – Cuba; *Vocal Sudamérica:* Cecilia Crespo (vocal_sudamerica@clame.org.mx) – Argentina.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Número especial, 2006. Tiraje 2000 ejemplares. Para cualquier contribución o mayor información, favor de dirigirse a la dirección electrónica: relime@clame.org.mx, o consulte la página http://www.clame.org.mx. Relime está disponible en los siguientes índices: Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica:http://www.conacyt.mx/dac/revistas/revistas_catalogo2004.html; Índice de Revistas Latinoamericanas en Ciencia (Periódica): http://www.dgbiblio.unam.mx/periodica.html; Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal (Latindex): http://www.latindex.unam.mx; Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (Iresie): http://www.unam.mx/cesu/iresie/; Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe (Red ALyC): http://www.redalyc.com/; EBSCO Information Services: http://www.ebsco.com/home/; IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences: http://www.gale.com/; ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: http://www.fizkarlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdmp1.html; Dialnet: http://dialnet.unirioja.es/ ;Informe Académico: www.galeiberoamerica.com

Contenido

Editorial 6

Introducción. Semiótica y Educación Matemática 7

Luis Radford

Proof and Explanation from a Semiotical Point of View 23

Michael Otte

Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? 45

Raymond Duval

Socioepistemología y representación: algunos ejemplos 83

Ricardo Cantoral, Rosa-María Farfán, Javier Lezama y Gustavo Martínez-Sierra

Elementos de una teoría cultural de la objetivación 103

Luis Radford

Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta 131

Juan D. Godino , Vicenç Font y Miguel R. Wilhelmi

Semiotic Objectifications of the Compensation Strategy: En Route to the Reification of Integers 157

Andreas Koukkoufis y Julian Williams

Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido 177

Bruno D'Amore

Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking? 197

Athanasios Gagatsis, Iliada Elia y Nikos Mousoulides

Learning Mathematics: Increasing the Value of Initial Mathematical Wealth 225

Adalira Sáenz-Ludlow

Everyday and Mathematical Language 100 Years After the Publication of "On Denoting" by Bertrand Russell 247

Giorgio T. Bagni

Semiosis as a Multimodal Process 267

Ferdinando Arzarello

Conclusiones y perspectivas de investigación futura 301

Bruno D'Amore

Sugerencias y guía para la preparación de artículos 307

Editorial

Con gran placer presentamos nuestro primer número especial de Relime que versa sobre una temática de actualidad e importancia para la investigación en matemática educativa: "Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático". Esta iniciativa ha sido posible gracias al grado de consolidación actual de nuestra revista y a la participación entusiasta y profesional de nuestros colegas Luis Radford y Bruno D'Amore quienes son nuestros editores invitados para este numero especial y a quienes les agradecemos su conocimiento, tiempo y trabajo para el logro de la empresa.

Todas las colaboraciones de este numero siguieron el proceso de revisión y arbitraje estricto usual en Relime y se presentan escritos en castellano, inglés y francés como un reflejo de la pluralidad y contribución de las diversas escuelas de pensamiento hacia la temática que convoca a los diversos especialistas de reconocimiento internacionall. Esta experiencia sin duda enriquecerá a nuestra comunidad, por lo que esperamos continuar con la edición de números especiales de Relime. Para que eso sea posible, invitamos a nuestros colegas a enviar sus propuestas.

Reiteramos las consideraciones de origen que guían la política editorial de Relime: nuestro objetivo es el de promover y fomentar la escritura de artículos de investigación de alta calidad en nuestra disciplina, como un paso necesario para la construcción de la escuela latinoamericana de matemática educativa. Como siempre, expresamos nuestro reconocimiento a quienes nos acompañan en esta empresa: lectores, autores, árbitros y equipo técnico. A todos los colegas que cultivan nuestra disciplina les extendemos nuestra cordial invitación para que remitan sus colaboraciones a Relime. ■

Rosa María Farfán
Directora de Relime

Introducción

Semiótica y Educación Matemática

Luis Radford [1]

El creciente interés suscitado por la semiótica en el campo de la educación matemática en los últimos años se debe nos parece a razones de diferente índole.

Por un lado, ha habido una toma de conciencia progresiva del hecho de que, dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, esencialmente, una actividad simbólica (D'Amore, 2001; Duval, 1998; Godino y Batanero, 1999; Otte, 2003; Radford, 2004; Steinbring, 2005).

Por otro lado, el interés que suscitó en los años 1990 la comprensión de la comunicación en el salón de clase puso en evidencia la importancia que tiene, tanto para el investigador como para el maestro, comprender la naturaleza del discurso matemático (Cobb, Yackel, y McClain, 2000; Steinbring, Bartolini Bussi, y Sierpinska, 1998). La semiótica, con su arsenal de métodos y conceptos, aparece como teoría apropiada para intentar dar cuenta de la complejidad discursiva.

Otra razón parece ser el uso cada vez mayor de artefactos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Arzarello, 2004; Borba y Villareal, 2006; Guzmán y Kieran, 2002; Kaput y Hegedus, 2004; Kieran y Saldanha, 2005). La semiótica, de nuevo, parece ofrecer conceptos capaces de ayudar al didáctico en su tarea de entender el papel cognitivo que desempeñan los artefactos.

Mencionemos, por último, el hecho de que los artefactos y los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación que hacen a la semiótica un campo muy bien situado para entender las relaciones entre los signos a través de los cuales piensan los individuos y el contexto cultural (Radford, en prensa-1).

La semiótica se presenta con un amplio y ambicioso espectro de aplicaciones. Esto no debe, sin embargo, dar la impresión de que la semiótica es una teoría nueva, unificada por una serie de principios comunes. Hay, por lo menos, tres tradiciones semióticas claramente diferenciadas. (1) La tradición Saussureana, iniciada por el suizo Ferdinand de Saussure (1857-1913) en una serie de cursos dictados entre 1907 y 1911, tradición que emplea el término *semiología*; (2) la tradición Peirceana, iniciada por el estadounidense Charles Sanders Peirce (1839-1914) quien acuñó el término semiótica; (3); la Vygotskiana, iniciada por el psicólogo ruso Lev S. Vygotski (1896-1934). Cada una de esas tradiciones emergió y fue desarrollada dentro de problemáticas precisas y diferentes.

---

1 École des sciences de l'éducation. Université Laurentienne, Ontario, Canada.

La tradición Saussureana

El problema principal para Saussure era el de la comprensión de la lengua, que él distinguía del lenguaje y de la palabra, una distinción que reposa en la oposición entre lo social y lo subjetivo. Para Saussure, la palabra es de orden subjetivo, mientras que la lengua es de orden social. "La lengua", decía Saussure, "es un sistema de signos que expresan ideas, comparable a la escritura, al alfabeto de los sordomudos, a los ritos simbólicos, a las formas de cortesía, a las señales militares, etc. etc." (Saussure, 1995, p. 33)[2]. Para Saussure, la lengua no solamente se asemeja a esos sistemas de signos, sino que es el más importante de ellos. Fue en este contexto que Saussure propuso una nueva ciencia, que englobaría la lingüística y cuyo objetivo sería el estudio general de los signos:

> Podemos concebir, pues, *una ciencia que estudie la vida de los signos en el seno de la vida social*; ésta sería parte de la psicología social y, por consiguiente, de la psicología general; la llamaremos *semiología* (del griego *semeîon*, "signo"). Ella nos enseñará en qué consisten los signos (y) cuáles son las leyes que los rigen. (Saussure,– *op. cit*. p. 33; énfasis en el original).

Para Saussure, los signos no son simples marcas que representan cosas en el mundo. Esta idea, dice Saussure, reduce el papel de los signos a una mera nomenclatura. El signo, Saussure sugiere, es la unión indisociable de dos elementos de naturaleza psíquica: el concepto (*signifié*, significado) y la imagen acústica asociada (*signifiant*, significante). El lingüista suizo nos invita a imaginar a alguien que nos habla en una lengua desconocida: "Cuando escuchamos una lengua desconocida, estamos en la imposibilidad de decir cómo los sonidos que siguen deben ser analizados" (op. cit. p. 145). Lo que aparece ante nosotros es una cadena de sonidos sin significados. "Pero cuando sabemos qué sentido y qué papel hay que atribuir a cada parte de la cadena, entonces vemos esas partes desprenderse de las otras y esa cinta (auditiva) amorfa dividirse en fragmentos" o signos con pleno sentido (*op. cit*. p. 145).

Como lo sugiere este ejemplo, los signos significan en la medida en que son miembros de un sistema. Esto es, el signo tiene significado cuando está relacionado con otros signos. Es gracias a este sistema que el signo es signo. Saussure ofrece la analogía con el juego de ajedrez. El caballo, por ejemplo, no representa nada, en tanto que pieza material: "En su materialidad pura, fuera de su casilla y de las otras condiciones del juego, el caballo no representa nada para el jugador" (op. cit. p. 153). Esta pieza material no se convierte en elemento real y concreto, sino hasta cuando reviste el valor que le otorgan las reglas del juego. Lo mismo ocurre con los signos.

En la aproximación estructuralista de Saussure, la manera de significar de los signos reposa en su oposición diferencial. Esta idea fue continuada, entre otros, por (Hjelmslev, 1969) y luego por (Eco, 1976).

2 Excepto en los casos de obras mencionadas en español, en la lista de referencias, las traducciones al español son nuestras.

La tradición Peirceana

Charles Sanders Peirce, matemático dedicado a la lógica, concibió la semiótica como la "doctrina formal de los signos". La orientación de su pragmaticismo (diferente de simple practicalismo como algunos lo han interpretado) no fue la investigación de cómo los signos significan en el seno de la vida social, como fue el caso de Saussure, sino la manera en que un individuo genérico utiliza signos para formar nuevas ideas y nuevos conceptos para alcanzar la verdad. Su teoría de pragmaticismo (es decir, la lógica de abducción) es la base de su semiótica. Por esa razón, la semiótica Peirceana se mueve cerca de las esferas de la lógica, sin reducirse solamente a ésta.

En tanto que buen discípulo de Kant, Peirce había notado, contra las ideas de los racionalistas de la antigüedad y del siglo XVII, que el pensamiento humano no puede ser comprendido a la luz de la teoría de la inferencia o de la lógica formal. Como Kant, Peirce se propuso modificar las categorías aristotélicas y abandonó, como lo haría Piaget unos años más tarde, el apriorismo Kantiano. Para ello, Peirce adoptó una postura ontológica alineada con el Realismo escolástico, y elaboró una fenomenología en la cual la manera de conocer pasa por tres experiencias distintas (*Firstness*, *Secondness* and *Thirdness*).

Peirce definió el signo como algo que, para alguien, toma lugar de otra cosa (el objeto del signo), no en todos los aspectos de esta cosa, sino solamente de acuerdo con cierta forma o capacidad (ver CP 2.228[3]). En efecto, según Peirce, el objeto (*Secondness*) del signo es aprehendido según cierta cualidad (*Firstnees*) de manera tal que un nuevo signo es producido: el *intepretant* (interpretante) (*Thirdness*). Siguiendo el mismo proceso, este interpretante puede convertirse en objeto de otro nuevo signo y así indefinidamente (ver CP 1.339).

Este proceso que va de signo en signo o semiosis ilimitada, como la llaman Eco y otros peirceanos, constituye la esencia del pensamiento, pues como dice Peirce en otras partes, "todo pensamiento es un signo" (CP 1.538, 2.253, 5.314, 5.470). El problema es, pues, para Peirce, encontrar el método "correcto" para pensar:

> si podemos encontrar el método para pensar y si podemos seguirlo el método correcto de transformación de signos entonces la verdad puede ser ni más ni menos que el último resultado al cual el método del seguimiento de signos nos conduciría ultimadamente" (Peirce, CP 5.553).

El éxito de la empresa de Peirce reposa, sin embargo, en la adopción de dos hipótesis fundamentales, cuyo precio puede parecer muy elevado: primero, la hipótesis de una adecuación entre el mundo real y el mundo de las ideas, esto es entre *ordo rerum* y *ordo idearum*; segundo, la confianza en el razonamiento científico como modelo metodológico de raciocinio (Radford, 2006).

Respecto a la primera hipótesis, señalemos, brevemente, que Peirce supone que, desde el punto de vista ontológico, la naturaleza es gobernada por

---

3 Siguiendo la tradición, en adelante indicaremos los Collected Papers de Peirce (1931-1958) con las siglas CP. El número 2.228 significa el libro 2, entrada 228. En general, CP a.b significa los Collected Papers, libro a, entrada b).

leyes. Además, desde el punto de vista epistemológico, Peirce supone que esta naturaleza es *inteligible*.

Respecto a la segunda hipótesis, la mencionada adecuación entre *ordo rerum* y *ordo idearum*, sostenida por el extremo realismo escolástico Peirceano (ver Parker, 1994, p. 67), es suplementada por una idea racionalista de verdad. El resultado es que la actividad cognitiva del individuo encuentra un aliado incondicional en la naturaleza. Los signos de la naturaleza y el pensamiento humano caminan juntos, tomados de la mano. Es por eso que Peirce puede decir con confianza que "El solo inmediato propósito del pensamiento es volver las cosas inteligibles" (CP 1.405). Es gracias a esta idea racionalista de verdad que funciona como idea reguladora que, según Peirce, podemos estar seguros contra la opinión de Kant y el constructivismo al que el éste dio origen de que en nuestras disquisiciones no estamos corriendo detrás de fantasmas, objetos nominales o simples invenciones subjetivas o ideas "viables" como ha dicho Glaserfeld (1995): al contrario, el "correcto" uso de signos, regulados por esa verdad trascendental que se expresa en los signos de la naturaleza y que nos revela el método científico, asegura el final feliz de la semiosis ilimitada (Nesher, 1997; Radford, en prensa-2).

No obstante el precio a pagar por las hipótesis anteriores, la semiótica de Peirce ofrece ricas topologías de signos que pueden ser muy útiles en la comprensión de fenómenos didácticos (Otte, en prensa; Presmeg, 2005; Sáenz-Ludlow, 2003, 2004, 2006). Una de las vías actualmente exploradas dentro de la tradición peirceana es la del razonamiento diagramático (Dörfler, 2005; Hoffmann, 2002, 2005; Stjernfelt, 2000).

La tradición Vygotskiana [4]

La semiótica Vygostkiana fue elaborada como respuesta al problema del estudio del pensamiento y de su desarrollo. Amparado en la corriente Marxista de su época, Vygotski propuso una teoría del desarrollo cognitivo en la cual los conceptos de labor y de herramientas desempeñan un papel primordial. En una conferencia dictada en 1930 en la Academia de la educación comunista, Vygotski llamó la atención sobre el hecho de que el comportamiento humano está inmerso en una serie de dispositivos artificiales (artefactos). Una de las novedades de la teoría vygotskiana fue la de mostrar que en vez de ser simples ayudas, estos dispositivos alteran el curso del desarrollo natural de los procesos psíquicos. Dichos dispositivos se convierten en *instrumentos psicológicos* y sirven de base a la aparición de las funciones psíquicas superiores, funciones que distinguen el reino humano del reino animal. Refiriéndose a los instrumentos psicológicos, dice Vygotski:

> Los instrumentos psicológicos son creaciones artificiales; estructuralmente son dispositivos sociales y no orgánicos o individuales; están dirigidos al dominio de los procesos propios o ajenos, lo mismo que la técnica lo está al dominio de los procesos de la naturaleza. (Vygotski, 1991, p. 65)

Para Vygotski y la escuela histórico-cultural de psicología, el problema del desarrollo intelectual es planteado como problema

4 La transliteración del nombre de Vygotski se escribe diferentemente, según el idioma empleado. En inglés la traducción es Vygotsky.

cultural. De acuerdo con la “ley genética de desarrollo cultural” que propone Vygotski,

> En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a nivel social, y más tarde, a nivel individual; primero *entre* personas (*interpsicológicamente*), y después, en el *interior* del propio niño (*intrapsicológicamente*). Esto puede aplicarse igualmente a la atención voluntaria, a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Todas las funciones superiores se originan como relaciones entre seres humanos. (Vygotski, 1988, p. 94; cursivas en el original).

El signo desempeña una función mediadora entre el individuo y su contexto, y permite, además, ese pasaje entre lo interpsicológico y lo intrapsicológico que asegura la reconstrucción interna de la acción, esto es, de su *internalización*. Vygotski da como ejemplo la aparición del gesto:

> Al principio, este ademán no es más que un intento fallido de alcanzar algo, un movimiento dirigido hacia cierto objeto que designa la actividad futura… Cuando acude la madre en ayuda del pequeño y se da cuenta de que su movimiento está indicando algo más, la situación cambia radicalmente. El hecho de señalar se convierte en un gesto para los demás… Únicamente más tarde, cuando el niño es capaz de relacionar su fallido movimiento de agarrar con la situación objetiva como un todo, comienza a interpretar dicho movimiento como acto de señalar… Como consecuencia de este cambio, el movimiento mismo queda simplificado, y lo que de él resulta es la forma de señalar que llamamos gesto. (Vygotski, 1988, pp. 92-93)

La descripción que hace Vygotski de la aparición del gesto indicativo pone en evidencia el papel de lo social en la génesis de la significación. El gesto está primero dirigido hacia alguien (plano intersubjectivo) y se convierte en gesto para sí mismo (plano intrasubjetivo) solamente más tarde, en ese proceso de internalización que es mediado por el cuerpo mismo. Más tarde, la actividad gestual se vuelve más compleja con la aparición de otras formas indicativas, como las lingüísticas (por ejemplo con las expresiones “aquí” “allí”, etc.) en las que el signo se mueve en una capa de significación auditiva o escrita, dando lugar a una deixis compleja (ver Bühler, 1979; Radford, 2002).

A pesar de una orientación literaria, mostrada, sobre todo, en los primeros trabajos, como *La psicología del arte* (Vygotsky, 1971), publicado inicialmente en 1925, Vygotski, como Peirce, adoptó una ontología realista y, como éste, vio en la ciencia y la tecnología la forma por excelencia de alcance del conocimiento. No obstante esto, la idea del signo como objeto cognitivo, inspirado de la idea de herramienta laboral, es, sin duda, una idea interesante. Con ella, Vygotski rompió el esquema tradicional del idealismo y del racionalismo. El signo no es simplemente pieza diferencial de un sistema de estructuras (Saussure) ni mero medio de pensamiento y de formación de ideas (Peirce), sino, sobre todo, medio de *transformación* de las funciones psíquicas del individuo.

La analogía del signo como herramienta tiene, sin embargo, sus limitaciones. Así, van der Veer y Valsiner han sugerido que dicha concepción del signo da a la psicología de Vygotski un aspecto demasiado técnico y la convierte en una especie de "psicotecnología" (van der Veer y Valsiner, 1991, p. 221). Vygotski parece haberse dado cuenta de esta limitación. En una serie de notas tomadas por A. N. Leontiev durante un seminario interno llevado a cabo en 1933 al que participaron, como de costumbre, los colaboradores cercanos de Vygotski y algunos psicólogos jóvenes que trabajaban bajo su dirección, seminario en el que Vygotski expuso ciertas tesis sobre el problema de la conciencia, leemos:

> En los primeros trabajos ignorábamos que el significado es propio del signo (...) Partíamos del principio de la constancia del significado (…) Si antes nuestra tarea era mostrar lo común entre el "nudo" y la memoria lógica, ahora consiste en mostrar la diferencia que existe entre ellos. (cf. Vygotski, 1991, p. 121).

En las notas tomadas en la misma reunión durante la reacción de Vygotski al reporte preparado por otro de sus colaboradores, A. R. Luria, leemos: "Para nosotros lo principal es (ahora) el movimiento del sentido." (cf. Vygotski, 1991, p. 125).

Es claro, pues, que al final de su vida, Vygotski vio la necesidad de continuar la reflexión sobre los signos del lado de la significación. Vygotski vio en el estudio de los significados verbales la pauta para ampliar dicho problema. Más tarde, Leontiev sugirió que la evolución de los significados (verbales y otros) debe ser vista no solamente a la luz de la interacción humana, sino bajo el prisma de las relaciones siempre en movimiento de los individuos y de la naturaleza, bajo la emergencia y desarrollo del trabajo y de las relaciones sociales (van der Veer, 1996, p. 259), ideas que desembocaron el su *Teoría de la Actividad* (Leontiev, 1993).

Entre los trabajos de investigación conducidos dentro del paradigma vygotskiano, se pueden mencionar los de Bartolini Bussi y Mariotti (1999), Bartolini Bussi y Maschietto (2006), Berger (2005), Boero, Pedemonte y Robotti (1997).

Piaget y la semiótica

En sus trabajos sobre el papel del símbolo en el desarrollo cognitivo, Piaget introdujo el concepto de *función semiótica*, tratando de dar respuesta a la pregunta siguiente: ¿es posible que el pensamiento sea un resultado del lenguaje? [5].

Para Piaget, que solía plantear las preguntas en términos lógicos, el lenguaje era una condición necesaria, pero no suficiente del pensamiento. Un tanto irritado por la posición del positivismo de la primera parte del siglo XX, que reducía todo al lenguaje, Piaget sostuvo que: "El lenguaje puede constituir una condición necesaria de la terminación de las operaciones lógico-matemáticas sin ser, sin embargo, una condición suficiente de su formación." (Piaget, 1978 p. 130). Para

5 La vigencia contemporánea de la pregunta de Piaget aparece claramente en una crónica periodística reciente sobre el trabajo antropológico realizado sobre los Pirahã, una pequeña tribu brasileña con un lenguaje sin cláusulas subordinadas. Una de las preguntas que los lingüistas se están haciendo es si es posible tener pensamientos para los cuales no hay palabras en la lengua (ver Bredow, 2006). Estoy en deuda con Heinz Steinbring por llamar mi atención sobre este artículo.

Piaget, era importante resolver el problema genético que consiste en saber si las raíces de las operaciones lógico-matemáticas se encuentran en el campo mismo del lenguaje o, si por el contrario, son anteriores a éste. La pregunta fundamental era saber "si la formación del pensamiento está relacionada con la adquisición del lenguaje como tal o con la función simbólica en general" (*op. cit.*, p. 131). En resumen, según Piaget, había que investigar

> si la transmisión verbal es suficiente para constituir en el espíritu del niño estructuras operatorias o si esta transmisión es eficaz solamente a condición de ser asimilada gracias a estructuras de naturaleza más profunda (coordinación de acciones), no transmitidas por el lenguaje. (Piaget, *op. cit.* p. 131)

Dentro de esta problemática, uno de los resultados más relevantes alcanzados por Piaget fue la puesta en evidencia de una *inteligencia práctica* previa a la aparición del lenguaje en el niño. "Conviene insistir", decía Piaget, aludiendo a los resultados experimentales de la escuela de Ginebra, "en el hecho de que las operaciones, en cuanto resultado de la interiorización de las acciones y de sus coordinaciones, permanecen durante mucho tiempo relativamente independientes del lenguaje." (*op. cit*. p. 134). En su libro *Epistemología Genética*, Piaget regresa sobre el mismo problema y arguye que

> El lenguaje no es ciertamente el medio exclusivo de representación. Éste es solamente un aspecto de la función muy general que Head ha llamado la función simbólica. Yo prefiero utilizar el término lingüístico: función semiótica. Esta función consiste en la habilidad de representar algo a través de un signo o un símbolo o cualquier objeto (Piaget 1970, p. 45)

En su libro "*La formation du symbole chez l'enfant*" [La formación del símbolo en el niño] Piaget sostuvo que el símbolo resulta de un esquematismo no simbólico. Al principio del libro Piaget dice: "Vamos a intentar mostrar cómo la [emergencia del] símbolo es preparada por el esquematismo no simbólico" (Piaget 1968, p. 8), esto es, un esquematismo armado de significantes sensorimotores "índices" o "señales", a los cuales hace falta todavía la independencia respecto al objeto significado.

Según Piaget, la función semiótica empieza precisamente cuando hay una diferenciación entre significado y significante, diferenciación que provee al significado (*signifié*) con una permanencia espacio-temporal y abre la posibilidad de que un mismo significante pueda referir a varios significados. Para Piaget, la función semiótica incluye la imitación diferida, el juego simbólico, la imagen mental, los gestos y el lenguaje natural (Piaget en: Piattelli-Palmarini, 1982, p. 58).

La semiótica Piagetiana, que se enmarca dentro de la tradición Saussureana mencionada anteriormente, reposa en la idea de una continuidad entre los significantes sensorimotores y la emergencia de los primeros símbolos en los niños. En otras palabras, la semiótica Piagetiana se apoya en un postulado según el cual la inteligencia sensorimotriz se prolonga, a través del signo, en representación conceptual (Piaget 1968, pp. 68-69).

La solución que propuso Piaget al acertijo del desarrollo de la inteligencia fue, como en el caso de Peirce, un intento serio de esquivar el apriorismo Kantiano. En el fondo, la solución Piagetiana es una tematización sofisticada del compromiso que hace la filosofía del Siglo de las Luces entre el racionalismo y el empirismo. Piaget retoma la posición epistemológica que Kant otorga al individuo en el acto del conocimiento y la lleva a sus máximas conclusiones. En lugar de contentarse con la deducción Kantiana de las categorías escolásticas, deducción que limitaba al individuo a un uso racionalista de la facultad de entendimiento, Piaget propuso un proceso genético que se eleva de lo sensual a lo conceptual a través del efecto de una razón que se reconstruye, pacientemente, en cada individuo, independiente de su ubicación histórica y geográfica. La razón renace y se reconstruye en el curso de la actividad del individuo y llega, inevitablemente, atraída como el metal por el imán, a ese punto culminante que es la Razón Occidental. En definitiva, la epistemología genética de Piaget es una de las expresiones más modernas de la sensibilidad intelectual heredada del Siglo de las Luces.

Semiótica y Educación

Los trabajos incluidos en este número especial de la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa prolongan el interés por la semiótica mostrado previamente en nuestro campo de investigación por otros colegas. Varios han sido, en efecto, los educadores y los psicólogos que empezaron a mostrar o sugerir hace varios años el potencial de la semiótica en las reflexiones didácticas. Así, la importancia de los signos matemáticos fue puesta en evidencia por Freudenthal al final de los años 1960 (Freudenthal, 1968). En los años 1980, Filloy y Rojano (1984) mostraron el potencial del análisis semiótico en la comprensión del desarrollo del lenguaje algebraico. Más tarde, Laborde, Puig y Nunes (1996), entre otros, discutieron ciertos aspectos ligados al lenguaje. Siguiendo otro camino, Jean-Blaise Grize, un colaborador de Piaget, había también llamado la atención sobre los problemas del lenguaje en el pensamiento lógico (Grize, 1996).

Los trabajos que constituyen este número especial han sido agrupados en dos categorías. En la primera, el lector encontrará artículos de corte teórico.

En el primer artículo, Michael Otte aborda el tema de la demostración matemática y argumenta que es inútil buscar el sentido de los objetos matemáticos en una especie de estrato fundamental conceptual. Tomando una actitud *anti-mentalista*, que es compartida por varios autores del presente número, Otte argumenta que es inútil seguir creyendo que el significado (*meaning*) de las cosas yace en nuestras cabezas y que es igualmente inútil seguir pensando que el saber (*knowledge*) es una especie de experiencia mental. Siguiendo ciertas ideas de Peirce, Otte sugiere que no hay separación entre idea y símbolo. Explicar, Otte sostiene, es exhibir el sentido de alguna cosa a través de signos y sentido vistos como procesos.

Raymond Duval discute el problema de la heterogeneidad semiótica, heterogeneidad en que subyace una de las dificultades mayores del aprendizaje de las matemáticas, esto es, pasar de un tipo de representación a otro. Duval arguye que el análisis de las producciones matemáticas exige herramientas de análisis semiótico complejas y adaptadas a los procesos cognitivos movilizados en toda actividad matemática y enuncia tres preguntas cruciales, las cuales son discutidas en el texto: una sobre la pertinencia de la distinción entre significante y significado (que nos recuerda la distinción introducida por Saussure), otra en torno a la clasificación de los signos, y, finalmente, otra referente a la comparación entre un análisis funcional y un análisis estructural de los signos.

En el tercer artículo, Cantoral y colaboradores presentan ciertos elementos de la socioepistemología, una teoría que pretende ubicar la actividad matemática en el contexto de la práctica social. El concepto de práctica social hace referencia a aquello que viene a normar la actividad matemática. En su artículo, los autores estudian algunas actividades como medir, predecir, modelar y convenir, y muestran, haciendo referencia a la historia de las matemáticas, escenarios sociales claves de construcción social del conocimiento matemático.

En el cuarto artículo, Radford presenta ciertos elementos de una teoría cultural de la objetivación, una teoría de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se inspira de escuelas antropológicas e histórico-culturales del conocimiento. Dicha teoría se apoya en una epistemología y una ontología no racionalistas que dan lugar, por un lado, a una concepción antropológica del pensamiento y, por el otro, a una concepción esencialmente social del aprendizaje. De acuerdo con la teoría, lo que caracteriza al pensamiento no es solamente su naturaleza semióticamente mediatizada, sino sobre todo su modo de ser en tanto que *praxis reflexiva*.

En el quinto artículo, un artículo de transición entre los artículos de corte teórico y los de corte aplicado, Godino y colaboradores presentan una aplicación del enfoque ontosemiótico al análisis de textos. Los autores buscan ilustrar la técnica de análisis de textos matemáticos propuesta por el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática e identificar criterios de idoneidad de unidades didácticas (en particular la *idoneidad epistémica* y la *cognitiva*) para el estudio de las estructuras aditivas en la educación primaria.

En el sexto artículo, Koukkoufis y Williams aplican ciertos conceptos de la teoría de la objetivación para estudiar la manera en que jóvenes alumnos generalizan, en el aprendizaje de la aritmética, ciertas relaciones numéricas. Los autores examinan en detalle el papel que desempeña el ábaco como artefacto de mediación y efectúan un análisis fino del papel del lenguaje y los gestos en procesos de *reificación* (en el sentido de Sfard, 1994), procesos que preparan el camino a conceptualizaciones numéricas claves en las operaciones con números enteros.

En el séptimo artículo, D'Amore discute el problema de la ontología y conocimiento de los objetos matemáticos, centrándose en particular en el problema de la representación del objeto y su sentido. En la primera parte, D'Amore sintetiza algunas investigaciones recientes en torno al problema de la ontología y el conocimiento; en la segunda parte, el autor analiza un ejemplo concreto para poner en evidencia las dificultades de cambio de sentido cuando cambia la representación del objeto.

En el octavo articulo, Gagatsis y colaboradores presentan el fruto de varios trabajos de investigación sobre el problema de cambios de representación de objetos relacionados con el concepto de función. El artículo torna alrededor del problema de la compartimentación de diferentes registros de representación, así como de las dificultades que, generalmente, encuentran los alumnos para utilizar representaciones adecuadas en contextos de resolución de problemas. Los autores sugieren pistas que pueden ayudar a resolver el problema de la compartimentación.

En el noveno articulo, inspirándose de la semiótica de Peirce, Adalira Sáenz-Ludlow sugiere la existencia de una relación triangular entre interpretación, objetivación, y generalización. Luego de argumentar cómo el discurso matemático es un medio potente en la objetivación semiótica, la autora discute la manera en que el discurso matemático en el salón de clase media el aumento del valor de lo que ella llama “la riqueza matemática del alumno”. En la ultima parte, Sáenz-Ludlow discute cómo maestros, con diferentes perspectivas teóricas, influyen en la dirección del discurso matemático en el salón de clase y, en consecuencia, en el crecimiento de la riqueza matemática de sus estudiantes.

En el décimo artículo, Giorgio Bagni examina cómo alumnos de 15 a 16 años tratan de dar sentido a una frase inspirada de un ejemplo célebre introducido por Russell, y de un aserto expresado en lenguaje matemático. Luego de discutir en la primera parte del artículo las posiciones tomadas por matemáticos, filósofos y epistemólogos, como Frege, Russell, Quine y Brandom respecto al problema de la referencia y el significado, Bagni ofrece un análisis de datos experimentales que se aparta de los conceptos clásicos de realidad y de racionalidad, y propone una reflexion en la que la idea de práctica de la justificación es vista en el interior de una comunidad comunicativa, al estilo de J. Habermas.

En el onceavo artículo, Ferdinando Arzarello presenta una discusión del paradigma multimodal y encarnado (embodied) que ha emergido en los últimos años dentro del marco de investigaciones realizadas en el campo de la psicolingüística y la neurociencia. Luego de analizar los gestos desde una perspectiva semiótica, Arzarello introduce la noción de *semiotic bundle*, el cual es ejemplificado a través de un estudio de casos.

Este número especial de la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa se encuentra en la línea de esfuerzos hechos por otros colegas en intentar mostrar a la comunidad de educadores matemáticos las posibilidades (y las limitaciones) de las aproximaciones semióticas. Este número continúa, de manera más modesta, cierto, las discusiones sobre la representación (Hitt, 2002; Janvier, 1987), la semiótica y la educación (Anderson, Sáenz-Ludlow, Zellweger, y Cifarelli, 2003), el número especial *Representations and the psychology of mathematics education* del *Journal of Mathematical Behavior* (1998, Vol. 17(1) y 17(2)), editado por Gerald Goldin y Claude Janvier, el libro *Activity and sign* (2005) editado por Michael Hoffmann, Johannes Lenhard and Falk Seeger, asi como el reciente número especial *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics* de la revista *Educational Studies in Mathematics*, (2006, vol. 61(1-2)), editado por Adalira Sáenz-Ludlow y Norma Presmeg.

Este número especial de la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa ha sido posible gracias a la colaboración de muchas personas. Queremos agradecer en particular a su editora, Rosa María Farfán. Queremos igualmente agradecer a José Guzmán Hernández (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados [Cinvestav], México), Heather Empey (McGill University, Canadá), Chantal Chivot (Laurentian University, Canadá) por su ayuda en la preparación de los textos.

También agradecemos al Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH) por la subvencion que hizo posible en parte esta publicación.

Referencias

Anderson, M., Sáenz-Ludlow, A., Zellweger, S., y Cifarelli, V. (Eds.). (2003). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. Ottawa: Legas.

Arzarello, F. (2004). *Mathematical landscapes and their inhabitants: perceptions, languages, theories.* Plenary Lecture delivered at the ICME 10 Conference. Copenhagen, Denmark. July 4-11, 2004.

Bartolini Bussi, M. G., y Mariotti, M., A. (1999). Semiotic Mediation: from History to the Mathematics Classroom. *For the Learning of Mathematics, 19*(2), 27-35.

Bartolini Bussi, M., y Maschietto, M. (2006). *Macchine mathematiche: dalla storia alla scuola*. Milano: Springer.

Berger, M. (2005). Vygotsky's theory of concept formation and mathematics education. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 2*, 153-160.

Boero, P., Pedemonte, B., y Robotti, E. (1997). Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a Vygotskian perspective. *Proceedings of the XXI International Conference for the Psychology of Mathematics Education* . Lahti, Finland, *2,* 81-88.

Borba, M., y Villareal, M. (2006). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. New York: Springer.

Bredow, R. v. (2006). Living without Numbers or Time. *Speigel on line,* May 3 2006 (http://service.spiegel.de/cache/international/spiegel/0,1518,414291,00.html).

Bühler, K. (1979). *Teoría del lenguaje. Traducido del alemán por Julián Marías*. Madrid: Alianza Editorial.

Cobb, P., Yackel, E., y McClain, K. (Eds.). (2000). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*. Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum.

D'Amore, B. (2001). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques: la position «naïve» dans une théorie «réaliste» contre le modèle «anthropologique» dans une théorie «pragmatique». En A. Gagatsis (Ed.), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology* (Vol. 1, pp. 131-162).

Dörfler, W. (2005). Diagrammatic Thinking. Affordances and Constraints. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 57-66). New York: Springer.

Duval, R. (1998). Signe et objet, I et II. *Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg, 6*, 139-196.

Eco, U. (1976). *A theory of Semiotics*. Indiana: Indiana University Press.

Filloy, E., y Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje Aritmético-Algebraico. *L'Educazione Matematica, 5*(3), 278-306.

Freudenthal, H. (1968). Notation Mathématique. *Encyclopedia Universalis*, 338-344.

Glasersfeld von, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. London, Wasington, D.C: The Falmer Press.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1999). *The meaning of mathematical objects as analysis units for didactic of mathematics.* Paper presented at the Proceedings of the First Conference of the European Society for Research Mathematics Education.

Goldin, G. y Janvier, C. (Eds.) (1998). *Representations and the psychology of mathematics education* del *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 17(1) y 17(2).

Grize, J.-B. (1996). *Logique naturelle et communications*. Paris: Presses Universitaires de France.

Guzmán, J., y Kieran, C. (2002). The role of calculators in instrumental genesis: The case of Nicolas and factors and divisors. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Norwich, UK, *3*, 41-48.

Hitt, F. (Ed.). (2002). *Representations and Mathematics Visualization*. Mexico: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Hjelmslev, L. (1969). *Prolegomena to a Theory of Language*. Wisconsin: The University of Wisconsin Press.

Hoffmann, M. H. G. (2002). Peirce's «Diagrammatic Reasoning» as a Solution of the Learning Paradox. En G. Debrock (Ed.), *The Quiet Revolution: Essays on Process Pragmatism* (pp. 147-174). Amsterdam et al: Rodopi Press.

Hoffmann, M. H. G., Lenhard J. y Seeger, F. (Eds.) (2005). *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education*. New York: Springer.

Hoffmann, M. H. G. (2005). Signs as Means for Discoveries. Peirce and His Concepts of «Diagrammatic Reasoning», «Theorematic Deduction», «Hypostatic Abstraction», and

«Theoric Transformation». En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 45-56). New York: Springer.

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J., y Hegedus, S. (2004). An introduction to the profound potential of connected algebra activities: Issues of representation, engagement and pedagogy. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 3*, 129-136.

Kieran, C., y Saldanha, L. (2005). Computer algebra systems (CAS) as a tool for coaxing the emergence of reasoning about equivalence of algebraic expressions. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Melbourne, Australia, 3*, 193-200.

Laborde, C., Puig, L., y Nunes, T. (1996). Language in Mathematics Education. En L. P. a. A. Gutiérrez (Ed.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* . University of Valencia, Valencia, Spain, *1*, 53-84.

Leontiev, A. N. (1993). *Actividad, conciencia y personalidad*. México: ASBE Editorial.

Nesher, D. (1997). Peircean Realism: Truth as the Meaning of Cognitive Signs Representing External Reality. *Transactions of the Charles S. Peirce Society, 33*(1), 201-257.

Otte, M. (2003). *Does mathematics have objects ? In what s ense ?* Synthese, *134* (1-2), 181-216.

Otte, M. (en prensa). *A = B: a Peircean View. En Lafayette de Moraes and Joao Queiroz*. Brazil: Catholic University of Sao Paulo.

Parker, K. (1994). Peirce's Semeiotic and Ontology. *Transactions of the Charles S. Peirce Society, 30*(1), 51-75.

Peirce, C. S. (1931-1958). *Collected Papers, vol. I-VIII*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Piaget, J. (1968). *La formation du symbole chez l'enfant*. Neuchatel: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology*. New York: W. W. Norton.

Piaget, J. (1978). *Problemas de psicología genética*. Barcelona: Ariel.

Piattelli-Palmarini, M. (Ed.). (1982). *Théories du langage, théories de l'apprentissage : le débat entre Jean Piaget et Noam Chomsky*. Paris: Seuil.

Presmeg, N. C. (2005). Metaphor and Metonymy in Processes of Semiosis in Mathematics Education. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 105-115). New York: Springer.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità [Sensible Things, Essences, Mathematical Objects and other ambiguities] (English version available at: http://laurentian.ca/educ/lradford/essences.pdf). *La Matematica e la sua didattica, 1*, 4-23.

Radford, L. (2006). The Anthropology of Meaning. En A. Sáenz-Ludlow, y N. Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics, Special Issue, Educational Studies in Mathematics, 61*, 39-65.

Radford, L. (en prensa-1). Semiótica cultural y cognición. En R. Cantoral y O. Covián (Eds.), *Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica*. Mexico.

Radford, L. (en prensa-2). Rescuing Perception: Diagrams in Peirce's theory of cognitive activity. En Lafayette de Moraes and Joao Queiroz (Eds.), C.S. Peirce's Diagrammatic Logic. Catholic University of Sao Paulo, Brazil.

Sáenz-Ludlow, A. (2003). A collective chain of signification in conceptualizing fractions. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 181-211.

Sáenz-Ludlow, A. (2004). Metaphor and numerical diagrams in the arithmetical activity of a fourth-grade class. *Journal for Research in Mathematics Education, 1*(35), 34-56.

Sáenz-Ludlow, A. (2006). Classroom interpreting games with an illustration. En A. Sáenz-Ludlow, y N. Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics, Special Issue, Educational Studies in Mathematics, 61*, 183-218.

Saussure, F. (1995). *Cours de linguistique générale*. Paris: Payot. (Primera edición, 1916).

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 44-55.

Steinbring, H. (2005). Do Mathematical Symbols Serve to Describe or Construct «Reality»? En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 91-104). New York: Springer.

Steinbring, H., Bartolini Bussi, M., y Sierpinska, A. (1998). *Language and Communication* *in the Mathematics Classroom*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Stjernfelt, F. (2000). Diagrams as Centerpiece of a Perican Epistemology.*Transactions of the Charles S. Peirce Society, 36*(3), 357-384.

Van der Veer, R. (1996). The concept of culture in Vygotsky's Thinking. *Culture and Psychology, 2*, 247-263.

Van der Veer, R., y Valsiner, J. (1991). *Understanding Vygotsky*. Oxford Uk and Cambridge USA: Blackwell.

Vygotsky, L. S. (1971). *The Psychology of Art*. Cambridge and London: The M.I.T. Press (First published in 1925).

Vygotski, L. S. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo.

Vygotski, L. S. (1991). *Obras Escogidas,* Vol. 1 (Segunda edición,1997). Madrid:Visor.

Luis Radford
École des sciences de l'éducation
Université Laurentienne
Canada

E-mail: lradford@laurentian.ca

Proof and Explanation from a Semiotical Point of View

Michael Otte [1]

> Man sah, dass der Austauschprozess der Waren widersprechende und einander ausschliessende Beziehungen beinhaltet. Die Entwicklung der Ware hebt diese Widersprüche nicht auf, schafft aber die Form, worin sie sich bewegen können. Dies ist überhaupt die Methode, wodurch sich wirkliche Widersprüche lösen. Es ist z.B. ein Widerspruch, dass ein Körper beständig in einen anderen fällt und ebenso beständig von ihm wegflieht. Die Ellipse ist eine der Bewegungsformen, worin dieser Widerspruch sich ebensosehr verwirklicht als löst. K. Marx, Das Kapital, Band I, p.118f [2]

RESUMEN

Una distinción entre pruebas que prueban y pruebas que explican es parte invariable de las discusiones recientes en epistemología y en educación matemática. Esta distinción se remonta a la época de los matemáticos que, como Bolzano o Dedekind, intentaron restablecer a las matemáticas puras como una ciencia puramente conceptual y analítica. Estas tentativas reclamaron, en particular, una eliminación completa de los aspectos intuitivos o perceptivos de la actividad matemática, sosteniendo que se debe distinguir de forma rigurosa entre el concepto y sus representaciones. Utilizando una aproximación semiótica que refuta una separación entre idea y símbolo, sostenemos que las matemáticas no tienen explicaciones en un sentido fundamental. Explicar es algo así como exhibir el sentido de alguna cosa. Los matemáticos no tienen, sin embargo, como vamos aquí a intentar demostrarlo, sentido preciso, ni en el sentido intra-teórico estructural, ni en comparación con la objetividad intuitiva. Los signos y el sentido son procesos, como vamos a sostenerlo inspirándonos de Peirce.

- **PALABRAS CLAVE:** Peirce, Bolzano, Semiosis, Prueba, Explicación.

ABSTRACT

A distinction between proofs that prove and proofs that explain has over and again played an important role within recent discussions in epistemology and mathematics education. The distinction goes back to scholars who, like Bolzano or Dedekind, have tried to

Fecha de recepción: Enero de 2006/ Fecha de aceptación: Mayo de 2006

1 University of Bielefeld, Germany.

2 We saw that the exchange of commodities implies contradictory and mutually exclusive conditions. The differentiation of commodities into commodities and money does not sweep away these inconsistencies, but develops a *modus vivendi,* a form in which they can exist side by side. This is generally the way in which real contradictions are reconciled. For instance, it is a contradiction to depict one body as constantly falling towards another, and as, at the same time, constantly flying away from it. The **ellipse** is a form of motion which, while allowing this contradiction to go on, at the same time reconciles it. Karl Marx (1906), *Capital*, vol I. chapter 3.

reestablish pure mathematics as a purely conceptual and analytical science. These endeavors did in particular argue in favor of a complete elimination of intuitive or perceptual aspects from mathematical activity, arguing that one has to rigorously distinguish between a concept and its representations. Using a semiotical approach which negates such a separation between idea and symbol, we shall argue that mathematics has no explanations in a foundational sense. To explain amounts to exhibiting the meaning of something. Mathematics has, however, as we shall try to show, no definite meanings, neither in the structural intra-theoretical sense nor with respect to intuitive objectivity. Signs and meanings are processes, as we shall argue along with Peirce.

• **KEY WORDS:** Peirce, Bolzano, Semiosis, Proof, Explanation.

RESUMO

Uma distinção entre provas que demonstram e provas que explicam é parte invariável das discussões recentes na epistemologia e em educação matemática. Esta distinção se remonta à época dos matemáticos que, como Bolzano o Dedekind, tentaram divisão da matemática pura como uma ciência puramente conceptual e analítica. Estas tentativas reclamaram, em particular, uma eliminação completa de os aspectos intuitivos ou perceptivos da atividade matemática, sustentando que se deve distinguir de forma rigorosa entre o conceito e suas representações. Utilizando uma aproximação semiótica que refuta uma separação entre idéia e símbolo, sustentamos que a matemática não tem explicações em um sentido fundamental. Explicar é algo assim como exibir o sentido de alguma coisa. Os matemáticos não têm, contudo, como vamos aqui a intentar demonstrar, sentido preciso, nem o sentido intra-teórico estrutural, nem comparação com a objetividade intuitiva. Os signos e o sentido são processos, como vamos a sustentar inspirados em Peirce.

• **PALAVRAS CHAVES:** Peirce, Bolzano, Semiótica, Prova, Explicação.

RÉSUMÉ

Une distinction entre preuves qui prouvent et preuves qui expliquent est une partie invariable des discussions récentes en épistémologie et en éducation mathématique. Cette distinction remonte à l'époque des mathématiciens qui, comme Bolzano ou Dedekind, ont tenté de rétablir les mathématiques pures comme une science purement conceptuelle et analytique. Ces tentatives ont réclamé en particulier une élimination complète des aspects intuitifs ou perceptuels de l'activité mathématique en soutenant qu'on doit distinguer de façon rigoureuse entre le concept et ses représentations. En utilisant une approche sémiotique qui réfute une telle séparation entre idée et symbole, nous allons soutenir que les mathématiques n'ont pas d'explications dans un sens fondamental. Expliquer revient à exhiber le sens de quelque chose. Les mathématiques n'ont pas cependant, comme nous allons tenter de le montrer, de sens précis, ni dans le sens intra-théorique structurel, ni par rapport à l'objectivité intuitive. Signes et sens sont des processus, comme nous allons soutenir en nous inspirant de Peirce.

• **MOTS CLÉS:** Peirce, Bolzano, Sémiosis, Preuve, Explication.

Introduction

Before we can address the issue of proof and explanation we have to get rid of traditional *Bewusstseinsphilosophie* (philosophy of consciousness), that is, popularly speaking, the belief that "meanings are in the head" and knowledge is some sort of mental experience. After Kant epistemology began to ramify and various new philosophies of mathematics arose in which meaning, rather than mind played the central role. But the view that there exists an epistemologically autarkic or self-sufficient epistemic subject, which serves itself from external sensations and internal experiences or representations (Vorstellungen) to thereby constitute true knowledge, is a myth and should also be abandoned.

In Part I of this paper we try to provide some pertinent arguments to this end, based on Peirce's semiotics. "Consciousness is used to denote the *I think*, the unity of thought; but the unity of thought is nothing but the unity of symbolization" (Peirce CP 7.585). Part II treats the questions of proof and explanation with respect to the ideas of Bolzano on the one hand and Peirce on the other. Part III presents some examples and tries to make a connection with current debates about the issue in mathematical education and cognitive psychology.

I. To try to understand cognition and knowledge as semiotic processes we begin by conceiving of cognition as the result of a dialectical contradiction between cognitive subject and objective reality. We feel or perceive something, but cannot turn it into cognition without a symbol and it thus remains as a mere non-categorized sensation or intuition. Or, differently: somebody might understand the logic of an argument without seeing how it applies in a particular situation and thus does not really follow it. It is futile and fruitless, for example, to expect that the object of investigation would finally reveal itself to us in plain clearness such that knowing would then amount to reading off its relevant properties.

The symbol is to mediate between conscious feeling and objective reaction and should provide this interaction with a certain form or representation. This is the only manner in which we can know, that is, by constructing a relevant representation of some kind. "A representation is that character of a thing by virtue of which, for the production of a certain mental effect, it may stand in place of another thing. The thing having this character I term a representamen, the mental effect, or thought, its interpretant, the thing for which it stands, its object." (Peirce, CP 1.564). In contrast to the traditional dyadic models, Peirce defines a sign as a triad. And this implies that a sign does not stand for its object in all respects, "but in reference to a sort of idea, which I have sometimes called the ground of the representamen. 'Idea' is here to be understood in a sort of Platonic sense, very familiar in everyday talk" (Peirce, CP 2.228 and 4.536)).

This implies that the sign is consciously recognized by the cognitive subject and for that purpose the subject has to create another sign, which becomes an interpretation of the first interpretant. As Roman Jakobson, characterizing Peirce‘s thinking, once said:

“One of the most felicitous, brilliant ideas which general linguistics and semiotics gained from the American thinker is his definition of meanings *as the translation of one sign into another system of signs* (4.127)” (Jakobson 1985, 251).

The flow of meaning thus expresses the contradiction and it evolves by a recursive interaction between the objects (referents) and interpretants (senses) of signs. Objects and interpretants of signs are in general signs themselves. We argued elsewhere (Otte, 2003) in great detail that (mathematical) meaning has two components, one of which refers to objects, and which is called the extensional component of meaning; the other relating to the interpretant of the sign and which it is suitable to call the intensional or coherence component. The most important consequence, to be applied in the following paragraphs, consists in the fact that there never is a definite meaning; neither in the structural or intensional sense nor with respect to the extensions of theoretical terms. A pragmatic perspective on things thus seems to always recommend itself.

All reasoning is an interpretation of signs of some kind. And the interpretation of a sign is nothing but the construction of a new sign. As was said above, a mere feeling or consciousness, without a representation, is no interpretation and an interpretation or reformulation of a text, which does not carry on the ideas and does not generalize, is futile also. All cognition proceeds by means of the construction of an adequate representation and this construction provides nothing but the contradiction between subject and object with a form. “It is a contradiction that a body will permanently fall into another and at the same time will flee away from it. The ellipse is a form of development by which this contradiction is as much realized as it is resolved” (K. Marx, see above).

A symbol mediates between subjective spontaneity and objective reaction and is termed a Third, by Peirce.

The object of knowledge, being nothing but a representation—something which Kant had dubiously called an intuition—therefore is also not something given “out” there, it is not a Kantian “thing in itself,” but is established by the relation between subject and reality. It makes itself felt equally by the objectivity of this interaction process as well as through its breaking downs.

Mathematical ontology, for example, is constituted by a practice of mathematical reasoning and application, not the other way around. A mathematical object, such as number or function, does not exist independently of the totality of its possible representations, but must not be confused with any particular representation, either. We have on a different occasion expressed these facts in terms of a principle of complementarity (Otte, 2003). To see how a semiotic perspective might help to better grasp that complementarity one should remind oneself of the following characteristics of mathematics;

- Mathematics, on the one hand, has no more concrete objects of its own than painting; it is therefore not possible to do mathematics by simply considering certain kinds of objects, either constructed or given, abstracting what seems essential about them. According to the Cantorian claim that consistency is sufficient for mathematical existence, there is so much truth that it is consistency which makes a sign potentially meaningful. Consciousness "is sometimes used to signify the (Kantian) *I think,* or unity in thought; but unity is nothing but consistency, or the recognition of it. Consistency belongs to every sign, so far as it is a sign; therefore every sign, since it signifies primarily that it is a sign, signifies its own consistency" (Peirce, CP 5.313-15).

- On the other hand, mathematics is not a mere logical language, nor is it an analytical science from concepts, that is, definitions. Mathematics includes indexical representations and observational activities. "The best thinking, especially on mathematical subjects, is done by experimenting in the imagination upon a diagram or other scheme," says Peirce (Peirce, NEM I, 122).

Thus the idea of a sign might help us to better understand that these different characterizations of mathematics are not as distinct as it might have appeared at first sight, but rather they represent complementary aspects of mathematical thinking, because signs are always used referentially as well as attributively. This is but another expression of the interaction between object and interpretant of the sign, as indicated above.

The semiotic approach to cognition and epistemology distinguishes itself from the philosophy of consciousness (as developed by Kant, for example) by its radical break with the assumptions and prerequisites of reasoning characterizing the latter. "All our thinking," says Peirce, "is performed upon signs … External signs answer any purpose, and there is no need at all of considering what passes in one's mind" (Peirce, NEM I, 122). Thinking occurs in signs and representations, rather than by means of imaginations or intuitions, which are to be looked for within our heads. This does not mean that conscious recognition and intuitive activity are dispensable. It only means that they have to be taken as means and instruments of cognitive activity, rather than as its foundations (Otte, 2005, 16f).

Insisting, when for example trying to interpret a text, on the question "what did the author really mean" has no more merits to it than the idea that the reader, and not the author, is the sole source of meaning. "Not even the author can reproduce his original meaning because nothing can bring back his original meaning experience" (Hirsch, 1967, 16; and in contrast: Fish 1980, 359f). And correspondingly, not any arbitrary reformulation of a text is an admissible interpretation. Neither the author nor the reader is the unique source of meaning because meaning is but the sign process itself. The reality of a text is its development, the meaning of a proposition lies in its consequences and the essence of a thing is the essence or meaning of a representation of that thing, and so forth. The semiotic approach fosters a genetic perspective on knowledge. Knowledge is essentially a process, a learning process or a process of growth and generalization, expressed in terms of a permanent transformation of one representation into another one.

Imagining cognition as a contradiction between subject and object implies the conviction that neither subject nor object can dominate or even determine the other part of this relationship. We do not find final and definite descriptions of things and mostly we do not even know what we know. We apply it, we represent it, but we cannot say or express it, nor describe what we are doing. “What can be shown cannot be said,” Wittgenstein famously affirmed. The spirit of creative activity thus is more or less the following.

Everything that we have formulated or constructed is just done and is there in the plain light of day. It means nothing *per se*, it is just there. Everything we achieve, we simply achieve. It neither needs nor deserves an interpretation or commentary, because it is, as we perceive it, real. The commentary would add nothing to the thing created and given. The given is just the given. What we have made, we have made. It has no general symbolic significance nor can it be undone. An action is an action, a work of art is just a work of art, a theory is just a theory. It must be grasped as a form *sui generis,* and recreated in its own terms, before we can inquire into its possible meanings or applications. Any creative achievement remains imperfect as long as questions about its meaning dominate when considering it. In artistic drawing what we achieve is a line, and the line does all the work, and if it fails to do so no philosophical commentary will rescue or repair a bad work of art. In literature or philosophy, it is the word or the sentence, in mathematics the new concept or the diagram, which carry the entire weight, etc. etc. Mastery, Paul Valery, says, presupposes that “one has the habit of thinking and combining directly from the means, of imagining a work only within the limits of the means at hand, and never approaching a work from a topic or an imagined effect that is not linked to the means” (Valery, 40).

Everything just is and thus means itself: P=P! This principle of identity lies at the heart of art and likewise at that of logic or exact science and it is obviously directed against any idea of cognition as a mental feeling or inner experience. P just means P! No commentary and no psychological experience or philosophical consideration shall be able to add anything to the matter.

A monotonous and perfect repetition would, however, destroy any creativity as well. Any line in an artistic drawing is, in fact, a continuum of lines; it fulfills its destination to represent something, at the very same time indicating an indeterminate set of possible modifications and further developments.

The creative process thus operates on the interplay of variation and repetition. A theory or a work of art, being an interpretation, is also a process, namely the process of creating an interpretant of the representation given and so on. At this very moment we are developing the anti-thesis, that is, pointing to the fact that a work of art or a theory are not mere existents, but are signs, which have a meaning. And an interpretation of that meaning is nothing but another representation. The sign is thus a thing as well as a process, namely the process of establishing a relationship between object and interpretant. It is a flow of meaningfulness. Peirce, in fact, defines semiosis as the action or process of a sign. “By ‘semiosis’ I mean”, Peirce writes, “an action, or influence, which is, or involves, a cooperation of three subjects, such as a sign, its object, and its interpretant, this tri-relative influence not being in any way resolvable into actions between pairs” (Peirce, CP 5.484).

Evolutionary realism therefore means the co-evolution of reality and knowledge, that is, the evolution of symbolism. It is the symbol in movement.

II. Let us now try and spell out the problem to which we should like to apply our semiotic view of mathematical activity. This is in fact the problem of mathematical explanation.

There has been, for some time now, a widespread debate about mathematical explanation and rigorous proof in mathematics education as well as in the philosophy of mathematics (for an overview see Mancosu, 2000 and 2001; Hanna, 2000). In this discussion, a distinction between proofs that prove against proofs that explain has over and again played an important part. Gila Hanna, for example, presents the distinction in psychological terms, but later on describes *explaining* in this way: “I prefer to use the term explain only when the proof reveals and makes use of the mathematical ideas which motivate it. Following Steiner (1978), I will say that a proof explains when it shows what ‘characteristic property’ entails the theorem it purports to prove” (Hanna 1989, 47).

Hanna and Steiner, speaking about the “characteristic property” that entails the “theorem it purports to prove,” seem to follow Bolzano respectively as well as Aristotle in their ideas about mathematics. The “characteristic property” seems something like an essential cause in the Aristotelian sense. Steiner’s view “exploits the idea that to explain the behavior of an entity, one deduces the behavior from the essence or nature of the entity” (Steiner 1978, 143). Steiner, believing that all mathematical truths are necessary and are thus valid in “all possible worlds,” prefers to use the term “characterizing properties,” rather than the term “essence.” But he makes very clear his belief that mathematical proofs are exclusive like calculations or numerical determinations, picking out “one from a family” (147), rather than being general proof schemes or general forms of argumentation and demonstration. This view appears to be derived from an Aristotelian model of science and mathematics and it stands in extreme contrast to modern axiomatical mathematics in the sense of Hilbert or Emmy Noether, for example.

The proofs of modern mathematics are not glued to the particularities of individual propositions and it is generality of perspective and fertility of method that render them explanatory, because it is this which opens up new possibilities for mathematics. A proof is first of all a sign or representation and, as such, is a general already. It is the objectivity of general relationships what matters. Even if one were concerned with the subjective or educational aspects of the matter and therefore interested in the intuitive insights of a proof, this would primarily imply, as we have indicated in Part I, the search for new applications or representations of the basic ideas.

The distinction Steiner and others have drawn between proofs that explain and proofs that merely prove or verify makes sense only with respect to an Aristotelian model of science, as it is exemplified, for instance, by Euclid’s *Elements* of geometry. This Aristotelian model has been described by E. Beth (1968) and more recently by de Jong (2003). An Aristotelian science, according to these descriptions, is comprised of a system of fundamental concepts such that any other concept is composed and is definable in terms of these fundamental concepts; it also contains a system of fundamental propositions such that all other propositions are grounded in and are provable from these fundamental propositions. And the fundamental concepts or propositions stand in close continuity with everyday thinking. Explanation in such a context means reduction to the concrete foundations of general experience, rather than constructing new theoretical contexts and searching for new applications.

Bolzano, in fact, referring to Aristotle, seems to have been the first modern author pleading for demonstrations «that show the objective connection and serve not just subjective conviction.» His monumental "Wissenschaftslehre" (doctrine of science; 1836/1929) was conceived of as a general science or logic in the service of enlightenment and was organized like a didactical treatise. This work contains a distinction between proofs that merely prove, being intended to create conviction or certainty, and others, which "derive the truth to be demonstrated from its objective grounds. Proofs of this kind could be called justifications (Begruendungen) in difference to the others which merely aim at conviction (Gewissheit)" (Bolzano, Wissenschaftslehre, vol. IV, p.525, 261). In an annotation to this paragraph Bolzano mentions that the origin of the distinction goes back to Aristotle and the Scholastics, who have, however, attributed an exaggerated importance to it by affirming that only justifications produce genuine knowledge, but that it had fallen into neglect in more recent times.

On grounds of this distinction between proofs that are merely certain and others which are genuine justifications, Bolzano criticized Gauss' proof of the fundamental theorem of algebra of 1799, for example, because Gauss had on that occasion employed geometrical considerations to prove an algebraic theorem. Bolzano did not, as is often claimed (Volkert 1986), doubt the validity of Gauss' arguments and he did not question the certainty of our geometrical knowledge, but criticized the "impurity" of Gauss proof.

It is this spirit that led to the so-called rigour movement and to the program of arithmetization of mathematics and Bolzano has in fact been one of the spiritual fathers of this program. Mathematics was to be established as an analytical science from definitions, and numbers were considered to be the most important means of mathematical analysis.

One important effect of this program was the separation between pure and applied mathematics and the reconstruction of pure mathematics on completely logical, or rather, conceptual terms. Continuous mathematics, like geometry, for example, was considered applied mathematics. All intuitions and objects were to be replaced by definitions and mathematical proof, becoming the central concern of mathematicians, should be performed as a kind of linguistic activity. Although the conceptions of logic involved varied considerably, mathematical explanations in the end amounted to nothing but rigorous deduction from first principles and basic concepts.

One of Bolzano's most important mathematical achievements was the proof of the existence of the least upper bound of a bounded set of real numbers and, based on this, a completely analytical proof of the intermediate value theorem for continuous real functions. Both results were published in 1817 in Bolzano's "Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege." Bolzano's proof of the intermediate value theorem survives nearly unchanged in today's calculus textbooks, although one aspect has changed fundamentally since Dedekind. Bolzano had based his proof on the Archimedean axiom, which says that given any two real numbers *A* and *B*, there will always be a natural number n such that n*A* supersedes *B.* He had, however, taken this axiom to be an obvious truth, rather than a postulate. It was Dedekind only, who realized that nothing of such a kind could be proved or assumed as obvious. As Dedekind states it with respect to his own definition of continuity:

“The assumption of this property is nothing else than an axiom by which we attribute continuity to the line, by which we think continuity into the line. If space has real existence at all it is not necessary for it to be continuous” (Dedekind 1912, p.3, my translation).

The filling-up of gaps in the rational numbers through the creation of new point-individuals is the key idea underlying Dedekind’s construction of the domain of real numbers. Bolzano, in contrast, thought it obvious that these points, as exemplified by the incommensurability of certain line segments, for example, existed objectively. Charles Sanders Peirce’s view of the continuum is, in a sense, intermediate between that of Dedekind and Bolzano. He held that the cohesiveness of the continuum rules out the possibility of it being a mere collection of discrete individuals, or points, in the usual sense. “A *continuum* is precisely that every part of which has parts, in the same sense” (Peirce, W2, 256). The continuum represents the reality of the possible determination of points, rather than be an actual set of points; but this possibility is objective, such that, differently from Dedekind, space could not be discrete, according to Peirce.

If one looks at the various proofs of the intermediate value theorem one might be inclined to ask: why not take this theorem itself as the essential continuity postulate? It seems as clear and obvious as any of the other candidates, the existence of the limit of a bounded monotonous sequence, the Heine-Borel theorem, the existence of a point of intersection of a nested sequence of closed intervals of rational numbers with lengths tending to zero, etc. etc.

Mainly pragmatic reasons are responsible for the choice of axioms, reasons that are related to the development of mathematical knowledge and the construction of theories. But what about the problem of explanation then? To explain amounts to exhibiting the meaning of something. Mathematics has, however, no definite meanings, neither in the structural intra-theoretical sense nor with respect to intuitive objectivity. Signs and meanings are processes, as we have argued in paragraph I.

Resnik and Kushner do not consider the proof of the intermediate value theorem as explanatory in the sense of Steiner’s characterization. They write:

“We find it hard to see how someone could understand this proof and yet ask *why* the theorem is true (or what makes it true). The proof not only demonstrates how each element of the theorem is necessary to the validity of the proof but also what role each feature of the function and the interval play in making the theorem true. Moreover, it is easy to see that the theorem fails to hold if we drop any of its conditions” (Resnik/ Kushner 1987, 149).

Rigorous proofs in this sense do not admit “why”-questions any more than mere calculations do and it is hard to see how they could be explanatory at all. Considering the question of how to choose the relevant mathematical model might perhaps change the situation. But the reader should remind herself that the term “explanation” had, for Bolzano, an objective meaning, rather than a psychological one. And this objectivism led to his error with respect to the foundations of the real numbers and his ignorance of the fact that mathematics contains only hypthetico-conditional statements, rather than categorical ones. This, however, means that the foundations of mathematical claims lie, so to speak, "in the future", in the use and application of the mathematical propositions. A mathematical proof must therefore generalize in order to be explanatory. As we have seen, however, with respect to Bolzano and Steiner or Hanna, there is a strong foundational tendency involved in their ideas of explanatory proofs. It is very essential to Bolzano, for example, that there exist a hierarchy of truths in themselves independent from our knowledge or representation.

Cauchy had, at about the same time as Bolzano, given a geometric argument for the intermediate value theorem, being more concerned with certainty and conviction than with objective foundation (Cauchy 1821, 43f). Bolzano did consider proofs, like those by Gauss or Cauchy, as sufficiently obvious and convincing, but objected that they did not show the real fundamentals and thus were not true justifications, but rather mere subjective confirmations (subjektive Gewissmachungen). It is clear, Bolzano writes, "that it is an intolerable offense against correct method to derive truths of pure (or general) mathematics (i.e. arithmetic, algebra analysis) from considerations that belong to a merely applied or special part, namely geometry. … For in fact, if one considers that the proofs of the science should not merely be convincing arguments, but rather justifications, i.e. presentations of the objective reason for the truth concerned, then it is self-evident that the strictly scientific proof, or the objective reason of a truth which holds equally for all quantities, whether in space or not, cannot possibly lie in a truth which holds merely for quantities which are in space. On this view it may on the contrary be seen that such a geometrical proof is really circular. For while the geometrical truth to which we refer here is extremely evident, and therefore needs no proof in the sense of confirmation, it nonetheless needs justification" (Bolzano after the translation by Russ 1980, 160).

The term "justification" refers to the Leibnizian idea that every concept can be decomposed into "atoms." Unprovable or basic propositions must, according to Bolzano, be among those whose subjects and predicates are completely simple concepts in the sense of Leibniz. Bolzano believed, for example, that different cases of one and the same issue should be formulated in terms of different propositions, like in Euclidean geometry. The law of cosine, for instance, in the cases of the acute- respectively obtuse-angled triangles signifies two different cases requiring different arguments. "Euclid was right in formulating two different propositions here," writes Bolzano (Bolzano 1810/1926, 61).

Bolzano not only emphasized the necessity of "homogeneity" between method and object but he also conceived of concepts in themselves, propositions in themselves and representations (Vorstellungen) in themselves, independent of our thinking about them. This is sometimes emphasized by saying that Bolzano was the first to realize that "the proper prolegomena to any future metaphysics was the study of what we say and its laws and that consequently the prima philosophia was not metaphysics or ontology but semantics" (Bar-Hillel, 1967, 337f). Thus Bolzano‘s objective semantics and the Platonic and hierarchically structured universe of objective meanings is essential to his whole conception of explanation.

There are close parallels between Peirce and Bolzano and they are due to the fact that both their philosophies resemble that of Leibniz very strongly indeed. Both did, however, modify classical ontologism, concentrating on how mathematicians create and communicate as well as on the semantics of mathematical affirmations or communications. Both also consider mathematics as the science of possibility or of the possible states of affairs and both understand that proofs do not exist independently from mathematical theories, but are parts of theories.

Finally, both Bolzano and Peirce were concerned with elaborating alternatives to the philosophy of consciousness, as exemplified by Kant’s *Critique* and his notion of *a priori* intuition in particular; however, Bolzano denied the evolutionary perspective, saying that Kant had confounded mathematics as such with the way in which humans develop mathematics, whereas Peirce, in contrast, sought to provide evolutionism with an objective basis. The continuity of space and time is objective, rather than subjective, as Kant and Leibniz had believed.

The essential difference between Bolzano and Peirce lies in the way how possibility is conceived. Bolzano thinks about this question in terms of the difference between the actual and the possible. This means that something like the set of all possibilities exists a priori, waiting to possibly be actualized. For Peirce, in contrast, reality is an evolutionary process realizing and producing objective possibilities as well as their conditions.

Peirce over and again stressed that we have to explain not only phenomena but also the laws that govern them (Peirce W4, 551f, see also Peirce, CP 1.175). Peirce, unlike Bolzano, did not consider mathematics to be an analytical science from definitions. Reality is continuous and thus cannot be described or determined. This may even be interpreted on the level of mathematics. Peirce in contrast to Bolzano seems well aware of the fact that there may exist various models of the number line.

The main feature of mathematical reasoning lies therefore in its perceptual character and consists in the fact that all “deep” symbolic meanings must have been eliminated, in the same sense we have described creative activity in Part I above. A proof must enlarge our knowledge and all ampliative or synthetic reasoning is perceptual and inductive, or as Peirce sometimes calls it, “abductive.” This does not contradict the fact that mathematical reasoning is necessary, because “no necessary conclusion is any more apodictic than inductive reasoning becomes from the moment when experimentation can be multiplied *ad libitum* at no more costs than a summons before the imagination” (Peirce, CP 4.531). Hence, it amounts to the same to say that mathematics “busies itself in drawing necessary conclusions,” and to say that it occupies itself with ideal or hypothetical states of things (Peirce, CP 3.558).

Mathematical proofs in the sense of Peirce do not contain explanations. They consist of apodictic judgments, showing clearly that something is necessarily the case, rather than explaining why that something is the case. They are examples of “knowledge that,” rather than “knowledge why” in the sense of the Aristotelian distinction between proofs of the fact (hoti) and proofs of the reasoned fact (dioti). “The philosophers are fond of boasting of the pure conceptual character of their reasoning. The more conceptual it is the nearer it approaches to verbiage” (Peirce, CP 5.147-489). This would sound Kantian, were it not for the reference to the importance of signs.

Already from the fact that a proof is a sign and a sign is determined by its object and combined with the requirement that mathematical proofs are necessary and thus apodictic, it follows that a proof is essentially an icon and that its object is nothing but the form of that icon. Peirce affirms that mathematical reasoning proceeds by means of the construction of all kinds of diagrams and by experimenting with them and observing what happens. “Since a diagram .... is in the main an Icon of the forms of relations in the constitution of its Object, the appropriateness of it for the representation of necessary inference is easily seen” (Peirce, CP 4.531).

Peirce took Leibniz’s theory of a continuum of representations from quite unconscious and quasi imperceptible representations to those most coercive to consciousness and subsequently based his whole semiotic epistemology on it. A realistic view must see reality above and beyond all laws, ideas and explanations as something offering the possibility of understanding. Peirce’s metaphor for such a view of reality is the continuum. Reality is commonly identified with the totality of existing objects and facts. Sometimes, in a flush of enlightened insight, relations or laws are added to the furniture of reality. But this does not help much. The set of all laws, or possibilities of things, is a no less an antinomical conception than the notion of the set of all sets, which lies at the bottom of Russell’s paradox. In a digital or discrete world, with only 1 and 0, or perfectly right and wrong, there would be no growth of knowledge and therefore no knowledge at all. Synechism is above all “a regulative principle of logic prescribing what sort of hypothesis is fit to be entertained and explained” (Peirce, CP 6.173). Or, stated somewhat differently, only a continuous reality makes analysis and inductive generalization possible. According to Peirce relations are not to be reduced to determinate relata, but are related to continua. This was as important to the geometrical illustrations of the classical incommensurability proofs as it was important to the foundations of the calculus. Leibniz had already emphasized these epistemological insights, but had remained bound to a substance ontology in the Aristotelian sense.

What primarily characterizes mathematics is the peculiarity of its generalizations by means of the forming of fertile hypotheses. A “hypothesis substitutes, for a complicated tangle of predicates attached to one subject, a single conception” (Peirce, W3 337). Such hypotheses are created by an inductive process which Peirce called abduction or abductive inference, adding that “abductive inference shades into perceptual judgment without any sharp line of demarcation between them” (Peirce, CP 5.181). Abductive reasoning involves an element of intuition and “intuition is the regarding of the abstract in a concrete form, by the realistic hypostatization of relations; that is the one sole method of valuable thought” (Peirce, CP 1.383). This realistic hypostatization occurs by means of the construction and experimentation with all kinds of diagrams. From the abductive suggestion, which synthesizes a multitude of predicates, «deduction can draw a prediction» (Peirce, CP 5.171).

Thus the meaning and foundations of a piece of mathematical knowledge, a theory, for instance, are to be seen in the intended applications and newly created possibilities. Icons or images are particularly well suited to make graspable and conceivable the possible and potential rather than the actual and factual. It should also be mentioned in this context that psychology and psychotherapy have known for some time that icons or images are particularly well suited to strengthening what could be called "sense of possibility" and which seems indispensable to a person's mental health (see the proceedings of the 35th International Congress on Psychoanalysis in San Francisco, 1995). Confining a person—a student, for example—to a certain characterization of herself/himself would mutilate her/his personality. Mathematical explanation must therefore enlarge and widen the perspective of the addressee of the explanation and the real is generally to be conceived of as process and evolution.

III. It is rather common nowadays to contrast subjective insight and explanation with objective foundation and conviction (Hersh, 1993). Indeed, Hanna's quest for insight and understanding seems completely psychological and has nothing to do with objective concerns. Bolzano, in contrast, maintaining a strong anti-psychologistic attitude, conceives of explanation in purely objective or logical terms and in reference to a world of truths in themselves, independent of any actual insight. When in the course of the $19^{th}/20^{th}$ centuries the humanities (Geisteswissenschaften) were developed by W. Dilthey (1833-1911) and others, it became common to contrast understanding and interpretation, as the basis of the humanities, with scientific and mathematical explanation. This distinction resulted later on in the notion of the "two cultures" (Snow). Snow's basic thesis was that the breakdown of communication between the sciences and the humanities (the «two cultures» of the title) was a major hindrance to solving the world's problems (see C.P. Snow, 1993)

How can both sides come together? We believe that these two different views can be reconciled from a genetical perspective and that for this the semiotic view and the idea of mathematics as mathematization are essential. The notion of interpretation should be transformed as outlined in Part I of this paper and scientists and mathematicians should refrain from the metaphysical realism and logical objectivism that tends to identify reality with our knowledge of it, thus confusing object and sign.

A mathematical proof is a type, a type of representation, rather than a token-construction. One has to grasp the integrated whole of it, not merely follow the argument or the calculation. Or rather, one has little choice here, as one will hardly be able to memorize a complex proceeding and repeat its application without analysis and generalization.

Still this does not commit us to Platonism, as an idea is not completely to be dissociated from its possible applications and the applications might affect our conviction about what is essential or basic. And to understand the logic of an argument, one must not only follow its consequences in the abstract, but must also see how it applies in a particular situation. Resnik and Kushner found it hard, as they wrote, to see how someone could understand the proof of the intermediate value theorem "and yet ask *why* the theorem is true (or what makes it true)." They are right. This kind of insistence on more and more new why-questions seems to happen when one separates knowledge from its development and application. But the meaning resides in the applications.

In formal mathematics, facts are explained by means of proofs and then it has to be proved that the proof is correct and so on *ad infinitum*. Every proof is faced with the prerequisite of proving that the proof be correct. And the proof of the correctness of the proof again meets the same requirement and the proof of the correctness of the correctness of the proof also … etc. This dilemma is nicely described by Lewis Carroll's version of Zenon's paradox (Carroll, 1905*;* see also: Peirce, CP 2.27).

As a rational being one cannot act contrary to one's own insights and there is no insight without an application. Lewis Carroll's version of the race between Achilles and the Tortoise shows, albeit unintentionally, that one cannot really have knowledge or an insight and keep from applying it. There is no complete analysis without activity and application. Mathematics is just as constructive as it is analytical. Hence, it is difficult to believe that mathematics is meant "to explain," in the usual reductionistic understanding of the term.

In a reader on the philosophy of science we are told: "We can explain the length of the shadow by reference to the height of the flagpole, and not vice versa" (Newton-Smith 2000, 129). It seems natural to ask, upon perceiving a shadow, whence it comes from. Nobody, however, would consider the shadow to be the cause of the flagpole. But what about mathematics? Let us begin with Kant.

A "new light," says Kant, must have flashed on the mind of people like Thales, when they perceived that the relation between the length of a flagpole and the length of its shadow enables one to calculate the height of the pyramid, given the length of its shadow. "For he found that it was not sufficient to meditate on the figure as it lay before his eyes,… and thus endeavor to get at knowledge of its properties, but that it was necessary to produce these properties, as it were, by a positive a priori construction" (Kant, *Critique of Pure Reason*, Preface to the Second Edition 1787). And indeed, the flagpole as such has no positive relationship whatsoever to the pyramid.

Now one might say that mathematics is not concerned with flagpoles, pyramids and the like. But such talk does not help very much, given that we have witnessed, since Descartes' arithmetization of geometry, a gradual destruction of the pre-established harmony between method and object of mathematical inquiry that Bolzano wanted to maintain (Boutroux 1920, 193f). The history of mathematics must be seen as the history of mathematization, including the mathematization of mathematics itself (Lenhard y Otte, 2005). Therefore, mathematics is characterized first of all by the manner in which it generalizes. Mathematicians as a rule do not see things this way. They are either Platonists or Intuitionists and they dislike the semiotic approach to mathematics (Hermann Weyl is a noticeable exception to this: see: *Werke*, vol. IV, p. 334).

G. Cantor (Cantor 1966, 83), for example, believed that applied mathematics must deal with real explanations or foundations of things and thus must be based on sound metaphysics, whereas pure mathematics is defined by its “freedom” to form concepts as one pleases (given that they do not result in logical contradictions). Kant, on the other hand, being confined to an epistemology of consciousness, found it necessary to employ the idea that mathematical concepts and relations must be “constructed in intuition.” And people like Poincare or Brouwer followed him in this conviction. This, however, imposes severe limitations on the conception of mathematics, because it introduces an absolute distinction between concepts and intuitions and between analytical and synthetical knowledge.

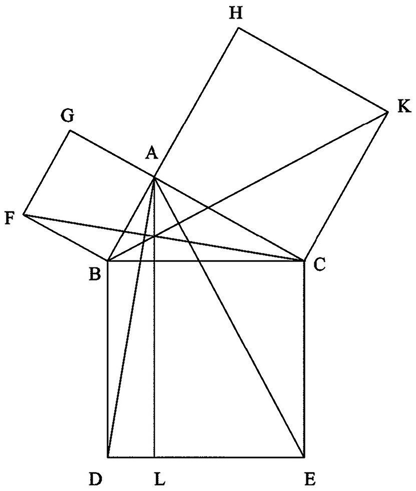
Peirce considered these distinctions as relative and hence his belief that abduction, as the source of mathematical generalization, on the one hand, and empirical perception, on the other hand, are not as different as it may appear. In semiotics, to explain means to represent. And a representation is just a perception cast into a certain form. In this context, Peirce develops the notion of the perceptual judgment as an unconscious inference. There is no sharp demarcation between mathematical and perceptual judgments respectively. When making a perceptual judgment we simply cannot really distinguish between what comes from the outside world and what stems from our own interpretation. “On its side, the perceptive judgment is the result of a process, although of a process not sufficiently conscious to be controlled, or, to state it more truly, not controllable and therefore not fully conscious. If we were to subject this subconscious process to logical analysis … this analysis would be precisely analogous to that which the sophism of Achilles and the Tortoise applies to the chase of the Tortoise by Achilles, and it would fail to represent the real process for the same reason” (Peirce, CP 5.181).

Within a perceptual judgment, the perception of generals (or ideal objects) and of particular data seems inseparable, or, stated differently, the processes of creation and of application of symbolic representations are inseparable. Analysis and interpretation interact. The relativity of the distinction between our inner and outer world could thus be interpreted as demanding its conceptualization in interactive terms, like the concept of representation. Once more we have to conclude that a proof that is supposed to explain must generalize.

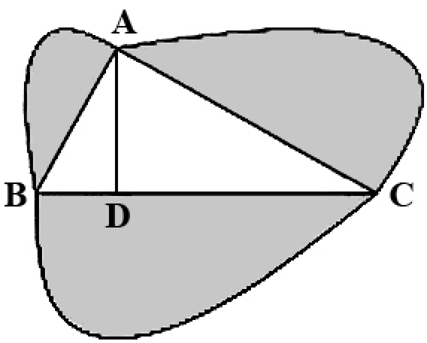
Let us consider a concrete example, given by Boulignand (1933), which concerns three different proofs of the Theorem of Pythagoras. The proofs of the Pythagorean Theorem are commonly considered to be divided into three main types: proofs by *shearing*, which depend on theorems that the areas of parallelograms (or triangles) on equal bases with equal heights are equal, proofs by *similarity* and proofs by *dissection*, which depend on the observation that the acute angles of a right triangle are complementary. Among these proofs the proofs by similarity play a special role because they indicate their embeddedness into the theoretical structure of axiomatized Euclidean geometry. The Pythagorean Theorem is equivalent to the Parallel Postulate, after all.

The following diagrams represent examples of these three types of proofs.

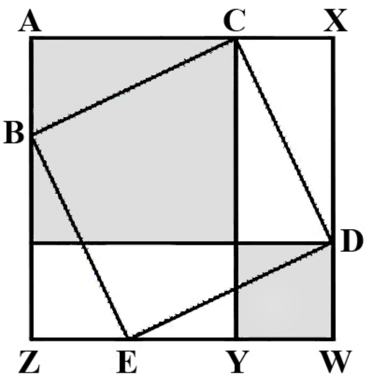
1.



2.



3.



The first proves, the second explains and the third is called intuitive but not explanatory by Bouligand.

The first proof proceeds in the traditional manner that we have become accustomed to in school: Since the angles BAC and BAG are right it follows … Consider now the triangles ABD and FBC … Since the triangles are congruent it follows that …. etc.etc.…

The second proof requires a relational understanding of the notion of "area," rather than an empiricist one. The area of a figure is defined then as the relation of that figure to the unit square Q(1). We have $Q(x)=x^2\,Q(1)$. Therefore the areas of similar plane figures are to each other as the squares of their corresponding sides. Since we have ADC+ADB=ABC, the generalized theorem of Pythagoras follows.

The third proof simply requires some playing around with plane figures like in a geometrical puzzle and observing certain concrete relationships of equality and difference.

The interesting distinction seems to be that between 2) and 3), whereas the distinction between 1) and 2) is familiar and in some way refers to the well-known distinction between the analytic and synthetic, or between corollarial and theorematic reasoning. Corollarial reasoning relies only on that which is enunciated in the premises in a rather straightforward manner. If, however, a proof is possible only by reference to other things not mentioned in the original statement and to be introduced by conceptual construction and generalization, such a proof is theorematic.

The first idea that comes to mind with respect to the contrast between 2) and 3) is that it must be something modern, because it has to do with relational thinking and with the opposition between theoretical thought and common knowledge, or between the exact sciences and the humanities (Dilthey). We have talked about this difference already and one should remember the fact that Euclidean axiomatics and modern axiomatics in the sense of Hilbert are representing this difference (Otte 2003, 204). What is more important still: in modern axiomatic theory mathematical objects or facts are the objects and facts of a theory and proofs only make sense within the context of a theory? In traditional Euclidean geometry all this is different. The objects are given by unaided intuition, independently of any theory, and the proofs do not refer to an explicit and fixed theoretical context as their base, but refer to everyday rationality in the sense of Aristotelian demonstrative science.

Now, the second proof is modern in the described sense, whereas the other two more or less breathe in the spirit of Aristotelian science and traditional thinking in terms of substances and their essential properties.

When classifying the second proof as explanatory, we employ a dynamic conception of knowledge and explanation, as it has been described in semiotic terms above. The proof indicates the possibility of many relationships and thus makes us feel the systemic and theoretical character of knowledge. The other two proofs are foundationalist, assuming a fixed hierarchical organization of knowledge based on unaided intuition and everyday experience.

Intuition seems forceful, but neither an absolute insight or intuition nor a determinate hierarchy of levels of knowledge actually exist. This is very often misunderstood. For example, the well-known Gestalt psychologist Max Wertheimer (1880-1943) comments on the presentation and solution of Zeno's paradoxes by means of a geometric series that is current in present day mathematics. He himself comments on the current proof of the convergence of that series, which is accomplished by multiplying the series by a and subtracting afterwards. Set $S = 1 + a = a^2 + \ldots$ Then $S - aS = 1$ or $S = 1/(1 - a)$.

Wertheimer writes: "It is correctly derived, proved, and elegant in its brevity. A way to get real insight into the matter, sensibly to derive the formula is not nearly so easy; it involves difficult steps and many more. While compelled to agree to the correctness of the above proceeding, there are many who feel dissatisfied, tricked. The multiplication of $(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots)$ by a together with the subtraction of one series from the other, gives the result; it does not give understanding of how the continuing series approaches this value in its growth." (Wertheimer, 1945)

Wertheimer wants an intuitive demonstration. Intuition is essentially the seeing of the essence of a thought or object as a form or object itself. Things do not have, however, a unique and demonstrable essence, as we have argued before. The essence of something cannot be anything but the essence of a representation of that thing and therefore the diagrammatic proof which Wertheimer does not accept as satisfactory, could be called an intuitive proof, exactly like proof number 3 of the theorem of Pythagoras above. Only, in the present case, the intuition is directed towards the diagrammatic representation itself and to its form. It is also more advanced, because it contains some general methodological message.

If we could establish a direct authentic and "natural" relationship to the object of knowledge then this relationship would also exist in a mechanical form; it would be a relation between reactive systems rather than cognitive ones and thus would be just a singular event without general meaning. The idea of sign marks the difference at this point as it introduces a general element. Our intuitions serve to create expressive and illuminating representations. And in this way we learn to act within the world around us. To understand means exactly to create a representation, as the very example that Wertheimer has criticized shows. We therefore have to renounce searching for definite meanings and absolute foundations of knowledge.

This we can learn from the fact that all our thinking is by means of signs.

Classified in terms of Peirce's categories, the third or intuitive proof represents *Firstness*, the first *Secondness* and the second, or explanatory in our sense, *Thirdness*. Thirdness is, as Peirce says, a synonym of representation and evolution and thus of continuity (CP 6.202). But Thirdness presupposes Firstness and Secondness, or stated semiotically, symbolic representation depends on iconic and indexical elements. Thus a proof may be a symbol, but mathematical reasoning is, as was said, diagrammatic and as such is based mainly on iconic signs with indexical elements as parts of the icon. As Peirce adds: "Firstness, or chance, and Secondness, or brute reaction, are other elements, without the independence of which Thirdness would not have anything upon which to operate" (CP 6.202). What primarily characterizes mathematics is the peculiarity of its generalizations and this is a symbolic process operating by means of hypostatic abstractions (Otte 2003, 218f).

References

Bar-Hillel, Y. (1967). Bernard Bolzano, In Paul Edwards (ed.), *The Encyclopedia of Philosophy*, vol. II, p.337f

Beth, E. (1968). *The Foundations of Mathematics: a Study in the Philosophy. of Science*. - 2., rev. ed., 2. print . - Amsterdam : North-Holland Publ. Co.

Bochner, S. (1974). Mathematical Reflections, *American Mathematical Monthly*, 830-859.

Bolzano, B. (1810/1926). *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, Paderborn: Schöningh.

Bolzano, B. (1817/1980). Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, Translation into English by S. Russ, *Historia Mathematica*, *7*, 156-185.

Bolzano, B (1837/1981).Wissenschaftslehre, 4 vol. (Sulzbach). Ed. by Wolfgang Schultz. Reprint Scientia Verlag Aalen.

Boulignand, G. (1933). L'idée de causalité en mathematiques et dans quelques theories physiques, *Revue Scientifique*, *71*, 257-267.

Boutroux, P. (1920). *L'Idéal Scientifique des Mathématiciens*. Paris: F. Alcan.

Cantor, G. (1966). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Hildesheim : Olms.

Carroll, L. (1905). «What the Tortoise said to Achilles,»' *Mind*, N. S. vol. 4, p. 278; reprinted in: D. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach,* Vintage N.Y.

Cauchy, A.L. (1821). *Analyse algebrique*, Paris.

Dedekind, R. (1912). Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig, Vieweg & Sohn, 4th edition. de Jong, W.R. (2003). Bernard Bolzano, Analyticity and the Aristotelian Model of Science, *Kant Studien, 92*, 328-349.

Dilthey, W. (1910/1981). *Der Aufbau der geschichtlichen Welt in den Geisteswissenschaften,* Frankfurt: Suhrkamp.

Fish, S. (1980). *Is there a Text in this Class?,* Harvard UP, Cambridge USA

Hanna, G. (1989). Proofs That Prove and Proofs That Explain. In: G. Vergnaud, J. Rogalski, and M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Paris, Vol II, pp. 45-51.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics,* Special issue on «Proof in Dynamic Geometry Environments», *44*, 5-23.

Hersh, R. (1993). Proving is Convincing and Explaining, *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389-99.

Hirsch, E.D. (1967). *Validity in Interpretation*, Yale UP, Princeton.

Jakobson, R. (1985). *Selected Writings*, vol. VII, Berlin: Mouton.

Lenhard, J. y Otte, M. (2005). Grenzen der Mathematisierung – Von der grundlegenden Bedeutung der Anwendung [Limits of Mathematization: the Constitutive Role of Application], *Philosophia naturalis*, *42*(1), 15-47.

Mancosu, P. (2000). On Mathematical Explanation, in: E. Grosholz/H. Breger (eds.) *The Growth of Mathematical Knowledge,* Kluwer, 103-119.

Mancosu, P. (2001). Mathematical Explanation, *Topoi* 20: 97-117.

Marx, K. (1906). *Capital*. Edited by Frederick Engels. Revised and Amplified According to the Fourth German Edition by Ernest Untermann. Translated by Samuel Moore and Edward Aveling, from the Third German Edition (of *Das Kapital*). Published: Chicago: Charles H. Kerr and Co. First published: 1867.

Newton-Smith, W.H. (ed.) (2000). *A Companion to the Philosophy of Science*, Blackwell Oxford.

Otte, M. (2003). Complementarity, Sets and Numbers, *Educational Studies in Mathematics*, *53*, 203-228.

Otte, M. (2005). Mathematics, Sign and Activity. In M. Hoffmann et.al. (eds). *Activity and Sign* (pp. 9-22). N.Y.: Springer.

Peirce, Ch. S.: CP = Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Volumes I-VI, ed. by Charles Hartshorne and Paul Weiß, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1931-1935, Volumes VII-VIII, ed. by Arthur W. Burks, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1958 (followed by volume and paragraph)

NEM = Carolyn Eisele (ed.), The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce, Vol. I-IV, The Hague-Paris/Atlantic Highlands, N.J. (Mouton/Humanities Press)

W = Writings of Charles S. Peirce. Ed. by Peirce Edition Project. Bloomington: Indiana University Press (1982-2000) (followed by volume and page).

Resnik, M./D. Kushner (1987). Explanation, Independence and Realism in Mathematics, *British Journal for the Philosophy of Science, 38*, 141-158.

Rota, G.-C. (1997). The Phenomenology of Mathematical Proof, *Synthese, 111*, 183-196.

Snow, C.P. (1993). *The Two Cultures*, Harvard UP, Cambridge/USA.

Steiner, M. (1978). Mathematical Explanation, *Philosophical Studies, 34,* 135-151.

Valery(no year).*Leonardo*, Insel Verlag Frankfurt.

Volkert, K. (1986). *Krise der Anschauung*, V.+R. Göttingen.

Wertheimer, M. (1945). *Productive Thinking*. New York: Harper.

Weyl, H. (1995). Topology and abstract Algebra as two Roads of Mathematical Comprehension, *American Math. Monthly*, 453-460.

Michael Otte
University of Bielefeld
Germany

E-mail: michaelontra@aol.com

Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?

Raymond Duval [1]

RESUMEN

Tanto en la enseñanza como en sus prácticas más avanzadas, las matemáticas son el dominio donde todas las formas de representación semiótica pueden ser utilizadas. Ello plantea el problema siguiente: ¿las diferentes teorías semióticas permiten analizar la utilización de imágenes, del lenguaje y de los símbolos en matemáticas? Para comprender los elementos del problema, se debe no solamente observar cómo estas teorías distinguen las relaciones que constituyen y diferencian los signos, sino también considerar las exigencias matemáticas que demanda el recurso de las diferentes formas de representación semiótica. Su comparación muestra una diferencia considerable entre las herramientas de análisis semiótico existentes y la complejidad semiótica de todas las producciones matemáticas. Limitándose al caso de la representación de los números, se puede poner en evidencia que estas herramientas no permiten analizar la heterogeneidad semiótica de los diferentes sistemas utilizados. Ahora bien, esta heterogeneidad semiótica provoca una de las dificultades mayores del aprendizaje de las matemáticas: pasar de un tipo de representación a otro. El análisis de las producciones matemáticas exige herramientas de análisis semiótico más complejas y mejor adaptadas a los procesos cognitivos movilizados en toda actividad matemática. Para poder realizar esta investigación, tres preguntas son cruciales: una sobre la pertinencia de la distinción entre significante y significado, otra en torno a la clasificación de los signos, y, finalmente, otra referente a la comparación entre un análisis funcional y un análisis estructural de los signos.

- **PALABRAS CLAVE:** Condensación, designación, imagen, figura geométrica, relaciones constitutivas de signos, representaciones semióticas y no semióticas, sistema semiótico, transformación de representaciones.

ABSTRACT

Mathematics, whether in its teaching or in its more advanced practices, is a domain where all the forms of semiotic representation can be used. This entails the following problem: do different semiotic theories allow for the analysis of the use of images, language and symbols in mathematics? To grasp the givens of the problem, we not only have to

Fecha de recepción: Febrero de 2006/ Fecha de aceptación: Abril de 2006

1 Université du Littoral Côte d'Opale(ULCO), France.

see how these theories make the distinction between the relations that constitute and differentiate signs, but we also have to consider the mathematical demands which necessitate that we make recourse to different kinds of semiotic representation. Their comparison reveals a considerable gap between existing semiotic tools and the semiotic complexity found in all mathematical production. Limiting ourselves to the case of the representation of numbers, we can highlight the fact that these tools do not allow us to analyze the semiotic heterogeneity of the different systems used. Moreover, this semiotic heterogeneity brings up one the major difficulties in the learning of mathematics: going from one type of representation to another. The analysis of mathematical productions demands semiotic tools of analysis that are more complex and better adapted to the cognitive practices mobilized in all mathematical activity. In order to undertake this research, three questions seem to be crucial: that of the pertinence of the distinction between signifier and signified, that of the classification of signs, and that of the connection between the functional analysis and the structural analysis of signs.

- **KEY WORDS:** Condensation, designation, image, geometrical figure, constitutive relations of signs, semiotic and non semiotic representations, semiotic system, transformation of representations.

RESUMO

Tanto no ensino como nas práticas mais avançadas a matemática é o domínio onde todas as formas de representação semiótica podem ser utilizadas. Coloca-se o problema seguinte: As diferentes teorias semióticas permitem analisar a utilização de imagens, da linguagem e dos símbolos em matemática? Para compreender os elementos do problema, se deve não somente observar como estas teorias distinguem as relações que constituem e diferenciam os signos, mas também considerar as exigências matemáticas que demanda o recurso das diferentes formas de representação semiótica. Sua comparação mostra uma diferença considerável entre as ferramentas de análise semiótico existentes e a complexidade semiótica de todas as produções matemáticas. Limitando ao caso da representação dos números, se pode colocar em evidência que estas ferramentas não permitem analisar a heterogeneidade semiótica dos diferentes sistemas utilizados. Assim, esta heterogeneidade semiótica provoca uma das dificuldades maiores da aprendizagem das matemáticas: passar de um tipo de representação a outra. A análise das produções matemáticas exige ferramentas de análise semiótico mais complexas e melhor adaptadas aos processos cognitivos, mobilizados em toda atividade matemática. Para poder realizar esta investigação, três perguntas são cruciais: uma sobre a pertinência da distinção entre significante e significado, outra em torno da classificação dos signos, e, finalmente, outra referente a comparação entre uma análise funcional e uma análise estrutural dos signos.

- **PALAVRAS CHAVES:** Condensação, designação, imagem, figura geométrica, relações constitutivas de signos, representações semióticas e não semióticas, sistema semiótico, transformação de representações.

RÉSUMÉ

Aussi bien dans l'enseignement que dans ses pratiques les plus avancées, les mathématiques sont le domaine où toutes les formes de représentation sémiotique peuvent être utilisées. Cela pose le problème suivant : les différentes théories sémiotiques permettent-elles d'analyser l'utilisation des images, du langage et des symboles en mathématiques ? Pour saisir les données du problème, il faut non seulement regarder comment ces théories distinguent les relations qui constituent et différencient les signes, mais il faut aussi considérer les exigences mathématiques qui commandent le recours aux différentes formes de représentation sémiotique. Leur comparaison montre un écart considérable entre les outils d'analyse sémiotique existants et la complexité sémiotique de toutes les productions mathématiques. En se limitant au cas de la représentation des nombres, on peut mettre en évidence que ces outils ne permettent pas d'analyser l'hétérogénéité sémiotique des différents systèmes utilisés. Or cette hétérogénéité sémiotique soulève l'une des difficultés majeures de l'apprentissage des mathématiques : passer d'un type de représentation à un autre. L'analyse des productions mathématiques exige des outils d'analyse sémiotique plus complexes et mieux adaptés aux processus cognitifs mobilisés dans toute activité mathématique. Pour conduire cette recherche trois questions semblent cruciales : celle de la pertinence de la distinction entre signifiant et signifié, celle de la classification des signes, et celle du rapport entre une analyse fonctionnelle et une analyse structurale des signes.

- **MOTS CLÉS:** Condensation, désignation, image, figure géométrique, relations constitutives des signes, représentations sémiotique et non sémiotique, système sémiotique, transformation de représentation.

L'attention portée au rôle des signes dans la pensée mathématique est à la fois ancienne et récente. Elle est ancienne si l'on considère la création multiforme d'un symbolisme mathématique qui a accompagné le développement de l'algèbre, de l'analyse et de la logique dite mathématique. Mais elle est très récente si l'on considère les recherches sur les problèmes d'apprentissage qui, dans un cadre piagétien et constructiviste, ont privilégié une problématique d'acquisition de concepts.

Des raisons très différentes ont contribué à la découverte de l'importance des représentations sémiotiques pour comprendre la complexité des apprentissages en mathématiques. Il y a, bien sûr, l'introduction de l'algèbre. Il y a aussi l'analyse des productions des jeunes élèves dans le cadre des activités qui leur sont proposées en classe. Il y a eu également l'influence, tardive, de la pensée de Vygotski qui avait souligné, contre les explications de Piaget, l'importance du langage à travers ses trois modalités d'expression, intérieure, orale et écrite, dans le développement de la pensée de l'enfant. Mais la découverte de l'importance et de la variété des représentations sémiotiques dans les activités mathématiques et pour l'apprentissage soulève un problème considérable et souvent peu discuté : comment les décrire, comment les analyser et comment les situer par rapport aux démarches mathématiques ?

Le problème, en effet, n'est pas d'analyser la variété des représentations sémiotiques en fonction des concepts et des connaissances mathématiques qu'elles permettent d'exprimer, de traduire, de contextualiser, etc. Cela conduit, en fait, à les dissoudre dans une analyse faite en termes de « savoirs » relatifs à des contenus mathématiques particuliers. Le problème est d'abord de savoir déterminer ce que sont des « signes », ce qu'ils évoquent ou représentent et comment ils le font, quelles fonctions ils remplissent ou ne remplissent pas dans une démarche de connaissance. Certes, ces questions semblent avoir trouvé une réponse claire dans les différentes théories sémiotiques qui ont été élaborées depuis les Stoïciens et, plus particulièrement, avec Peirce, Saussure, et aussi Frege. Mais cette apparente clarté s'évanouit vite si on compare ces différentes théories entre elles et, surtout, si on considère la variété considérable et hétérogène des représentations sémiotiques utilisées en mathématiques et dans l'enseignement des mathématiques. Les quelques « concepts » et classifications élaborés dans les théories sémiotiques et auxquels beaucoup de travaux didactiques se réfèrent, apparaissent alors insuffisants et parfois non pertinents pour analyser l'activité mathématique et ses productions. Et c'est là que surgit la question suivante : quelle sémiotique pour analyser l'activité et les productions mathématiques ?

Cette question est essentielle à un triple titre. Tout d'abord, il s'agit de disposer d'un outil d'analyse suffisamment adapté et discriminant pour étudier l'activité mathématique et ses productions : celles des experts, celles des enseignants et celles des élèves y compris ceux de l'enseignement primaire. Car toutes les productions mathématiques mettent en jeu des représentations sémiotiques. Or, les types de représentations que l'on trouve chez les uns ne sont pas ceux qui sont privilégiés par les autres. Peut-on les considérer comme à peu près équivalents ou interchangeables tant du point de vue de leur fonctionnement sémiotique que du point de vue mathématique? En d'autres termes, peut-on ou non passer facilement d'un type à un autre, ou au contraire ce passage de l'un à l'autre ne cache-t-il pas une rupture? Ensuite, il y a le problème du rôle des signes et des représentations sémiotiques dans le fonctionnement de la pensée. On peut l'aborder de manière très générale sans se référer à aucun domaine particulier de connaissance, c'est-à-dire à la manière spécifique dont on a accès aux objets de connaissance dans chaque discipline scientifique. Mais on peut aussi l'aborder en prenant en compte les exigences propres au développement de la connaissance mathématique. Dans ce cas, il faut tenir compte de la situation épistémologique particulière des mathématiques par rapport aux autres domaines de connaissance. Les représentations sémiotiques jouent-elle le même rôle en mathématiques qu'en botanique, qu'en géologie, qu'en géographie, qu'en astronomie, etc.? Enfin, cela concerne les variables cognitives à prendre en compte dans les apprentissages. Peut-on considérer que certains types de représentation facilitent l'entrée dans les démarches mathématiques ou, au contraire, en brouillent la visibilité ? Les changements de type de représentation constituent-ils une variable didactique cruciale ou au contraire une variable secondaire ?

Le propos de cet article n'est pas de présenter ici une autre approche sémiotique pour analyser l'activité et les productions mathématiques, approche que nous avons développée dans d'autres travaux (Duval 1995a, 1996, 2003, 2005, 2006a, 2006b). Notre propos est de poser la question de la pertinence et des moyens d'une analyse sémiotique de l'activité mathématique et des problèmes d'apprentissage en mathématiques. Cette question exige que l'on commence par analyser les différentes théories sémiotiques dont on a importé en didactique les distinctions et les concepts, sans s'être vraiment interrogé sur leurs fondements, sur leur portée réelle ainsi que sur les critères opératoires qu'elles offrent ou n'offrent pas. Le résultat auquel nous espérons conduire le lecteur est qu'il voit pourquoi il faut se poser cette question. Si on ne s'est pas posé cette question, l'utilisation d'une théorie sémiotique, quelle qu'elle soit, ne peut avoir de sens.

Nous commencerons donc par présenter les données du problème sémiotique, telles qu'elles ressortent des différentes théories sémiotiques existantes. Nous verrons que les différentes théories ont conduit à expliciter cinq relations fondamentales pour caractériser les signes et les représentations sémiotiques, même si aucune ne prend en compte toutes les relations. Mais ce n'est là qu'une partie des données pour la question dont nous voulons montrer la nécessité et la priorité. Il nous faut aussi examiner les exigences mathématiques concernant l'utilisation des signes. Nous verrons alors que les représentations sémiotiques ne sont mobilisées et développées que dans la mesure où elles peuvent être transformées en d'autres représentations sémiotiques. Ce sont ces transformations possibles qui sont importantes et non pas les relations fondamentales explicitées dans les différentes théories sémiotiques. Pour illustrer cela, nous prendrons l'exemple de la représentation des nombres. Nous aurions pu aussi prendre un exemple en géométrie (Duval, 2005) ou un problème dans lequel on ne peut pas distinguer si on est dans un cadre géométrique ou numérique (Duval, 2006b). L'intérêt de la représentation des nombres est que cet exemple permet de comparer plusieurs types de représentation, dont celui de représentations «concrètes», ou iconiques, de marques unités que l'on utilise comme des pseudo objets et qui ne fonctionnement pas du tout comme des signes. Dans une troisième partie, nous verrons, en gardant le même exemple, comment le passage d'un type de représentation à un autre implique un saut sémiotique non seulement dans le fonctionnement de la relation de référence mais surtout dans le type d'opération discursive à effectuer. La dernière partie nous permettra de montrer comment la question, thème de cet article, se traduit et se diffracte en plusieurs questions cruciales. Nous en retiendrons trois. La distinction entre signifiant et signifié, est-elle pertinente en mathématiques ? La classification des représentations, se fait-elle en fonction des relations fondamentales caractéristiques des signes ou en fonction des systèmes producteurs de représentations ? L'analyse des productions peut-elle être entièrement subordonnée à la fonction remplie dans un contexte ?

I. LES DONNÉES DU PROBLÉME SÉMIOTIQUE

Les définitions des signes qui ont été proposées dans les différentes théories sémiotiques, mettent toutes en avant la fonction cognitive d'évocation, ou de remplacement, qu'un élément remplit à l'égard d'un autre élément, ces deux éléments étant implicitement considérés comme n'ayant pas le même statut épistémologique. De ce point de vue, il n'y a pas de différence entre la définition des signes et celle des représentations qui ne sont pas des signes, comme les images produites sur une surface plane réfléchissante ou par un système optique.

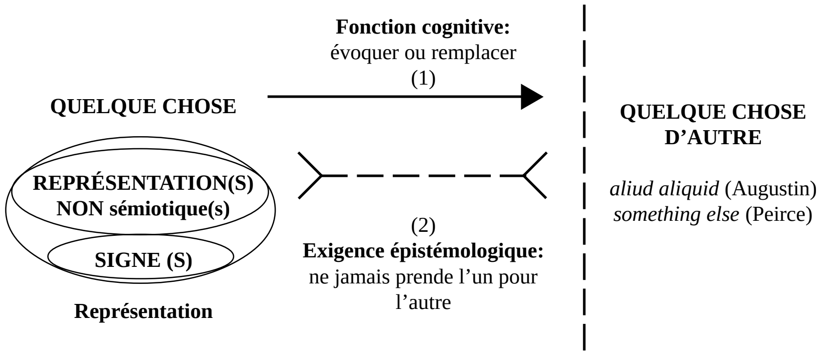


Figure 1. Les deux éléments constitutifs caractérisant les signes et toutes les représentations

Les trois définitions suivantes en sont une parfaite formulation :

— Le signe est une chose qui, outre la forme perçue par les sens, fait venir à partir d'elle la pensée de quelque chose d'autre .... (*Signum est enim res, praeter speciem quam ingerit sensibus, aliud aliquid ex se faciens in cogitationem venire*). (Augustin 1997, p. 136)

— Un signe ou représentamen est quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un de quelque chose d'un certain point de vue ou realtivement à une compétence (*A sign, or representamen, is* ***something which stands*** *to somebody* ***for something*** *in some respect or capacity*). (Peirce 1978, p.121 (2.228)).

— Les « représentations » sont « l'évocation d'objets absents » (Piaget 1968a, p.305 ; 1968b, p. 8).

Malgré une apparente évidence, toutes ces définitions sont à la fois inutilisables et incomplètes. Elles sont tout d'abord incomplètes parce qu'elles laissent implicite l'exigence épistémologique fondamentale qui conduit à ne pas confondre une représentation avec ce qu'elle représente (Platon *République*, 509e-510b). Car, sans le respect de cette exigence, il n'y a plus de signe ou de représentation. Le respect de cette exigence peut sembler trivial ou immédiat lorsqu'il s'agit de choses matérielles, comme, par exemple une chaise. On ne confondra jamais la chaise en bois sur laquelle on peut s'asseoir et la photographie de cette chaise ou encore un dessin de cette chaise. Cela ne l'est plus pour les représentations sémiotiques utilisées en mathématiques, comme, par exemple les multiples représentations possibles des nombres, car on ne peut pas accéder à ces objets mathématiques sans mobiliser des représentations sémiotiques (Duval 2006b). Mais, surtout, cette définition est inutilisable car la fonction cognitive consistant à « évoquer » ou à « se tenir lieu de quelque chose » ne précise pas comment cette fonction cognitive peut être remplie. Autrement dit, cette définition, qui caractérise les signes par leur seule fonction, ne dit rien de la relation qui, structuralement, permet à quelque chose d'évoquer quelque autre chose.

C'est pourquoi les différentes théories du signe et de la représentation qui ont été développées ont été conduites à expliciter plusieurs relations fondamentales constitutives des signes ou des représentations. Nous en retiendrons cinq et il semble qu'il ne puisse pas en exister d'autres.

1. Une relation de « ressemblance »

La relation de ressemblance, à travers les notions de « copie » ou d'« image » (*eikon*) qui lui sont associées, a été dégagée par Platon (République 476c, 509e, 510e). Peirce en a fait l'une des trois catégories des représentations : « Une icône est un *represenamen* dont la qualité représentative est la priméité du *representamen*...par conséquent n'importe quelle chose peut être un substitut de n'importe quelle chose à laquelle elle ressemble » (Peirce 1978 p.14 7 (2.276) ; voir aussi 2.247). Cependant, ce qui permet de définir une ressemblance entre le contenu d'une représentation et ce dont ce contenu est la représentation reste flou comme Quine (1977) l'avait signalé. Comment déterminer s'il y a « ressemblance» ou non entre une représentation et ce qu'elle est censée représenter, sans passer par un ensemble d'opérations qui coûtent plus de temps que le seul fait de reconnaître quelque chose comme une image ?

Bresson a proposé un critère qui s'avère être un outil précieux à la fois pour décider si une représentation est, ou n'est pas « iconique » et pour pouvoir distinguer les différents types d'images. La ressemblance se caractérise par « la conservation entre les éléments du représentant des relations de voisinage existant entre les éléments du représenté » (Bresson 1987, p. 940). Autrement dit, la ressemblance ne se fonde pas sur la reproduction de formes mais sur la conservation de relations topologiques des éléments qui composent l'ensemble d'une figure. Ainsi, dans l'exemple ci-dessous, les éléments des deux premiers dessins sont homogènes (que des carrés ou des ronds !) et leur forme ne ressemble pas aux différentes parties du visage humain. Ce sont leurs relations de voisinage qui les font interpréter comme des yeux, un nez, etc. Présentées simultanément à de jeunes enfants, ces formes sont généralement vues comme « un robot » et un « bonhomme ».

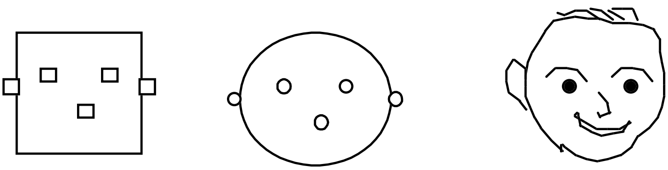


Figure 2. Deux images schématisées et une image figurative.

La comparaison du troisième dessin avec les deux premiers montre l'intérêt de la définition de Bresson. Elle permet de voir ce qui fait la différence entre une image figurative (à droite), qui est une «copie » plus ou moins fidèle d'un visage, et une image schématisée ou abstraite (à gauche) mais qui ressemble encore à un visage. Dans l'image figurative, les éléments sont différents et ont chacun une ressemblance de contour avec une partie du visage. Une image devient schématique lorsque tous les éléments composant l'image deviennent homogènes et perdent donc tout caractère d'iconicité (Duval 2003, p. 39-40).

Regardons maintenant ces figures qui suivent. En quoi se distinguent-elles des premiers dessins ci-dessus ? Peut-on les considérer comme relevant de la même catégorie que les images ci-dessus ?

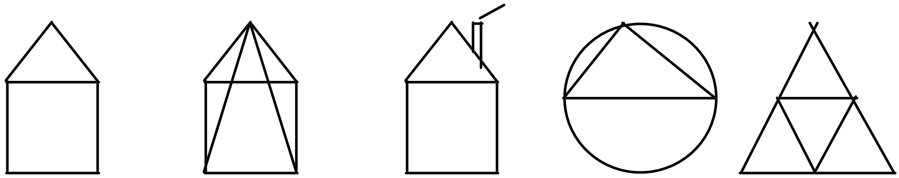


Figure 3. Quatre ou cinq figures géométriques ?

On peut noter une première différence. Une figure géométrique ne se dessine pas à main levée mais se construit à l'aide d'instruments, tandis qu'un dessin ne se construit pas mais se compose à main levée. Mais, d'un point de vue sémiotique, cette différence a peu d'importance. La question suivante demeure : une fois construite ou dessinée, une figure géométrique s'analyse-t-elle en termes de ressemblance avec ce qu'elle représente ?

2. Une relation de « référence »

Cette relation, que Frege (1971) appelait la *Bedeutung* (*dénotation*) des signes ou de leur combinaison en une expression, exclut toute possibilité de ressemblance entre les signes et ce dont ils sont les signes. Elle concerne surtout deux types de signes très différents : les symboles et les mots. **La relation de référence d'un signe ou d'une combinaison de signes à un objet résulte d'une opération discursive de désignation**. C'est de cette manière que les lettres en algèbre, les mots, ou les constructions syntagmatiques de mots dans un énoncé, réfèrent à un objet. Cette opération peut paraître simple lorsqu'il s'agit de lettres ou de symboles, puisque généralement on les associe à quelque chose qui est visible graphiquement : les sommets ou les points d'intersection sur une figure géométrique, ou un ensemble de nombres que l'on se donne : « Soit x... ». Dans ce type de situation on parle le plus souvent de « notation mathématique » (Freudenthal, 2002).

L'opération de désignation est beaucoup plus complexe dès qu'elle se fait par des mots. **Un mot, seul, ne désigne jamais un objet, sauf si on lui assigne un statut de nom propre.** La désignation d'un objet par un nom commun exige toujours une quantification. Autrement dit, la désignation linguistique se fait par la combinaison d'un nom commun et d'un déterminant. Mais, comme aucun lexique ne comporte jamais autant de mots que d'objets à désigner, la construction syntagmatique doit articuler plusieurs noms en une seule expression : « **le** point **d**'intersection **des** hauteurs **d**'un triangle ... ». Russell considérait ce type de construction syntagmatique, comme une « description ». Il est caractéristique du langage mathématique (Duval, 1995a). Et on le retrouve dans tous les énoncés de définition ou de théorème ainsi que dans les énoncés des problèmes ! Cette opération de désignation, qui crée la référence à un objet, est soumise à une condition d'unicité pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté dans la communication sur l'objet qui est ainsi désigné (Ducrot, 1972). En mathématiques, les expressions qui introduisent une notation articulent en fait deux opérations discursives de désignation : l'une littérale et l'autre linguistique : *« l'écriture* **a/b**) désigne (**le quotient de** *a* **par** *b* ». (Deledicq 1979, p.

48), ou encore « Soit **A** *le point d'intersection des hauteurs d'un triangle* ».

3. Deux relations caractérisées en termes de causalité

Il s'agit ici d'une relation totalement différente des deux précédentes. Ici la relation peut être prise de deux manières différentes : soit ce qui fonctionne comme signe est un effet de ce qu'il évoque, soit, au contraire, il agit comme cause ou comme déclencheur d'une action.

3.1 La relation effet $\longrightarrow$ cause

Elle caractérise les phénomènes naturels qui induisent la recherche de leur cause ou de leur origine : des reflets, des traces, des vestiges, des symptômes, des indices... Peirce a pris l'exemple de l'observation d'une fumée. On pourrait ici faire appel à l'abondante littérature qui, de Plotin à Derrida, a cherché, dans ce type de relation, le caractère premier et fondateur des signes. La trace est devenue la métaphore sémiotique de ce type de relation.

3.2 La relation cause $\longrightarrow$ effet

Elle ne concerne plus des phénomènes naturels mais ce qu'on considère comme un signal. Ainsi les feux aux carrefours sont des signaux qui doivent déclencher, de manière réflexe, une action de la part des conducteurs. Plus généralement, toute transmission d'informations à l'intérieur d'un système physique ou organique dépend de codes et de signaux.

4 . Une relation d'opposition alternative ouvrant un choix d'emploi

Ici, les termes de cette relation ne sont plus entre un élément qui remplirait une fonction d'évocation et un autre qui serait ce qui est évoqué; ils sont entre au moins deux éléments qui s'opposent comme deux signes possibles pour évoquer ou pour désigner quelque chose d'autre. Autrement dit, il n'y a pas de signes isolés qui fonctionneraient par eux-mêmes, comme une notation, mais il y a d'emblée un système de plusieurs signes. Cette relation a été mise en évidence par Saussure (1915) :

> La langue est un *système* dont tous les termes sont solidaires et où la valeur de l'un ne résulte que de la présence simultanée des autres..... Entre eux il n'y a qu'opposition. **Tout le mécanisme du langage repose sur des oppositions** de ce genre et sur les différences phoniques et conceptuelles qu'elles impliquent. Ce qu'il y a d'idée ou de matière phonique dans un signe importe moins que ce qu'il y a autour de lui dans les autres signes. (Saussure 1973, p. 159, 166)

Autrement dit, il n'y a pas de signes en dehors du système où des éléments prennent valeur de signe. Cette théorie a conduit aux méthodes d'analyse structurale des langues à base phonologique (Martinet, 1966) et de toutes les formes de discours produits (Benveniste, 1974). En dehors des langues, les systèmes de numération de position en fonction d'une base *n* sont une parfaite illustration de ce qu'est un système sémiotique, selon la définition structurale et non pas purement fonctionnelle de Saussure. En effet, ces systèmes de numération sont, selon l'expression de Freudenthal (2002), un «compromis entre le système linguistique et celui de l'abaque ». Pour bien le mettre en évidence, il suffit de comparer les deux types suivants de représentation des nombres.

Des **MARQUES UNITÉS** tenant lieu chacune d'un objet	Un **SYSTÈME SÉMIOTIQUE**	
Aucune valeur de position mais des arrangements configuraux possibles	Principe positionnel de l'abaque: la valeur dépend de la colonne où se trouve la marque	
	Base «10» : lexique fondé sur **neuf valeurs d'opposition pour chaque terme**	Base «2» : lexique réduit à **une seule valeur d'opposition**
|	1	1
| |	2	10
| | |	3	11
| | | | | | | | | | ou (| | | || | | | | |)	10	100

Figure 4. Hétérogénéité sémiotique de deux types de représentation des nombres.

Nous sommes ici en présence de deux genres radicalement différents de représentation. L'un consiste en des marques unités qui sont indépendantes les une des autres et qui ne peuvent être assemblées que sous forme d'une collection. L'autre est un système sémiotique dans lequel les chiffres, analogues aux termes d'un lexique, dépendent les uns des autres selon deux principes de composition.

— un principe organisationnel de position qui permet de combiner systématiquement les chiffres entre eux pour écrire de nouveaux nombres. Chaque chiffre a ainsi une valeur de position qui correspond à une élévation, à une puissance. Ce principe détermine un algorithme de calcul pour les opérations arithmétiques.
— un principe de choix lexical qui correspond à la base *n*. Cette base détermine le nombre d'oppositions alternatives pour le choix des signes numériques.

A la différence des marques unités (colonne de gauche) qui sont constituées par leur seule trace matérielle, la réalité signifiante des chiffes est déterminée par leur seule valeur d'opposition alternative à d'autres chiffres, et non pas par leur trace matérielle. En ce sens, il ne peut pas y avoir de lexique ne comportant qu'un seul terme : « 1 » ne fonctionne comme signe d'un nombre que par son opposition soit à « 0 » dans le système binaire, soit à neuf autres signes dans le système décimal, dont évidemment « 0 ». Par conséquent « 1 » ne représente le nombre UN, comme la marque unité « I », que par son opposition à « 0 », et sous la condition qu'il occupe la première position en partant de la gauche.

Ces deux types de représentation des nombres sont hétérogènes. De l'une à l'autre, il y a un saut sémiotique et cognitif. Lorsque nous comparerons ces deux types de représentations sous le point de vue des opérations qu'elles permettent, nous verrons que les marques unités fonctionnent comme des pseudo objets manipulables concrètement et non pas comme des signes opératoires (*infra* 2.1). L'apparition du symbole « 0 », irréductible à toute représentation concrète, c'est-à-dire non représentable par des marques unités, traduit déjà la rupture qui se produit quand on passe d'un type de représentation à l'autre.

5. Quel est l'autre terme de ces relations fondamentales ?

Ces relations fondamentales sont autant de modes différents par lesquels «quelque chose », appelé « signe» ou « représentation », peut remplir la fonction cognitive d'évocation de « quelque chose d'autre » (Figure 1). Quel peut être cet autre terme que les définitions purement fonctionnelles désignent comme *aliud aliquid* ou *something else* et qui, d'un point de vue épistémologique ne doit jamais être confondu avec son signe ou sa représentation ?

C'est cet « autre chose » du signe ou de la représentation qui est important. C'est pourquoi il a été considéré comme «l'étant véritable » (Platon), comme la *res*, comme la « chose elle-même», c'est-à-dire comme l'objet de connaissance. La notion d'objet est celle qui s'est imposée dans toutes les analyses philosophiques et phénoménologiques de la connaissance comme la notion fondamentale (Duval 1998, p.167-168, 196). L'objet peut être soit une chose matérielle, accessible perceptivement comme une chaise, comme les plantes dans une forêt ou comme le soleil que l'on reconnaît être « le même » qui se lève chaque matin, soit une réalité idéale accessible uniquement par des démarches de pensée mobilisant justement des signes, comme par exemple les nombres. Ainsi les représentations « III », « 3 », « 39/13 », ou encore une configuration triangulaire de points, renvoient au même nombre comme à un même objet. On ne parle jamais du nombre « trois » comme d'un concept et du nombre « quatre » comme d'un autre concept. En mathématiques, on travaille avec les nombres et non pas avec le nombre, c'est-à-dire avec une définition du nombre, celle donnée par exemple par Peano, ou celles qui ont été discutées lors du débat entre Poincaré et Russell. De ce point de vue, l'ouvrage de Piaget sur *La genèse du nombre chez l'enfant* (1941) a introduit des glissements terminologiques qui ont été néfastes pour la réflexion didactique concernant les processus de la pensée.

Un objet, réalité matérielle ou idéalité, peut être le terme de plusieurs relations sémiotiques fondamentales. Ainsi, une chaise peut être à la fois le terme d'une relation de ressemblance dans une photographie, d'une relation de référence dans un énoncé descriptif, et d'une relation d'effet à cause, s'il reste une trace de cette chaise, sur un sol meuble par exemple. Cela permet de composer des juxtapositions paradoxales comme nous le verrons plus loin. Au contraire, à la différence d'une chose matérielle, une réalité idéale ne peut pas être le terme d'une relation de ressemblance.

Cependant, il y a des situations où les signes ne tiennent pas à la place des objets qu'ils évoquent, mais remplacent d'autres signes. C'est le cas, par exemple, des codes alphabétiques qui commutent l'émission orale d'un discours en une suite visuelle de caractères, ou encore des lettres en algèbre, les lettres remplaçant une liste de valeurs numériques possibles. Dans le premier cas, les codes apparaissent comme un marquage formel de signes, les marques formelles appelant un décodage pour retrouver la réalité des signes, c'est-à-dire l'une ou l'autre des cinq relations fondamentales. Aristote, qui avait déjà remarqué cette situation, en avait conclu à une plus grande distance de l'écriture par rapport à la pensée que celle de la parole à la pensée (*De l'interprétation*, 16a 1-10). Le second cas est différent. Il répond à une fonction d'abréviation et d'économie cognitive et soulève la question du caractère « aveugle » d'un symbolisme qui ne remplit plus la fonction d'évocation d'un objet (*infra*, 2.13 et 4.3). Mais ces deux cas peuvent donc être ramenés à l'opposition entre signe et objet, conformément à l'exigence épistémologique sans laquelle la définition purement fonctionnelle des signes deviendrait non pertinente. Rappelons d'ailleurs que Peirce recourt lui aussi à cette notion d'objet pour caractériser des différents types de r*epresentamen*, c'est-à-dire trois des cinq relations fondamentales constitutives des signes.

6. Qu'en est-il de la distinction entre signifiant et signifié ?

Cette distinction est évidemment la distinction familière. Mais elle est aussi celle dont l'emploi dans la littérature didactique est complètement équivoque.

Soit elle correspond à la distinction entre l'élément qui remplit une fonction d'évocation et cet autre chose qu'il évoque. Dans ce cas, la distinction est redondante par rapport aux définitions classiques du signe (Figure 1) : « signifiant » est alors synonyme de signe et « signifié » synonyme de l'objet évoqué ! Soit elle porte sur ce qui serait la structure interne de l'élément qui remplit la fonction cognitive d'évocation. Dans ce cas, la portée de cette distinction se limite aux langues humaines qui remplissent une fonction de communication orale, c'est-à-dire **aux systèmes linguistiques à base phonologique**.

En effet, toute l'économie des langues humaines, qui remplissent une fonction de communication orale, repose sur ce que Martinet a appelé la « double articulation ». D'une part, il y a une première articulation de la parole en unités de sens (phrases, mots, monèmes). D'autre part, les unités de sens minimales (les monèmes) sont le produit d'une articulation de plusieurs unités phoniques (les phonèmes), ces deux articulations étant entièrement indépendantes l'une de l'autre :

> « Si nous devions faire correspondre à chaque unité significative minima une production vocale spécifique et inanalysable, il nous faudrait en distinguer des milliers, ce qui serait incompatible avec les latitudes articulatoires et la sensibilité auditive de l'être humain. Grâce à la seconde articulation, les langues peuvent se contenter de quelques dizaines de productions phoniques distinctes que l'on combine pour obtenir la forme vocale des unités de première articulation» (Martinet 1966, p. 19).

Les langues humaines se distinguent du langage des animaux par cette double articulation.

Nous verrons plus loin (4.1) que cette distinction n'a pas de sens pour les signes purement visuels, notamment pour les notations mathématiques.

7. Conclusion : le problème de l'analyse et du rôle des signes dans l'activité cognitive.

Ce rapide panorama de la diversité des relations constitutives de la « signifiance » des signes (Benveniste 1974, p .45, 51) permet de faire les trois observations suivantes.

Tout d'abord, personne ne confondra la fonction cognitive d'évocation ou de substitut d'autre chose avec les relations de ressemblance, de référence, de causalité ou d'opposition alternative entre deux éléments. Ce sont ces relations structurales qui permettent qu'un élément remplisse la fonction d'« évocation ». Seule la relation cause→effet, caractéristique du signal, ne remplit pas cette fonction, mais une fonction d'instruction ou de commande, comme on peut le voir dans le fonctionnement de tous les systèmes automatisés ou non conscients.

Dans une approche sémiotique, on ne peut pas faire appel aux phénomènes d'association (Russell, 1969). Car cela concerne un autre problème, celui de l'apprentissage des signes et plus particulièrement de celui d'une langue. Or, pour expliquer cet apprentissage le recours au processus d'association relève d'une théorie plus que discutable et démentie par les observations (Boysson-Bardies 1999). Nous verrons plus loin que ce qu'on appelle association relève en fait d'une opération discursive de dénomination complexe.

Aucune théorie sémiotique existante ne permet de prendre en compte toutes ces relations, mais chacune tend à en privilégier une ou deux. Autrement dit, aucune théorie ne couvre la diversité et la complexité des phénomènes sémiotiques.

Maintenant la question n'est pas seulement de savoir quelles sont les relations les plus pertinentes pour analyser les activités et les productions mathématiques, elle est surtout de savoir si les relations que l'on estime pertinentes sont suffisantes.

II. ÉXIGENCE ET PRATIQUE MATHÉMATIQUES CONCERNANT LES SIGNES : LES POSSIBILITÉS DE TRANSFORMATION DES REPRÉSENTATIONS.

En mathématiques, une représentation n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation. Un signe n'est intéressant que s'il peut être substitué à d'autres signes pour effectuer des opérations (Condillac, 1982). Ce ne sont donc pas les représentations qui sont importantes, mais les transformations des représentations. Cette exigence a commandé le développement d'un symbolisme spécifique aux mathématiques, avec la représentation des nombres, avec l'algèbre, avec l'analyse... Elle traduit le fait que la fonction primordiale des signes et des représentations, en mathématiques, n'est ni la communication, ni « l'évocation d'objets absents », mais le traitement d'informations, c'est-à-dire la transformation intrinsèque de leurs représentations en d'autres représentations pour produire de nouvelles informations ou de nouvelles connaissances.

Ce serait cependant une erreur que de limiter cette exigence au symbolisme mathématique et donc au calcul. Cette exigence mathématique concerne aussi l'utilisation de tous les types de signes culturellement communs, comme les langues naturelles ou les représentations figurales, lesquelles donnent, en géométrie par exemple, des possibilités purement visuelles de transformation. L'originalité et la puissance de la pensée mathématique viennent de ce qu'elles jouent sur la variété des registres sémiotiques et sur les possibilités spécifiques de transformation qui sont propres à chaque système. Pour illustrer cela, nous allons prendre deux exemples : la variété sémiotique de la représentation des nombres et les représentations figurales en géométrie.

2.1 Quel rapport entre les signes et les opérations dans la représentation des nombres et/ou des grandeurs ?

Nous avons analysé plus haut les différences entre deux types de représentation des nombres (Figure 3).

Nous pouvons compléter cette comparaison en y ajoutant deux autre types de représentation : l'écriture littérale et algébrique, et les dessins schématisés d'objets (Belmas 2003) que l'on trouve dans les productions de jeunes enfants, ou dans celles d'étudiants plus âgés (Hitt 2003), pour résoudre des problèmes de dénombrement.

	Les principes d'organisation suivent les lois d'organisation perceptive	Pas de principes d'organisation pour l'emploi des marques	Des principes d'organisation déterminent **l'EMPLOI** des signes et leurs **COMBINAISONS** en unités de sens (expressions)	
TYPES DE REPRÉSENTATION DES NOMBRES	**I. Des dessins schématisant des d'objets** conservant les correspondances topologiques (voitures, roues d'un véhicule..)	**II. Des marques-unités formellement indiscernables** pouvant être agrégées en collections (traits, points ...)	**III. Des systèmes d'écriture de position** décomposant un nombre selon une puissance n et exigeant n signes	**IV. Notations algébriques** articulant deux types de symboles : - variables conventionnelles pour une désignation fonctionnelle - symboles d'opérations et de relations
OPÉRATIONS possibles de TRANSFORMATIONS des représentations	Accentuer ou effacer l'**iconicité** (ressemblance avec l'objet représenté) par ajout ou suppression de tracés	Support pour des **manipulations libres**: - comptage -regroupements ou séparation en paquets - disposition selon des configurations polygonales	**algorithmes de calcul** fondés sur le principe : un changement de position correspond à une élévation à la puissance	**Substitutions d'expressions** symboliques fondées sur - des règles syntaxiques propres à chaque opération - invariance référentielle dans les substitutions

Figure 5. Possibilités de transformations, ou de calcul en fonction du type de représentation.

Si on regarde ces quatre types de représentations sémiotiques en fonction des relations fondamentales, les types I et II peuvent être considérés comme iconiques puisqu'ils ressemblent soit aux objets représentés soit à des collections de jetons, de cailloux. Les types III et IV doivent être considérés comme symboliques bien qu'ils ne relèvent pas de la même relation fondamentale : III est déterminé par une relation d'opposition alternative (*supra* 1.4) et IV est déterminé par une relation de référence (*supra* 1.3). Mais une telle analyse ne nous conduit pas loin et elle n'apporte pas grand chose. En revanche, **tout change si on regarde ces quatre types de représentations des nombres en fonction des opérations de transformations qu'ils permettent** (ligne 2 du tableau). On voit alors qu'il faut distinguer trois classes de représentations. Elles sont séparées par un trait double entre les colonnes. Chacune de ces trois classes de représentation donne respectivement lieu à trois types d'opérations radicalement différentes : des manipulations concrètes libres, des algorithmes de calcul, des opérations discursives de désignation et de substitution *salva veritate.*

2.1.1 Représentations n'étant qu'un simple support externe pour des manipulations libres

Les opérations que l'on peut effectuer avec les représentations de type I ou II (Figure 5) sont totalement extérieures à ces représentations : on peut les compter en les pointant du doigt, les regrouper par paquets, ou les disposer sur deux rangées parallèles pour les mettre en correspondance, etc. Ce sont ces opérations que Piaget a presqu'exclusivement considérées dans son étude sur *La genèse du nombre* (1941). Dans les épreuves piagétiennes, les jetons sont le strict équivalent des marques unités. Celles-ci sont un simple support, matériel ou graphique, pour des opérations. Elles fonctionnent plus comme des pseudo objets que comme des signes. Les opérations effectuées sur ce matériel n'entraînent à proprement parler aucune transformation de ces représentations. Se pose alors la question de savoir s'il est utile de représenter les opérations faites et comment les représenter.

Les marques auxquelles on recourt généralement dépendent entièrement du choix de celui qui les utilise. Ainsi on peut jouer uniquement sur la disposition spatiale des marques unités (les séparer en paquets puis les regrouper) comme l'a fait par exemple Wittgenstein (1983, p.143), ou bien les entourer comme dans les diagrammes de Venn. On peut également utiliser des traits plus longs pour matérialiser des paquets, etc. De toute manière elles viennent se surajouter aux marques unités et elles ne sont que des **indices des opérations faites.**

Dans la pratique, les représentations de type I et II ne sont jamais employées sans que l'on recourt à un deuxième type de représentation sémiotique pour justement expliciter ou pour effectuer les opérations : soit par exemple, une explication verbale qui, évidemment, s'oublie très vite, soit l'utilisation d'une écriture numérique qui vient en quelque sorte représenter les opérations (*infra* Figure 11).

Les dessins schématisant des objets présentent des caractéristiques qui les rapprochent de ces marques unités. A la différence des marques unités, ils présentent l'inconvénient majeur de ne pas pouvoir être répétés à loisir comme les marques unités. Cela devient vite trop coûteux.

2.1.2. Représentation ou signes constitués par un principe d'organisation interne qui détermine des algorithmes de calcul

Les écritures numériques (III, Figure 5) ne peuvent pas être considérées comme un simple support pour des opérations de calcul. L'effectuation des opérations est ici entièrement subordonnée aux possibilités et aux contraintes des principes d'organisation du système numérique utilisé. Pour l'écriture des nombres, les algorithmes des différentes opérations arithmétiques dépendent à la fois du principe de position et de la base. Par exemple, les valeurs de position permettent un déplacement à droite ou à gauche, correspondant à une élévation ou à une diminution de la puissance de la base, et, pour chaque position, un dépassement des possibilités de choix offertes par la base conduit à un déplacement à gauche avec report. Ce système est évidement extensible avec l'adjonction d'un séparateur (virgule ou point), et cette extension permet de calculer avec d'autres nombres que les nombres entiers. Pour les mêmes opérations sur les mêmes nombres, les algorithmes changent si, au lieu d'une écriture décimale, on adopte une écriture fractionnaire.

2.1.3 Représentations ou signes ouvrant à l'intégration des calculs dans des opÉrations DISCURSIVES : l'algèbre.

L'écriture littérale (IV, Figure 5) crée une nouvelle rupture sémiotique avec les précédentes représentations des nombres et elle ouvre la voie à de nouvelles opérations. Cette rupture apparaît sur deux points. Tout d'abord, une différenciation entre la sémantique des signes (l'interprétation des lettres) et leur syntaxe (les règles déterminant l'ordre des opérations et leur portée sur les symboles associés dans l'expression) devient nécessaire. Avec cette différenciation, l'interprétation des lettres ne dépend plus directement des choix offerts par un système sémiotique (*supra* 1.4) mais d'une opération discursive de désignation (*supra* 1.2). Ensuite, il y a la possibilité de construire des unités syntagmatiques par l'organisation de plusieurs signes autour d'un symbole dominant (un symbole d'égalité ou d'inégalité). Cette possibilité conduit à des opérations de substitution d'expressions ou de transfert d'expressions *salva veritate*, c'est-à-dire *salva suppositione.* C'est ce qui fait l'originalité du calcul algébrique.

Pour illustrer cette rupture, nous nous limiterons à la seule émergence des lettres en rappelant comment, avec Viète et Descartes, elle s'est inscrite dans la constitution de l'écriture algébrique (Serfati, 1987).

L'émergence des lettres comme symboles algébriques a longtemps été réduite à la désignation d'une quantité inconnue, laquelle fut appelée *res* ou *cosa* pour faciliter la résolution d'un problème. On en retrouve d'ailleurs la trace dans l'explication que Lacroix donnait des signes algébriques : « ...la détermination du nombre inconnu par le moyen des nombres donnés » (Lacroix 1820, p. 1). Cependant, c'est avec **la substitution de lettres à des mots désignant différents types de grandeurs** que les lettres comme signes se sont véritablement constituées. Ainsi, pour ne combiner dans le calcul que des grandeurs homogènes, Viète a classé les grandeurs selon deux critères : le critère géométrique des genres (*planus, solidus*..) et le critère numérique d'un produit scalaire (*quadratus, cubus*..). Et pour pouvoir définir systématiquement et brièvement les règles de composition des opérations selon la nature des grandeurs, Viète a abrégé par des lettres les mots qui désignaient les différents types de grandeur. Cette substitution systématique de lettres à des mots référant déjà à des types de grandeur conduit, chez Descartes, à l'écriture d'équations et à la notation des puissances, lesquelles ont ouvert la voie à la notion de polynôme (Serfati, 1987). Et cela s'est fait en fonction d'une exigence cognitive d'économie que Descartes a formulée dans la règle XVI des *Regulae*. Il faut condenser en un seul signe tout ce qui intervient dans la résolution d'un problème, c'est-à-dire tout ce que Viète avait bien pris soin de séparer pour les calculs : les quantités connues ou inconnues (*res*) et les deux genres de grandeur, géométrique (*solidus*) ou scalaire (*cubus*).

L'autonomie sémiotique des signes qui s'est ainsi imposée en algèbre s'est donc faite au prix d'une réduction-condensation des différents types d'objets représentés. En d'autres termes, l'autonomie sémiotique des signes en algèbre s'est faite au prix d'une neutralisation de leur fonction cognitive d'évocation (*supra* Figure 1) et, par la suite, de toutes les relations fondamentales. Seul importe ce que Husserl a appelé leur

« signifié opératoire », c'est-à-dire les règles d'emploi (règles de priorité, de substitution...). On comprend alors la question du sens des signes algébriques que Leibniz soulève dans un texte de 1684, donc peu après la constitution de l'écriture algébrique moderne : «... cette pensée là, j'ai coutume de l'appeler *aveugle* ou encore *symbolique*... ; c'est celle dont nous usons en algèbre et en arithmétique.. » (Leibniz 1972, p. 152-153).

2.2 Peut-il y avoir des transformations figurales purement visuelles ?

Il semble plus difficile d'associer des représentations figurales, que ce soit des « images », des schématisations ou des figures géométriques, à des opérations. Bresson (1987) soulignait qu'une figure représente un état et que la représentation d'une transformation exige la représentation de deux états, l'un initial et l'autre final. Ce sont les différences entre deux figures qui peuvent évoquer un mouvement, une action ou une opération. Et en ce qui concerne la géométrie, les opérations sont généralement associées à des propriétés qui ne peuvent être mobilisées qu'en fonction d'hypothèses. Par conséquent, le contenu visuel d'une figure géométrique ne remplirait que l'une des fonctions suivantes : soit une fonction d'illustration pour faciliter la compréhension d'un énoncé soit un support pour des opérations commandées par le raisonnement et non pas par le contenu visuel de la représentation[2].

Cependant, et contrairement à cette opinion commune, il est important de remarquer que **les représentations figurales suggèrent ou induisent des opérations qui sont internes au contenu visuel de la représentation.** Nous nous limiterons ici à un exemple très simple. Le dessin d'un quadrilatère concave induit plusieurs transformations visuelles possibles, comme on peut le voir ci-dessous **:**

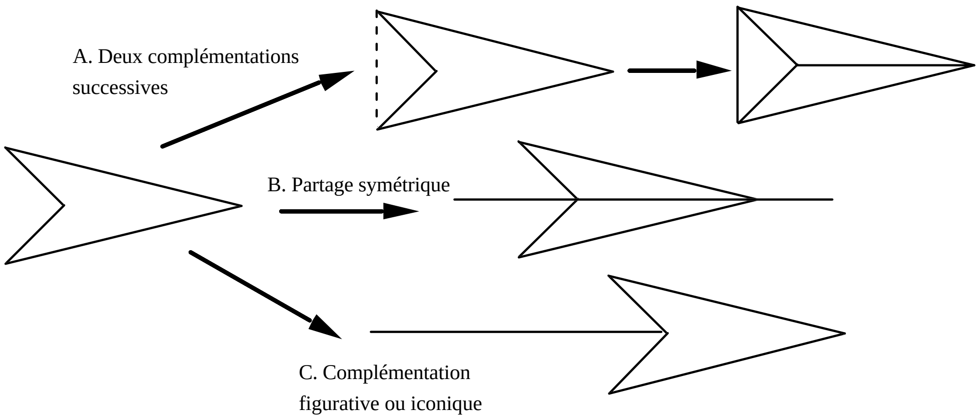


Figure 6. Trois transformations visuelles possibles d'une forme polygonale concave

[2] « Deux rôles au moins, peuvent être attribués aux figures en géométrie : d'une part, elles illustrent les situations étudiées, d'autre part elles servent de support à l'intuition au cours de la recherche en faisant apparaître sur un objet visible des relations ou des hypothèses de relations qui ne sont pas clairement évidentes dans un énoncé verbal » (Bessot 1983, p.35). La distinction entre dessin et figure reprend cette opposition entre ce qui est visuel, donc particulier, et l'ensemble des propriétés qui le sous-tendent et qui en font un dessin parmi d'autres.

La transformation A se fait par complémentation. Cette transformation résulte automatiquement des lois d'organisation perceptive qui conduisent à voir les formes concaves dans leur enveloppe convexe. Ainsi un quadrilatère concave est spontanément transformable en un assemblage de trois triangles. Cette transformation ne doit pas être confondue avec une règle essentielle pour les propriétés affines d'une figure: joindre tous les points singuliers (sommets) d'une forme, règle dont la mise en œuvre visuelle n'est jamais évidente comme on peut le vérifier avec les quadrilatères convexes, surtout s'il s'agit de faire apparaître les droites qui sont les supports des segments tracés (Duval & Godin, 2005). La transformation B résulte de la reconnaissance d'une organisation symétrique.

On remarquera que ces deux types de transformation ne dépendent ni d'une interprétation fondée sur une ressemblance partielle ou complète avec quelque chose d'autre, ni d'une interprétation en termes d'objets représentés. Le recours à des propriétés mathématiques sert seulement à les justifier.

Il n'en va pas de même avec la transformation C. Elle se fait en fonction d'une ressemblance du contenu avec un objet extérieur de l'environnement : une flèche, une lance, la forme concave du quadrilatère étant ici mise en rapport avec celle d'une partie de la forme typique d'une lance. La transformation C se fait évidemment sur la base de connaissances.

Ce sont des transformations de type A ou B qui constituent l'enrichissement intuitif des figures en géométrie. Elles sont indépendantes de toute analyse des figures en termes de propriétés . Elles dépendent d'abord de facteurs propres à la visualisation. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici que la géométrie fait appel à au moins deux types de représentation hétérogène et que chaque type de représentation y fonctionne indépendamment l'un de l'autre. Sinon pourquoi mobiliser simultanément deux représentations hétérogènes ?

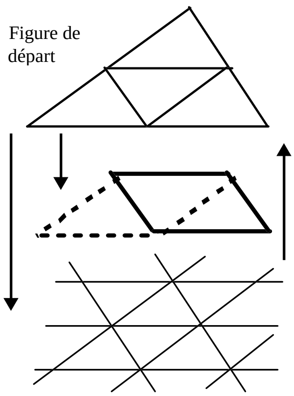
Registre de la visualisation : un jeu de réorganisations visuelles selon la forme ou selon le nombre de dimension des unités figurales reconnues	**ARTICULATION par le codage des sommets avec des lettres**	**Registre du discours :** mise en œuvre d'énoncés de propriétés et de dérivation déductive des énoncés
	*Quels éléments des énoncés permettent* *un ancrage dans la visualisation ?* *Quelle fonction remplit la figure par rapport à l'énoncé et à la résolution du problème :* *—illustration ?* *—heuristique ?* *— objet support pour des mesures ?*	Enoncé du problème : A'C' et AC sont parallèles A'B' et AB sont parallèles B'C' e BC sont parallèles Prouver que A est le milieu de B'C' ABED et BCED sont des parallélogrammes le théorème des milieux

Figure 7. Analyse sémiotique des représentations géométriques (Duval 2005, p. 29)

L'un des points décisifs de l'enseignement de la géométrie porte sur la prise en compte des facteurs qui favorisent l'entrée des élèves dans le jeu cognitif complexe de toutes les transformations des représentations figurales (Duval 1995b, 2005).

2.3 Transformations sémiotiques et démarches de pensée

Les théories du signe reposent, implicitement ou explicitement, sur l'idée que les signes remplissent d'abord une fonction de communication et qu'elles fournissent secondairement une représentation d'appui par rapport à la pensée et à ses démarches. Cette idée est d'ailleurs reprise dans beaucoup d'études sur le rôle et l'usage des signes en mathématiques (Kaput 1987). Or, c'est cette idée qu'il faut remettre en cause si l'on veut analyser et comprendre le rôle des signes en mathématiques. En mathématiques, les signes ne remplissent pas d'abord et essentiellement une fonction de communication mais une fonction de traitement. Condillac (1982) semble être le premier dans l'histoire à avoir mis l'accent sur cette fonction fondamentale des signes. Et les mathématiques sont le domaine de connaissances où l'on utilise le spectre le plus étendu et le plus hétérogène de représentations sémiotiques. Mais, comme nous avons pu le voir avec les deux exemples précédents, cela se fait toujours en fonction des opérations de transformation que chaque type de représentation rend possible. Et là, nous devons distinguer deux grands types d'opérations :

— celles qui sont externes aux éléments utilisés, les représentations étant alors des pseudo objets que l'on peut manipuler librement, et ce sont seulement le résultat d'une opération déjà faite qui peut être marqué. Ici on peut séparer et opposer les représentations et les actions (« perceptivo-gestuelles » selon l'expression de G. Vergnaud), comme cela se fait dans la théorie piagétienne.

— celles qui sont intrinsèques et spécifiques au système de représentation sémiotique, comme avec les écritures numériques de position, l'écriture algébrique et ou les représentations figurales en géométrie. Ici on ne peut plus opposer les représentations et les opérations. Car il y a des opérations sémiotiques et il y a des opérations qui ne sont possibles que sémiotiquement. Et toutes les opérations et les transformations mathématiques sont de ce type. Les démarches de pensée mobilisent toujours un type issu des multiples types possibles de représentation sémiotique. En mathématiques, elles en mobilisent plusieurs à la fois, même si un seul occupe le devant de la scène.

On peut résumer cela dans le tableau suivant :

Transformation d'une représentation en une autre du même genre par des OPÉRATIONS				
Externes aux signes pris isolément	Dépendant de principes d'organisation d'un système sémiotique			
	Opérations de reconfiguration portant sur des formes ou sur des positions		Opérations discursives dans une langue naturelle ou formelle	
	Spatialcontinu	discret	Sémantique (référence à des objets)	Syntaxique Formation d'expression et d'énoncés
Marques unités	Figures en géométrie	Système numérique de position	Ecriture algébrique (ouverte à l'intégration de quantificateurs)	

Figure 8. Les différents types de transformations sémiotiques.

Lorsque les transformations sont externes aux signes utilisés, c'est-à-dire lorsque ces derniers ne remplissent qu'une fonction de support, elles peuvent être réalisées matériellement d'une manière équivalente à une transformation symbolique. En revanche, si certaines transformations sémiotiques peuvent être reproduites matériellement, elles deviennent cependant très vite impossibles à réaliser, non seulement pour des raisons de coût mais surtout parce qu'elles ne sont pas concevables en dehors de la représentation symbolique qui les permet. On peut d'ailleurs remarquer qu'il n'y a souvent aucune congruence entre la réalisation matérielle d'une opération et sa réalisation symbolique. C'est l'une des difficultés, dans la représentation des nombres, lors du passage des marques unités au système décimal. Et c'est aussi l'une des difficultés en géométrie où l'articulation des énoncés avec les figures exige la déconstruction dimensionnelle des formes visuelles reconnues (Duval, 2005).

De la représentation iconique ou matérielle des petits nombres à leur représentation systématique dans une écriture décimale, binaire, etc., le saut sémiotique et cognitif à faire est considérable. Mais ce n'est là qu'un exemple parmi d'autres de ce qui constitue l'obstacle spécifique à l'apprentissage des mathématiques : passer d'un type de représentation sémiotique à un autre.

III. LE PASSAGE D'UN TYPE DE REPRÉSENTATIONS SÈMIOTIQUES A UN AUTRE : PROBLÈME CLÉ DE L'APPRENTISSAGE.

Le phénomène le plus important concernant les représentations est qu'il n'y a pas une seule représentation pour un objet, comme pourrait le laisser croire la définition fonctionnelle (Figure 1), mais une très grande diversité de représentations possibles pour un même objet. On connaît la célèbre photo intitulée « une et trois chaises ». Celle-ci juxtapose, dans un même montage, une chaise, une photo de cette chaise et la description verbale de cette chaise. Mais un autre montage aurait pu tout aussi bien permettre de faire une photo « une et cinq chaises » en ajoutant des schémas ou un plan de montage de la chaise à partir de morceaux livrés en kit. En réalité, il y a autant de représentations possibles d'un objet qu'il y a de systèmes différents producteurs de représentations (Duval, 2006b). Et cela vaut aussi bien pour les représentations non sémiotiques que pour les représentations sémiotiques. Le problème cognitif que pose cette diversité de représentations possibles est celui de la reconnaissance du même *something else* (ou *aliud aliquid*), c'est-à-dire du même objet, dans les contenus différents de chacune de ses multiples représentations possibles.

Ce problème est crucial pour l'apprentissage des mathématiques dont la situation épistémologique est totalement différente de celle des autres disciplines. En effet, dans les autres domaines de connaissance, les objets et les phénomènes étudiés sont accessibles perceptivement ou à l'aide d'instruments (microscope, télescope, etc..) qui augmentent soit le champ de la perception soit les capacités de détection (les sondes spatiales pour cartographier la planète Mars). On peut alors ancrer chaque type de représentation dans une expérience perceptive directe ou instrumentalement médiatisée. Cela n'est pas possible pour les mathématiques. Car les objets mathématiques ne sont pas accessibles perceptivement et, en mathématiques, l'attention se porte toujours sur tous les cas possibles et non pas seulement sur ceux qui sont réellement observés ou observables. L’accès aux objets mathématiques passe nécessairement par des représentations sémiotiques, rudimentaires ou complexes. **C’est dans cette situation épistémologique très particulière que le problème cognitif de la diversité des représentations sémiotiques devient crucial**.

Rappelons tout d’abord l’un des phénomènes les plus caractéristiques de l’activité mathématique : la mobilisation, simultanée ou successive, de plusieurs types de représentations sémiotiques y est constante. D’une part, toute activité mathématique exige que l’on puisse passer d’un type de signe et de représentation à un autre type, c’est-à-dire que l’on puisse convertir la représentation d’un objet en une autre représentation du même objet dans un autre système sémiotique, afin de se donner d’autres moyens de traitement ou de contrôle. D’autre part, la pratique de l’enseignement des mathématiques tend à juxtaposer des représentations sémiotiques différentes comme si cela devait rendre l’accès aux objets mathématiques plus facile. Il suffit d’ouvrir n’importe quel manuel à n’importe quelle page pour le constater. Et le recours à l’informatique permet de développer cette stratégie.

Or, tout cela présuppose que les élèves puissent comprendre ce passage d’un type de représentation à un autre, et surtout comprendre comment il se fait. Car, comment reconnaître que deux représentations, dont les contenus sont différents , puissent être deux représentations du même objet, si on n’a pas la possibilité d’avoir une expérience de cet objet en dehors de ces deux représentations? On peut se référer à une autre troisième représentation supposée plus familière. Mais, c’est simplement déplacer le problème. Là, se trouve le seuil de compréhension que beaucoup d’élèves ne franchissent pas.

Il ne s’agit pas, ici, de présenter les méthodes d’observation et les résultats qui mettent en évidence la relation entre les échecs pour passer d’un type de représentation à un autre et les difficultés rencontrées par les élèves en mathématiques (Duval 1996, 2006a). L’intérêt d’une approche sémiotique est plus théorique. Il est d’analyser comment fonctionne chacun des systèmes sémiotiques utilisés en mathématiques et d’expliciter le saut cognitif considérable que le passage de l’un à l’autre exige. Cela est important pour comprendre la complexité des apprentissages. Car, quels que soient les contenus et les objectifs visés, l’enseignement des mathématiques implique nécessairement l’introduction de nouveaux types de représentation et il exige que les élèves puissent passer spontanément de l’un à l’autre.

Pour illustrer les sauts existant entre des systèmes de représentation hétérogène, sauts qui sont au cœur des tâches mathématiques demandées aux élèves, nous pouvons garder l’exemple des différents types de représentation des nombres (Figure 5). Ce qui est demandé aux élèves peut alors se traduire dans les trois séries de flèches suivantes :

		Pas de principes d'organisation pour l'emploi des marques	Des principes d'organisation déterminent **l'EMPLOI** des signes et leurs **COMBINAISONS** en unités de sens (expressions)	
TYPES DE REPRÉSENTATION DES NOMBRES	**I. Des dessins schématisant des d'objets**	**II. Des marques unités formellement indiscernables**	**III. Des systèmes d'écriture de position**	**IV. Notations algèbriques**
Passages d'un type à un autre Et coordination cognitive	(1) → ← ← - - ? - - →	(2) → ← ← - - ? - - →	(3) → (5) (5bis) ← - - ? - - →	← (4)

Figure 9. Ruptures sémiotiques dans la représentation des nombres et/ou des grandeurs.

3.1 Des dessins schématisant des objets matériels jusqu'à l'écriture algébrique : un ordre d'introduction progressif aveugle aux ruptures ?

Les passages représentés par les flèches (1) (2) et (3) dans le tableau ci-dessus sont souvent considérés comme un ordre, aussi bien génétique qu'historique, d'apparition. C'est un tel ordre que l'enseignement suit de la Maternelle jusqu'au début du Collège. Or, c'est évidemment le passage (3) qui retient le plus l'attention en raison du passage de l'arithmétique à l'algèbre, tandis que le passage (2), celui de marques unités manipulables comme des objets matériels à un système d'écriture de position, n'est pas considéré comme un saut sémiotique important parce qu'il s'agirait toujours des mêmes objets, les nombres entiers ! Pourtant, ce changement de représentation affecte le sens des opérations[3], car il introduit des algorithmes d'opérations qui n'ont plus rien de commun avec des manipulations libres sur des marques unités. Et il marque comme une première ligne d'arrêt, souvent masquée par une fausse familiarité avec l'usage culturel du système décimal dans l'apprentissage des mathématiques.

Voici deux exemples de difficultés classiques et récurrentes auxquelles l'apprentissage se heurte. Ceux-ci soulignent la complexité sémiotique, irréductible et trop souvent sous-estimée, de la représentation décimale des nombres.

Le premier exemple est emprunté à une enquête d'évaluation nationale sur les décimaux chez des adultes et porte sur des situations de la vie courante (Leclère, 2000) :

« Les adultes que nous avons observés ont entendu ou retenu : «multiplier par 10, c'est rajouter un zéro! »

3 Il y a deux types d'interprétation des signes mathématiques qu'il est capital de ne pas confondre. L'un est interne aux démarches mathématiques et l'autre concerne l'application d'opérations ou de modèles mathématiques à des situations de la réalité physique, économique ou quotidienne, dont il faut sélectionner des données (Duval, 2003). En ce sens, il y a une sémantique mathématique et une sémantique commune, celle correspondant à la pratique commune du langage et à la culture d'un milieu ou d'une société. Pour pouvoir justifier les mathématiques, l'enseignement tend à rabattre la sémantique mathématique sur la sémantique commune ! Cela se révèle catastrophique pour l'analyse des problèmes d'apprentissage. Car nous sommes là devant deux types de problèmes très différents.

— **10** forets à **25,99** F cela fait combien ?	— à peu près **300** balles!	*sait faire* **25** x 10 et **30** x 10 *mais ne voit pas*
	— Je vais faire l'opération	
— Combien exactement ?		25,9 proche de **26**
	— **250, 99** ! peut-être plus !	
— Combien ?		**(**et donc ne fait pas **26** x 10)

Figure 10. Exemple d'incompréhension typique du système de la représentation décimale des nombres

Avant de résulter d'une incompréhension des nombres décimaux, cet exemple montre une incompréhension du système de représentation des nombres. En effet, ce qui a été retenu par ces adultes reflète une double déficience : d'une part, le non accès au principe d'organisation de l'écriture, dont la règle retenue n'est qu'une description partielle et, d'autre part, la non articulation de l'écriture numérique avec l'énonciation orale des nombres, utilisée par ailleurs sans erreur pour estimer les ordres de grandeur des prix familiers !

Le deuxième exemple montre que le recours à un type de représentation plus familier ne constitue pas nécessairement une aide pour entrer dans un autre système. Car cela soulève deux questions. La première est celle de la congruence entre les deux types de représentations. La seconde est celle de savoir si on peut articuler, par exemple, une représentation concrète ou iconique et une représentation symbolique. Dans le cadre de l'apprentissage de la multiplication, le problème suivant a été présenté : Madame Dubois a acheté 5 tablettes de chocolat à 7 francs l'une. Combien a-t-elle dépensé ?». Les trois types de réponses ont été observées (Brissiaud 1995 ,15).

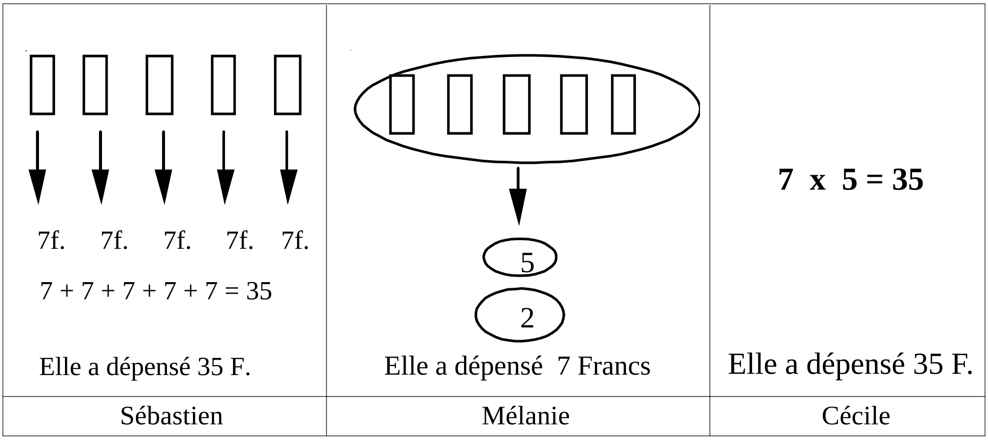


Figure 11. Quelle articulation entre deux types de représentation ?

Les deux premières productions utilisent simultanément des dessins schématisant des objets et l'écriture décimale des nombres. Or, le recours à la représentation iconique d'une quantité conduit à des productions différentes chez Sébastien et chez Mélanie.

Chez Sébastien, la représentation iconique d'une quantité est mise en correspondance avec les prix unités. Or, il est important de voir que ce type de représentation iconique impose quasi nécessairement l'opération additive ! Chez Mélanie, la représentation iconique d'une quantité induit une opération de regroupement des images schématisées de tablettes et cette opération est marquée par un encerclement (2.1.1). Cela conduit à une impasse sémiotique car aucune correspondance pertinente ne peut plus alors être établie avec l'écriture numérique des nombres.

Ces deux exemples montrent que le passage d'une représentation iconique des nombres par des marques unités à la représentation par un système d'écriture de position constitue peut-être un saut analogue à celui de l'apprentissage de la lecture. Et pour les difficultés qui apparaissent à travers ces exemples, on pourrait ici presque parler de **difficultés d'alphabétisation numérique**. En revanche, les difficultés d'entrée dans l'algèbre sont d'une toute autre nature : elles concernent la maîtrise d'un langage, à commencer par les opérations discursives de désignation (Duval, 2002). Or, chacun sait que, dans le langage, ce ne sont pas les mots qui importent mais les énoncés et, sous-jacentes aux énoncés, les opérations discursives qui en construisent le sens (Duval,1995a).

3.2 De l'écriture algébrique aux dessins et aux marques unités : quelle fonction et pour qui ?

La deuxième série de flèches (les flèches inverses (4), (5), (5bis) de la Figure 9) correspond aux productions individuelles que l'on peut observer chez des étudiants ou dans des manuels. Celle-ci marque un retour vers des représentations pseudo concrètes qui sont à la fois manipulables et qui correspondent à de petites quantités que l'on peut « voir ». Ce retour peut répondre à des besoins très différents.

Ce peut être pour des besoins de bricolage, lors d'une phase de recherche d'un problème, ou pour des besoins de vérification (Hitt, 2003). Ce peut-être aussi pour un besoin de preuve. Ainsi Wittgenstein lui-même, voulant souligner contre Russell la nécessité d'une synopsis dans un processus de preuve mathématique, n'hésite pas à dessiner:

||||||||||||||||||||||||||| ||||||||||||||||

Puis il commente :

> « Cette figure est-elle une preuve que 27 + 16 = 43 parce qu'on arrive à «27» **en comptant les traits** du côté gauche et à «16» **quand on compte ceux du côté droit**, et à «43» **quand on compte la série entière**?... A quoi tient l'étrange ici - quand on appelle la figure preuve de cette proposition ? Eh bien à la façon dont il faut reproduire ou reconnaître cette preuve : en ce qu'elle n'a pas de forme visuelle caractéristique... » (1983, p. 143).

Quel que soit le besoin ou la fonction particulière qui commande l'utilisation de ces représentations qu'on peut manipuler comme des pseudo objets, cette utilisation manifeste toujours le besoin de s'éloigner de l'abstraction sémiotique, « aveugle » selon Leibniz, pour revenir aux choses mêmes, ou du moins à ce qui aiderait à les apercevoir.

Cependant, il faut être ici extrêmement prudent dans l'interprétation des utilisations faites de ce type de représentation. Outre la polyvalence fonctionnelle de leur utilisation, on peut se demander si le recours à ce type de représentation correspond aux mêmes démarches cognitives chez un expert et chez un élève du primaire. En d'autres termes, le recours à ces représentations relève-t-il de la même compréhension chez celui qui peut à loisir passer d'un type de représentation à un autre et chez celui qui ne peut travailler qu'avec des représentations pseudo concrètes ? Cette question est celle de la coordination entre les différents types de représentations et, donc, celle de la capacité des individus à passer d'un type de représentation à un autre. Elle est marquée par la troisième série de flèches sur la figure 9 ci-dessus.

3.3 Les difficultés intrinsèques à la coordination des registres de représentation et les passages d'un type de représentation à un autre.

C'est la situation épistémologique très particulière des mathématiques qui rend le passage d'un type de représentation à un autre si difficile et si insaisissable pour les apprenants. En effet, en mathématiques comme dans les autres domaines de connaissances l'exigence épistémologique de ne jamais confondre les représentations avec les objets représentés demeure (Figure 1). Mais, comment ne pas confondre les représentations sémiotiques avec les objets représentés, lorsque ces objets ne peuvent pas être atteints en dehors de ces représentations?

Une chose en tout cas est certaine : la capacité à passer d'un type de représentation sémiotique à un autre et la reconnaissance d'un même objet représenté dans deux représentations dont les contenus sont différents sont les deux faces d'un même processus cognitif. Deux réactions interprétatives manifestent ce processus cognitif et sont d'ailleurs nécessaires pour conduire une activité mathématique ou résoudre des problèmes :

— reconnaître un même objet représenté à travers deux représentations dont les contenus sont sans rapports entre eux, parce qu'elles *dépendent de systèmes différents.* Il s'agit ici d'une **reconnaissance identifiante** qui permet, par exemple pour une procédure de dénombrement, de jouer sur au moins deux registres différents : les représentations figurales et l'établissement de suites numériques.

— reconnaître deux objets différents, à travers deux représentations, dont les contenus paraissent semblables, parce qu'elles relèvent *du même système de représentation* et que, d'une représentation à l'autre, la variation de contenu est faible. Il s'agit ici d'une **reconnaissance discriminante** qui conduit, par exemple, à la variation de l'écriture algébrique d'une fonction linéaire quand on varie la position d'une droite sur un plan organisé selon des coordonnées cartésiennes, et inversement ! Mais on pourrait également prendre l'exemple des énoncés de problèmes additifs, de mises en équations, et plus généralement tous les énoncés verbaux d'application de savoirs mathématiques à des situations non mathématiques.

Un individu ne devient capable de ces deux réactions que lorsqu'il a commencé à développer des coordinations entre les différents systèmes de représentations.

Or, il ne suffit pas que l'enseignement ait fait suivre aux élèves le parcours marqué par les flèches (1), (2), (3) dans la Figure 9 et que l'on voit les élèves effectuer des retours du type (4) ou (5), pour que de telles coordinations cognitives se soient développées et que les élèves aient acquis de réelles capacités de conversion (Duval, 2006 b). Le problème qui se pose dans l'enseignement des mathématiques n'est pas de savoir de quel type de représentations, sémiotiques ou non sémiotiques, seraient les productions spontanées des élèves, ou encore quel serait le meilleur type de représentation pour les élèves, **mais pourquoi les élèves ont tant de mal à passer d'un type de représentation sémiotique à un autre et comment leur faire acquérir cette capacité.** Car un élève incapable de ces passages se trouve très vite durablement bloqué dans sa compréhension et ses capacités de recherche et de contrôle, pour les activités mathématiques qu'on peut lui proposer.

IV. QUELLE SÉMIOTIQUE POUR LES MATHÉMATIQUES ET POUR L'ANALYSE DES PROBLÈMES QUE SOULÈVE LEUR APPRENTISSAGE ?

Il pourrait paraître provoquant d'affirmer que la sémiotique comme science des signes reste encore à fonder et que les différentes théories des signes souffrent des limitations du champ particulier des signes qu'elles ont étudiés : la logique et l'interprétation adaptative des phénomènes observés dans l'environnement avec Pierce, la linguistique avec Saussure ou encore les phénomènes de codage et de transmission d'informations avec Jakobson, etc. Ces théories ont eu au moins l'intérêt de définir cinq relations fondamentales pour analyser ce qu'on considère comme *eikon* et non comme le corps dont on voit le reflet (Platon, *Républiqu*e 509e), comme *signum* et non pas comme la *res* (Augustin, 1997), comme *representamen* et non pas simplement comme l'objet dont il tient lieu (Peirce, 1978). En réalité, chacune de ces relations, ou parfois leur composition, caractérise un type particulier de signes : image réfléchie ou image imitée, signe logique ou algébrique, signe linguistique, trace, indice ou signal. La question est de savoir si tout cela constitue un apport utile et pertinent pour l'analyse des signes en mathématiques et du rôle qu'ils jouent dans le fonctionnement de la pensée. Pour cerner cette question avec plus précision, nous allons examiner trois questions.

4.1 Comment situer la distinction signifiant-signifié par rapport à la relation signe-objet ?

La distinction signifiant-signifié est souvent présentée comme une analyse de la structure interne des signes. Un signe serait constitué de deux éléments : son aspect matériel qui le rend perceptible et son aspect immatériel qui serait sa signification. Cette distinction ne doit évidemment pas être confondue avec la fonction cognitive d'évocation d'un objet absent dont le signe tient lieu (Figure 1). Les stoïciens ont été les premiers à avoir explicitement bien séparé les deux aspects de la « signifiance » des signes: la signification et la dénotation.

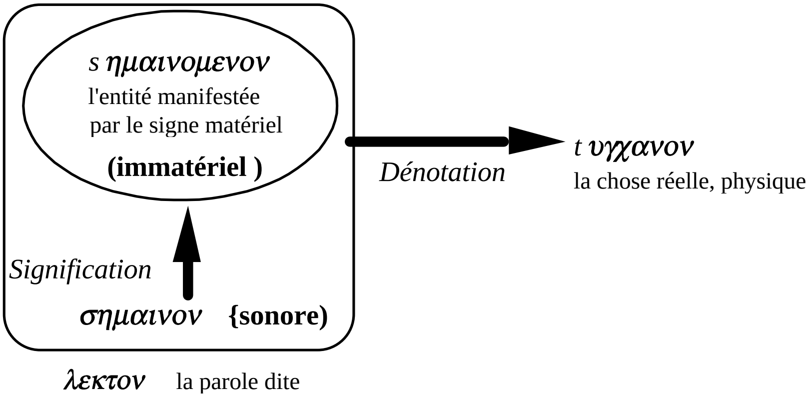


Figure 12. Schéma de l'analyse stoïcienne de la signifiance des signes

On peut tout de suite faire trois remarques :

— La distinction entre signifiant et signifié ne vaut que pour les signes linguistiques, c'est-à-dire pour les langues dont l'emploi est d'abord oral pour remplir une fonction sociale de communication. Cela veut dire que **la distinction entre signifiant et signifié ne s'applique pas aux symboles mathématiques ni d'ailleurs aux signes purement graphiques, c'est-à-dire purement visuels.** Car les signes purement graphiques, à la différence des signes linguistiques, lesquels sont d'abord oraux avant d'être codés graphiquement, ne relèvent pas d'une double articulation (*supra* I.6). Ils relèvent uniquement d'une relation de référence qui lie un caractère à un objet, constituant ainsi ce caractère en signe. Or, cette relation de référence est établie par une opération de désignation (*supra* 1.2) et elle peut d'ailleurs répondre à des fonctions très différentes selon le contexte particulier de la démarche où cette opération de désignation est effectuée. Il n'y a pas de signifiant algébrique, mais seulement des notations qui sont des signes par leur seule référence instituée à un objet (Freudenthal 2002 ; Weyl 1994).

— La distinction signifiant-signifié ne permet pas de définir la nature des signes comme Saussure (1973) l'a montré. On ne peut donc pas considérer le signifiant et le signifié comme deux constituants qui auraient chacun une identité ou une réalité par eux-mêmes. Les signifiants (phoniques) comme les signifiés lexicaux ne sont déterminés que par des différences respectivement à d'autres signifiants phoniques et à d'autres signifiés à l'intérieur d'une langue (*supra* 1.4). Ce n'est pas le signifiant qui signifie mais le signe dans sa totalité indivisible.

— **Les signes, à la différence des signaux ou des représentations non sémiotiques, relèvent toujours d'un emploi intentionnel**. Cela veut dire qu'il ne faut pas confondre les images produites intentionnellement, comme par exemple les dessins, et les images produites automatiquement par le seul usage d'un appareil ou par le jeu des lois physiques (celles par exemple de la réflexion). Cela veut dire aussi que, parmi les cinq relations fondamentales permettant de caractériser des signes, la relation d'opposition alternative (1.4) et la relation de référence (1.2) sont les relations les plus appropriées à un emploi intentionnel. Cela est particulièrement net pour la relation de référence qui s'inscrit toujours dans une opération discursive de désignation d'un objet (individu, classe, relation, etc.).

Il apparaît donc qu'on ne peut pas mettre sur le même plan la distinction signifiant-signifié, laquelle relève de la double articulation spécifique aux langues, et la relation signe-objet, laquelle relève d'une opération discursive de désignation ou de définition. Ce qu'on a présenté comme le triangle sémiotique (Eco 1990, p.31-33) est une illusion néfaste pour la compréhension de ce qu'est un signe et de la manière dont il peut évoquer ou «tenir lieu». On ne peut pas fermer le schéma illustrant les deux aspects, ou plus exactement les deux niveaux de la signifiance des signes (Figure 12) : le niveau du système sémiotique constitutif d'un type de signes (par exemple une langue naturelle ou formelle) et le niveau du discours produit ou du traitement effectué à l'aide de ce système sémiotique.

Il faut donc s'interroger sur la pertinence du recours à la distinction signifiant-signifié que l'on trouve dans beaucoup de travaux de didactique des mathématiques, dans lesquels d'ailleurs le terme « signifié » devient vite synonyme de « concept » et le terme « signifiant » synonyme de « signe » ! Cette distinction induit un glissement d'idées qui conduit à des conclusions erronées : de l'immatérialité du signifié, on glisse à son caractère non sémiotique et, par la suite, à la nécessité de doubler les représentations sémiotiques par des représentations mentales pures. Comme si la pensée était indépendante de tout *lecton* ou de tout langage !

4.2 Comment distinguer, dans la variété des signes, différents types ou catégories de signes : en fonction des relations fondamentales ou en fonction des systèmes producteurs de signes et de représentations ?

C'est certainement l'apport de Peirce que d'avoir mis cette question au centre de l'étude des signes. Et c'est lui qui a proposé la première classification systématique des signes. En fait, cette question de la classification recouvre deux problèmes qu'il est important de ne pas confondre. Il y a tout d'abord celui du corpus de signes et de représentations, c'est-à-dire le champ d'observation à partir duquel on établit la classification. Il y a ensuite le problème des critères ou des principes que l'on retient pour établir la classification.

4.2.1 Quelle diversité de signes et de représentations sert de base à l'étude des signes et des représentations?

Il faudrait ici produire un corpus d'exemples. Nous ne pouvons ici qu'évoquer la variété des signes et des représentations que l'on met sous les mots « image » et « symbole », ce qui rend l'emploi de ces termes problématique ou équivoque.

Ainsi le mot « image » peut recouvrir non seulement des dessins schématisés ou des « copies » (Figure 2) mais également des reflets dans un miroir ou encore les productions du rêve, les souvenirs visuels. C'est sur la base de ce type d'images que Platon a élaboré son analyse de la représentation. Le développement technologique est venu élargir encore cette gamme avec les photos argentiques et les photos numériques. Quoi de commun entre tous ces types d'images ?

Le mot « symbole » est employé également pour une variété considérable de signes : les notations mathématiques, les sigles, et même des fragments de l'objet représenté. Peut-on aussi l'utiliser pour caractériser les mots de la langue ? L'opposition « antithétique », soulignée par Benveniste (1974), entre l'approche de Peirce et celle de Saussure, vient de ce que le premier avait cherché à prendre en compte la diversité des signes, au risque de perdre la spécificité des langues naturelles, et que le second s'était au contraire limité à la langue en en faisant le système sémiotique par excellence, c'est-à-dire celui dont les autres pouvaient être dérivés. Mais qu'y a-t-il de commun entre les mots d'une langue et les notations mathématiques ?

Si maintenant nous regardons les mathématiques, nous sommes devant une situation encore plus complexe, car les mathématiques utilisent une gamme très étendue de signes et de représentations. Il y a, d'une part, tous les types de signes progressivement créés pour le calcul numérique et algébrique, mais il y a également les figures en géométrie, qui peuvent ressembler à des dessins schématisés, mais qui ne le sont pas, et il y a aussi tous les graphes et enfin la langue naturelle qu'il ne faut pas oublier. Car la langue naturelle continue de jouer un rôle essentiel en mathématiques: sans elle, il ne pourrait pas y avoir d'énoncés, c'est-à-dire de définitions, de théorèmes ou même d'énoncés de problème.

4.2.2 Selon quels critères distinguer et classer la variété des signes et des représentations ?

Pour classer la variété des signes, **Peirce a pris comme critères deux des cinq relations fondamentales** que nous avons distinguées plus haut : la relation de ressemblance (1.1) et la relation cause → effet (1.3.1). Avec ces deux relations, il a établi la partition trichotomique suivante :

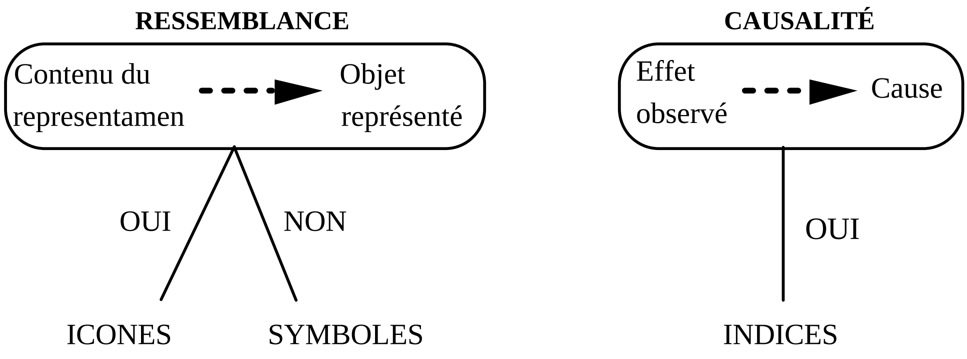


Figure 13. Partition trichotomique des signes selon Peirce

On remarquera qu'il n'y a pas de rapport entre les deux relations retenues par Peirce. En effet, dans la première relation, les signes et les représentations sont caractérisés comme étant des r*epresentamen* à partir de leur seul contenu. Dans la seconde relation, les signes et les représentations sont considérés comme étant le résultat, ou l'effet du phénomène ou de l'objet qu'ils évoquent. Ce peut être un effet direct comme la fumée. Mais ce pourrait être aussi bien un effet indirect médiatisé par un système physique (un appareil photo) ou neurophysiologique (la mémoire visuelle). De toute manière, la classification de Peirce se limite à juxtaposer ces deux relations hétérogènes.

Pour notre propos, la principale question n'est cependant pas là. Elle est de savoir si cette trichotomie est suffisamment discriminante pour être utilisée dans l'analyse des productions mathématiques. Par exemple, le recours à la notion d'icône, fondée sur la relation de ressemblance, permet-elle de distinguer les différences entre les figures schématisées qui peuvent évoluer vers des marques unités (Figure 2, 4 et 5), les figures figuratives (Figure 2) et les représentations visuelles de la géométrie (Figures 3, 6 et 7) ? Le recours à la notion de symbole, permet-il de discriminer entre les systèmes d'écriture des nombres, les symboles algébriques ou logiques, et les mots d'une langue (Figure 4, 5 et 12) ? D'une manière plus générale, cette partition trichotomique permet-elle de prendre en compte les signes qui dépendent d'un système producteur, c'est-à-dire de principes d'organisation générant des règles de formation et une syntaxe[4], et les marques qui sont des supports pour des opérations libres ou encore qui sont seulement la trace d'une opération faite ? Cette question n'a rien de général et de vague. Peut-on, par exemple, appliquer la catégorie d'indice pour désigner le recours à des lettres marquant une opération discursive de désignation et répondant à une fonction d'abréviation (Radford, 1998) ?

La tentative de la classification des signes permet donc de formuler un problème théorique fondamental pour la sémiotique : les relations fondamentales pour l'analyse des signes, peuvent-elles être des critères pertinents et discriminants pour établir une classification des signes utilisable en mathématiques ? Il semble qu'aucune théorie sémiotique cohérente ne soit susceptible d'articuler ensemble les différentes relations fondamentales qui ont été mises en évidence de Platon à Saussure. Il semble en outre, que ces relations ne permettent pas de prendre en compte ce qui est pourtant essentiel pour l'activité et la pensée mathématiques : la transformation des représentations *(supra* II).

En réalité, si l'on veut classer les signes, il faut partir d'un tout autre point de vue : celui des systèmes qui produisent les représentations. La variété des représentations vient de la diversité des systèmes producteurs de représentations, ainsi que nous l'avons déjà suggéré plus haut à propos de la photo intitulée « une et *n* chaises ». Car il y a autant de types de représentations possibles qu'il existe de systèmes différents pour les produire. Ce sont donc moins les représentations qu'il s'agit de classer que les systèmes permettant de les produire (Duval, 1999). Ces systèmes peuvent être :

— de nature physique (reflets, photographies) ou neurophysiologique (images oniriques, souvenirs visuels...) : dans ce cas, la relation est une relation de causalité et le mode de production ne dépend pas de l'intention du sujet mais des propriétés du système qui produit la représentation. En retenant la relation effet observé $\rightarrow$ cause, Peirce s'en est tenu aux seuls systèmes physiques comme systèmes producteurs de représentation.

[4] Rappelons que le principe de position de l'abaque génère une règle de composition des signes qui permet de désigner systématiques et sans confusion n'importe quel nombre entier, la seule limitation étant celle du coût temporel et spatial. En ce sens le principe de position de l'abaque génère un ébauche de syntaxe.

— de nature sémiotique : dans ce cas, la relation est une relation de référence et la production est une production intentionnelle, c'est-à-dire opérant des choix dans la production des représentations qui impliquent une élaboration combinant des unités de sens. Il est surprenant que l'on ait peu ou pas du tout prêté attention au fait que les systèmes sémiotiques sont aussi des systèmes producteurs de représentation. Cela est pourtant frappant en mathématique, ne serait-ce qu'avec les systèmes de numération ! Mais, c'est aussi frappant avec les langues naturelles. L'oublier, c'est oublier toute la création littéraire et poétique.

En ce qui concerne les mathématiques, ce sont évidemment les systèmes sémiotiques qui sont intéressants, et non pas les systèmes de nature physique ou organique. On peut alors classer les systèmes sémiotiques en prenant en compte deux aspects : d'une part, selon qu'ils permettent, ou non, des traitements algorithmiques et, d'autre part, selon qu'ils sont multifonctionnels ou monofonctionnels. Nous obtenons ainsi quatre grandes classes de registres de représentation utilisées en mathématiques (Duval 2003 ; 2006a p.110). Elles permettent, en particulier, de voir que la géométrie mobilise au moins deux types totalement différents de représentations. Cette classification permet de mettre en évidence les deux grands types de transformations des représentations, c'est-à-dire les conversions et les traitements qui font la dynamique de toute activité mathématique (Figures 7 et 9) ainsi que les variables cognitives qui jouent dans l'apprentissage des mathématiques.

4.3 L'analyse des signes et des systèmes sémiotiques, peut-elle être entièrement subordonnée à la fonction remplie par les signes dans un contexte déterminé ?

Cette question touche le problème des rapports entre une analyse fonctionnelle des signes et une analyse structurale. Il faut reconnaître que, dans la plupart des travaux, hormis ceux qui prennent en compte l'apport de Saussure, l'analyse des signes est faite en leur assignant une ou plusieurs fonctions, sans que ni une analyse structurale du fonctionnement propre à chaque type de représentation ni une étude systématique de leurs fonctions possibles (Duval, 1999) n'aient réellement été faites. Ainsi, pour la langue naturelle, c'est la fonction de communication qui est immédiatement retenue. Mais, lorsqu'il s'agit des notations algébriques, on fait évidemment appel à d'autres fonctions :

— abréger, faire court, non seulement pour soulager la mémoire mais également pour appréhender le plus grand nombre de signes (et donc d'objets) dans un seul acte de pensée. En d'autres termes, il s'agit de transformer l'appréhension successive d'une séquence en une appréhension simultanée. Cette **fonction d'économie cognitive,** qui a été explicitée pour la première fois par Descartes, tient essentiellement compte des limitations des capacités de l'intuition et de la mémoire (*supra* 2.1.3). Mais, cette fonction d'économie cognitive ne peut réellement être mise en œuvre que dans une production écrite des signes, et non pas dans la parole.

— pouvoir effectuer des substitutions de signes entre eux. C'est la **fonction mathématique de traitement** que les signes doivent remplir pour permettre d'effectuer des calculs. Et la puissance de calcul dépend évidemment du système sémiotique utilisé.

Il y a bien d'autres fonctions que nous n'allons pas prendre en compte ici. Cela suffit pour soulever les deux problèmes suivants en nous limitant aux seules fonction de communication et de traitement.

4.3.1 Un même système sémiotique peut-il remplir des fonctions hétérogènes ?

Le langage, c'est-à-dire l'expression dans un langue naturelle, répond prioritairement à une fonction sociale de communication. C'est à ce titre que l'on oppose souvent les mathématiques et le langage. Cependant, la langue naturelle est aussi utilisée, par exemple en géométrie, pour effectuer des démarches mathématiques qui vont permettre de remplir une fonction de preuve : pour définir, pour énoncer des théorèmes, pour déduire. Ce changement de fonction dans l'utilisation de la langue entraîne un changement, souvent non remarqué, dans les opérations discursives qui vont être privilégiées (Duval, 1995a). La difficulté de l'utilisation de la langue naturelle en mathématiques tient au fait qu'un changement de fonction dans son utilisation entraîne un autre type de fonctionnement du discours. Et, le plus souvent, ce changement de fonction ne peut se faire qu'en passant d'une modalité d'expression orale à une modalité d'expression écrite. Car la pratique orale de la langue ne permet pas de remplir les mêmes fonctions que sa pratique écrite (Duval 2000, 2001). C'est là une source profonde, et souvent niée, d'équivoques dans l'enseignement des mathématiques entre les enseignants et leurs élèves (Duval, 2003).

On pourrait faire des remarques analogues à propos des fonctions très différentes que l'on fait remplir aux figures géométriques (Duval, 2005).

Au contraire, les systèmes que nous avons appelés « monofonctionnels », comme les systèmes de numération ou le symbolisme mathématique constitutif des langages formels, ne permettent de remplir qu'une seule fonction, celle de traitement.

4.3.2 Quel est le degré de liberté de l'interprétant dans la signification des signes ?

Ce qui est le plus souvent cité, et retenu, de la définition des signes proposée par Peirce est la relation des signes à un interprétant : « Un signe ou *representamen* est quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un de quelque chose ». Cette relation, que nous n'avons pas retenue parmi les relations fondamentales, est, en effet, très générale et son utilisation dans l'analyse des productions requiert que l'on prenne en compte deux facteurs importants.

Le premier facteur est le type de représentation. Nous avons vu, par exemple, qu'il y avait deux grands types de représentation des nombres (Figure 4 et Figure 5). Lorsque la représentation dépend d'un système de numération, comme, par exemple, le système décimal, l'interprétant n'a aucun degré de liberté. En revanche, s'il s'agit de marques unités, l'interprétant dispose de tous les degrés de liberté qu'il souhaite puisque les représentations lui servent seulement de support externe pour des manipulations libres.

Le deuxième facteur est la situation de l'interprétant : est-il lui-même en situation de production, comme dans un travail de recherche, ou est-il en situation de réception, comme dans l'écoute ou la lecture d'une explication ? Dans la première situation, la relation de l'interprétant aux signes varie selon qu'il produit les représentations pour lui-même, c'est-à-dire pour explorer, pour contrôler, pour mieux prendre conscience ou, au contraire, selon qu'il produit les représentations pour les autres, c'est-à-dire pour communiquer. Dans la première situation, c'est la fonction que l'interprétant assigne aux signes qu'il produit lui-même qui détermine leur critère d'interprétation. Dans la seconde situation, l'interprétant n'a que le contexte global de la communication qui lui sert alors d'appui pour comprendre. C'est dans cette situation particulière qu'une approche pragmatique des signes devient plus essentielle qu'une approche sémantique ou syntaxique. Historiquement, l'intérêt de la relation à l'interprétant qui est mentionnée dans la définition de Peirce est d'avoir ouvert une approche pragmatique dans l'analyse des productions sémiotiques. Mais, une telle approche peut-elle être mise au centre d'une analyse sémiotique de l'activité et des productions mathématiques ?

CONCLUSION

L'analyse de signes se fait toujours par rapport au type d'activité pour lequel la production et la transformation de représentations sémiotiques s'avèrent nécessaires. Pour ne pas se trouver trop retreintes dans leur champ de validité et d'application, les théories du signe ont donc cherché à s'appuyer sur les formes d'activités les plus communes et, donc les plus générales : la communication, l'interprétation adaptative des phénomènes de l'environnement, ou, en psychologie, la dualité de ces modes de la représentation que sont l'image et le langage, et plus récemment les transmissions de l'information avec leur traitement numérique. Mais toutes ces théories restent en deçà de la complexité et de la variété des représentations sémiotiques qui sont mobilisables dans l'activité et les productions mathématiques.

L'originalité de l'activité mathématique par rapport à tous les autres types d'activité est double. D'une part, ce sont les mathématiques qui utilisent le spectre le plus étendu de représentations sémiotiques et elles ont même contribué à l'enrichir. Mais, elles le font toujours avec la même exigence : utiliser les possibilités de transformation que chaque type de signes ou de représentation peut offrir de manière spécifique. Et cela, pour des raisons heuristiques, pour des raisons de simplification ou d'économie, pour des besoins de contrôle, pour augmenter la puissance de traitement, etc. D'autre part, les objets de connaissances mathématiques sont indépendants des représentations utilisées pour y accéder ou pour les utiliser. Ce qui rend tel ou tel type de représentation sémiotique, localement ou momentanément nécessaire, c'est la fonction que ce type de représentation permet de remplir : fonction heuristique, fonction de contrôle, fonction de traitement. La variété des types de signes mobilisés dans les productions mathématiques reflète la variété des démarches de pensée à accomplir dans une activité mathématique. C'est pourquoi une sémiotique prenant en compte la variété des représentations sémiotiques mobilisées en mathématiques reste peut-être encore à faire ! Mais, pourquoi alors une approche sémiotique ?

Nous touchons là au paradoxe cognitif des mathématiques. Les objets de connaissances mathématiques ne sont accessibles que par le moyen de représentations sémiotiques, mais ils ne peuvent jamais être confondus avec les représentations sémiotiques qui permettent de les atteindre et de les utiliser. Comment alors reconnaître les mêmes objets dans la variété de leurs représentations possibles ? C'est évidemment ce paradoxe qui est au cœur des difficultés que les élèves rencontrent dans l'apprentissage des mathématiques, paradoxe qui n'existe pas dans les autres domaines de connaissance.

En outre, il faut rappeler que l'enseignement des mathématiques ne se limite pas à introduire des concepts selon une progression planifiée dans un curriculum. Il introduit aussi de nouveaux systèmes de représentations sémiotiques, en même temps qu'il introduit une autre mode de fonctionnement cognitif dans les systèmes culturellement communs des images et du langage. L'analyse des différentes tâches impliquées dans les activités proposées aux élèves et dans la résolution de problèmes ne peut pas faire l'impasse sur la variété des représentations sémiotiques à mobiliser. Le paradoxe cognitif des mathématiques ne peut être résolu par les élèves que par une coordination de tous les registres de représentation mobilisables dans l'activité mathématique. Les passages d'un registre à un autre, qui sont ce qu'il y a de plus difficile, ne deviennent possibles pour les élèves qu'avec le développement d'une telle coordination.

Ne prendre en compte dans l'enseignement ni ce paradoxe cognitif ni la complexité cognitive d'une mobilisation simultanée ou successive de types de signes hétérogènes, qui est pourtant inhérente à l'activité mathématique, c'est prendre le risque d'égarer la plupart des élèves dans ce qu'on pourrait appeler, en prolongement des réflexions de Leibniz sur «ce qui embarrasse notre raison», le troisième « labyrinthe », celui des représentations sémiotiques.

REFERENCE LIST

Augustin, (saint) (1997). *De Doctrina Christiana.* Paris: Institut d'Etudes Augustiniennes.

Belmas, P. (2003). Apprentissage de la proportionnalité et symbolisations chez des élèves en échec scolaire de SEGPA. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *8*, 167-189.

Benveniste, E. (1974). Sémiologie de la langue. In *Problèmes de linguistique générale*, *2*, (pp. 43-66). Paris: Gallimard.

Bessot, D. (1983). Problèmes de représentation de l'espace. In Enseignement de la Géométrie, *Bulletin Inter-IREM* , *23*, 33-40.

Boysson-Barides, B. (1999). *Comment la parole vient aux enfants.* Paris : Odile Jacob.

Bresson, F. (1987). Les fonctions de représentation et de communication. In J. Piaget, Mounoud & Bronckart (Eds.), *Psychologie* (pp. 933-982). Paris: Encyclopédie de la Pléiade.

Brissiaud, R. (1995). *J'apprends les maths*, *CE2*. Paris : Retz.

Condillac (1982 (1798)). *La langue des Calculs.* Lille: Presses universitaires de Lille.

Deledicq, A. (1979). *Mathématiques 4ème*. Paris: Cédic.

Ducrot, O. (1972). *Dire et ne pas dire*. Paris: Hermann.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et Pensée humaine*. Berne: Peter Lang

Duval, R. (1995b) Geometrical Pictures : kinds of representation and specific processing. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1996) «Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349-382.

Duval, R. (1998). Signe et objet : trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*, 139-163.

Duval, R. (Ed.) (1999). *Conversion et articulation des représentations analogiques*. Lille: I.U.F.M. Nord Pas-de-Calais, D.R.E.D.

Duval, R. (2000). Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *20*(2), 135-170.

Duval, R. (2001). Pourquoi faire écrire des textes de démonstration. In E.Barbin, R.Duval, I. Giorgiutti, J.Houdebine, C. Laborde (Eds.), *Produire et lire des textes de démonstration* (pp.183-205). Paris : Ellipses.

Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. In Ph. Drouhard & M. Maurel (Eds.) *Actes des Séminaires SFIDA 13-16*, Volume IV 1901-2001 (pp.67-94) Nice: IREM.

Duval, R. (2003). Décrire, visualiser, raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *8*, 13-62.

Duval, R. (2005). Les conditions didactiques de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. ? *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *10*, 5-53.

Duval, R. (2006a). The cognitive Analysis of Problems of comprehension in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131 .

Duval R. (2006b). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXII ème Colloque COPIRELEM*, 67-89.

Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7-27.

Eco, U. (1990 (1973)). *Le signe* (tr.J-M. Klinkenberg). Paris: Labor.

Frege G. (1971). *Ecrits logiques et philosophiques*. Paris : Seuil.

Freudenthal, H. (2002). Notation Mathématique. *Encyclopedia Universalis* (pp. 338-344). Paris

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *8*, 255-271.

Kaput, J. (1987). Towards a Theory of Symbol Use in Mathematics. In C Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale, New jersey/ London : Lawrence Erlbaum.

Lacroix, S.F. (1820). *Eléments d'Algèbre.* Paris : Mme Veuve Courcier.

Leclère, J.P. (2000). *Faire des mathématiques à un public en situation d'illettrisme : le contraire d'une utopie.* Thèse Université Lille 1.

Leibniz, G.W. (1972). *Oeuvres* I (Editées par L. Prenant). Paris: Aubier Montaigne.

Martinet, A (1966). *Eléments de linguistique générale*. Paris : Armand Colin.

Piaget, J. (1968a). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Neuchatel : Delachaux et Niestlé.

Piaget , J. (1968b). *La formation du symbole chez l'enfant.* Neuchatel : Delachaux et Niestlé.

Peirce, C.S. (1978). *Ecrits sur le signe* (tr. G. Deledalle) Paris: Seuil.

Radford L. (1998). On signs and Representations. A cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *35*(1), 277-302.

Russell, B. (1969). *Signification et Vérité* (tr.Ph ;Delvaux). Paris : Flammarion.

Saussure, F. de (1973 (1915)). *Cours de linguistique générale*. Paris : Payot.

Serfati, M. (1987). La question de la chose. Mathématiques et Ecriture. *Actes du colloque Inter IREM d'Histoire et d'Epistémologie des Mathématiques*, (pp. 309-334). Strasbourg: IREM.

Quine, W.V. (1977). *Relativité de l'ontologie et autres essais* (tr. Largeault). Paris: Aubier.

Weyl, H. (1994 (1953)) Sur le symbolisme des mathématiques et de la physique mathématique in *L e continu et autres écrits* (tr. Largeaut), (pp. 248-264). Paris: Vrin.

Wittgenstein, L (1983). *Remarques sur les fondements des mathématiques* (tr. M-A. Lescouret). Paris : Gallimard.

Raymond Duval
Université du Littoral Côte d'Opale(ULCO)
France

E-mail: ray@wanadoo.fr

Socioepistemología y representación: algunos ejemplos

Ricardo Cantoral [1]
Rosa-María Farfán [2]
Javier Lezama [3]
Gustavo Martínez-Sierra [4]

RESUMEN

Este artículo discute, en distintos planos y con el empleo de diversos ejemplos, un papel para la noción de *práctica social* en la construcción de conocimiento matemático y de cómo se articula con procesos de representación. Particularmente, estudiamos algunas actividades como medir, predecir, modelar y convenir, como escenarios de construcción social de conocimiento matemático.

- **PALABRAS CLAVE**: Socioepistemología, práctica social, representación.

ABSTRACT

In this article we discuss, at different levels and through several examples, one role that the notion of *social practice* can play in the construction of mathematical knowledge and its articulation with processes of representation. Particularly, we study some activities such as measuring, predicting, modeling and agreeing as scenarios of social construction of mathematical knowledge.

- **KEY WORDS:** Socioepistemology, social practice, representation.

RESUMO

Este artigo discute, em distintos planos e com o emprego de diversos exemplos, um papel para a noção de *prática social* na construção do conhecimento matemático e de como se articula com os processos de representação. Particularmente, estudamos algumas atividades como medir, predizer, modelar e ajustar, como cenários de construção social de conhecimento matemático.

Fecha de recepción: Marzo de 2006/ Fecha de aceptación: Mayo de 2006.

1 Centro de Investigación en Matemática Educativa (Cimate). Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero (en receso sabático 2005 – 2006). Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav, IPN.

2 Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav, IPN.

3 Programa de Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

4 Cimate. Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero.

- **PALAVRAS CHAVE:** Socioepistemologia, prática social, representação.

RÉSUMÉ

Dans cet article nous discutons, sur des plans différents et à travers l'utilisation de plusieurs exemples, d'un rôle que la notion de pratique sociale peut jouer dans la construction du savoir mathématique et de son articulation avec des processus de représentation. En particulier, nous étudions quelques activités comme mesurer, prédire, modeler et convenir en tant que scénarios de construction social du savoir mathématique.

- **MOTS CLÉS :** Socioépistémologie, pratique sociale, représentation.

Introducción

En un sentido amplio, digamos que tradicional, la teoría del conocimiento ha considerado a la Representación como una imagen, una idea, una noción o más ampliamente, un pensamiento expresado, formado al nivel mental y que está presente de modo consciente. En este sentido la representación precisa de aquello que habrá de ser *re-presentado* –es decir, vuelto a presentar–, requiere por tanto de un Objeto con existencia previa cuya captación intelectual reproduzca mentalmente a través de traer al presente las situaciones vividas, o de anticipar eventos por venir que condensen la experiencia adquirida. Bajo ese enfoque, la actividad semiótica no puede crear al objeto, pues sólo lo re-presenta, es por ello que algunos autores han señalado críticas a su sustento epistemológico. Radford, (2004), por ejemplo, citando a Peirce, decía que el signo no crea al objeto: aquél es solamente afectado por éste. En pocas palabras, en las diferentes escuelas de pensamiento que adoptan una perspectiva trascendental respecto a los objetos matemáticos (que sea el caso del idealismo o del realismo), los signos constituyen el puente de acceso a esos objetos conceptuales vistos como situados más allá de las peripecias de la acción humana y la cultura. Para Radford, es la actividad humana la que produce al objeto. El signo y la forma en que éste es usado (esto es, su sintaxis) –forma necesariamente cultural en tanto que inmersa en Sistemas Semióticos Culturales de significación– son considerados como constitutivos del objeto conceptual: éstos objetivan al objeto. (*op. Cit.*, p. 14).

El enfoque socioepistemológico comparte la tesis, de la semiótica cultural, que confiere a la actividad humana la función de producción del objeto, aunque el énfasis socioepistemológico no está puesto ni en el objeto preexistente o construido, ni en su representación producida o innata; sino más bien se interesa por modelar el papel de la práctica social en la producción de conocimiento a fin de diseñar situaciones para la intervención didáctica. Claramente, ello exige de un posicionamiento sobre el sentido que adquiere la expresión *práctica social*, en este enfoque.

Se asume como tesis fundamental que existe una profunda diferencia entre "la realidad del objeto" –la llamada realidad implicada– y "la realidad descrita" que producen los seres humanos en su acción deliberada para construir su "realidad explicada". La socioepistemología ha tratado el problema de la representación de un modo singular, pues no busca discurrir teóricamente sobre la acción de representar al objeto mediante artefactos, herramientas o signos, sino que se ubica "a ras" de las *prácticas* y de la forma en que éstas son normadas por *prácticas sociales*.

En primer término, es importante que se distinga la noción de *práctica* en un sentido llano, de aquella que usamos en este enfoque. La *práctica social* la entendemos como normativa de la actividad, más que como actividad humana reflexiva o reflexión sobre la práctica; o aun como se señala en (Radford, 2004), como "interiorización reflexiva de prácticas sociales históricamente constituidas". Ahí radica una de las principales distinciones teóricas del enfoque socioepistemológico: "la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen" (Covián, 2005). De este modo, se pretende explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático con base en prácticas sociales. En sus investigaciones, los socioepistemólogos reportan más bien caracterizaciones del ejercicio de las prácticas que anteceden a la producción o construcción de conceptos y al desarrollo del saber.

Según este encuadre teórico, es preciso modificar el foco: "pasar de los objetos a las prácticas". Los enfoques *reificacionistas* centrados en objetos, buscan explicar el proceso mediante el cual se llega a la construcción del objeto y minimizan el papel que desempeña la triada: "herramientas, contextos y prácticas". El cambio de centración producirá un deslizamiento de orden mayor hacia explicaciones sistémicas, holísticas, complejas y transdisciplinarias, en virtud de que la acción cognitiva no busca la apropiación de objetos a través de sus partes, sino que asume que éstos no existen objetiva y previamente, "ahí afuera", previos a la experiencia, sino que –más bien– los objetos son "creados" en el ejercicio de prácticas normadas (tesis compartida con la semiótica cultural). En consecuencia, se cuestiona la idea de que la cognición se reduzca a la acción de recobrar el entorno inmediato mediante un proceso de representación, para asumir que la cognición sea así entendida como la capacidad de "hacer emerger" el significado a partir de realimentaciones sucesivas entre el humano y su medio ambiente próximo, tanto físico como cultural, a partir de una interacción "dialéctica" entre protagonistas. Esta interacción, socialmente normada, da a la práctica, inevitablemente, una connotación de práctica social. El conocimiento entonces, como se ha señalado en (Varela et al., 1997) depende de las experiencias vividas que, a su vez, modifica las propias percepciones y creencias.

1. La socioepistemología

Debemos señalar que la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa busca construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas, no sólo discute el asunto de la semiosis o el de la cognición de manera aislada, sino que busca intervenir en el sistema didáctico en un sentido amplio, al tratar a los fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral & Farfán, 2003).

En este enfoque se pone énfasis el hecho de que las aproximaciones epistemológicas tradicionales, han asumido que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, en algún sentido, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La socioepistemología, por su parte, se plantea el examen del conocimiento matemático, social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión (Cantoral & Farfán, 2004).

La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa se ocupa entonces, específicamente, del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y de su difusión institucional. Dado que este conocimiento adquiere el estatus de saber sólo hasta que se haya constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor. Bajo este enfoque se han producido una gran cantidad de investigaciones empíricas y de las cuales citamos algunas (Alanís et al, 2000; Arrieta, 2003; Cantoral, 1990, 1999; Cantoral & Farfán, 1998; Cordero, 2001; Covián, 2005; Lezama, 2003; López, 2005; Martínez – Sierra, 2003; Montiel, 2005).

En su intento por difundir estos saberes, la socioepistemología sostiene que se forman *discursos* que facilitan la representación en matemáticas alcanzando consensos entre los actores sociales. Nombramos a estos discursos con el término genérico de *discurso matemático escolar* (Cantoral, 1990). Debemos aclarar que la estructuración de dichos discursos no se reduce a la organización de los contenidos temáticos, ni a su función declarativa en el aula (el discurso escolar), sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos; en este sentido se trata más bien de una unidad cultural en el sentido de Minguer (2004).

Para mostrar lo anterior, consideremos el siguiente hecho. El tratamiento didáctico de las distintas clases de funciones a través de sus representaciones gráficas enfrenta dificultades serias al momento de evaluar los logros al nivel de la comprensión por parte de los estudiantes. Si bien la mera clasificación visual de sus representaciones puede ser un elemento de partida para distinguirlas en una explicación didáctica, habrá que explorar más profundamente aquellos elementos que les permitan aproximarse a la naturaleza de las distintas clases de funciones. Al poner en escena una situación didáctica relativa al tratamiento de la función 2^x entre estudiantes de bachillerato (15 – 17 años), a fin de que se apropiaran del concepto de función exponencial, se favoreció el empleo de criterios geométricos: localizar puntos en el plano, identificar regularidades para transitar de la figura a sus propiedades. Para inducirles a construir, basados en la coordinación de elementos geométricos y gráficos, una curva a partir de un atributo analítico. Se propició también la inducción de lo local a lo global, partiendo de casos particulares se les solicitaba que argumentasen sobre la posibilidad de localizar otros puntos más y de ahí, se cuestionaba sobre la naturaleza específica de la función 2^x.

Presentamos a continuación dos fragmentos realizados por equipos de estudiantes, para dotar de cierta evidencia empírica nuestras afirmaciones. La secuencia propuso actividades para la localización de puntos en el plano que formasen parte de la gráfica de la función 2^x. Como se puede observar en la Figura 1, los estudiantes ponen de manifiesto que tienen una imagen de la representación gráfica de la función creciente con trazo continuo. También se puede observar que la localización de los puntos sobre la gráfica (como pares ordenados) no corresponde a la escala que se plantea en los ejes.

El haberles solicitado la obtención de determinados puntos sobre la gráfica, permitió que se iniciara una discusión sobre el *significado* de “elevar a una potencia”. En la figura se observa que le asocian, a la expresión 2^x distintos valores a la x lo que les lleva a explorar el significado de elevar a potencia para distintas clases de números. (Potencia entera, 3; potencia racional, ½; y aun el caso de una potencia irracional, þ. Ante esto último los estudiantes no representan nada).

El ubicar puntos específicos para potencias, enteras y racionales, problematiza entre los estudiantes el carácter creciente de la función y su trazo continuo, hay en el dibujo una pregunta tácita ¿cómo se eleva a la potencia þ?

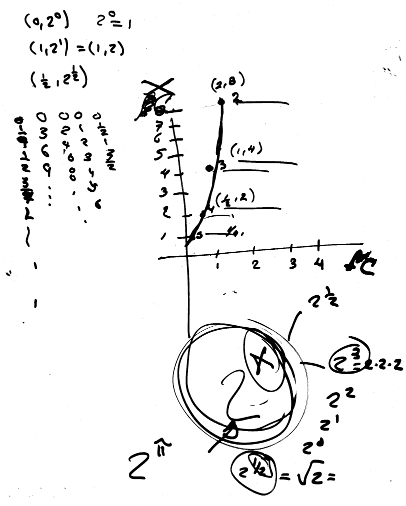


Figura 1

En la siguiente figura, de nueva cuenta, los estudiantes tienen una idea de la función 2^x mediante una representación gráfica, creciente y con trazo continuo, bosquejándola de manera general y permitiéndonos ver que no reparan ante el caso de que la variable x tome el valor de cero o sea incluso negativa. En contraste, observamos junto a ese trazo, la localización de los segmentos de valor $2^{1/4}$, $2^{1/2}$, 2^1, etc., que fueron obtenidos a través de la aplicación del algoritmo geométrico de la *media geométrica* en la semicircunferencia. Podemos interpretar el empleo de dicho algoritmo, como un ejercicio de medición, ya que es construido a partir de la definición de una determinada unidad de medida. En el caso del gráfico de la izquierda las ordenadas tienen un significado concreto, explícito para los estudiantes: son segmentos de longitud $2^{1/4}$, $2^{1/2}$, 2^1, etc. Este ejercicio de medir permite comparar a los segmentos y con ellos aproximarse a una idea específica de crecimiento, ya no es arbitrario como en el gráfico siguiente, sino que sigue un patrón susceptible de comparación y descripción detallada.

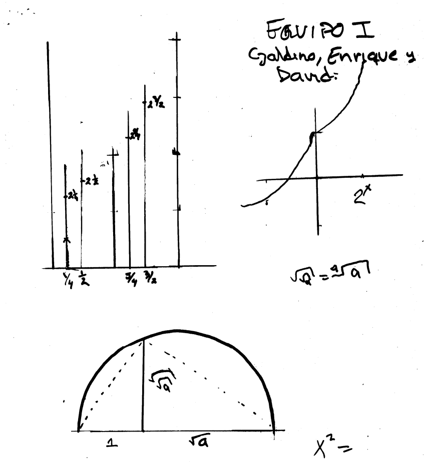


Figura 2

La representación gráfica, aun respetando las escalas y dibujándola con gran exactitud, no garantiza una comprensión de la trama interna de la misma, es hasta que se agrega una acción, una *práctica* concreta, proveniente del cúmulo de experiencias de los alumnos durante su vida, la de *medir* segmentos, lo que les permite en principio entender la naturaleza del crecimiento de la función 2^x. La representación no existe como tal hasta que algunas prácticas cotidianas como medir, comparar, observar son llevadas a cabo, son ejercidas. En este sentido, la aproximación socioepistemológica pone su énfasis en el papel de las prácticas sociales en la construcción del conocimiento. Resta aun discutir a mayor profundidad cuál es la práctica social que subyace al empleo y a la necesidad de la medición; sin embargo, dado que no es asunto de este escrito puede consultarse (Lezama, 2003).

Una explicación más amplia sobre el papel que desempeñan las prácticas, tanto las de referencia como las sociales, en la construcción de conocimiento, puede obtenerse de los siguientes ejemplos. Cada uno de ellos obedece a circunstancias específicas y no haremos de ellos un estudio a profundidad.

2. La predicción, el binomio de Newton y la serie de Taylor

¿Por qué Newton representó por vez primera a su binomio como $(P + PQ)^{m/n}$ y no, como es usual hoy día a $(a + b)^n$? Las expresiones aunque matemáticamente

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m}{n}} Q + \frac{m}{n}\frac{m-n}{2n} P^{\frac{m}{n}} Q^2 + \frac{m}{n}\frac{m-n}{2n}\frac{m-2n}{3n} P^{\frac{m}{n}} Q^3 + etc.$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

equivalentes, son distintas conceptualmente.

Una lectura ingenua de tales expresiones nos haría creer que se trata sólo de un asunto de la notación propia de la época; en nuestra opinión, ello no es así. Se trata de una verdadera concepción alternativa del binomio, que se apoya en una epistemología sensiblemente diferente de la que hoy enseñamos en clase. De hecho, obedece a un programa emergente, alternativo en el campo de la ciencia y la filosofía, con el que se buscaba modelar, anticipar, predecir fenómenos naturales con respaldo matemático. Un amplio programa de *matematización* de los fenómenos susceptibles de modelar con una fructífera metáfora del flujo del agua, metáfora que se aplicaría por igual a la evolución de muy diversas magnitudes.

La idea básica a la que nos referimos consiste en la asunción de que con la predicción de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza, era posible anunciar, anticipar, su estado ulterior. Pues conociendo ciertos valores iniciales de un sistema en evolución, sabríamos la forma en la que éste progresa. Centremos la atención en la cinemática de una partícula que se desplaza rectilíneamente; situación en la que se precisa de una *predicción de largo alcance en ámbitos de variación continua*. Desde nuestro punto de vista, la predicción se construye socialmente a partir de las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales. Pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud B con el paso del tiempo. Sabemos, por ejemplo, que B depende a su vez de otra magnitud P que fluye incesantemente. Necesitamos saber entonces el valor que tomará B antes de que transcurra el tiempo, antes de que P transite del estado uno al estado dos. Pero dada nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos *predecir*. En tal caso, no disponemos de razones para creer que en este caso, el verdadero valor de B esté distante de las expectativas que nos generan los valores de B y de P en un momento dado, de la forma en la que P y B cambian, de la forma en la que cambian sus cambios, y así sucesivamente. El binomio de Newton (Newton, 1669), se presenta como una entidad que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas ligadas a la resolución de una clase de situaciones que precisan de la predicción. De modo que si P evoluciona de cierta manera, la pregunta central consiste en saber cómo será B(P) si conocemos el inicio de P, el cambio que sufre P, el cambio del cambio de P, etcétera. El binomio fue entonces, una respuesta a la pregunta y una organización de las *prácticas sociale*s.

El caso de mayor interés se presenta, naturalmente, cuando no se dispone en forma explícita de la relación entre B y P. En ese caso, habrá que hacer emerger progresivamente una nueva noción, una noción que permita de algún modo la generación de la solución óptima a una clase de situaciones propias de la predicción. Para ello habrá que considerar tanto la diversidad de contextos en los que puede suceder la variación, como la variedad de fenómenos estudiados con estrategias similares. En su momento, este programa newtoniano de investigación llevó al surgimiento de una progresiva cadena de elaboraciones teóricas, cada vez más abstractas, que culmina, por así decirlo con el programa lagrangiano donde habrá de emerger la noción de función analítica. Los detalles de este estudio pueden consultarse en (Cantoral, 1990, 2001).

Ejemplifiquemos esta situación en un caso simple. Supongamos que tenemos los valores iniciales (en el tiempo $t = 0$), tanto de la posición $s(0) = s_0$, como de la velocidad $v(0) = v_0$, y la aceleración $a(0) = a_0$ de una partícula que se desplaza sobre una recta. Para cualquier instante posterior t la posición $s(t)$, la velocidad $v(t)$ y la aceleración $a(t)$ estarán dadas mediante el instrumento para predecir, a saber, la serie de Taylor, $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2 /2! + ...$ La serie deviene en:

$s(t) = s(0) + s'(0)t + s''(0)t^2 /2! + ...$
$v(t) = v(0) + v'(0)t + v''(0)t^2 /2! + ...$
$a(t) = a(0) + a'(0)t + a''(0)t^2 /2! + ...$

En notación usual:

$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$
$v(t) = v_0 + at$
$a(t) = a$

En este ejemplo, es el tratamiento de la predicción de fenómenos de movimiento, lo que da lugar a un sucesivo proceso de matematización de una gran cantidad de nociones y procesos matemáticos. Estrictamente hablando, no se buscó representar un objeto, ni construirlo a partir de su representación. Se intenta, según la visión de la ciencia del periodo, simplemente *predecir* el cambio. En este sentido, la predicción en tanto que no es un objeto matemático, tiene que entrar en la problemática teórica no como noción, o representación, sino como práctica social. Para la socioepistemología el foco del análisis estará puesto no en el binomio en sí, en tanto signo o artefacto que mediatiza la actividad, sino en la búsqueda de la predicción como práctica social.

Veamos un segundo ejemplo en el cual, a diferencia del anterior, el fenómeno mismo que será tratado, el fenómeno natural que intentan describir con el método predictivo, estaba aun poco claro para los interlocutores. El calor como noción, no emerge aun con la claridad requerida. ¿Qué se representa entonces?

3. Teoría analítica del calor

El ejemplo de la propagación del calor resulta útil para mostrar de qué manera, antes que el objeto y su representación, está la *praxis*, y con ésta la significación cultural. La propagación del calor resulta un asunto desafiante, pues no trata de un *objeto* matemático como tal, sino de un *contexto* en que habrían de ejercer ciertas prácticas los científicos e ingenieros de una época y de una circunstancia específica. Fue una cuestión a la que tanto la Mecánica Racional como el Análisis Matemático del siglo XVIII no dieron respuesta cabal, y de ello da cuenta la histórica controversia suscitada a raíz de la cuerda vibrante. Al lado de este desarrollo, encontramos el surgimiento de la ingeniería matemática sobre la práctica tradicional y el papel sustantivo que una institución de educación superior, la École Polytechnique, tuvo para su posterior consolidación. Así pues, el asunto matemático que estaremos ejemplificando, el del estudio de la convergencia de series infinitas, se inscribe en el ambiente fenomenológico de la conducción del calor, en estrecha relación con la práctica de la ingeniería, dio a luz, gracias a la conjunción de, por supuesto, innumerables variables, de entre las cuales destacamos como antecedentes al cálculo algebraico y al surgimiento de la ingeniería en el siglo XVIII. Es decir, una práctica social que normaba el quehacer de los científicos y tecnólogos de la época: Predecir el comportamiento de lo que fluye, fuese el calor, el movimiento o los flujos eléctricos, la intención última de este programa renovador era el de mostrar el papel del saber como la pieza clave de la vida futura de esa sociedad. Es importante ubicar que esto se da en el marco de la profesionalización de una *práctica de referencia*, la práctica de la ingeniería y por ende en el seno de la comunidad politécnica. La cuestión entonces no se redujo a conocer un objeto matemático, sino el mostrar que la práctica de la ingeniería podría ser científica. La función normativa de la práctica social haría su aparición en forma de discurso matemático y enseguida, casi al mismo tiempo, como una forma de discurso matemático escolar.

El surgimiento del concepto de convergencia, que data del siglo XIX se da en un ambiente fenomenológico de singular relevancia para la Ingeniería Matemática; la propagación del calor en donde la variación está presente y la ecuación en la que tal variación se significa:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right)$$

En los inicios del desarrollo de la humanidad, cuando las diversas experiencias se examinan por vez primera, se recurre de entrada a la intuición reinante del fenómeno, ya sea de lo calórico para el caso que nos ocupa, del ímpetu o del éter, en otros. De este modo, es con lo calórico que se realiza mejor la conducción, o con el ímpetu que se da el movimiento. Se precisó de una revolución del conocimiento científico para agrupar en una unidad fundamental al conocimiento y la manera de percibirlo.

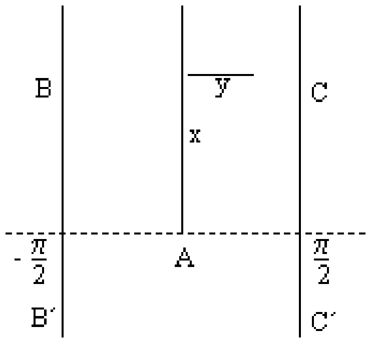
Con la obra de Biot (1774 - 1802) la experiencia se dirige hacia la medida y el cálculo, y se desecha la explicación del fenómeno mediante la noción de calórico, valiéndose de las indicaciones suministradas por termómetros, y se obtiene así la primera ecuación diferencial que rige al fenómeno. Sin embargo, los coeficientes constantes no fueron analizados, no se distinguió entre lo que es propio del cuerpo específico, de aquello que persiste independientemente de él. En especial, los parámetros de conductibilidad, de densidad, de calor específico, permanecen en un único coeficiente empírico. La tarea constructiva culmina con la *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822) de Fourier, en donde se analiza el problema de la propagación del calor en los sólidos, que consiste en describir el comportamiento del fenómeno de propagación, buscando aquello estable y permanente, que se conserva inalterable con el fluir del tiempo. Esto es, la ecuación que gobierna el comportamiento del sistema.

Como Fourier llega finalmente a la ecuación diferencial de Biot, que ha recibido la sanción de la experiencia, se puede decir que el método de Fourier ha logrado la construcción matemática completa del fenómeno. De paso, se rompen o, mejor aún, se niegan, los conceptos fundamentales del análisis matemático del siglo XVIII, como: el de función, el papel del álgebra, el continuo real, así como la interpretación física de las soluciones, y se inicia el estudio de la convergencia de series infinitas, pilar fundamental del Análisis Matemático moderno. Salta a la vista la importancia singular de la obra de Fourier, tanto para la ingeniería como para el análisis matemático mismo. De suerte tal, que determinar el estado estacionario del sistema conduce, necesariamente, a un estudio de la convergencia de una serie trigonométrica infinita. La búsqueda de la predicción y la predicción como práctica, antecede al proceso de significación y de representación de objetos. Es decir, son las prácticas y no sus representaciones las que forman en primera instancia al saber matemático.

En este ejemplo, ¿qué objeto matemático se representa?, no hay objeto preestablecido, ni preexistente, estos son construidos por los actores con el ejercicio de sus prácticas y normados por su búsqueda de la predicción. Se pasa del oficio a la profesión gracias al logro de la función normativa de la práctica social.

A fin de mostrar el problema particular con el que Fourier inicia este estudio, entresacamos algunas notas de su publicación original:

Suponemos que una masa sólida homogénea está contenida entre dos planos verticales B y C paralelos e infinitos, y que se ha dividido en dos partes por un plano A perpendicular a los otros dos (ver figura); consideraremos las temperaturas de la masa BAC comprendida entre los tres planos infinitos A, B, C. Se supone que la otra parte B'AC' del sólido infinito es una fuente constante de calor, es decir, que todos esos puntos permanecen con temperatura 1, la cual no puede llegar a ser jamás menor ni mayor. En cuanto a los dos sólidos laterales, uno comprendido entre el plano C y el plano A prolongado y el otro entre el plano B y el A prolongado, todos los puntos de ambos tienen una temperatura constante 0, y una causa exterior los conserva siempre a la misma temperatura; en fin, las moléculas del sólido comprendido entre A, B y C tienen la temperatura inicial 0. El calor pasará sucesivamente de la fuente A al sólido BAC; él se propagará en el sentido de la longitud infinita y, al mismo tiempo, se desviará hacia las masas frías B y C, quienes absorberán una gran cantidad. Las temperaturas del sólido BAC se elevarán más y más; pero ellas no podrán pasar ni aun alcanzar un máximo de temperatura, que es diferente para los distintos puntos de la masa. Tratamos de conocer el estado final y constante al cual se aproxima el estado variable.



Temperatura constante igual a 1

Así, el problema consiste en determinar las temperaturas permanentes de un sólido rectangular infinito comprendido entre dos masas de hielo B y C y una masa de agua hirviendo A; la consideración de los problemas simples y primordiales es uno de los medios más seguros para el descubrimiento de leyes de fenómenos naturales, y nosotros vemos, por la historia de las ciencias, que todas las teorías se han formado siguiendo este método. (Fourier, 1822; traducción libre al español por los autores)

Para el caso particular propuesto, la ecuación general se reduce a

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

pues se omite tanto la coordenada z como su correspondiente derivada parcial (el grosor se considera infinitesimal). Dado que se trata de determinar el estado estacionario, independiente del tiempo (es decir, constante respecto del tiempo), deberá tenerse que:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad .$$

Así que la ecuación por resolver es:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad .$$

Si una función satisface la ecuación, deberá cumplir con las siguientes condiciones:

i) Anularse cuando se sustituye $-\frac{\pi}{2}$ o $+\frac{\pi}{2}$ en lugar de y, cualquiera que sea, por otro lado, el valor de x.

ii) Ser igual a la unidad si se supone $x=0$ y si se le atribuye a y un valor cualquiera comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$.[5]

Es necesario añadir que esta función debe llegar a ser extremadamente pequeña cuando se da a x un valor muy grande, ya que todo el calor surge de una sola fuente A, condiciones que hoy nombramos de frontera. Fourier encuentra la solución por un método de separación de variables, considerando que la temperatura v se puede expresar como el producto de una función de x por una función de y, $v = F(x)\, f(y)$, obteniéndose:

$$v = a\, e^{-x} \cos y + b\, e^{-3x} \cos 3y + c\, e^{-5x} \cos 5y + \ldots \tag{b}$$

…en este punto Fourier hace notar: "... No se puede inferir nada para los valores que tomaría la función si se pone en lugar de una cantidad que no esté comprendida entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$ ..."[6]

Así, (b) se convierte en

$$1 = a \cos y + b \cos 3y + c \cos 5y + d \cos 7y + \ldots$$

para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$; ahora sólo resta calcular la infinidad de coeficientes *a*,*b*,*c*,*d*,... . A nuestros ojos, la solución ya está dada (salvo por dicho cálculo); para Fourier, en cambio, es necesario justificar la solución físicamente[7] antes de realizar tal cálculo y añade:

> Supongamos que la temperatura fija de la base A, en lugar de ser igual a la unidad para todos los puntos, sea tanto menor entre más alejado esté el punto 0 de la recta A, y que sea proporcional al coseno de esta distancia; se conocerá fácilmente, en ese caso, la naturaleza de la superficie curva cuya ordenada vertical expresa la temperatura u, o $f(x,y)$. Si se corta esta superficie por el origen con un plano perpendicular al eje de las x, la curva que determina la sección tendrá por ecuación
>
> $$v = a \cos y \;;$$
>
> los valores de los coeficientes serán los siguientes
>
> $$a = a, \;\; b = 0, \;\; c = 0, \;\; d = 0,$$

---

5 Esto es debido a que la longitud del lado finito BAC es þ. Nótese que, en el trabajo de Fourier, la abscisa la denota por y, mientras que a la ordenada por x (ver figura).

6 La consideración de los valores de una función en un intervalo es nueva; recuérdese que en el siglo XVIII eso carecía de significado.

7 Pero, a diferencia de Bernoulli que presenta argumentos físicos para la demostración del problema, aquí Fourier nos muestra que la solución matemática es coherente con la situación física, pero la demostración se inserta en la matemática misma, sin alusión a argumentos que no pertenecen a ella. Así, se inicia la separación entre la física y las Matemáticas, que desde la antigüedad caminaban estrechamente ligadas una de la otra.

y así sucesivamente, y la ecuación de la superficie curva será

$$v = ae^{-x} \cos y.$$

Si se corta esa superficie perpendicularmente al eje de las y, se tendrá una logarítmica cuya convexidad es devuelta hacia el eje; si se le corta perpendicularmente al eje x, se tendrá una curva trigonométrica que tiene su convexidad hacia el eje. Se sigue de ahí que la función $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ tiene siempre un valor positivo, y que el de $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ es siempre negativo. Ahora bien (art. 1 3), la cantidad de calor que una molécula adquiere, de acuerdo con su lugar entre otras dos en el sentido de las x, es proporcional al valor de $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$; por tanto, se tiene que la molécula intermedia recibe, de la que precede en el sentido de las x, más calor del que ella le comunica a la que le sigue. Pero, si se considera esta misma molécula como colocada entre otras dos en el sentido de las y, siendo negativa la función $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, se ve que la molécula intermedia comunica a la que le sigue más calor que lo que recibe de la precedente. Se llega así, que el excedente de calor que ella adquiere en el sentido de las x se compensa exactamente con lo que pierde en el sentido de las y, como lo expresa la ecuación

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Se sabe así la ruta que sigue el calor que sale de la fuente A. Él se propaga en el sentido de las x, y al mismo tiempo se descompone en dos partes, una se dirige hacia uno de los ejes, mientras que la otra parte continúa alejándose del origen para descomponerse como la anterior, y así sucesivamente hasta el infinito. La superficie que consideramos es engendrada por la curva trigonométrica que responde a la base A, y se mueve perpendicularmente al eje de las x, siguiendo este eje, mientras que cada una de sus ordenadas decrece al infinito, proporcionalmente a las potencias sucesivas de una misma fracción.

Se obtendrán consecuencias análogas si las temperaturas fijas de la base A fueran expresadas por el término $b \cos 3y$, o uno de los términos siguientes $c \cos 5y$...; y se puede, después de esto, formarse una idea exacta del movimiento del calor en el caso general; ya que se verá, por lo que sigue, que ese movimiento se descompone siempre en una multitud de movimientos elementales, en donde cada uno se comporta como si fuese solo. (Fourier, 1822; traducción libre al español por los autores)

En el episodio anterior, tanto Fourier como Biot y los ingenieros egresados de la Polytechnique, están interesados en *anticipar* el comportamiento de la naturaleza, en modelarla, su búsqueda no podría entonces ser reducida a la acción de representar un objeto preexistente, una noción, un concepto o un procedimiento, sino debe ampliarse al nivel de la práctica: ¿cómo será posible confundir en este caso, al objeto con su representación?, ¿tiene, en este contexto, sentido tal pregunta?

Para finalizar este artículo, mostramos cómo las prácticas sociales a las que nos hemos referido, no están exclusivamente ligadas a la actividad inmediata. Desarrollamos un ejemplo relativo al proceso de *convenir* en matemáticas.

4. El proceso de convención matemática

La acepción que utilizamos para *convención*, es la de “aquello que es conveniente para algún fin específico"; entonces una convención matemática es una conveniencia para las matemáticas. El análisis socioepistemológico de los exponentes no naturales muestra la presencia de una manera común, entre los siglos XIV y XVIII, *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento matemático, es decir para la integración sistémica de conocimientos*. Designamos sintéticamente a este proceso de construcción de conocimiento con la expresión *convención matemática*. Las formas de este mecanismo pueden ser varias: una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción. La elección depende de los objetivos teóricos. Convenir en matemáticas, puede entenderse como proceso de búsqueda de consensos al seno de una comunidad que se norma por la práctica social relativa a dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos (Martínez – Sierra, 2005). Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización. Este proceso de síntesis, conlleva el surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los conocimientos anteriores. Las convenciones matemáticas serían una parte de tales propiedades emergentes.

En el plano de la historia de las ideas, al menos dos tipos de formulaciones emergen para significar a los exponentes no naturales. El primer tipo de formulaciones fue hecho en el contexto de lo algebraico y el segundo en el ámbito de la formulación de coherencia entre lo algebraico y lo gráfico. En el contexto algebraico, la noción de exponente no natural surge de la intención de preservar la relación entre las progresiones aritmética y geométrica, a fin de unificar un algoritmo para la multiplicación de monomios. En el contexto algebraico–gráfico, la construcción de significados emerge como organizador de las fórmulas de cuadraturas de ciertas curvas.

En el marco de las formulaciones algebraicas, los convencionalismos tienen por finalidad el incluir nuevos objetos algebraicos a la estructura operativa conformada por los diferentes caracteres *cósicos* [8].

Primera formulación algebraica. En cuanto a la multiplicación, la regla de Aurel (1552) se basa en el comportamiento especial de las sucesiones: la relación entre la progresión aritmética y progresión geométrica (relación PA–PG) [9]. Con este marco de referencia se determinan los convencionalismos para incluir al *número* en la estructura operativa del conjunto $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5,...\}$, que en la notación de Marco Aurel (1552) corresponde al conjunto $\{\varphi, x, \xi, \zeta, \xi\xi, \beta, \xi\zeta, b\beta, \xi\xi\xi, \zeta\zeta, ...\}$. De esta manera el número 5 es representado como 5φ y es multiplicado con los demás

8 En el lenguaje moderno se puede identificar estos caracteres cósicos con la segunda potencia, la tercera potencia… de la incógnita.

9 Es decir, si se coloca la progresión aritmética que representa el número de multiplicaciones de la base y la progresión geométrica que representa las potencias, se tiene que la adición (resta) en la parte superior (la serie aritmética) corresponde a la multiplicación (división) de la serie de abajo (geométrica):

2,	3,	4,	5,	6,
4,	8,	16,	32,	64,

A la relación expresada en el enunciado anterior la abreviaremos, en lo sucesivo, como *la relación entre la progresión aritmética y geométrica* (relación PA-PG).

a través de una nueva tabla de caracteres cósicos que tienen la misma regla operativa referente a la relación entre la progresión aritmética y geométrica. Lo anterior está expresada en los siguientes términos: “Y cuando tu querras multiplicar vna dignidad, grado, o carácter con otro, mira lo que esta encima de cada uno y junta lo simplemente, y aquello que verna, mira encima de qual carácter estara: tal diras que procede de tal multiplicacion” (Op. Cit.). Así al utilizar la Tabla 1 se pueden hacer, por ejemplo, las multiplicaciones contenidas la Tabla 2.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	x	ξ	ζ	$\xi\xi$	β	$\xi\zeta$	$b\beta$	$\xi\xi\xi$	$\zeta\zeta$

Tabla 1. Caracteres cósicos de Aurel y la relación PA-PG

Notación de Aurel	
8ξ 2χ ----- 16ζ	23β 4φ ----- 92β
$13\xi\xi$ $2\xi\xi$ ----- $26\xi\xi\xi$	50φ 6ξ ----- 300ξ

Tabla 2. Multiplicaciones en la notación de Aurel

En el marco de esta primera formulación algebraica los cocientes del tipo x^5/x^7, es decir, donde el grado del dividendo es menor que el del divisor, no son incluidos como caracteres cósicos; ya que sólo considera para la división el caso en que el dividendo y el divisor son monomios, distinguiéndose dos posibilidades: 1) el grado del dividendo es menor que el del divisor y 2) el grado del dividendo es mayor que el del divisor. En la primera posibilidad *tal partición no se podrá partir y quedará como quebrado*; en la segunda, la regla de Aurel coincide con la actual ($a^m/a^n=a^{m-n}$ con $m>n$).

Segunda formulación algebraica, se encuentra en un contexto donde el progreso en la operatividad con los números negativos y el cero hace posible la inclusión de los cocientes $1/x$, $1/x^2$,.... entre los caracteres cósicos y su operatividad. La formulación surge de haber admitido la operatividad de cantidades negativas para después enmarcarlas en la estructura algorítmica de la relación entre las progresiones aritmética y geométrica. En *La triparty en la Science des Nombres*, Chuquet, (1880/ 1484) construyó una noción de exponente cero y negativo (al parecer no utilizó exponentes fraccionarios). Explica que cada número puede considerarse como cantidad estricta, y así para indicarlo, se puede añadir un cero en la parte superior del número, como por ejemplo, 12^0, 13^0 para indicar 12 o 13. Pero cada número puede considerarse como número primero de una cantidad continua, también dicho número lineal, indicando así: 12^1, 13^1... o bien número superficial cuadrado: 12^2, 13^2 ... y así, sucesivamente, hasta el orden que se quiera (12^0 quiere decir doce; 12^1 indica $12x$; 12^2 significa $12x^2$,...).”

Es importante señalar que el superíndice cero que utiliza Chuquet significa “ausencia de variable”. En este sentido opta por abandonar las distintas nomenclaturas para designar el orden de las raíces, así como el de las potencias de la incógnita, para exponer una forma de denominación unificadora, que facilite las operaciones entre estas entidades.

Así se opera como sigue[10], Chuquet utiliza $.7^{1.\tilde{n}}.$ para denotar $7/x$.

Formulaciones algebraicas–gráficas

Al parecer los convencionalismos algebraicos descritos, fueron marginales a la sintaxis algebraica o al estudio de la *cosa*; dado que carecía de sentido fuera del contexto algebraico. Podemos decir que la aceptación de las potencias mayores a tres fue posible gracias a la introducción de la representación cartesiana de las variables. En el marco de las formulaciones algebraicas–gráficas, los convencionalismos tienen por finalidad dotar de coherencia a ambos elementos, lo algebraico y lo gráfico.

Primera formulación algebraico–gráfica. Hacia finales del XVI se sabía que las curvas $y = kx^n$ $(n = 1, 2, 3, 4,\ldots)$, llamadas de índice n, tenían una propiedad llamada "razón característica". Este conocimiento, según Bos (1975), era propio de la época del cálculo de áreas determinadas por distintas curvas, tanto mecánicas como algebraicas, y al significado que se asocia a las áreas en contextos de variación[11]. Tomando como ejemplo la curva $y = x^2$ se decía que ésta tiene razón característica igual a $1/3$; ya que si tomamos un punto **C** arbitrario de la curva (Figura 1) el área de **AECBA** guarda una proporción de 1:3 respecto del área del rectángulo **ABCD,** es decir**,** el área de **AECBA** es la mitad del área **AECDA**. En general, se sabía de que la razón característica de la curva de índice n es $1/(n+1)$ para todos los enteros positivos n .[12]

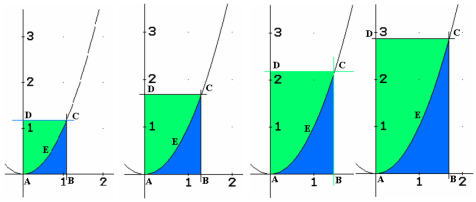


Figura 1. Razón Característica de la curva $y = x^2$

En sus investigaciones acerca de la cuadratura de las curvas, Wallis utilizó lo anterior para convenir que el índice de $y = \sqrt[2]{x}$ debe ser igual a $1/2$ a fin de unificar la noción de razón característica con la noción de índice. Lo mismo puede verse para $y = \sqrt[3]{x}$,cuya razón característica debe ser $3/4=1/(1+1/3)$ por lo que su índice será $1/3$. A continuación Wallis afirma (según Confrey & Dennis, 2000) que el índice apropiado de $y = \sqrt[q]{x^p}$ debe ser p/q y que su razón característica es $1/(1+p/q)$; pero al no tener manera de verificar directamente la razón característica de tales índices, por ejemplo de $y = \sqrt[3]{x^2}$, retoma el principio de *interpolación* el cual afirma que cuando se puede discernir un patrón de cualquier tipo en una sucesión de ejemplos, uno tiene el derecho de aplicar ese patrón para cualesquiera valores intermedios. En el caso que interesa, él hace la siguiente tabla de razones características conocidas ($R(i/j)$ denota la razón característica, desconocida, de índice i/j):

---

10 El contexto de la formulación está relacionada con las soluciones negativas que resultan de la resolución formal de ecuaciones lineales. Es por ello que al parecer uno de los objetivos de la aceptación de los exponentes negativos era dar legitimidad a los números negativos y su operatividad, pues eran usados para la operatividad consistente con los monomios.

11 Por ejemplo es bien conocida la forma en que Galileo estableció su ley de caída de los cuerpos a través de entender el área determinada por una gráfica velocidad-tiempo como la distancia recorrida por el cuerpo.

12 En términos modernos la noción de razón característica se apoya en que $(a > 0)\left(\int_0^a x^n dx\right):a^{n+1} = 1:(n+1)$

q/b	0	2	3	4	5	6	7
1	1=1/1	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
2	1=2/2	2/4	**R(3/2)**	1/3=2/6	**R(5/2)**	1/4=2/8	**R(7/2)**
3	1=3/3	**R(2/3)**	1/2=3/6	**R(4/3)**	**R(5/3)**	1/3=3/9	**R(7/3)**
4	1=4/4	2/3=4/6	**R(3/4)**	1/2=4/8	**R(5/4)**	**R(3/2)**	**R(7/4)**
5	1=5/5	**R(2/5)**	**R(3/5)**	**R(4/5)**	1/2=5/10	**R(6/5)**	**R(7/5)**
6	1=6/6	3/4=6/8	2/3=6/9	**R(2/3)**	**R(5/6)**	1/2=6/12	**R(7/6)**
7	1=7/7	**R(2/7)**	**R(3/7)**	**R(4/7)**	**R(5/7)**	**R(6/7)**	1/2=7/14
8	1=8/8	4/5=8/10	**R(3/8)**	2/3=8/12	**R(5/8)**	**R(3/4)**	**R(7/8)**
9	1=9/9	**R(2/9)**	3/4=9/12	**R(4/9)**	**R(5/9)**	**R(2/3)**	**R(7/9)**

Al aplicar el principio de interpolación sobre la fila 5 se puede conjeturar, por ejemplo, que R(3,5)=5/8 y sobre la columna 3 que R(3,5)=5/8. Razonamiento semejante se puede hacer sobre la fila 10 para establecer que R(3,5)=10/16 y sobre la columna 6 que R(3,5)=10/16.

Wallis también interpreta a los números negativos como índices[13]. Define el índice de $1/x$ como –1, el índice de $1/x^2$ como –2, etc. A continuación él intenta dar coherencia a estos índices y a la noción de razón característica. En el caso de la curva $y = 1/x$ la razón característica debe ser $\frac{1}{-1+1}=\frac{1}{0}=\infty$ [14]. Aceptó este cociente como razonable debido a que el área bajo la curva $1/x$ diverge; el cual, al parecer, era un hecho conocido en la época. Lo anterior puede ser interpretado como que la proporción entre el área de **ABCEFA** (Figura 2) y el área del rectángulo **ABCD** es de 1:0. Cuando la curva es $y=1/x^2$ la razón característica debe ser 1/(-2+1)=1/-1. Aquí, la concepción de Wallis sobre la razón difiere de la aritmética moderna de números negativos. Él no utiliza la igualdad 1/-1 = -1, más bien él construye una coherencia entre diversas representaciones; que es en esencia una convención matemática. Debido a que el área sombreada bajo la curva $y=1/x^2$ es más grande que el área bajo la curva $1/x$, concluye que la razón 1/-1 es mayor que infinito (*ratio plusquam infinita*). Continúa concluyendo que 1/-2 es incluso más grande. Esto explica el plural en el título de su tratado *Arithmetica Infinitorum*, de la cual, la traducción más adecuada sería La Aritmética de los Infinitos.

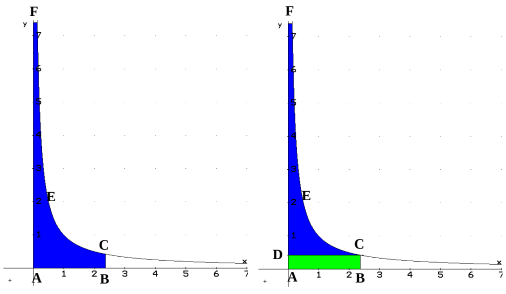


Figura 2. Razón Característica de la curva $y = 1/x$

[13] Deseamos aclarar que a través de la literatura consultada no fue posible determinar claramente los motivos que tuvo Wallis para dar tales definiciones; pero es de suponer que fueron tomadas de las convenciones de los exponentes que ya se trabajaban en esa época en el contexto algebraico (Martínez, 2003).

[14] Lo que hoy se entiende por fracciones, en la época de Wallis se concebía como proporcionalidad por lo que 1 es 0 (nada) como ∞ es a 1.

Lo anterior nos motiva a enfocar nuestra atención en los procesos de integración sistémica de un conjunto de conocimientos. Teóricamente, desde un principio, esta búsqueda de integración, que es una búsqueda de relaciones, puede tener dos salidas: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir, cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Entonces, la convención matemática puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados.

En nuestros ejemplos respecto a las formulaciones de Wallis, la búsqueda de coherencia entre la noción de índice y de razón característica (en donde la razón/proporción posee significados específicos que difiere de considerarla como número) provoca dos convencionalismos: el índice de $y = \sqrt[2]{x}$ como $1/2$ y diversos tipos de infinito representados por $1/0$, $1/\text{-}1$, $1/\text{-}2$, etc. Esto señala el carácter *conveniente y relativo* de la convención matemática respecto a la integración de las nociones de índice y razón característica y las representaciones algebraicas y gráficas. Hoy en día la convención de considerar a las proporciones $1/0$, $1/\text{-}1$, $1/\text{-}2$ como diversos tipos de infinitos no es coherente con la interpretación numérica de las proporciones como números.

De este modo, la convención, o la búsqueda de consensos, al igual que en los ejemplos descritos anteriormente, adquiere una dimensión social fundamental que no podría ser captada si limitáramos nuestra mirada a la construcción de objetos o a su representación, pues aspectos como creencias, ideología y matemáticas estarían excluidos al momento de teorizar sobre la construcción de conocimiento matemático.

Reflexiones finales

Con los ejemplos mostramos el papel de alguna práctica: medir al construir la función "2^x", predecir en el caso de la cinemática y las funciones analíticas, modelar bajo fenomenologías de ingeniería y, finalmente, convenir en el caso de los exponentes no naturales. Los ejemplos muestran la diversidad de situaciones que habrían de considerarse llevando la mirada hacia la socioepistemología.

Este artículo ha querido mostrar cómo opera el enfoque socioepistemológico al centrar su atención en prácticas más que en objetos. Su centración en las prácticas arroja una luz distinta de aquella que produce la centración en objetos, procesos o mediadores. El artículo mostró, mediante ejemplos, el papel que juega la práctica social en la construcción del conocimiento matemático y de cómo se articula con los procesos de representación.

Este artículo si bien pretende posicionar a la Socioepistemología a través de ejemplos, busca sobre todo discurrir sobre el papel de la noción de práctica social en la formación de conocimiento. No se abordan las relaciones de complementariedad o contraposición de cara a otros enfoques teóricos, aunque bien sabemos que existen relaciones con la Semiótica Cultural de Radford, o con el enfoque Ontosemiótico de Díaz–Godino, o aun con la Teoría Antropológica de la Didáctica de Chevallard y colaboradores, o con la Etnomatemática de D'Ambrosio y colaboradores, pero más bien quisimos aportar un elemento adicional, una particular interpretación de la noción de práctica social que juzgamos prometedora para la investigación en matemática educativa. En el futuro inmediato, el enfoque socioepistemológico estará intentando construir elementos de articulación entre los enfoques señalados anteriormente, aunque esa sea otra historia…

Referencias

Alanís, J. et al. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada. México: Cinvestav.

Aurel, M. (1552). *Libro Primero de Arithmetica Algebraica*. Valencia: J. Mey.

Bos, H. (1975). Differentials, Higher-Order Differentials and the derivative in the Leibnizian Calculus. *Archive for History of Exact Sciences, 14*, 1 – 90.

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prædiciere y lo Analítico".* Tesis doctoral. México: Cinvestav.

Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico a la ricerca in matemática educativa. *La matemática e la sua didattica*, *3*, 258 – 273.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Espsilon*, *42*, 14(3), 353 – 369.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24* (2.3), 137 – 168.

Chuquet, N. (1880/1484). Le Triparty en las science des nombres. En A. Marre (Ed.) *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche et fisiche*, (volume *13*, pp. 555 – 659, 693 – 814; volume *14*, pp. 413 – 460).

Confrey, J. & Dennis, D. (2000). La Creación de Exponentes Continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(1), 5 – 31.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4*(2), 103 – 128.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Farfán, R. y Cantoral, R. (2003). *Mathematics Education: A Vision of its Evolution*. Educational Studies in Mathematics 53(3), 255-270.

Fourier, J. (1822). *Théorie Analytique de la Chaleur*. Chez Firmin Didot. Pere et Fils. Libraires pur les Mathématiques. France.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas.* Tesis doctoral no publicada. México: Cinvestav.

López, I. (2005). *La socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Martínez – Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado. México: Cicata – IPN.

Martínez – Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(2), 195 – 218.

Minguer, L. (2004). Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Un estudio de caso: El Instituto Tecnológico de Oaxaca. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*(2), 885 – 889.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral. México: Cicata – IPN.

Newton, I. (1669). De Analysi per equationes infinitas (june 1669). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.), *The mathematical papers of Isaac Newton.* Vol. *II* (1667 – 1700) (pp. 206 – 247). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Radford, (2004). *Semiótica cultural y cognición*. Conferencia dictada en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Tuxtla, Chiapas México. [En red] Disponible en http://laurentian.ca/educ/lradford/Tuxtla3.pdf

Varela, F. et al. (1997). De cuerpo presente. Barcelona: Gedisa.

Ricardo Cantoral
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV
México

E-mail: rcantor@cinvestav.mx

Rosa María Farfán
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV
México

E-mail: rfarfan@cinvestav.mx

Gustavo Martínez-Sierra
Cimate de la UAG
México

E-mail: gmartinez@cimateuagro.org

Javier Lezama
Programa de Matemática Educativa
CICATA del IPN
México

E-mail: jlezamaipn@gmail.com

Elementos de una teoría cultural de la objetivación[1]

Luis Radford [2]

RESUMEN

En este artículo se presentan los lineamientos generales de una teoría cultural de la objetivación –una teoría de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se inspira de escuelas antropológicas e histórico-culturales del conocimiento. Dicha teoría se apoya en una epistemología y una ontología no racionalistas que dan lugar, por un lado, a una concepción antropológica del pensamiento y, por el otro, a una concepción esencialmente social del aprendizaje. De acuerdo con la teoría, lo que caracteriza al pensamiento no es solamente su naturaleza semióticamente mediatizada sino sobre todo su modo de ser en tanto que *praxis reflexiva*. El aprendizaje de las matemáticas es tematizado como la adquisición comunitaria de una forma de reflexión del mundo guiada por modos epistémico-culturales históricamente formados.

- **PALABRAS CLAVE**: Objetivación, pensamiento matemático, semiótica, sentido, significado, significación cultural, signos.

ABSTRACT

In this article, we present the general bases for a cultural theory of objectification. The theory in question deals with the teaching and learning of mathematics and takes its inspiration from some anthropological and historico-cultural schools of knowledge. This theory relies on a non-rationalist epistemology and ontology which give rise, on the one hand, to an anthropological conception of thought, and on the other, to an essentially social conception of learning. According to the theory of objectification, thought is not only characterized by its semiotically mediated nature but more importantly by way of its existence as a *reflexive praxis*. The learning of mathematics is thematized as the acquisition, by the community, of a form of reflection on the world guided by epistemic-cultural modes which have been historically formed.

- **KEY WORDS:** Objectification, mathematical thinking, semiotics, meaning, signification, cultural signification, signs.

Fecha de recepción: Febrero de 2006/ Fecha de aceptación: Abril de 2006

1 An English translation of this article is available at: http://laurentian.ca/educ/lradford/PUBLIC.HTML. Este artículo es resultado de un programa de investigación subvencionado por The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH).

2 Université Laurentienne, Ontario, Canada.

RESUMO

Este artigo apresenta as linhas gerais de uma teoria cultural da objetivação uma teoria da ensino e a aprendizagem das matemáticas que se inspira de escolas antropológicas e histórico-culturais do conhecimento. Tal teoria se apóia em uma epistemologia e uma ontologia não racionalistas que dão lugar, por um lado, a uma concepção antropológica do pensamento e, por outro, a uma concepção essencialmente social da aprendizagem. De acordo com a teoria, o que caracteriza o pensamento não é somente sua natureza semióticamente mediatizada, mas sobre todo seu modo de ser como *praxis reflexiva*. A aprendizagem das matemáticas é tematizado como a aquisição comunitária de uma forma de reflexão do mundo guiada por modos epistémico-culturais historicamente formados.

- **PALAVRAS CHAVES:** Objetivação, pensamento matemático, semiótica, sentido, significado, significação cultural, signos.

RÉSUMÉ

Dans cet article, on présente les bases générales d'une théorie culturelle de l'objectivation. Il s'agit d'une théorie de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques qui s'inspire de certaines écoles anthropologiques et historico-culturelles du savoir. Cette théorie s'appuie sur une épistémologie et une ontologie non rationalistes qui donnent lieu, d'une part, à une conception anthropologique de la pensée et, d'autre part, à une conception essentiellement sociale de l'apprentissage. Selon la théorie de l'objectivation, ce qui caractérise la pensée n'est pas seulement sa nature sémiotiquement médiatisée mais surtout son mode d'être en tant que *praxis réflexive*. L'apprentissage des mathématiques est thématisé comme étant l'acquisition communautaire d'une forme de reflexion du monde guidée par des modes épistémo-culturels historiquement formés.

- **MOTS CLÉS:** Objectivation, pensée mathématique, sémiotique, sens , signification, signification culturelle, signes.

Introducción

Incluso para los empiristas, todo aprendizaje supone la actividad del pensamiento. El pensamiento aparece como el sustrato del aprendizaje, aquello a través del cual se establece la relación entre el ser y el mundo. Curiosamente, a pesar de su importancia, y aun si se habla del pensamiento numérico, geométrico, etc., el pensamiento como concepto en sí no forma parte de las teorías didácticas actuales. Sin duda, una de las razones tiene que ver con la idea popular de que el pensamiento es inobservable. Como afirma el fundador del Constructivismo Radical,

> Entre las actividades humanas más intrigantes que no pueden ser observadas, está pensar (thinking) o reflexionar. A veces pueden inferirse los pensamientos o las reflexiones … pero el proceso real del pensamiento queda invisible así como los conceptos que éste usa y el material crudo del cual está compuesto. (von Glasersfeld, 1995, p. 77)

Esta idea de la inobservabilidad del pensamiento es parte de la influencia de la filosofía racionalista y su concepto del ser. Así,

> El ser cartesiano habita un mundo en el que la actividad material es imposible, pues el pensamiento es concebido como una relación entre el ser y las entidades mentales, las ideas, que no son objetos posibles de actividad material. (Bakhurst, 1988, p. 35)

A estos dos elementos –el sujeto y el objeto– que une el pensamiento, las teorías del aprendizaje añaden otro elemento: el profesor, que viene a completar el famoso triángulo didáctico. A menudo, sin embargo, el profesor es revestido de un papel menor: literalmente el de facilitador del aprendizaje. En las medida en que las teorías didácticas conceptualizan al individuo como sujeto auto-regulado y auto equilibrante, desarraigado de su contexto socio-cultural, capaz de reflexionar como científico que explora los alrededores en busca de fenómenos que confirmen la viabilidad de su saber, en la medida en que el individuo es visto –como lo apunta Martin y sus colaboradores– en tanto que individuo que parece llevar de alguna manera en su propio interior las condiciones de su crecimiento, un ser que solamente necesita un entorno facilitador para alcanzar, a través de la experiencia personal, su plena socializacion y potencial intelectual[3], el profesor aparece, contra la abrumadora evidencia de la constatación cotidiana, como simple catalizador del encuentro entre el alumno y el objeto del saber.

La teoría de la objetivación que se esbozará aquí parte de presupuestos diferentes. En oposición a las corrientes racionalistas e idealistas, ésta aboga por una concepción no mentalista del pensamiento y por una idea de aprendizaje tematizado como adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico-culturales históricamente formados.

En las dos primeras partes del artículo se discuten las bases epistemológicas y ontológicas que dan sustento a la teoría, así como el concepto de pensamiento y su significado antropológico. En las dos últimas partes se aborda el problema de la enseñanza-aprendizaje, en particular a la luz del concepto fundamental de sala de clase como comunidad de aprendizaje.

1. Una concepción no mentalista del pensamiento

En una clase de primer grado de primaria, los alumnos debían resolver un problema sobre una secuencia numérica. La maestra introdujo el problema a través de una historia en la cual una ardilla, al final del verano, lleva cada día dos nueces a su nuevo nido en preparación al invierno que se acerca. En una parte del problema los alumnos debían encontrar el número de

3 Martin (2004), Martin, Sugarman y Thompson (2003).

nueces almacenadas por la ardilla en su nido al final del décimo día, sabiendo que cuando la ardilla encuentra el nido había ya 8 nueces y que la ardilla no come nueces de su provisión de invierno. Cristina, una de las alumnas, empezó a contar de dos en dos: diez, doce, catorce, dieciséis. Como notó que no había pensado en el número del día, decidió empezar el conteo. Sin embargo, hacer las dos cosas al mismo tiempo resultó una tarea muy difícil. Dirigiéndose a Miguel, su compañero de equipo, Cristina dijo: "¡vamos a hacerlo juntos!" Mientras que el resto de la clase continuaba su trabajo en pequeños grupos, Cristina y Miguel fueron al frente del pizarrón y utilizando una regla larga de madera, Cristina empezó a contar de dos en dos, mientras que Miguel contaba los días en voz alta. En la figura 1, Cuando Miguel dice "nueve", Cristina señala con una regla de madera el número 26 sobre una recta numérica colocada arriba del pizarrón, que es el número de nueces acumuladas hasta el día 9. En la figura 2, Miguel, que continuó contando los días, dice "diez", mientras que Cristina desplaza la regla hacia la derecha y señala el número 28, que es la respuesta a la pregunta.

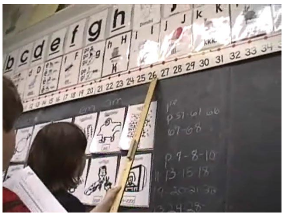


Figura 1. Miguel dice 9 y Cristina señala el número 26.

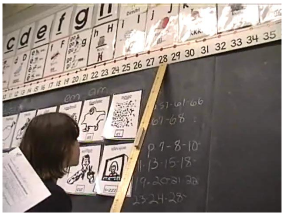


Figura 2. Miguel dice 10 y Cristina señala el número 28.

Es usual que por pensamiento se entienda una especie de vida interior, una serie de procesos mentales sobre ideas que lleva a cabo un individuo. De acuerdo con esta concepción, a partir de los datos dados por la maestra, Cristina y Miguel, habrían recuperado de su memoria la información pertinente para producir una representación mental del problema. Con la ayuda de esta representación, el pensamiento de Cristina y Miguel se hubiese movido a lo largo de los estados de un espacio-problema, procesando informaciones codificadas quizás bajo la forma de representaciones proposicionales, a través de reglas lógicas o de inferencia.

Esta concepción del pensamiento, como "actividad mental" (de Vega, 1986, p. 439), proviene de la interpretación de la filosofía griega por parte de San Agustín a fines del siglo IV, interpretación que operó, en particular, una transformación del significado inicial del término griego *eidos*. Mientras que Homero, entre otros, utilizaba el término *eidos* en el sentido de algo externo, no mental -"lo que uno mira", por ejemplo la figura, la forma, la apariencia[4]- para San Agustín *eidos* se refiere a algo que está *dentro del individuo*[5]. Influenciados por esta

4 Por ejemplo, en la traducción al inglés del Libro VIII, líneas 229-30, de la Ilíada, Homero dice: " Argives, shame on you cowardly creatures, brave in semblance [eidos] only". (Homer, ca. 800 A.-C.). Estoy en deuda con Eva Firla por su ayuda en la etimología del término eidos.

5 Una discusión sobre la manera en que ocurre esta transformación en la concepción del pensamiento en las matemáticas renacentistas se encuentra en Radford (2004).

transformación, los racionalistas del siglo XVII, como Descartes y Leibniz consideraban que las matemáticas pueden practicarse hasta con los ojos cerrados, pues la mente no necesita el concurso de los sentidos ni de la experiencia para alcanzar las verdades matemáticas: los principios que necesitamos para entender los objetos o para percibir sus propiedades, las leyes eternas de la razón, son "principios internos", es decir que están en nuestro interior (Leibniz, 1966, pp. 34-37).

Antropólogos como Geertz han puesto en evidencia las limitaciones de la concepción de las ideas como "cosas en la mente" y del pensamiento como proceso exclusivamente intracerebral:

> La idea comúnmente aceptada según la cual el funcionamiento mental es un proceso intracerebral que puede ser sólo asistido o amplificado en segundo término por los varios dispositivos artificiales que dicho proceso ha permitido al hombre crear, resulta estar completamente equivocada. Al contrario, siendo imposible una definición adaptativa, completamente específica de los procesos neuronales en términos de parámetros intrínsicos, el cerebro humano es completamente dependiente de recursos culturales para su propia operación; y esos recursos no son, en consecuencia, [objetos] añadidos a la actividad mental sino constituyentes de ésta. (Geertz, 1973, p. 76)

La teoría de la objetivación parte de una posición no mentalista del pensamiento y de la actividad mental. Dicha teoría sugiere que el pensamiento es una *praxis cogitans*, esto es una práctica social (Wartofsky, 1979). De manera más precisa, el pensamiento es considerado *una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos*.

En el resto de esta sección serán discutidos los diferentes aspectos de esta definición.

1.1 Mediación semiótica

El carácter mediatizado del pensamiento se refiere al papel, en el sentido de Vygotsky (1981a), que desempeñan los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.) en la realización de la práctica social. Los artefactos no son meras ayudas al pensamiento (como lo plantea la psicología cognitiva) ni simples amplificadores, sino partes constitutivas y consustanciales de éste[6]. Se piensa con y a través de los artefactos culturales, de manera que hay una región externa que, parafraseando a Voloshinov (1973), llamaremos el *territorio del artefacto.* Es en este territorio donde la subjetividad y la objetividad cultural se imbrican mutuamente y en el que el pensamiento encuentra su espacio de acción y la mente se extiende más allá de la piel (Wertsch, 1991).

De acuerdo con la teoría de la objetivación, el pensamiento de Cristina y Miguel no es, pues, algo que transcurre solamente en el plano cerebral de los alumnos. El pensamiento también ocurre en el plano social, en el territorio del artefacto. La regla de madera, la recta numérica, los signos matemáticos sobre la hoja que sostiene Miguel mientras lee detrás de Cristina, son artefactos que *mediatizan* y *materializan* el pensamiento. Esos artefactos son parte integral del pensamiento.

6 Una crítica a la concepción de artefactos como amplificadores se encuentra en Cole (1980).

1.2 La naturaleza reflexiva del pensamiento

La naturaleza reflexiva del pensamiento significa que el pensamiento del individuo no es simple asimilación de una realidad externa (como proponen las escuelas empiristas y conductistas), ni tampoco construcción *ex nihilo* (como proponen ciertas escuelas constructivistas). El pensamiento es una *re-flexión*, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios.

En el ejemplo anterior, el pensamiento de los alumnos se desarrolla a lo largo de una compleja coordinación de actividad perceptual y de acciones semióticamente mediatizadas según la interpretación y los sentidos subjetivos de los alumnos (por ejemplo, reinterpretar el problema sobre una recta numérica, contar de dos en dos, etc.). Al mismo tiempo, el problema sobre el cual los alumnos reflexionan es parte de una realidad históricamente constituida. Problemas sobre secuencias de números (progresiones aritméticas) se encuentran en la matemática babilónica y fueron teorizados luego por los pitagóricos y las diferentes escuelas numerológicas griegas (Robbins, 1921). No sólo dicha realidad no se presenta de manera directa o inmediata, como pensaban los empiristas, sino que tampoco puede ser reconstruida a través de la sola experiencia personal, pues

> Ninguna experiencia personal, por rica que sea, puede llegar a pensar de manera lógica, abstracta o matemática, e individualmente establecer un sistema de ideas. Para hacer esto se requeriría no una vida, sino de miles. (Leontiev, 1968, p. 18)

Uno de los papeles de la cultura (sobre el cual vamos a detenernos en la siguiente sección) es sugerir a los alumnos formas de percibir la realidad y sus fenómenos, formas de apuntar (*viser*), como diría Merleau-Ponty (1945), o formas de intuición, como diría Husserl (1931).

En resumen, dicho de manera más general, la *re-flexividad* del pensamiento consiste en que, desde el punto de vista filogenético, los individuos dan lugar al pensamiento y a los objetos que éste crea. Pero al mismo tiempo, desde el punto de vista ontogenético, en el acto de pensar, un individuo concreto cualquiera es subsumido por su realidad cultural y la historia del pensamiento humano, las cuales orientan su propio pensamiento. “El ser social”, dice Eagleton, “origina el pensamiento, pero al mismo tiempo es abarcado por éste”[7].

1.3 La dimensión antropológica del pensamiento

En la sección precedente se dijo que el pensamiento es considerado como una *re-flexión* mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos. ¿Qué significa que la *re-flexión* que constituye el pensamiento se realice de acuerdo con la *forma o modo de la actividad de los individuos*? Esto significa que la manera en que llegamos a pensar y conocer los objetos del saber está enmarcada por significados culturales que van más allá del contenido mismo de la actividad en cuyo interior ocurre el acto de pensar. Estos significados culturales actúan como enlaces mediadores entre la conciencia individual y la realidad cultural objetiva, y se constituyen

[7] Eagleton (1997,p.12).

en prerrequisito y condición de la actividad individual mental (Ilyenkov, 1977, p. 95). Dichos significados culturales *orientan* la actividad y le dan cierta *forma*. Es por eso que pensar no es algo que simplemente nos ponemos a hacer, de forma más o menos antojadiza, en el transcurso del cual de repente encontramos una buena idea. Si bien es cierto que la actividad práctica sensual, mediatizada por los artefactos, entra en los procesos del pensamiento, en su propio contenido, la manera en que esto ocurre está sujeta a los significados culturales en los que se sostiene la actividad.

He aquí un ejemplo. La diferencia entre el pensamiento del escriba babilónico y el del geómetra griego no se reduce únicamente a los tipos de problemas de los que cada uno de ellos se ocupó, ni en los artefactos utilizados para pensar matemáticamente, ni al hecho de que el primero reflexionaba en un contexto ligado con la administración política y económica, mientras que el segundo lo hacia dentro de un contexto aristocrático-filosófico. La diferencia entre el pensamiento matemático babilónico y el griego tiene que ver con el hecho de que la forma de las actividades que enmarcaron esos pensamientos está igualmente subtendida por una *superestructura simbólica* que, a pesar de su importancia, no ha sido tomada en cuenta en las teorizaciones contemporáneas sobre el concepto de actividad[8]. Esta superestructura simbólica, que en otros trabajos hemos llamado *Sistemas Semióticos de Significación Cultural* (Radford 2003a), incluyen significados culturales tales como concepciones en torno a los objetos matemáticos (su naturaleza, su modo de existencia, su relación con el mundo concreto, etc.) y patrones sociales de producción de significados. El pensamiento del escriba babilónico está enmarcado por un pragmatismo realista en el que cobran vigencia los objetos matemáticos “rectángulo”, “cuadrado”, etc., objetos que el geómetra griego del tiempo de Euclides concibe en término de formas platónicas o abstracciones aristotélicas (ver Figura 3).

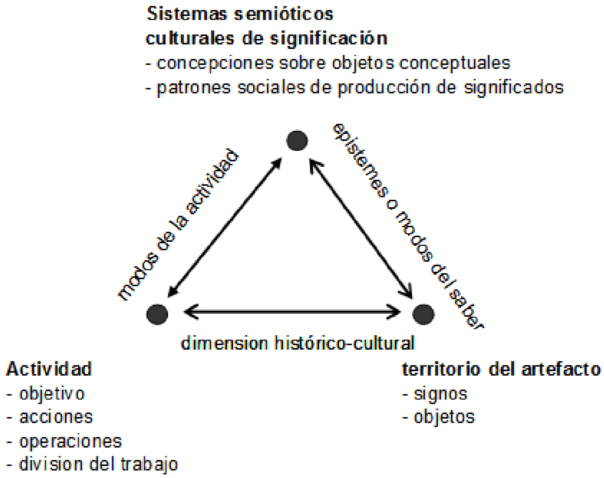


Figura 3. Las flechas muestran la interacción entre los Sistemas Semióticos de Significación Cultural con la actividad y el territorio del artefacto. Dicha interacción general los modos de la actividad y del saber, modos que, en un movimiento dialéctico, vienen a su vez a alimentar a los vértices del triángulo.

8 Leontiev no teorizó la dimensión de la superestructura simbólica que estamos poniendo en evidencia aquí y que es, sin embargo, fundamental para entender el pensamiento en su dimensión antropológica. En la prolongación de la Teoría de la Actividad de Leontiev, hecha por Engeström (1987), dicha superestructura no fue tampoco tomada en cuenta.

En interacción con las actividades (sus objetivos, acciones, distribución del trabajo, etc.) y con la tecnología de la mediación semiótica (el territorio del artefacto), los *Sistemas Semióticos de Significación Cultural* dan lugar, por un lado, a formas o modos de actividad y, por otro lado, a modos específicos del saber o *epistemes* (Foucault, 1966). Mientras que la primera interacción da lugar a maneras particulares en que las actividades son realizadas en un momento histórico, la segunda interacción da lugar a modos de saber específicos que permiten una identificación de los problemas o situaciones "interesantes" y demarcan los métodos, argumentos, evidencias, etc. que serán consideradas válidas en la reflexión que se lleva a cabo sobre los problemas y situaciones en una cultura dada[9].

El triangulo mostrado en la figura 3 ilustra la complejidad de la actividad y la naturaleza diversa de la misma.

La diversidad cultural en las formas de la actividad humana explica, en nuestra perspectiva, la diversidad de formas que toma el pensamiento matemático, y que la historia nos muestra. En vez de ver esas formas históricas como versiones "primitivas" o estados "imperfectos" de un pensamiento que marcha hacia la forma acabada que presenta el pensamiento matemático actual (etnocentrismo), la dimensión antropológica de la teoría de la objetivación considera esas formas como propias de las actividades humanas que la enmarcan y renuncia así a privilegiar la racionalidad occidental como la racionalidad *par excellence*.

Como Spengler (1948, p. 68 y p. 70) sugería hace muchos años, las matemáticas de una cultura no son sino el estilo de la forma con que el hombre percibe su mundo exterior y que, contrario a la idea común, la "esencia" de éstas no es culturalmente invariable. Es precisamente la diversidad cultural la que explica la existencia de universos de números tan diferentes como irreducibles unos a otros (ibid. p. 68).

La manera en que el escriba babilónico, el geómetra griego y el abaquista Renacentista llegan a pensar y a conocer los objetos del saber, la manera en que plantean sus problemas y los considera resueltos, está enmarcada por el modo mismo de la actividad y la episteme cultural correspondiente (Radford, 1997, 2003a, 2003b).

2. Las bases epistemológicas y ontológicas de la Teoría de la objetivación

Cualquier teoría didáctica debe en un momento u otro (a menos de confinarse voluntariamente a una especie de posición ingenua) clarificar su posición ontológica y epistemológica. La posición *ontológica* consiste en precisar el sentido en que la teoría aborda la cuestión de la naturaleza de los objetos conceptuales (en nuestro caso, la naturaleza de los objetos matemáticos, su forma de existencia, etc.). La posición *epistemológica* consiste en precisar la manera en que, según la teoría, esos objetos pueden (o no) llegar a ser conocidos.

9 De allí que no es solamente la acción del sujeto que constituye el esquema del concepto (Piaget) o su sello o emblema (Kant) sino sobre todo el significado de la acción en tanto que momento de la actividad socio-cultural misma (Radford, 2005).

Las teorías didácticas contemporáneas que parten de una aplicación de las matemáticas abrazan a menudo, aun si no es mencionado explícitamente, una ontología realista, y plantean el problema epistemológico en términos de abstracciones. Claro, la situación no es tan simple, como el propio Kant lo reconoció.

Para el realismo, que en un sentido importante es la versión platonista de la racionalidad instrumental (Weber, 1992) que emerge en el renacimiento, la existencia de los objetos matemáticos antecede y es independiente de la actividad de los individuos. Al igual que el platonista, el realista considera que los objetos matemáticos son independientes del tiempo y la cultura. La diferencia es que, mientras los objetos platónicos no se mezclan con el mundo de los mortales, los objetos del realista gobiernan nuestro mundo. Según la ontología realista, esto explica el milagro de la aplicabilidad de las matemáticas a nuestro mundo fenomenal (Colyvan, 2001). Naturalmente, para lograr esto, el realismo hace un acto de fe que consiste en creer que el ascenso de la abstracción hacia los objetos es ciertamente posible. La fe que Platón ponía en el discurso social razonado (logos) y que Descartes ponía en la cogitación consigo mismo, el realismo la pone en el experimento científico.

La posición ontológica y epistemológica de la teoría de la objetivación se aparta de la ontología platonista y realista, y su concepción de los objetos matemáticos como objetos eternos, anteriores a la actividad de los individuos. Al alejarse de la ontología idealista, la teoría se aleja de la idea de que los objetos son productos de una mente que opera replegada sobre sí misma o según las leyes de la lógica (ontología racionalista). La teoría de la objetivación sugiere que los objetos matemáticos son generados históricamente en el curso de la actividad matemática de los individuos. De manera más precisa, los objetos matemáticos *son patrones fijos de actividad reflexiva (en el sentido explicado anteriormente) incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos*.

El objeto círculo, por ejemplo, es un patrón fijo de actividad cuyos orígenes resultan no de la contemplación intelectual de los objetos redondos que los primeros individuos encontraron en su entorno, sino de la actividad sensual que llevó a dichos individuos a notar o a darse cuenta de ella:

> Los hombres pudieron ver el Sol redondo solamente porque redondearon barro con sus manos. Con sus manos dieron forma a la piedra, pulieron sus bordes, le dieron aspecto plano. (Mikhailov, 1980, p. 199)

Esa experiencia sensual laboral queda fijada en el lenguaje, el cual encarna así los significados originales, de manera que

> el significado de la palabra “borde”, “plano”, “línea” no viene de una abstracción de los aspectos generales de las cosas en el proceso de contemplación (Mikhailov, ibid.)

sino de la actividad laboral que se pierde en los orígenes de la humanidad. Lejos de entregarse de lleno a nuestros sentidos, nuestra relación con la naturaleza y el mundo está filtrada por categorías conceptuales y significados culturales que hacen que

> El hombre moderno pueda contemplar la naturaleza solamente a través del prisma de todas las habilidades sociales de trabajo que han sido acumuladas por sus predecesores. (Mikhailov, ibid.)

Terminemos esta sección con una observación general sobre la evolución de los objetos matemáticos que será necesaria para nuestra discusión sobre el aprendizaje. En el curso del tiempo, la actividad laboral va dejando su sello en sus productos conceptuales (Leontiev, 1993, p. 100). Como todo objeto matemático, el concepto de círculo, en tanto que reflexión del mundo en la forma de la actividad de los individuos, ha sido expresado de otras formas a lo largo de la historia. Por ejemplo, a través de una palabra, un dibujo, una fórmula, una tabla numérica. Cada una de esas expresiones ofrece un significado diferente, que se amarra a los anteriores y viene a constituir como diría Husserl capas *noéticas* del objeto. Como es la actividad de los individuos la que forma la raíz genética del objeto conceptual, el objeto posee una dimensión expresiva variada que va más allá de un simple contenido conceptual "científico". Esta dimensión expresiva encierra igualmente aspectos racionales, estéticos y funcionales de su cultura.

3. Aprendizaje como objetivación cultural del saber

3.1 Dos fuentes de elaboración de significados

En las secciones anteriores hemos visto que, desde el punto de vista filogenético, la actividad humana es generadora de los objetos conceptuales, los cuales se transforman a raíz de cambios en las actividades mismas. Desde el punto de vista ontogenético, el problema central es explicar cómo se realiza la adquisición del saber depositado en la cultura: este es un problema fundamental de la didáctica de las matemáticas en particular y del aprendizaje en general.

Las teorías clásicas de la didáctica de las matemáticas plantean el problema en términos de una construcción o re-construcción del saber cultural por parte del alumno[10]. La idea de construcción del saber tiene su origen en la epistemología elaborada por Kant en el siglo XVIII. Para Kant, el individuo no es solamente un pensador ensimismado cuya actividad mental, si es bien realizada, lo llevará a las verdades matemáticas como sostenían los racionalistas (Descartes, Leibniz, etc.); tampoco es un individuo pasivo que recibe las informaciones sensoriales para formar ideas, como proponían los empiristas (Hume, Locke, etc.). Para Kant el pensador es un ser en acción: el individuo es el artesano de su propio pensamiento (esta idea kantiana es analizada en Radford, 2005). En realidad Kant expresa de manera coherente y explícita el cambio epistemomólogico que se venía formando paulatinamente desde la aparición de la manufactura y la emergencia del capitalismo en el Renacimiento y que Arendt (1958) resume de la manera siguiente: la era moderna es marcada por un desplazamiento en la concepción de lo que significa saber; el problema central del conocimiento yace en un desplazamiento que va del *qué* (el objeto del saber) al *cómo* (el proceso), de suerte que, a diferencia del hombre del medioevo, el hombre moderno puede entender solamente aquello que él mismo ha hecho.

10 Naturalmente, hay matices diferentes, según la concepción que la teoría se hace del sujeto que aprende (esto es, del alumno). Partiendo de una posición extrema, el constructivismo radical va más lejos que todas las formas de constructivismo. Brousseau (2004) resume las dificultades a las que se enfrenta dicha teoría afirmando que "En didactique, le constructivisme radical, est une absurdité", y adopta un constructivismo piagetiano más moderado que, inevitablemente, lleva la teoría de situaciones a una serie de paradojas.

Para la teoría de la objetivación, el aprendizaje no consiste en construír o reconstruír un conocimiento. *Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura*. La adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados. Es lo que llamaremos más adelante un proceso de *objetivación*. Por el momento, nos interesa discutir dos fuentes importantes de elaboración de significados que subtienden la adquisición del saber.

El saber depositado en los artefactos

Una de las fuentes de adquisición del saber resulta de nuestro contacto con el mundo material, el mundo de artefactos culturales de nuestro entorno (objetos, instrumentos, etc.) y en el que se encuentra depositada la sabiduría histórica de la actividad cognitiva de las generaciones pasadas. Si bien es cierto que ciertos animales llegan a utilizar artefactos, para el animal el artefacto no llega a adquirir una significación durable. El palo de madera que el chimpancé utiliza para alcanzar una fruta pierde su significado luego que la acción ha sido ejecutada (Köhler, 1951). Es por eso que los animales no conservan artefactos. Además –y este es un elemento fundamental de la cognición humana– al contrario de los animales, el ser humano es *afectado* profundamente por el artefacto: al contacto con éste, el ser humano reestructura sus movimientos (Baudrillard, 1968) y forma capacidades motrices e intelectuales nuevas, como la anticipación, la memoria, la percepción (Vygotsky y Luria, 1994).

El mundo de artefactos aparece, pues, como una fuente importante en el proceso de aprendizaje, pero no es el único. Los objetos no pueden hacer clara la inteligencia histórica encarnada en ellos. Para esto se requiere de su uso en actividades y del *contacto con otras personas* que saben “leer” esa inteligencia y ayudarnos a adquirirla. El lenguaje simbólico-algebraico quedaría reducido a un conjunto de jeroglíficos. La inteligencia de la que es portador dicho lenguaje quedaría sin ser notada sin la actividad social realizada en la escuela. Es en esta dimensión social que constituye para la teoría de la objetivación la segunda fuente esencial del aprendizaje[11].

La interacción social

Aunque la importancia de la dimensión social ha sido subrayada por una infinidad de estudios recientes sobre la interacción en el salón de clases, hay diferencias sutiles en cuanto a su aporte cognitivo (Cobb y Yackel,1996; Sierpinska, 1996; Steinbring, Bartolini Bussi y Sierpinska, 1998;). A menudo, la interacción es vista como negociación de significados o como simple ambiente que ofrece los estímulos de adaptación que requiere el desarrollo cognitivo del alumno. El problema es que el individuo en general y el alumno en particular no encuentran en la sociedad y en el salón de clases solamente una especie de muro con el que se topan y se frotan para adaptarse; no se trata solamente de condiciones “externas” a las que el sujeto debe *acomodar* su actividad. El punto crucial es que las actividades, los medios materiales que las mediatizan y sus objetivos están impregnados de valores científicos, estéticos, éticos, etc. que vienen a recubrir las acciones que realizan los individuos y la reflexión que estas

[11] La escuela histórico-cultural de Vygotsky ha expresado este punto de manera contundente. Ver por ejemplo Leontiev, 1993, pp. 58-59; 1968, pp. 27-29; Vygotsky, 1981b.

acciones exigen. Tal como fue discutido en la primera parte de este artículo, las acciones que los individuos realizan están sumergidas en modos culturales de actividad. Es por eso que el salón de clases no puede verse como un espacio cerrado, replegado en sí mismo, en el cual se negocian las normas del saber, pues esas normas tienen toda una historia cultural y como tal pre-existen a la interacción que ocurre en el salón de clases. Tampoco puede verse como una especie de ambiente biológico en el que el individuo opera según sus mecanismos invariables de adaptación general.

En la perspectiva que estamos sugiriendo, la interacción desempeña un papel diferente. En lugar de desempañar una función meramente de adaptación, de catalizadora o facilitadora, en la perspectiva teórica que estamos esbozando la interacción es consustancial del aprendizaje.

Vemos, pues, que hay dos elementos que desempeñan un papel básico en la adquisición del saber que son el mundo material y la dimensión social. La asignación de significados que reposa sobre esas dimensiones tiene una importancia psicológica profunda en la medida en que es, a la vez, toma de conciencia de conceptos culturales y proceso de formación de las capacidades específicas del individuo. Es por eso que, dentro de nuestra perspectiva, aprender no es simplemente apropiarse de algo o asimilar algo, sino que es el proceso mismo en que se forman nuestras capacidades humanas.

3.2 La actividad de aprendizaje

Un elemento central en el concepto de actividad es el *objetivo* de la misma (Leontiev, 1993). El objetivo puede ser, por ejemplo, que los alumnos elaboren una fórmula algebraica en el contexto de una generalización aritmética, que aprendan un método algebraico de resolución de problemas, que aprendan a demostrar proposiciones geométricas, etc.. Aunque el objetivo es claro para el profesor, en general éste no lo es para los alumnos. Si el objetivo fuese claro par estos últimos, no habría nada por aprender.

Dentro del proyecto didáctico de la clase, para que dicho objetivo se pueda realizar, el profesor propone a los alumnos una serie de problemas matemáticos. Resolver esos problemas se convierte en *fines* que guían las acciones de los alumnos. Estos problemas -cargados desde el principio con un contenido cultural y conceptual- forman trayectorias potenciales para alcanzar el objetivo.

Debemos subrayar que, desde la perspectiva de la teoría de la objetivación, hacer matemáticas no se reduce a resolver problemas. Sin quitarle méritos al problema en la formación del conocimiento (ver por ejemplo Bachelard, 1986), para nosotros la resolución de problemas no es el fin sino *un* medio para alcanzar ese tipo de *praxis cogitans* o reflexión cultural que llamamos pensamiento matemático. De manera, pues, que detrás del objetivo de la lección, yace un objetivo mayor y más importante, el objetivo general de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que es la elaboración por parte del alumno de una reflexión definida como relación *común* y *activa* con su realidad histórico-cultural.

En otras palabras, aprender matemáticas no es simplemente aprender a *hacer* matemáticas (resolver problemas) sino aprender a *ser* en matemáticas. La diferencia entre *hacer* y *ser* es inmensa y, como veremos más adelante, tiene consecuencias importantes no solamente en el diseño de las actividades sino en la organización misma de la clase y el papel que allí juegan alumnos y profesores.

3.3 La objetivación del saber

En forma sucinta, el objetivo mayor de la enseñanza de las matemáticas es que el alumno aprenda a reflexionar de acuerdo con ciertas formas culturales de pensamiento históricamente constituidas que la distinguen de otras formas de reflexión (por ejemplo de tipo literario o musical) en la medida en que en la reflexión matemática, la relación del individuo con el mundo enfatiza ideas en torno a la forma, el número, la medida, el tiempo, el espacio, etc. Es este énfasis el que distingue el pensamiento matemático de otras formas de pensamiento.

Para conseguir ese objetivo, debemos recurrir a la práctica, por la sencilla razón de que no disponemos de un lenguaje que pueda enunciar y capturar en el enunciado (en el sentido clásico del término, es decir, como conjunto articulado de sonidos vocales) el pensamiento matemático. No hay, en efecto, una formulación lingüística posible del pensamiento matemático de cuya lectura -por atenta que sea- pueda resultar la comprensión de éste. El pensamiento, ya lo hemos dicho (Radford, 2003b), está más allá del discurso: es una *praxis cogitans*, algo que se aprende haciendo.

La teoría de la objetivación no ve, sin embargo, dicho aprendizaje como simple imitación o participación conforme a una práctica ya establecida, sino como la fusión entre una subjetividad que busca percibir ese lingüísticamente inarticulable modo de reflexionar y este último que no puede sino *mostrarse* a través de la acción.

Sin duda, hay una relación estrecha entre el pensamiento matemático y sus objetos en el sentido en que estos objetos no pueden ser percibidos sino a través de un pensamiento, el cual, a su vez, en el momento de su constitución ontogenética, debe apuntar hacia uno o más de esos objetos. ¿Pero cómo es esto posible? Para constituirse, el pensamiento parece suponer la existencia del objeto. Por otro lado, el objeto no puede llegar a ser sin el pensamiento (entendido como *praxis cogitans*) que lo produce.

El misterio de esta relación se disuelve si regresamos a lo dicho en la primera parte de este artículo. El objeto matemático concebido como *patrón o patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo constantemente en cambio de la práctica social* no podrá ser percibido, sino es a través de la actividad reflexiva misma.

De allí que para llegar a conocer los objetos y productos del desarrollo cultural es “necesario realizar en torno a los mismos determinada actividad, es decir, una actividad que produzca los rasgos esenciales de aquélla, encarnada, ‘acumulada’ en dichos objetos.” (Leontiev, 1968, p. 21)

La enseñanza consiste en poner y mantener en movimiento actividades contextuales, situadas en el espacio y el tiempo, que se encaminan hacia un patrón fijo de actividad reflexiva incrustada en la cultura.

Ese movimiento, que podría expresarse como el movimiento del proceso al objeto (Sfard, 1991; Gray y Tall, 1994), posee tres características esenciales. Primero, el objeto no es un objeto monolítico u homogéneo. Es un objeto compuesto de *laderas de generalidad* (Radford, en prensa-1). Segundo, desde el punto de vista epistemológico, dichas laderas serán más o menos generales de acuerdo con las características de los significados culturales del patrón fijo de actividad en cuestión (por ejemplo, el movimiento kinestésico que forma el círculo; la fórmula simbólica que lo expresa como conjunto de puntos a igual distancia de su centro, etc.). Tercero, desde el punto de vista cognitivo, dichas laderas de generalidad son notadas de manera *progresiva* por el alumno. El "¡Aha!" que se convirtió tan popular en parte gracias a la teoría de la Gestalt es a lo sumo cierto en tanto que punto final de un largo proceso de toma de conciencia.

El aprendizaje consiste en aprender a notar o percibir esas laderas de generalidad. Como el aprendizaje es *re-flexión*, aprender supone un proceso dialéctico entre sujeto y objeto mediatizado por la cultura, un proceso en el que, a través de su acción (sensorial o intelectual) el sujeto nota o toma conciencia del objeto.

La objetivación es, precisamente, ese proceso social de toma de conciencia progresiva del *eidos* homérico, esto es, de algo frente a nosotros una figura, una forma algo cuya generalidad notamos gradualmente, al mismo tiempo que la dotamos de sentido. Es ese notar que se desvela en el gesto que cuenta o que señala, notar que se descubre en la intención que se plasma en el signo o en el movimiento kinestésico que mediatiza el artefacto en el curso de la actividad práctica sensorial, algo susceptible de convertirse en acción reproducible, cuyo significado apunta hacia ese patrón eidético fijo de acciones incrustadas en la cultura que es el objeto mismo[12].

4. El salón de clases como comunidad de aprendizaje

4.1 Ser-con-otros

El salón de clases es el espacio social en donde el alumno *elabora* esa reflexión definida como relación *común* y *activa* con su realidad histórico-cultural[13]. Es aquí en donde ocurre el encuentro del sujeto y el objeto del saber. La objetivación que permite dicho encuentro no es un proceso individual, sino social. La sociabilidad del proceso, empero, no debe ser entendida como simple interacción de negocios, una especie de juego entre adversarios capitalistas en el que cada uno invierte bienes con la esperanza de terminar con más. La sociabilidad significa aquí el proceso de formación de la conciencia, que Leontiev caracterizaba como *co-sapiencia*, es decir, saber en común o saber-con-otros.

Naturalmente, estas ideas implican una reconceptualización del alumno y su papel en el acto de aprendizaje. En la medida en que las teorías contemporáneas de la didáctica de las matemáticas se amparan del concepto de individuo formulado por Kant y otros filósofos del Siglo de las Luces, la educación se justifica en tanto que ésta asegura la formación de un sujeto autónomo (entendida en el sentido de ser capaz de hacer algo por sí mismo, sin ayuda de los demás). La autonomía es, en efecto, un tema central de la educación moderna que ha servido de fundamento a las teorizaciones del socioconstructivismo (ver, por ejemplo, Yackel and Cobb, 1996) y de la teoría de situaciones (Brousseau, 1986; Brousseau y Gibel, 2005, p. 22). El racionalismo que pesa sobre este concepto de autonomía viene de su alianza con otro concepto clave kantiano: el de la libertad. No puede haber autonomía sin libertad, y la libertad significa el uso conveniente de la Razón según sus propios principios, pues "no vemos los principios sino a través de la razón" (Kant, 1980, p. 119).

12 Ver Radford, 2002, 2003c, 2004.

13 El término *elaborar* debe ser entendido en su sentido etimológico medieval, como *–labMrtus* (de ex-labMrre), es decir de *labor o trabajo sensual conjunto*.

Como el Siglo de las Luces no se planteó la posibilidad de una multiplicidad de razones, sino que postuló la razón occidental como *la* razón, la convivencia en comunidad implica el respeto a un deber que, en el fondo, no es sino una manifestación de esa razón universal, cuyo epitome son las matemáticas. Es esa supuesta universalidad de la razón la que lleva a Kant a fusionar las dimensiones ética, política y epistemológica, y a afirmar que "hacer algo por deber es obedecer a la razón." (Kant, 1980, p. 129).

Para la teoría de la objetivación, el funcionamiento del salón de clases y el papel del profesor no se limitan a buscar el logro de la autonomía. Más importante es aprender a vivir en la comunidad que es el salón de clases (en un sentido amplio), aprender a estar con otros, abrirse a la comprensión de otras voces y otras conciencias, en pocas palabras, a *ser-con-otros* (Radford, en prensa-2).

Como "lo social es irreducible a los individuos, por muy numerosos que éstos sean" (Todorov, 1984, p. 19), la sociabilidad del salón de clases significa una unión a través de vínculos y relaciones que son prerrequisitos de esa reflexión que hemos mencionado anteriormente, definida como relación *común* y *activa* que elabora el alumno con su realidad histórico-cultural. Esa sociabilidad no solamente deja su huella en el contenido conceptual perseguido, sino que es consustancial de éste.

La naturaleza intrínsicamente social del saber y del pensamiento matemático nos ha llevado, pues, a concebir la sala de clase como una comunidad de aprendizaje, cuyo funcionamiento está orientado a la objetivación del saber. Sus miembros trabajan de forma que:

- la comunidad permite la realización personal de cada individuo;
- cada miembro de la comunidad tiene su lugar;
- cada miembro es respetado;
- cada miembro respeta los otros y los valores de su comunidad;
- la comunidad es flexible en las ideas y sus formas de expresión;
- la comunidad abre espacio a la subversión a fin de asegurar:

  – la modification,
  – el cambio
  – y su transformación

Ser miembro de la comunidad no es algo que va de sí. Para ser miembro, los alumnos son alentados a:

- compartir los objetivos de la comunidad;
- implicarse en las acciones del salón de clases;
- comunicar con los otros.

Queremos insistir en que los lineamientos anteriores no son simplemente códigos de conducta, sino, al contrario, son índices de formas de *ser* en matemáticas (y por consiguiente de *saber* matemáticas) en el sentido más estricto del término.

Para resumir las ideas anteriores, subrayemos el hecho de que, para la teoría de la objetivación, la autonomía no es suficiente para dar cuenta de la forma de ser en matemáticas. El alumno que resuelve con éxito problemas, pero que es incapaz de explicarse o de entender o interesarse en las soluciones de los otros o de ayudar a los otros a comprender la suya está apenas a medio camino de lo que entendemos por éxito en matemáticas. Es por eso que el profesor dispone de una serie de *acciones de inclusión*. Estas acciones son concebidas de manera que el alumno que resuelve correctamente problemas matemáticos sin poder atender a la dimensión interpersonal de la comunidad gane poco a poco su espacio en la misma[14]. La idea de autonomía como ser autosuficiente es remplazada por la idea de *ser-con-otros*. En vez de concebir la clase como espacio de negociación personal de significados o como medio que enfrenta al alumno, la clase colabora y coopera con el alumno para que éste se convierta en parte de la comunidad.

4.2 Tres fases de la actividad del salón de clases

El trabajo en pequeños grupos

Para implementar la comunidad de aprendizaje, el profesor favorece el trabajo en pequeños grupos, los cuales pueden, en el curso de la lección de matemáticas intercambiar ideas con otros grupos. De esa cuenta, la ingeniería didáctica (Artigue, 1988) no se limita al diseño de los problemas matemáticos sino incluye una gestión del salón de clases operacional con los principios comunitarios mencionados anteriormente.

En cada pequeño grupo, los alumnos se apoyan mutuamente para alcanzar la solución de los problemas que se les ha dado. Los alumnos y el profesor están conscientes de que hay diferencias individuales que llevan a formas diferentes de participación. Incluso participaciones que parecen “menos profundas” (como las participaciones periféricas, en el sentido de Lave y Wenger, 1991) son bienvenidas, a condición de que el alumno en cuestión *esté-con-su-grupo*, esto es, que el alumno por ejemplo esté atento a lo que el grupo está discutiendo, solicite explicaciones que le permitan seguir la discusión y las acciones, colabore con su grupo, etc.

El profesor debe proponer tareas y problemas que conlleven a la objetivación del saber. Ciertas condiciones deben ser cumplidas. Por ejemplo, para mantener una reflexión sostenida entre los miembros del grupo, con el profesor y luego con otros grupos, los problemas deben ser suficientemente complejos para favorecer la aparición de diversas formas de abordar el problema y engendrar así la discusión.

En nuestro modelo, el profesor circula entre los grupos y discute con los alumnos. Aunque en general el profesor deja a los alumnos discutir entre ellos sin intervenir innecesariamente, éste va intervenir en momentos en que, por ejemplo, cree que la discusión se ha estancado o que los alumnos no han ido suficientemente lejos como se esperaba.

Para ilustrar estos principios, veamos un extracto de una lección sobre la interpretación del movimiento en una clase de décimo grado (15-16 años). La lección incluía un artefacto que mide la distancia a un objeto a través de la emisión-recepción de ondas (Calculador Based Ranger o CBR; ver figura 4).

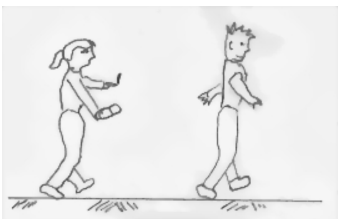
---

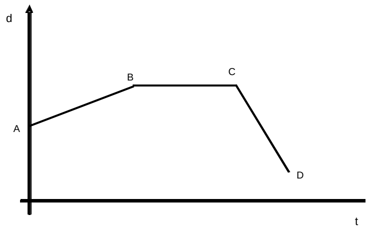
[14] Ver nuestro libro, *Communication et apprentissage* (Radford y Demers, 2004).

Figure 4. El Calculator Based Ranger® (a la izquierda) es un artefacto concebido para estudiar los objetos en movimiento: a través de la emisión de ondas, el CBR recoge datos de su distancia al objeto en cuestión. Al conectarse a una calculadora gráfica (por ejemplo, TI-83+®, mostrada a la derecha), es posible obtener gráficas espacio-tiempo, velocidad-tiempo, etc.

Los alumnos habían empezado a utilizar el CBR en noveno grado. El enunciado de uno de los problemas dado a los alumnos fue el siguiente:

> Dos alumnos, Pierre et Marthe, se colocan a una distancia de un metro y empiezan a caminar en línea recta. Marthe, que está detrás de Pierre, lleva una calculadora conectada a un CBR. El gráfico obtenido se encuentra reproducido abajo. Describan cómo Pierre y Marthe han podido hacer para obtener ese gráfico.





En el problema que seguía en el diseño de la actividad, los alumnos debían verificar su hipótesis, efectuando la marcha en uno de los corredores de la escuela.

Como de costumbre, los alumnos trabajaron en pequeños grupos de 3. En los problemas anteriores, los alumnos habían sido confrontados con situaciones de movimiento en las que uno de los dos, el CBR o el objeto, quedaban fijos. En este caso, los dos están en movimiento. Como esperábamos, las dificultades conceptuales fueron importantes. En general, los alumnos transformaban el enunciado del problema en uno que podían resolver: los alumnos suponían que Marthe no se mueve. Esto queda ilustrado a través de la discusión que tuvieron Samuel, Carla y Jenny de la cual reproducimos a continuación algunas partes:

1. Samuel: Ok, Pierre se mueve despacio de « A » a « B » … Se detuvo algunos segundos (ver figura 5, foto 1), luego corrió a D (figura 5, foto 2).

2. Carla: Ah, Sí! caminó, se detuvo, corrió.

3. Jenny: Mm-hmm.

4. Samuel: Espera, espera un segundo… [Pierre] regresó verdaderamente rápido.

5. Carla: Es cierto. Empezó despacio después *(inaudible)* luego se detuvo, luego corrió.

6. Samuel: Sí, hacia atrás.

7. Jenny: (dirigiéndose a Carla) Sí, hacia atrás, porque [el segmento] baja (haciendo un gesto hacia abajo con la mano; ver figura 5, foto 3).

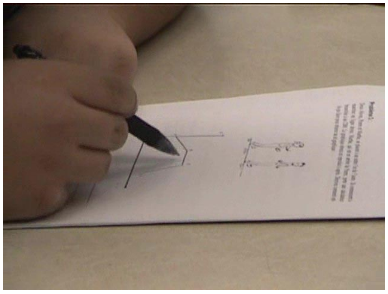


Foto 1:…Se detuvo algunos segundos …(línea 1).

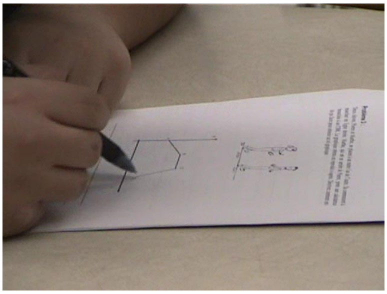


Foto 2: … luego corrió a D (línea 1).

Foto 3: porque [el segmento] baja.

Figura 5. Fotos 1 a 3.

Nuestro interés aquí no es entrar en un análisis de errores, sino de mostrar elementos del proceso social de objetivación del saber. Conviene notar, a ese respecto, que no consideramos la intervención de Carla en la línea 2 como simple réplica o imitación de la preposición enunciada por Samuel en la línea 1. Desde la perspectiva de la objetivación, Carla se *apropia* la interpretación del fenómeno que le es ofrecida por Samuel. La apropiación pasa por una verbalización que Carla reformula en términos más breves (por ejemplo, no hay alusión a las letras A, B. etc.). La preposición de Samuel y el movimiento gestual hechos con la pluma sobre el gráfico son para Carla la materia prima a partir de la cual ella alcanza a ver algo que antes no veía.

Si Samuel ofrece a Carla acceso a una primera interpretación del problema (por rudimentaria que ésta sea), a su vez, la reformulación de Carla permite a Samuel darse cuenta de que hay algo importante que ha quedado sin atenderse: que, para dar cuenta de la diferencia de inclinaciones de los segmentos, en la historia del problema Pierre ha debido regresar "verdaderamente rápido" (línea 4). Carla reformula de nuevo la idea y, en la línea 6, Samuel insiste en que Pierre no solamente ha debido correr más rápido, sino en cierta dirección ("hacia atrás"). En la línea 7, haciendo un gesto con la mano (ver Figura 5, foto 3), Jenny propone una razón.

Los alumnos continúan discutiendo por un buen momento. La interpretación obtenida no convence a Carla y a Jenny, pues ésta asume que Marthe no camina.

La discusión continúa entre ellos:

8. Jenny: No … heuu… ¡(los dos) tienen que caminar!

9. Samuel: Si ella hiciera eso [es decir, caminara] exactamente a la misma distancia [de Pierre] … como si ella hiciera *esto* (ver el gesto en la figura 6), sería una línea plana [es decir horizontal] (…) por lo tanto ¡ella debe quedarse quieta y él debe moverse!

10. Jenny: ¡Pero eso [el enunciado del problema] dice que los dos caminan! (…)

11. Samuel: (después de un momento de silencio) Talvez ella camina, pero él camina un poco más rápido que ella.

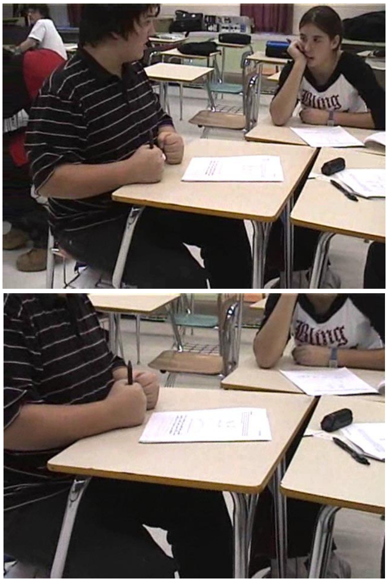


Figura 6. Para simular el caso en que Pierre y Marthe caminan,Samuel desplaza en forma continua las manos de derecha a izquierda, dejándolas a la misma distancia.

En este momento, la descripción del movimiento deja de ser la descripción respecto a un punto fijo y alcanza la descripción del movimiento relativo. A través de ese intercambio, los alumnos consiguen acercarse un poco más a la forma cultural de reflexión vehiculado por la actividad. Será necesaria la expresión corporal con el CBR y simbólica del movimiento (a través de la experiencia física en el corredor de la escuela y luego el cálculo de las ecuaciones de los segmentos) para que los alumnos alcancen una objetivación mayor.

Intercambio entre pequeños grupos

Las reflexiones producidas por los pequeños grupos son, a menudo, objeto de intercambio. Un grupo puede intercambiar sus soluciones con otro grupo con el fin de entender otros puntos de vista y mejorar los propios. La figura 7 muestra el encuentro de dos grupos de alumnos sobre el problema de Pierre y Marthe. Los grupos llegaron a un punto en que un acuerdo era imposible. Marc y su grupo planteaban la explicación en términos de cambios de velocidad. Por el contrario, Dona y su grupo afirmaban que la velocidad de Pierre con relación a Marthe es constante. Ante la imposibilidad de poder llegar a un consenso, los alumnos optaron por llamar a la profesora. En la figura 7, Marc (a la izquierda) explica su razonamiento a la profesora (de píe, detrás de los alumnos):

1. Marc: ¿Y si los dos comienzan a la misma velocidad, luego él empieza a correr más rápido? (Marc apoya su argumento con un gesto de manos)

2. Profesora: ¿Tú supones que el muchacho [Pierre] camina cada vez más rápido?

3. Dona: (oponiéndose a la idea) ¡La velocidad es constante! (…)¡No hay curvas! Eso quiere decir que él [Pierre] camina la misma distancia por segundo.

Figura 7. Arriba, la discusión entre los Grupos. Abajo, Marc explica la solución de su grupo a la profesora, que aparece en la foto de píe, entre Marc y Dona.

La profesora sugiere a los alumnos pensar en la situación de dos móviles que viajan a 80 k/h y 100 k/h. Marc se da cuenta de que el aumento de distancia no significa necesariamente un aumento de velocidad. La profesora se cerciora de que los otros alumnos del grupo de Marc hayan entendido la diferencia (dice, por ejemplo: "tú, Edgar ¿qué piensas ahora?") y aprovecha las circunstancias para hacer reflexionar a los alumnos sobre el efecto en las gráficas que tendría un movimiento de velocidad que aumenta, como Marc proponía en la línea 1.

En este caso, los alumnos notan las diferencias entre los argumentos e interpretaciones. Sin embargo, muchas veces los alumnos no se dan cuenta de que los argumentos presentados son diferentes o tienden a minimizar las diferencias. Una de las dificultades en la adquisición de formas de reflexión matemática es el de notar las diferencias entre los argumentos. Naturalmente, tanto en un caso como en el otro, el profesor desempeña un papel crucial. En los dos casos, el profesor entra en la zona de desarrollo próximo del grupo. Lo que es más importante es que el profesor no entra a esa zona de manera neutra, sino con un proyecto conceptual preciso.

Discusiones generales

La discusión general es otra manera de intercambiar ideas y discutirlas. Es otro momento que posee el profesor para lanzar la discusión en puntos que requieren mayor profundidad de acuerdo con los estándares curriculares. Por ejemplo, durante la discusión general del problema de Pierre y Marte, la profesora aprovecha para subrayar algo sobre lo cual no todos los grupos habían recapacitado, a saber que la posición del segmento BC no significa necesariamente que Pierre y Marthe están detenidos ni que la posición del segmento CD significa necesariamente que Pierre camina en la dirección de Marthe. En la figura 8, dos alumnos ejecutan la marcha frente a toda la clase, mientras Susan, la tercera alumna de ese grupo (no visible en la foto), explica a toda la clase:

1. Susan : Hem, la persona que estaba enfrente caminaba más rápido que la que estaba atrás, eso lograba una distancia mayor entre el CBR y el punto objetivo. Luego … hem… en seguida B y C en nuestro diagrama [Pierre y Marthe] caminaban a la misma velocidad, por tanto había la misma distancia entre ellos. Luego, … ¿tú?

2. Profesora :Sí, ¡continua!

3. Susan: luego … hem … al final, la persona que estaba atrás camina más rápido para acercarse a la persona que estaba adelante (ver figura 8).

Figura 8. El alumno que camina atrás se acerca al otro alumno

Síntesis

Algunas teorías de la didáctica de las matemáticas han excluido intencionalmente los aspectos psicológicos del aprendizaje y se han ocupado de las situaciones matemáticas que pueden favorecer la emergencia de razonamientos matemáticos precisos. Tal es el caso de la teoría de situaciones. Por el contrario, otras teorías se han detenido en los mecanismos de negociación de significados en el aula y la manera en que esa negociación explica la construcción de representaciones que se hace el alumno del mundo. Tal es el caso del socio-constructivismo. La deuda intelectual que tiene la teoría de la objetivación con esas teorías es inmensa, y nuestras referencias a ellas no deben ser vistas negativamente. Dichas teorías aparecen sustentadas por principios fundamentales y operacionales claros que les confieren una solidez impecable. Sin embargo, la teoría de la objetivación parte de otros principios. Por un lado, ésta parte de la idea de que la dimensión psicológica debe ser objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas. Por otro lado, sugiere que los significados que circulan en el aula no pueden ser confinados a la dimensión interactiva que ocurre en el aula misma, sino que tienen que ser conceptualizados en el contexto de su dimensión histórico-cultural.

De esa cuenta, la teoría de la objetivación propone una didáctica anclada en principios en los que el aprendizaje es visto en tanto que actividad social (*praxis cogitans*) arraigada en una tradición cultural que la antecede. Sus principios fundamentales se articulan alrededor de cinco conceptos relacionados entre sí.

El primero es un concepto de orden psicológico: el concepto de *pensamiento*, elaborado en términos no mentalistas. Hemos propuesto que el pensamiento es sobre todo una forma de *re-flexión* activa sobre el mundo, mediatizada por artefactos, el cuerpo (a través de la percepción, gestos, movimientos, etc.), el lenguaje, los signos, etc. Este concepto de *re-flexión* difiere del concepto idealista y racionalista en el que la reflexión "no es otra cosa que una atención a aquello que ya está en nosotros" (Leibniz, 1966, p. 36), y que la psicología cognitiva contemporánea llama a menudo meta-cognición. Para la teoría de la objetivación, la *re-flexión* es un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios. Dicha concepción se inscribe en una

> forma peculiar de cognición en la que el acto del conocimiento altera lo que busca. Al tratar de entenderme yo mismo y mi condición, no puedo nunca quedarme idéntico a mí mismo, pues el yo que estaba entendiendo al igual que el yo entendido son ahora diferentes de lo que eran

> antes. Y si quisiera entender todo esto, todo este proceso sería de nuevo puesto en marcha (…) Como este saber también mueve a la gente a cambiar sus condiciones de manera práctica, éste se vuelve una especie de fuerza política y social, una parte de la situación material examinada y no mera reflexion [contemplativa] sobre algo. (Eagleton, 1997, p. 4)

El segundo concepto de la teoría es de orden socio-cultural. Es el concepto de aprendizaje. El aprendizaje es visto como la actividad a través de la cual los individuos entran en relación no solamente con el mundo de los objetos culturales (plano sujeto-objeto) sino con otros individuos (plano sujeto-sujeto o plano de la interacción) y adquieren, en el seguimiento común del objetivo y en el uso social de signos y artefactos, la experiencia humana (Leontiev, 1993).

Este concepto socio-cultural se imbrica inmediatamente con otro –el tercer concepto de la teoría– de naturaleza epistemológica. Como toda actividad, el aprendizaje está enmarcado por *sistemas semióticos de significación cultural* que "naturalizan" las formas de cuestionamiento y de investigación del mundo. Aristóteles hubiese probablemente incitado a nuestros alumnos a plantear y a estudiar el problema de Pierre y Marthe en términos diferentes, dado que dentro del marco aristotélico de referencia, no son el tiempo y el espacio los que describen al movimiento sino, al contrario, el tiempo es un derivado del movimiento[15]. Nuestros alumnos pertenecen a una cultura en donde la medida del tiempo se ha vuelto omnipresente, midiendo no sólo el movimiento sino la labor humana, el crecimiento del dinero (tazas de interés), etc., una cultura en donde

> La temporalidad de la experiencia –esta noción del tiempo como el marco dentro del cual las formas de vida se encuentran inmersas y llevan su existencia– es la característica del mundo moderno. (Bender y Wellbery, 1991, p.1)

Los conceptos anteriores permiten reformular, en términos generales, el aprendizaje de las matemáticas como la adquisición comunitaria de una forma de reflexión del mundo guiada por modos epistémico-culturales históricamente formados.

Ahora bien, como el aprendizaje es siempre acerca de algo, los conceptos anteriores vienen a ser completados por un cuarto concepto de naturaleza ontológica –el de objetos matemáticos, que hemos definido como *patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo constantemente en cambio de la práctica social mediatizada por los artefactos.*

Para volver operacional la teoría en su vertiente ontogenética, fue necesario introducir un quinto concepto de naturaleza semiótico-cognitiva –el de objetivación o toma de conciencia subjetiva del objeto cultural. En este contexto, y a la luz de los conceptos fundamentales anteriores, el aprendizaje se define como proceso social

---

15 "We take cognizance of time, when we have defined the movement by defining the before and after; and only then we say that time has been (has elapsed) when we perceive the before and after in the movement…for, when we think [noesomen] that the extremities are other than the middle, and the soul pronounces the present/instants [nun] to be two, the one before, the other after, it is only then that we say that this is time" (Physics IV, 11, 219a 22-25; 26-29).

de *objetivación* de esos patrones externos de acción fijos en la cultura.

Desde el punto de vista metodológico, nuestro concepto no mentalista ni racionalista del pensamiento nos conduce a prestar atención a los medios semióticos de objetivación que utiliza el alumno en un esfuerzo que es, a la vez, elaboración de significados y toma de conciencia de los objetos conceptuales. Las fotos que hemos incluido no tienen como fin "embellecer el texto" sino, precisamente, mostrar algunos de esos medios semióticos de objetivación, como los gestos, el lenguaje, los símbolos. Gestos, lenguaje, símbolos, se convierten así en constituyentes mismos del acto cognitivo que posiciona el objeto conceptual no dentro de la cabeza sino en el plano social. Los cortos ejemplos del salón de clases mencionados al inicio y al final del artículo, dan una idea de la manera en que la teoría indaga esa objetivación del saber que se mueve a lo largo de los planos de la interacción y de la acción mediatizada (el territorio del artefacto)[16].

Finalmente, nuestra posición teórica respecto al aprendizaje conlleva a un replanteamiento del concepto del individuo que aprende. Como lo hemos mencionado, el concepto de individuo de la era moderna que aparece con la emergencia del capitalismo en los siglos XV y XVI, está fundamentado en el concepto de autonomía y de libertad. La teoría de la objetivación parte de otro punto y ofrece un concepto diferente: el individuo es individuo en tanto que es *ser-con-otros*.

Referencias

Arendt, H. (1958).*The Human Condition*: The University of Chicago Press.

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308.

Bachelard, G. (1986). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Bakhurst, D. (1988). Activity, Consciousness and Communication. *The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition*, *10*(2), 31-39.

Baudrillard, J. (1968). *Le système des objets*. Paris: Gallimard.

Bender, J. y Wellbery, D. E. (1991). *Chronotypes: The Construction of Time*. Palo Alto: Stanford University Press.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

[16] Ejemplos detallados pueden encontrarse en Radford, 2000, 2003c; Radford, Bardini y Sabena, 2005; Sabena, Radford y Bardini, 2005.

Brousseau, G. (2004). *Une modélisation de l'enseignement des mathématiques*. Conferencia plenaria presentada en el Convegno di didattica della matematica, 24-25 de Septiembre, Locarno, Suiza.

Brousseau, G. y P. Gibel (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 13-58.

Cobb, P. y Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational Psychologist, 31*(34), 175-190.

Cole, M., y Griffin, P. (1980). Cultural amplifiers reconsidered. In D. R. Olson (Ed.), *The Social Foundations of Language and Thought, Essays in Honor of Jerome S. Bruner* (pp. 343-364). New York/London: W. W. Norton & Company.

Colyvan, M. (2001). The miracle of applied mathematics. *Synthese*, *127*, 265-277.

de Vega, M. (1986). *Introduccion a la psicologia cognitiva.* Mexico: Alianza Editorial Mexicana.

Eagleton, T. (1997). *Marx*. London, Phoenix.

Engeström, Y. (1987). *Learning by Expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research*. Helsinki, Orienta-Konsultit Oy.

Foucault, M. (1966). *Les mots et les choses.* Paris: Éditions Gallimard.

Geertz, C. (1973). *The Interpretation of Cultures*. New York: Basic Books.

Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26* (2), 115– 141.

Homer (ca. 800 A.-C.). *The Iliad.* The Internet Classics, translated by Samuel Butler. http:// classics.mit.edu/Homer/iliad.html.

Husserl, E. (1931). *Ideas. General Introduction to Pure Phenomenology.* London, New York: George Allen & Unwin.

Ilyenkov, E. (1977). The Concept of the Ideal. *Philosophy in the USSR: Problems of Dialectical Materialism* (pp. 71-99). Moscow: Progress Publishers.

Kant, E. (1980). *Réflexions sur l'éducation*. Paris: Vrin.

Köhler, W. (1951). *The Mentality of Apes*. New York: The Humanities Press / London: Routledge and Kegan Paul.

Lave, J. y E. Wenger (1991). *Situated learning; legitimate peripheral participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Leibniz, G. W. (1966). *Nouveaux essais sur l'entendement humain.* Paris: Garnier Flammarion.

Leontiev, A. N. (1968). El hombre y la cultura. En *El hombre y la cultura: problemas téoricos sobre educación* (pp. 9-48). México: Editorial Grijalbo.

Leontiev, A. N. (1993). *Actividad, conciencia y personalidad*. México: ASBE Editorial.

Martin, J. (2004). The Educational Inadequacy of Conceptions of Self in Educational Psychology. *Interchange: A quarterly review of Education*, *35*, 185-208.

Martin, J., Sugarman, J. y Thompson, J. (2003). *Psychology and the Question of Agency*. New York: SUNY.

Merleau-Ponty, M. (1945). *Phénomenologie de la perception*. Paris: Gallimard.

Mikhailov, F. T. (1980) *The Riddle of the Self*. Moscow: Progress Publishers.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26-33.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(3), 237-268.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *22*(2), 14-23.

Radford, L. (2003a). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa: Legas Publishing.

Radford, L. (2003b). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(2), 123-150.

Radford, L. (2003c). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità [Sensible Things, Essences, Mathematical Objects and other ambiguities], *La Matematica e la sua didattic*a, 2004, no. 1, 4-23. [Traducción al inglés en: http://laurentian.ca/educ/lradford/essences.pdf]

Radford, L. (2005). The semiotics of the schema. Kant, Piaget, and the Calculator. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign. Grounding Mathematics Education* (pp. 137-152). New York: Springer.

Radford, L. (en prensa-1). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns – A semiotic Perspective. *Proceedings of the 28th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA), Mérida, Yucatán, México.*

Radford, L. (en prensa-2). Semiótica cultural y cognición. En: R. Cantoral y O. Covián (Eds.), *Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica*. México.

Radford, L., Bardini, C., y Sabena, C. (2005). Perceptual semiosis and the microgenesis of algebraic generalizations. Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4), 17 - 21 February 2005, Sant Feliu de Guíxols, Spain. [http://laurentian.ca/educ/lradford/cerme4.pdf]

Radford, L. y Demers, S. (2004). *Communication et apprentissage. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques*. Ottawa: Centre franco-ontarien des ressources pédagogiques.

Robbins, F. E. (1921). The Tradition of Greek Arithmology. *Classical Philology*, *16*(2), 97-123.

Sabena, C., Radford, L. y Bardini, C. (2005). Synchronizing gestures, words and actions in pattern generalizations. In H. L. Chick, J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Melbourne, Australia, Vol. 4, pp. 129-136.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sierpinska, A. (1996). Interactionnisme et théorie des situations : Format d'interaction et Contrat didactique. En D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, Séminaires 1996* (pp. 5-37). Grenoble: Université Joseph Fourier.

Spengler, O. (1948). *Le déclin de l'Occident*. Paris: Gallimard.

Steinbring, H., Bartolini Bussi, M. y Sierpinska, A. (Eds.) (1998). *Language and Communication in the Mathematics Classroom*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Todorov, T. (1984). *Mikhail Bakhtin: The Dialogical Principle*. Minneapolis, London: University of Minnesota Press.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. London, Wasington, D.C: The Falmer Press.

Voloshinov, V. N. (1973). *Marxism and the Philosophy of Language.* Cambridge Massachusetts, London, England: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1981a). The instrumental method in psychology. En J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 135-143). Armonk, N. Y.: Sharpe.

Vygotsky, L. S. (1981b). The development of higher mental functions. En J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 144-188). Armonk, N. Y.: Sharpe.

Vygotsky, L. S. y A. Luria (1994). Tool and symbol in child development. En R. van der Veer y J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky Reader* (pp. 99-174). Oxford: Blackwell.

Wartofsky, M. (1979). *Models, Representation and the Scientific Understanding.* Dordrecht: D. Reidel.

Weber, M. (1992). The Protestant Ethic and the Spirit of Capitalism. London New York, Routledge.

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the Mind. A Sociocultural Approach to Mediate Action*. Cambridge, Ma: Harvard University Press.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

Luis Radford
Université Laurentienne
Canada

E-mail: Lradford@laurentian.ca

Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta

Juan D. Godino [1]
Vicenç Font [2]
Miguel R. Wilhelmi [3]

RESUMEN

En este trabajo aplicamos algunas nociones del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática al análisis de una lección sobre la suma y la resta de un libro de 5º grado de educación primaria del estado español. La finalidad es doble: (1) ilustrar la técnica de análisis de textos matemáticos propuesta por el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática y (2) identificar criterios de idoneidad de unidades didácticas para el estudio de las estructuras aditivas en educación primaria. Los resultados obtenidos pueden ser de utilidad para la formación de profesores de matemáticas.

• **PALABRAS CLAVE:** Idoneidad didáctica, conflictos semióticos, análisis textos matemáticos, formación profesores.

ABSTRACT

In this paper, we apply some theoretical notions of the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction to analyse a lesson on addition and subtraction taken from a Spanish textbook directed to the fifth grade in primary education. Our aims are: (1) to illustrate a technique for analysing mathematics textbooks based on the onto-semiotic approach, and (2) to identify suitability criteria for developing didactical units to study the additive structures in primary education. The results obtained might be useful in the training of prospective mathematics teachers.

• **KEY WORDS:** Didactical aptitude, semiotic conflicts, analysis of mathematical texts, teachers training.

RESUMO

Neste trabalho aplicamos algumas noções do enfoque ontosemiótico da cognição e instrução matemática al análise de uma lição sobre a soma e a divisão de um livro do

---

Fecha de recepción: Enero de 2006/ Fecha de aceptación: Mayo de 2006

1 Universidad de Granada.

2 Universidad de Barcelona.

3 Universidad Pública de Navarra.

ensino fundamental do estado espanhol. A finalidade é dupla: (1) ilustrar a técnica de análise de textos matemáticos proposta pelo enfoque ontosemiótico da cognição matemática e (2) identificar critérios de idoneidade de unidades didáticas para o estudo das estruturas aditivas na educação fundamental. Os resultados obtidos podem ser de utilidade para a formação de professores de matemáticas.

• **PALAVRAS CHAVE:** Idoneidade didática, conflitos semióticos, análise textos matemáticos, formação professores.

RÉSUMÉ

Dans cet article nous appliquons quelques notions théoriques de l'approche onto-sémiotique à la cognition et à l'instruction mathématique pour analyser une leçon sur l'addition et la soustraction tirée d'un manuel scolaire espagnol de la cinquième année. Nos objectifs sont : (1) d'illustrer une technique pour analyser des textes scolaires basée sur l'approche onto-sémiotique; et (2) d'identifier des critères souhaitables pour le développement d'unités didactiques pour l'étude des structures additives dans l'éducation primaire. Les résultats obtenus pourraient être utiles dans la formation des futurs enseignants en mathématiques.

• **MOTS CLÉS**: Aptitude didactique, conflits sémiotiques, analyse textes mathématiques, formation des enseignants.

1. Introducción

Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. La ausencia de efectos significativos de los programas de formación de profesores en dicha práctica se puede explicar, en parte, "por la falta de un conocimiento base ampliamente compartido sobre la enseñanza y la formación de profesores" (p. 201). El saber didáctico que progresivamente va produciendo la investigación en educación matemática queda reflejado en diversas fuentes dispersas y heterogéneas (revistas, monografías de investigación, etc.), pero de manera más accesible a los profesores se refleja en los libros de texto escolares. Los libros de texto escolares constituyen la fuente inmediata donde se acumula la experiencia práctica de los profesores y, en cierta medida, los resultados de la investigación. En consecuencia, el análisis crítico de los textos escolares, la evaluación de su pertinencia, idoneidad, adecuación, etc. debe ser un componente importante en los programas de formación de profesores de matemáticas.

> La preparación de programas de formación puede ser más efectiva centrándola en ayudar a los estudiantes a que adquieran las herramientas que necesitarán para aprender a enseñar, en lugar de competencias acabadas sobre una enseñanza efectiva. (Hiebert, Morris y Glass, 2003, p. 202)

Pensamos que entre estas herramientas

deben figurar los criterios para analizar la propia práctica docente y las lecciones de los textos escolares como fuente próxima para el diseño de unidades didácticas.

Dado que el uso de las lecciones propuestas en los libros de texto (o en un formato virtual multimedia) es una decisión importante, ya que en gran medida condiciona el proceso de estudio del tema, los profesores deben tener conocimientos básicos que les permitan evaluar las características de las lecciones para seleccionar (o elaborar) las más adecuadas y adaptarlas al nivel educativo correspondiente. Consideramos importante introducir en la formación (inicial y continua) de profesores de matemáticas criterios para valorar la idoneidad de los procesos de estudio matemático, tanto si son basados en el uso de libros de texto, como si se trata de procesos apoyados en el uso de materiales y documentos de trabajo elaborados por el propio profesor.

En este artículo vamos a utilizar algunas herramientas del “enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática” (EOS) desarrollado por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005; Font y Ramos, 2005; Godino, Contreras y Font, en prensa; etc.) para valorar la idoneidad de un texto matemático escolar. En este marco teórico se postula que la idoneidad global de un proceso de enseñanza-aprendizaje se debe valorar teniendo en cuenta los cinco criterios siguientes (Godino, Contreras y Font, en prensa):

- *Idoneidad epistémica* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia[4]. Por ejemplo, la enseñanza de la adición en la educación primaria actual puede limitarse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad), o tener en cuenta los diferentes tipos de situaciones aditivas e incluir la justificación de los algoritmos (alta idoneidad).

- *Idoneidad cognitiva* expresa el grado de proximidad de los significados implementados respecto de aquéllos que son personales iniciales de los estudiantes o, de manera equivalente, la medida en que el “material de aprendizaje” esté en la *zona de desarrollo potencial* (Vygotsky, 1934) de los alumnos y alumnas.

  Un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad cognitiva sería, en el estudio las operaciones aritméticas con números de tres o más cifras, que el profesor realizara una evaluación inicial para saber si los alumnos dominan los números de uno y dos cifras y, en caso de no ser así, comenzara el proceso de instrucción trabajando dichos números.

- *Idoneidad semiótica*. Un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos

[4] Chevallard (1991) considera que todo proceso de enseñanza-aprendizaje comporta la transposición del saber: Saber sabio → Saber a enseñar → Saber enseñado. La noción de idoneidad epistémica puede ser reinterpretada en términos transpositivos de la siguiente forma: grado de representatividad del saber enseñado respecto del saber a enseñar.

sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa. Un proceso de enseñanza-aprendizaje es idóneo desde el punto de vista semiótico si las *configuraciones* y *trayectorias didácticas* (Godino, Contreras y Font, en prensa) permiten, por una parte, resolver conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar *a priori*), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción (mediante la negociación de significados). Por ejemplo, un proceso de estudio realizado de acuerdo con una secuencia de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 1997) tiene potencialmente mayor idoneidad semiótica que un proceso magistral que no tenga en cuenta las dificultades de los estudiantes.

- *Idoneidad mediacional,* grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Si el profesor y los alumnos tuvieran a su disposición medios informáticos pertinentes al estudio del tema en cuestión (Cabri-géomètre, p.e., para la geometría plana), el proceso de estudio que se apoye en estos recursos tendría mayor idoneidad mediacional que otro tradicional basado exclusivamente en la pizarra, lápiz y papel. Asimismo, un ejemplo de un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad mediacional con relación a los medios temporales sería una clase magistral, donde el profesor reproduce de manera íntegra y sin interacción con los estudiantes el significado pretendido.

- *Idoneidad emocional,* grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como de aquéllos que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa. Por ejemplo, tendrán idoneidad emocional alta los procesos basados en el uso de situaciones-problemas que sean de interés para los estudiantes.

Como se puede deducir de los ejemplos propuestos, la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005).

En la siguiente sección presentamos brevemente algunos de los constructos del EOS que nos permitirán fundamentar los criterios de análisis y valoración de una lección de un libro de texto. Estos criterios serán aplicados al análisis de una lección sobre la suma y la resta de un libro de texto para 5º grado de educación primaria (Ferrero y cols., 1999).

2. Herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico

Para poder valorar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción realmente implementado, o bien de un proceso de instrucción planificado en un libro de texto, es necesario establecer un “significado de referencia” que sirva de comparación. Este significado de referencia se interpreta en el EOS en términos de sistemas de prácticas (operativas y discursivas) compartidas en el seno de una institución para la resolución de una cierta clase de situaciones-problemas.

Para la realización y evaluación de cualquier práctica es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los siguientes elementos: lenguaje, situaciones, reglas (conceptos, proposiciones, procedimientos) y argumentos. A este conglomerado de objetos se le llama *configuración*. Estas configuraciones pueden ser cognitivas (conglomerado de objetos personales) o epistémicas (conglomerado de objetos institucionales) según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional. A su vez, estas configuraciones son emergentes de las prácticas realizadas para resolver un campo de problemas.

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan (Wittgenstein, 1953) pueden ser considerados desde las siguientes dimensiones duales: personal-institucional, elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo (Godino, 2002).

- *Personal-institucional*: si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales" (Godino y Batanero, 1994).

- *Ostensivo-no ostensivo.*Los objetos institucionales y personales se pueden considerar como objetos no-ostensivos. Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, …). Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).

- *Extensivo-intensivo*: un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo *concreto*, la función $y = 2x + 1$) y una clase más general o *abstracta* (p.e., la familia de funciones $y = mx + n$).

- *Elemental-sistémico*: en algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,…) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades elementales. Estos mismos objetos, en el primer curso, tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

- *Expresión-contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica.

La actividad matemática y los procesos

de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestos en relación unos con otros. La distinción entre expresión y contenido nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas "versiones" de dichos objetos. En Godino, Batanero y Roa (2005) se describen los seis tipos de entidades primarias y los cinco tipos de dualidades cognitivas mediante ejemplos relativos a una investigación en el campo del razonamiento combinatorio.

En la Figura 1 se representan las diferentes nociones teóricas que se han descrito sucintamente. En el EOS la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales.

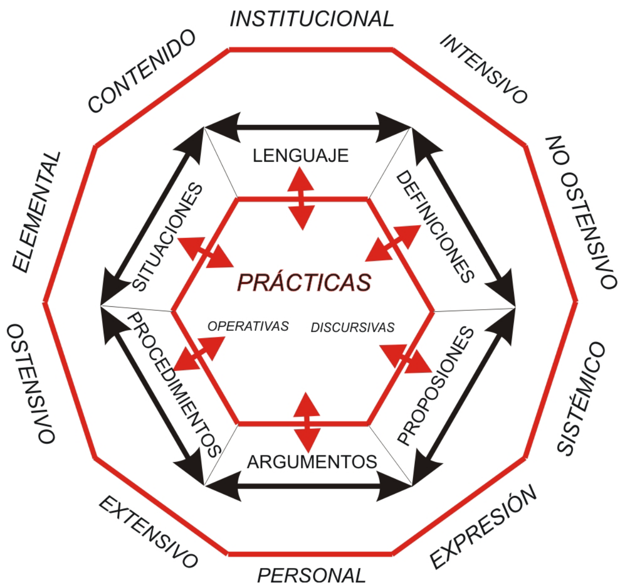


Figura 1. *Herramientas teóricas del EOS*

Por último, dentro del "enfoque ontosemiótico" se están introduciendo nuevas herramientas teóricas que permiten abordar el estudio de los fenómenos de instrucción matemática. Godino, Contreras y Font (en prensa) proponen, como unidad primaria de análisis didáctico, la *configuración didáctica*, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de una tarea matemática y usando unos recursos materiales específicos. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas, cada una de las cuales incorpora una determinada configuración epistémica.

3. Configuraciones epistémicas asociadas con las situaciones aditivas. Reconstrucción del significado de referencia

Para poder valorar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción realmente implementado (*significado implementado*) o bien de un proceso de instrucción planificado en un libro de texto (*significado pretendido*) es necesario establecer el significado de referencia que sirva de comparación. En esta sección describimos de manera sintética los principales elementos del significado de referencia para las estructuras aditivas, agrupando dichos elementos en los seis tipos de entidades que propone el EOS: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, propiedades y argumentos y los organizaremos en configuraciones epistémicas.

El primer tipo de configuración epistémica que consideraremos son las "formales". En dichas configuraciones se usa el método axiomático, es decir, se eligen ciertos enunciados de la teoría como axiomas y se exige que todos los demás sean probados a partir de ellos.

3.1 Configuraciones formales

Las entidades matemáticas que se ponen en juego en las situaciones aditivas contextualizadas son analizadas de manera formal o estructural en el marco interno de las matemáticas. Para ello, los números dejan de ser considerados como medios de expresión de cantidades de magnitudes (números de personas o cosas, papel que cumplen en una situación, etc.) y son interpretados bien como elementos de una estructura caracterizada según la teoría de conjuntos, bien según los axiomas de Peano. En este contexto de formalización matemática se plantean preguntas tales como:

- ¿Cómo se debería definir la adición, a partir de los axiomas de Peano?
- ¿Cómo se debería definir la adición, cuando los números naturales son definidos como los cardinales de los conjuntos finitos?
- ¿Qué tipo de estructura algebraica tiene el conjunto N de los números naturales dotado de la ley de composición interna de adición?
- ¿Es la sustracción una ley de composición interna? ¿Qué propiedades cumple?

La respuesta a estas preguntas requiere de la elaboración de recursos lingüísticos específicos, técnicas operatorias (recursión, operaciones conjuntistas), conceptos (definiciones conjuntistas de adición y sustracción; definiciones recursivas; definición algebraica de sustracción), propiedades (estructura de semigrupo de **N**) y argumentaciones (deductivas), en definitiva una configuración epistémica con rasgos o características específicas, adaptadas a la generalidad y rigor del trabajo matemático. Estos tipos de configuraciones formales no son las que nos pueden resultar útiles para determinar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción planificado para una institución escolar de enseñanza primaria. Para este tipo de institución necesitamos una configuración, que llamaremos *intuitiva* (o contextualizada), que presuponga una cierta concepción empírica de las matemáticas. Es decir, una concepción que considere que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones y formalizaciones de la experiencia; una concepción de las matemáticas que suponga que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales.

3.2. Configuración empírica

Las operaciones aritméticas de la adición y de la sustracción se construyen inicialmente como medio de evitar los recuentos en situaciones que incluyen distintas colecciones parcialmente cuantificadas. Las situaciones concretas o contextualizadas ponen en juego un proceso de modelización que produce, como etapa intermedia, una *situación aditiva formal*; esto es, una situación en la que se requiere realizar una suma o una resta, cuyo resultado debe ser interpretado según el contexto inicial. El aprendizaje de la suma y la resta implica, por tanto, el dominio de las situaciones formales y de los algoritmos de sumar y restar.

La resolución de los problemas aditivos pone en funcionamiento diversos recursos operatorios, lingüísticos, conceptuales, proposicionales y argumentativos que deben ser dominados progresivamente para lograr competencia en dicha resolución. La Figura 2 resume los principales elementos o componentes de la configuración epistémica empírica formada por el sistema de objetos y relaciones implicadas en la solución de los problemas aditivos[5] en el nivel de educación primaria (*significado institucional de referencia*). Por razones de espacio, los componentes de la configuración se muestran de manera tabular. Sin embargo, hay que tener en cuenta que dichos elementos están relacionados entre sí[6].

El lenguaje (verbal, gráfico, simbólico) describe las situaciones-problemas; representa a las entidades conceptuales, proposicionales (adición, sustracción, sumandos, commutativa, asociativa, …) y procedimentales (algoritmos). Las notaciones, disposiciones tabulares, diagramas, etc., sirven de herramientas para la realización de los algoritmos y la elaboración de argumentos justificativos. Las definiciones y proposiciones relacionan los conceptos entre sí y hacen posible el desarrollo de algoritmos de cálculo eficaces. Los argumentos justifican las propiedades y permiten la realización de las operaciones.

---

5 La clasificación de los problemas aditivos contextualizados ha sido objeto de numerosas investigaciones, ya que cada tipo comporta subconfiguraciones puntuales específicas que deben ser tenidas en cuenta en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Verschaffel y De Corte (1996) presentan una síntesis de estas investigaciones y mencionan los tres tipos básicos de problemas aditivos: cambio, combinación y comparación.

6 En la Figura 7 mostramos otro ejemplo de configuración puntual correspondiente a una página del libro que analizamos en las secciones 4 y 5 donde explicitamos dichas relaciones.

LENGUAJE

Verbal
- Juntar, añadir, sacar, suma, resta, “cuánto falta”, más menos, adición, sustracción, sustraendo, minuendo, diferencia, paréntesis, operación, propiedad conmutativa, propiedad asociativa, etc.

Gráfico
- Dibujos en los que se presentan situaciones contextualizadas de adición y sustracción (se representan con objetos los cardinales de los dos conjuntos y en algunos casos también el cardinal del resultado)
- En la recta numérica se representan sumas y restas
- Etc.

Simbólico: +, –, 24 + 30, 45 – 23, $a + b$, $a - b$, $a - b = c$, “(” , “)” …

SITUACIONES

- Problemas contextualizados en los que: se añade, hay que seguir contando, se saca, se cuenta hacia atrás, se pide “cuánto falta”, se compara, etc.
- Problemas descontextualizados de sumas y resta

CONCEPTOS

Previos
- Sistema de numeración decimal
- Suma y resta

Emergentes
- Adición; Sustracción; Sumandos
- Sustraendo; Minuendo; Diferencia
- Sumas y restas equivalentes

PROCEDIMIENTOS

- Descontextualización del enunciado del problema;
- Contextualización de enunciados descontextualizados
- Aplicar los algoritmos de la suma y de la resta
- Comprobación de los resultados de una resta
- Cálculo mental de sumas y restas
- Utilización de las propiedades conmutativa y asociativa para realizar las operaciones más fácilmente
- Cálculo de sumas y resta con calculadora.
- Resolución de problemas de sumas y restas
- Etc.

PROPIEDADES

- La suma es una operación interna (la resta no)
- Elemento neutro
- Conmutativa (suma)
- Asociativa (suma)
- El total de una suma siempre es mayor que los sumandos (si estos son diferentes de cero)
- $(a + c) - (b + c) = a - b$
- La diferencia siempre es menor que el minuendo (si el sustraendo es diferente de cero)
- Relación entre diferencia, sustraendo y minuendo: $S - M = D$; $S = D + M$; $S - D = M$

ARGUMENTOS

- Comprobación de las propiedades en casos particulares (casi siempre extra matemáticos)
- Justificación de las propiedades, utilizando elementos genéricos
- Justificación de los algoritmos a partir de las características del Sistema de Numeración Decimal

Figura 2. Configuración epistémica “empírica” de la adición y de la sustracción

Se trata de una configuración epistémica en la que los conceptos y las propiedades que se introducen se intentan justificar por su acuerdo con una realidad extra matemática. Este intento topa con una dificultad que se convierte en el origen de importantes conflictos semióticos, que no es otra que el carácter convencional de algunas reglas matemáticas. No pretendemos entrar aquí en la discusión de si todas las reglas en matemáticas son convencionales, puesto que no se pueden justificar por su acuerdo con la experiencia; nos limitamos a señalar que, incluso en el supuesto de que la mayoría de las reglas matemáticas se pudieran justificar por su acuerdo con situaciones extra matemáticas, hay ciertas reglas, como por ejemplo, la prioridad de las operaciones, que indiscutiblemente son convencionales y que, por tanto, difícilmente se pueden justificar con base en su acuerdo con situaciones extra matemáticas.

4. Análisis global de la lección

El análisis ontosemiótico de una lección debe abordarse primero desde una perspectiva global que identifique su objetivo y estructura en configuraciones didácticas, para pasar después, en un segundo nivel, a un estudio detallado de cada una de ellas (en este trabajo nos centraremos, sobre todo, en las configuraciones epistémicas asociadas y en los conflictos semióticos potenciales). Este segundo análisis lo haremos en la sección 5, centrándonos sobre todo en las funciones semióticas (dualidad *expresión-contenido*) que relacionan objetos que pueden ser extensivos o intensivos (dualidad *extensivo-intensivo*).

A continuación comenzamos el análisis global de la lección de Ferrero y cols. (1999)[7]. La lección sobre la suma y la resta incluida en este libro de texto escolar se interpreta en el EOS como el significado pretendido en clases de 5º grado de educación primaria (alumnos españoles de 10 años de edad).

El estudio comienza recordando el uso concreto de la suma y la resta:

> Sumamos cuando reunimos o juntamos varias cantidades en una sola. Restamos cuando separamos, quitamos una parte de otra o hallamos la diferencia entre dos cantidades. (p. 18)

Sigue con la presentación de una situación introductoria general donde se presenta una escena de clase con grupos de niños jugando diversos juegos mediante los cuales consiguen puntos. Se plantean problemas cuya solución requiere realizar una suma o una resta. El tipo de situación-problema que se presenta al inicio de la unidad tiene un objetivo que se puede describir del siguiente modo: *¿Cómo discriminar las situaciones de suma y resta y cómo resolverlas?* Esta pregunta general que guía el desarrollo de la lección se descompone en sub-preguntas que son abordadas en las distintas secciones en que se estructura. La Figura 3 muestra la estructura global de la lección, centrando la atención en la secuencia de configuraciones ligadas a los tipos de problemas planteados (figuras hexagonales); una de dichas configuraciones (config. 1) será analizada en la sección 5.1., teniendo en cuenta los instrumentos teóricos introducidos por el EOS.

---

7 El libro de texto de Ferrero y cols. (1999) es un ejemplar prototípico de los que en la actualidad se utilizan en el sistema educativo español (actualizados en euros como unidad monetaria) y, por lo tanto, el estudio que realizamos no sólo representa un modelo para el análisis de otros libros de texto, sino que determina una "pauta genérica" para la valoración de libros de texto del mismo grado y contexto.

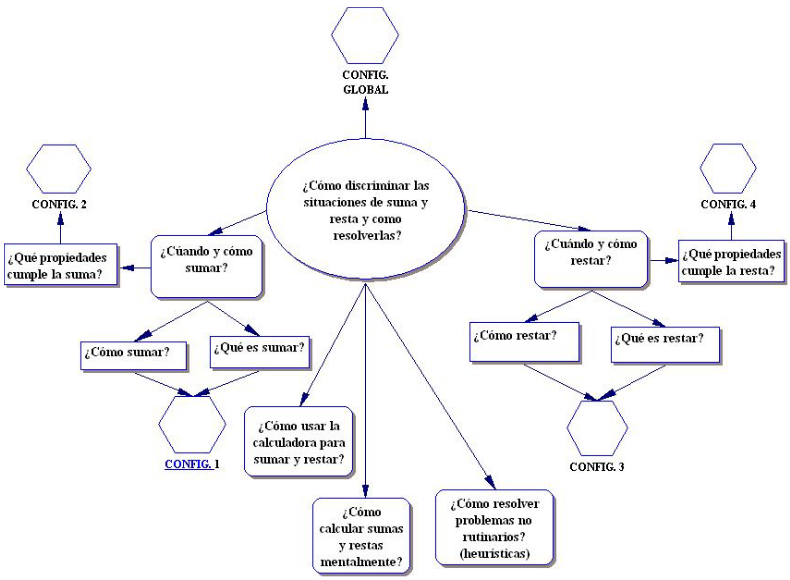


Figura 3. Estructura global de la lección

Las seis primeras secciones (sobre las que centraremos el análisis ontosemiótico) tienen una estructura similar:

- -Planteamiento de una situación-problema.
- -Un apartado titulado "Observa", donde se describe la solución del problema, se presentan las definiciones y se explican las técnicas.
- -Una colección de 4 o 5 ejercicios y aplicaciones.

Las seis primeras secciones se titulan: (1) *La suma. Significados*, (2) *Las propiedades de la suma*, (3) *La resta. Significados*, (4) *Relaciones entre los términos de la resta*, (5) *Restas equivalentes* y (6) *Sumas y restas combinadas. Uso del paréntesis*. En ellas se desarrolla el tema y los algoritmos que aparecen son con lápiz y papel. En la sección siguiente, cuyo título es (7) *Conoce tu calculadora*, se introducen dos técnicas alternativas a los algoritmos con lápiz y papel: el cálculo estimado y el cálculo con calculadora. En la siguiente sección, cuyo título es (8) *Recuerda*, los autores presentan a los alumnos aquello que es esencial recordar de lo que se ha estudiado anteriormente. A continuación se propone una sección de autoevaluación, cuyo título es (9*) ¿Te lo has aprendido?* En la sección siguiente, cuyo título es (10) *Cálculo mental*, se introduce otra técnica alternativa a los algoritmos con lápiz y papel: el cálculo mental exacto. A continuación, en la sección titulada (11) *Arco iris* se propone un problema cuyo contexto es "la compra de comida para el hogar" en la que también se introducen los valores de igualdad entre el hombre y la mujer a la hora de participar en las tareas del cuidado de la casa. Como sección final se propone una sección de consolidación de conocimientos, cuyo título es (12) *Resolución de problemas* en la que además se introduce la estrategia heurística "descomposición del problema en partes".

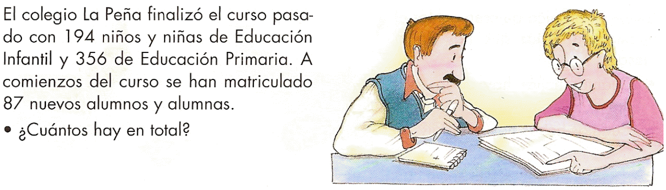
5. Análisis ontosemiótico de configuraciones parciales

En esta sección vamos a realizar un análisis detallado de la primera configuración didáctica dedicada al estudio de la suma.

5.1. Sección 1: La suma. Significados

Los autores de la lección han organizado un proceso de estudio puntual para explicar los significados de la adición, incluyendo los siguientes apartados:

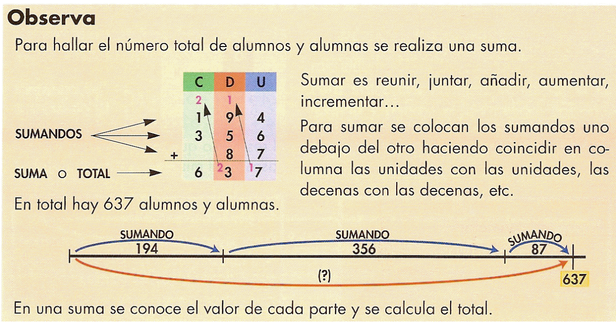
A.Un problema introductorio (Figura 4).


El colegio La Peña finalizó el curso pasado con 194 niños y niñas de Educación Infantil y 356 de Educación Primaria. A comienzos del curso se han matriculado 87 nuevos alumnos y alumnas.

• ¿Cuántos hay en total?

Figura 4. Problema introductorio

B. La explicación de la solución del problema que sirve como sistematización de los significados de la suma y del algoritmo de sumar en columna (Figura 5).


Observa

Para hallar el número total de alumnos y alumnas se realiza una suma.

Sumar es reunir, juntar, añadir, aumentar, incrementar…

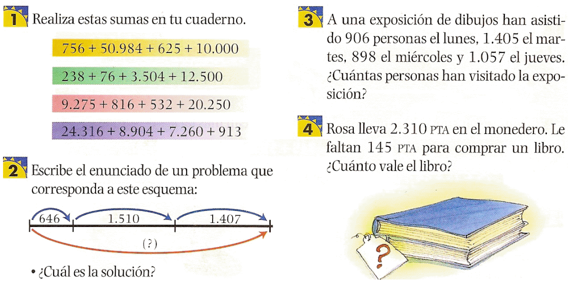
Para sumar se colocan los sumandos uno debajo del otro haciendo coincidir en columna las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc.

En total hay 637 alumnos y alumnas.

En una suma se conoce el valor de cada parte y se calcula el total.

Figura 5. Explicación del problema introductorio

C. También incluyen cuatro actividades de ejercitación y aplicación (Figura 6).


1 Realiza estas sumas en tu cuaderno.

756 + 50.984 + 625 + 10.000

238 + 76 + 3.504 + 12.500

9.275 + 816 + 532 + 20.250

24.316 + 8.904 + 7.260 + 913

2 Escribe el enunciado de un problema que corresponda a este esquema:

• ¿Cuál es la solución?

3 A una exposición de dibujos han asistido 906 personas el lunes, 1.405 el martes, 898 el miércoles y 1.057 el jueves. ¿Cuántas personas han visitado la exposición?

4 Rosa lleva 2.310 PTA en el monedero. Le faltan 145 PTA para comprar un libro. ¿Cuánto vale el libro?

Figura 6. Ejercicios y aplicaciones

La Figura 7 describe la configuración epistémica asociada a esta sección.

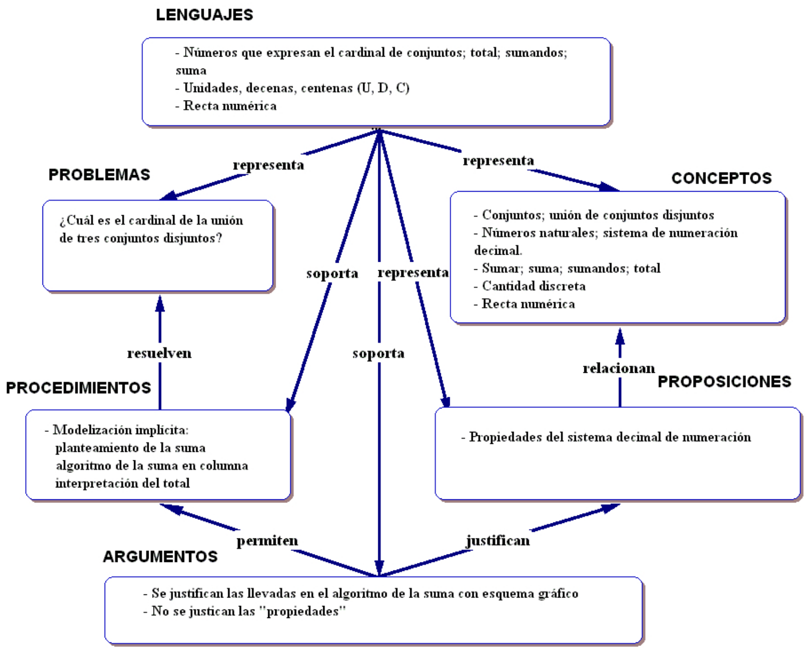


Figura 7. Configuración epistémica de la “La suma. Significados”

Realizamos a continuación un análisis detallado del texto, mostrando los conflictos semióticos que se pueden presentar para los lectores potenciales. Dividimos el fragmento del texto en tres partes correspondientes al enunciado del problema introductorio (A), la explicación de los significados y el algoritmo de sumar (B), y el enunciado de 4 ejercicios (C).

PARTE A: Situación introductoria

En esta parte se propone el enunciado de un problema, el cual se acompaña con un dibujo que no tiene ninguna relación con el texto. El objetivo de este problema contextualizado es que sirva de ejemplo para definir el concepto de “suma” y “recordar” el algoritmo de la suma (ambos conceptos se suponen conocidos de cursos anteriores). Los autores suponen que las consideraciones hechas sobre el ejemplo particular son suficientes para que los alumnos comprendan (o recuerden) el concepto de “suma” y su “algoritmo”. Este ejemplo es utilizado implícitamente por los autores como un “elemento genérico” de los problemas que se resuelven mediante sumas, ya que implícitamente se supone que lo que se dice para este caso particular es válido para todos los problemas que se resuelven “sumando”. Dicho de otra manera, el objetivo de este problema no es su resolución, sino activar la dualidad extensivo-intensivo en los párrafos posteriores.

Sin embargo, no parece que este problema sea un buen representante del tipo de problemas aditivos que se pretende abordar. La situación se describe de manera incompleta y ficticia. No se dice el nivel educativo a que corresponden los nuevos alumnos, por lo que se tiene una primera operación de unión de dos conjuntos de elementos disjuntos (niños de infantil y de primaria), y después otra operación de unión de elementos de otro conjunto cuya naturaleza no distingue el nivel escolar de los niños. Parece que la información del nivel escolar a que corresponden los niños introduce una distinción innecesaria que puede confundir a los alumnos. Otro elemento contextual que influye en la solución está el hecho de que no se informa sobre los alumnos del curso anterior que no continúan en el centro; de hecho, una respuesta razonable para el problema puede ser: No se puede saber.

Lo dicho no tiene que suponer necesariamente un “fracaso generalizado en la realización de la tarea”. Es muy posible que los alumnos acepten el enunciado y realicen la suma requerida, pero por razones de “contrato didáctico” y por la observación de la palabra clave “total” que previamente habrán asociado a sumar los números que intervienen. En todo caso, la realización exitosa de la tarea por la mayor parte de la clase no es atribuible al problema, sino a reglas previamente establecidas y conocimientos culturales aceptados en la institución.

PARTE B: Observa

Se comienza diciendo que para hallar el número total de alumnos y alumnas se realiza una suma. A continuación, se define qué es sumar: *sumar es reunir, juntar, añadir, aumentar, incrementar*, … . Ahora bien, se trata de una definición incompleta ya que no se dice que la suma es el “número de elementos” (cardinal) del conjunto unión (dados dos conjuntos disjuntos). Si el alumno se guía sólo por esta definición puede considerar como situaciones de “suma” muchas que no lo son. Por ejemplo, “reunir” mis regalos con mis libros (cuando algún libro es un regalo); “juntar” dos bolas de plastilina da como resultado una bola de plastilina (¿1 + 1 =1?); al “juntar” todos los números de teléfono de mis amigos, en el mejor de los casos, obtengo una agenda, pero de ninguna manera una “suma”; …

De hecho, al tratarse de verbos de acción transitivos que se aplican sobre los elementos de dos o más conjuntos el reconocimiento de las situaciones en las que es pertinente sumar no estará exento de dificultades dada la generalidad de las acciones que se mencionan como equivalentes a sumar, las cuales además no agotan todas las posibilidades y circunstancias de uso. Asimismo, no se especifica de manera explícita o implícita la necesidad de que los conjuntos deben ser disjuntos.

El conflicto semiótico que se podría producir es que los alumnos identificasen como situaciones de suma algunas que no lo son. Ahora bien, es de suponer que dicho conflicto no se va a producir dados los conocimientos previos de los alumnos sobre la adición de números naturales (hay que recordar que esta unidad está pensada para alumnos de 10 años).

En el EOS se considera que cada definición se debe entender como una definición-regla que, de entrada, no parece que indique que haya algo que sea preciso hacer. A partir de las definiciones-reglas podemos atribuir valores veritativos (verdadero y falso) a ciertas proposiciones. Ahora bien, de una definición-regla también se puede deducir una regla práctica que nos da instrucciones para “realizar una práctica”. Esta práctica se puede dar en diferentes situaciones, por lo que se puede afirmar que una definición genera un conjunto de prácticas. A su vez, otra definición equivalente generará otro subconjunto de prácticas. Por tanto, si la definición de suma fuese completa y especificara que la suma es el cardinal de la unión, de ella se podría deducir una práctica para hallar la suma (por ejemplo contar el número de elementos del conjunto unión) y a partir de la necesidad de buscar un método más ágil para hallar dicho cardinal aparecerían otras técnicas (tabla de sumas elementales, cálculo mental, algoritmo escrito, uso de la calculadora, etc.).

La situación que presenta el libro es que, por una parte, da una definición incompleta de la cual no se puede deducir una regla para calcular la suma y, por otra parte, a continuación pasa a explicar el algoritmo de la suma (con dos registros diferentes: enunciado y simbólico). El registro verbal es deliberadamente incompleto, ya que supone que el algoritmo es conocido por los alumnos. El registro simbólico no es el algoritmo habitual, sino que es un pre-algoritmo que se suele usar como paso previo al algoritmo habitual para facilitar su comprensión. Es al final de este algoritmo cuando la suma se identifica con el "total" (es decir, implícitamente como el cardinal del conjunto unión). Puesto que los autores consideran conocido este pre-algoritmo, es el lector quien tiene que interpretar el diagrama tabular y sagital de la izquierda. La descripción del algoritmo contiene diversos convenios que el lector debiera conocer previamente, ya que no se aporta información al respecto. Las letras C, D, U colocadas encima de los datos significan Centenas, Decenas y Unidades y evocan las reglas del sistema de numeración decimal. Los números escritos como superíndices y las flechas inclinadas resumen el algoritmo de sumar con "llevadas" de cifras de un orden al siguiente. El esquema incluye tres definiciones implícitas: *sumandos* (cada uno de los tres números que se suman), *suma* (resultado de la adición), *total* (que significa lo mismo que suma). Se evita, en esta parte del texto, distinguir entre la adición como operación aritmética y la suma como resultado de la adición.

Diagrama lineal

Se supone que el lector está familiarizado con los convenios de representación de los números en la recta numérica: elección de un origen y de un segmento que se usa como unidad de medida; lo que permite asignar a cada número natural un segmento de recta que será su medida con el segmento tomado como unidad (o una distancia desde el origen). En este caso, como los números son grandes no se puede mostrar la unidad por lo que se pierde el carácter discreto de los conjuntos representados (aunque hay que resaltar que, en este caso, el dibujante ha procurado que las longitudes de los segmentos mantengan aproximadamente la misma proporción entre ellas que los sumandos). El diagrama lineal se incluye aquí como medio de explicación de la operación de sumar tres sumandos. La definición de suma que se da de manera implícita se basa en el recuento: sumar *a* y *b* es "seguir contando *b* a partir de *a*". Se pone así en juego un significado parcial de suma distinto del dado anteriormente, basado en el cardinal de un conjunto.

La técnica de sumar sugerida por el diagrama lineal es difícil de poner en práctica, en el sentido de que no se puede aplicar efectivamente cuando los números son grandes. La faceta dual ostensivo-no ostensivo es aceptada implícitamente como transparente, no problemática. Se presupone que el diagrama lineal (*ostensivo*), como recurso didáctico, es una expresión gráfica de la adición que transmite "de forma automática" el significado de la adición (*no ostensivo*) basado en la aplicación sistemática (y por supuesto, implícita) de la *función siguiente* que se introduce en la axiomática de Peano.

La parte B concluye con una explicación que pretende dar a entender que "sumar es una operación que a partir de ciertos números (sumandos) obtiene otro número (suma)" para ello introduce los términos *valor* y *parte* (¿Por qué usar aquí una terminología de procedencia económica?):

> "En una suma se conoce el valor de cada parte y se calcula el total" (p.19).

En esta sección el alumno se encuentra con una gran complejidad semiótica, ya que en media página se le presentan mezcladas diferentes interpretaciones de la "suma": como una acción (reunir, juntar, etc.), como el cardinal del conjunto unión, como "seguir contando" y como operación. Además, aparecen diferentes registros: verbal, simbólico y gráfico. Esta gran complejidad semiótica podría ser la causa potencial de numerosos conflictos semióticos que, en la mayoría de alumnos, no se producen gracias a sus conocimientos previos sobre la suma. El profesor que use este libro como apoyo de sus clases debe ser consciente de los conflictos semióticos potenciales que hemos descrito.

PARTE C (Ejercicios)

En el primer problema se proponen hacer cuatro sumas de cuatro sumandos de números hasta de 5 cifras. Se tratan de sumas descontextualizadas que, como principal novedad respecto del ejemplo resuelto, se presentan dispuestos en fila. Parece que el elevado número de cifras de los sumandos tienen por objetivo conseguir que los alumnos los dispongan en columnas y apliquen el algoritmo de la suma que se ha recordado anteriormente.

En el segundo, se espera que los alumnos realicen el planteamiento y resolución de un enunciado de problema a partir de sumandos expresados en un diagrama lineal. El objetivo es que los alumnos apliquen la dualidad extensivo-intensivo y confeccionen el enunciado de un problema cuya descontextualización se corresponda con el diagrama lineal.

El tercero es un problema contextualizado de sumar con tres sumandos sin que se indique ninguna palabra clave alusiva a las "acciones de sumar". Incluso, admite como respuesta correcta repetir los datos de visitantes en cada día, o decir que no se puede saber ya que no se dicen los visitantes de los otros días en los que se podía visitar la exposición.

El cuarto es un problema concreto de dos sumandos. Tampoco se incluye términos alusivos a las acciones de sumar. La inferencia de hacer una suma se deriva de un conocimiento práctico de la situación. Es de destacar que mientras el enunciado hace referencia a un solo libro en el dibujo aparecen dos libros.

5.2. Algunos conflictos semióticos identificados en las secciones 2-6

Sección 2: Las propiedades de la suma

El problema introductorio (Figura 8) pretende motivar las propiedades conmutativa y asociativa de la suma.

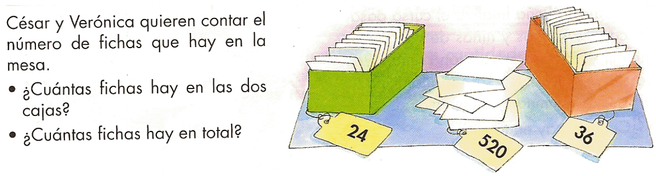


Figura 8. Situación introductoria. Propiedades de la suma

En primer lugar, la Figura 8 presenta un conflicto semiótico entre los códigos de transmisión: en el marco gráfico, el número de fichas es 30 (11 fichas en cada caja y 8 sobre la mesa); en el marco semántico, el número de fichas es 580 (24 y 36 en las cajas, respectivamente, y 520 sobre la mesa). Se supone, por lo tanto, transparente el código de comunicación que identifica el "número en una tarjeta" con el "número de fichas". ¿Por qué no interpretar que en la caja "24" hay 11 fichas?, máxime cuando sobre la mesa hay claramente menos fichas que en las cajas y, en todo caso, no parece admisible que haya 520 fichas. De esta forma, la tarea precisa de aclaraciones del tipo "el número 24 representa el número de fichas que hay en la caja de la izquierda".

En segundo lugar, la primera pregunta, "¿cuántas fichas hay en las dos cajas?", impide que los alumnos se planteen por sí mismos las distintas posibilidades de realizar la suma de los tres sumandos y comprobar que el resultado es el mismo. Una manera de conseguir este propósito sería suprimir la primera pregunta y plantear directamente "¿cuántas fichas hay en total?" De esta manera la situación queda más abierta a la exploración personal del lector. Asimismo, habrá que tener en cuenta que muchos potenciales lectores darían por finalizada la actividad, obtenida una respuesta. Una opción es planificar una sesión de interacción en aula, que conlleve responder a preguntas del tipo:

-*¿Cambia el resultado, si cambias el orden en que se hacen las sumas de los números?*

-*¿Ocurre igual si los números de fichas en cada caja y sobre la mesa son diferentes?*

-*¿Da igual que sumemos primero las fichas de las cajas y luego las de la mesa o, por ejemplo, primero las de una caja con las de la mesa y después las de la otra caja?*

En el apartado "Observa" que sigue al enunciado se ve con claridad que el objetivo del problema no es que los alumnos descubran por si mismo la propiedad asociativa. La primera pregunta está pensada para poder explicar con el ejemplo de las dos cajas la propiedad conmutativa y la segunda para explicar la asociativa. En efecto, en la sección "Observa" (Figura 9) se presenta la solución del problema y los enunciados generales de las propiedades conmutativa y asociativa. Nos parece una *generalización prematura*, basada en la comprobación de un solo ejemplo. Por otra parte, bajo el epígrafe "Propiedad asociativa" se da, en realidad, el enunciado de una técnica de cálculo para sumar tres números: "Para sumar tres números, sumamos dos cualesquiera de ellos y el resultado se suma con el tercero". De esta forma, se confunde el enunciado de una técnica, con el de una propiedad.

Además, la técnica de cálculo es en muchos casos interpretada como: *si se cambia el orden en que hacemos las sumas el resultado no varía*, donde la voz “orden” es polisémica: por un lado, “el orden en que se suman tres sumandos dados en una lista” (primero a más b y el resultado sumarlo a c o bien sumar primero b y c y al resultado agregarle a), por otro lado, “el orden en que se colocan los sumando dados, que supone una generalización de la propiedad conmutativa a tres números” ($a+b+c = a+c+b = b+a+c = b+c+a = c+a+b = c+b+a$).

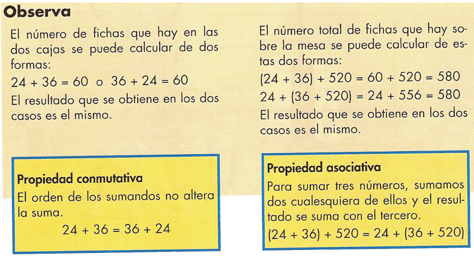


Figura 9. Propiedades de la suma

Sección 3: La resta. Significados

La presentación de la resta (Figura 10) se hace de manera similar a la de la suma. Primero se presenta un problema contextualizado en el que se pide cuánto falta para llegar a 9.450 puntos si tenemos 6.750. Contrariamente al caso de la suma, el problema escogido sí se puede considerar un buen representante de los problemas de resta.

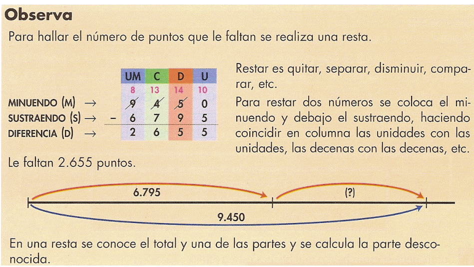


Figura 10. La resta. Significados

Se comienza diciendo que para hallar el número de puntos que falta se realiza una resta. A continuación se define qué es restar: *restar es quitar, separar, disminuir, comparar, etc*. Ahora bien, como en el caso de la suma, se trata también de una definición incompleta ya que no se dice, por ejemplo, que la resta es el número de elementos que quedan en el conjunto después de quitar algunos. Si el alumno se guía sólo por esta definición puede considerar como situaciones de “resta” muchas que no lo son. Al igual que en el caso de la suma de esta definición de resta no se puede inferir una regla para realizar la resta.

La situación que presenta el libro es que, por una parte, da una definición incompleta de la cual no se puede deducir una regla para calcular la resta y, por otra parte, a continuación pasa a explicar el algoritmo de la resta (con dos registros diferentes: enunciado y simbólico). El registro verbal es deliberadamente incompleto, ya que supone que el algoritmo es conocido por los alumnos. El registro simbólico que se presenta describe el pre-algoritmo previo al algoritmo de restar “tomando prestado”, que no es el que habitualmente se enseñan en España (que suele ser el algoritmo de “restar llevándose”). Puesto que los autores consideran conocido este pre-algoritmo, es el lector quien tiene que interpretar el diagrama tabular de la izquierda. La descripción del algoritmo contiene diversos convenios que el lector debiera conocer previamente, ya que no se aporta información al respecto. El esquema incluye tres definiciones implícitas: *minuendo, sustraendo y diferencia*. Se evita, en esta parte del texto, distinguir explícitamente entre la resta como operación aritmética y la resta como resultado de la sustracción (diferencia).

Es de resaltar la alta “densidad semiótica” del esquema de sustracción presentado.

A diferencia del caso de la suma, se introducen abreviaturas lingüísticas para las palabras *minuendo* (M), *sustraendo* (S) y *diferencia* (D) (la letra D también significa aquí *decena*, lo que produce un nuevo fenómeno de polisemia), que son referidas mediante flechas a los números correspondientes a la sustracción del problema propuesto. Estas abreviaturas notacionales serán usadas en el siguiente apartado para enunciar, de manera general, las relaciones entre los tres números que definen una sustracción. El algoritmo de restar "tomando prestado" se supone conocido y, por ello, sólo se describe tachando las cifras correspondientes del minuendo y anotando encima del mismo la nueva cifra con los incrementos de unidades correspondientes. Hay que resaltar que los autores seguramente han tenido en cuenta, aunque sea sólo de manera implícita, la complejidad semiótica del algoritmo de "restar llevándose" ya que han optado, en cursos anteriores, por explicar un algoritmo de menor complejidad semiótica: el algoritmo de restar "tomando prestado".

Se incluye también un diagrama lineal que pone en juego un significado parcial de resta distinto del dado anteriormente. Ahora la resta se entiende en términos de "sumando desconocido": 6.795 + (?) = 9.450. Se concluye con una explicación que pretende dar a entender que "restar es una operación que a partir de ciertos números (total y parte) obtiene otro número (otra parte)", pero se deja a cargo del alumno la identificación de "total" con "minuendo", de "parte" con "sustraendo" y de "otra parte" con "diferencia".

En esta sección el alumno se encuentra con una gran complejidad semiótica, ya que en media página se le presentan mezcladas diferentes interpretaciones de la "resta": como una acción (quitar, comparar, etc.), como "sumando desconocido" y como operación. Además, aparecen diferentes registros: verbal, simbólico y gráfico. Esta gran complejidad semiótica podría ser la causa potencial de numerosos conflictos semióticos que, en la mayoría de alumnos, no se producen, al igual que en el caso de la suma, gracias a sus conocimientos previos sobre la resta. Por otra parte, es de destacar que no se da a la resta el significado parcial de "contar hacia atrás".

Sección 4: Relaciones entre los términos de la resta

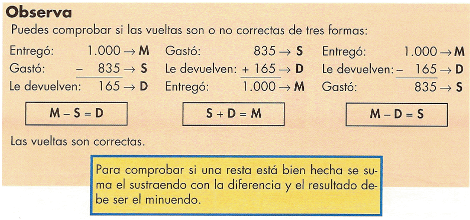
Esta sección comienza con el siguiente problema introductorio:

> "Para pagar la carpeta, Jaime entregó mil pesetas y le devolvieron 165 pesetas (en un dibujo se indica que la carpeta cuesta 835 pta). Comprueba si son correctas las vueltas" (Ferrero y cols, 1999, p. 22).

Puesto que se trata de relacionar la suma y la resta sería más conveniente formular la pregunta de manera más abierta.

Una consigna alternativa podría ser: *¿De cuántas maneras distintas podrías comprobar si la vuelta (es decir, el dinero devuelto) es correcta?"*

A continuación, en el apartado "Observa" (Figura 11) se explican tres maneras alternativas de resolver el problema. Cada una de ellas se simboliza mediante una expresión algebraica en forma de igualdad. De la segunda igualdad se deriva una técnica para comprobar si la resta está bien hecha: "Para comprobar si una resta está bien hecha se suma el sustraendo con la diferencia y el resultado debe ser el minuendo". (p. 22)


Observa

Puedes comprobar si las vueltas son o no correctas de tres formas:

Entregó:	1.000 → M	Gastó:	835 → S	Entregó:	1.000 → M
Gastó:	– 835 → S	Le devuelven:	+ 165 → D	Le devuelven:	– 165 → D
Le devuelven:	165 → D	Entregó:	1.000 → M	Gastó:	835 → S

M – S = D S + D = M M – D = S

Las vueltas son correctas.

Para comprobar si una resta está bien hecha se suma el sustraendo con la diferencia y el resultado debe ser el minuendo.

Figura 11. La prueba de la resta

En este apartado también se observa una complejidad semiótica importante, ya que los autores dejan a cargo de los alumnos la aplicación de las funciones semióticas que relacionan extensivos con intensivos (faceta extensivo-intensivo). Esperan que sean los alumnos quienes conviertan en intensivos los símbolos M, S y D. Consideran que la flecha será interpretada por los alumnos como el paso de un valor a una variable:

$$1.000 \rightarrow \mathrm{M} \qquad 165 \rightarrow \mathrm{D} \qquad 835 \rightarrow \mathrm{S}$$

Y también esperan que sean los alumnos quienes establezcan la relación entre las tres igualdades obtenidas, ya que los autores evitan entrar en la explicación de propiedades de las expresiones algebraicas (por ejemplo, que sumando el mismo término a cada miembro de la igualdad ésta se mantiene, o bien que un término de uno de los miembros de la igualdad pasa al otro miembro con el signo cambiado). Ahora bien, sólo si el alumno relaciona M–S= D con S+D=M se puede entender que de la segunda igualdad se deriva una técnica general para comprobar el resultado de una resta (primera igualdad).

Esta sección del libro de texto termina con cinco ejercicios. En el primero, se proponen seis restas (por ejemplo, 2.500–865 =1.635) y se pide a los alumnos que comprueben si los resultados son correctos. En el segundo, se les presentan 9 igualdades en las que falta uno de los tres números (el minuendo, el sustraendo o bien la diferencia) y se les pide que hallen el término que falta. En el tercero, se les presenta una resta descontextualizada y se les pregunta que confeccionen un enunciado que se resuelva mediante dicha resta. En el cuarto y quinto, se les presentan dos de los tres términos por su nombre (el minuendo, el sustraendo o bien la diferencia) sin que en ellos aparezca la palabra resta o bien el signo de restar y se les pide que hallen el término que falta.

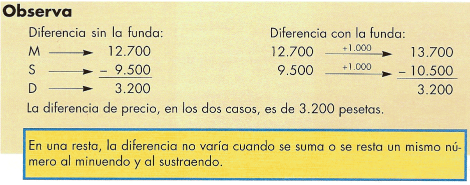
Sección 5: Restas equivalentes

Esta configuración se genera para estudiar una propiedad de la sustracción:

> "En una resta, la diferencia no varía cuando se suma o se resta un mismo número al minuendo y al sustraendo". (p. 23)

Para llegar a esta propiedad se comienza con un problema contextualizado sobre la diferencia de precio entre dos gafas (primero sin funda y después con funda). A continuación, en el apartado "Observa" (Figura 12) se explica la solución del problema. También se simbolizan mediante los símbolos M, S y D, aunque en este caso las letras intervienen como antecedentes y los números como consecuentes. Además, las letras M, S y D sólo se utilizan para el cálculo de la diferencia "sin funda". Si en el apartado anterior los alumnos tenían que ir del extensivo al intensivo, en este caso tienen que seguir el camino inverso, tienen que ir del intensivo (M, S y D) al extensivo (los números correspondientes). Los autores consideran que la flecha será interpretada por los alumnos como la asignación de valores a las variables M, S y D:

Por otra parte, la flecha se utiliza también para expresar la suma de un mismo número al minuendo y al sustraendo. Si antes la flecha relacionaba intensivos con extensivos, ahora relaciona extensivos con extensivos. También hay que destacar que el signo + se usa como operador (+1.000) y que el resultado se generaliza no sólo a la suma (el ejemplo utilizado) sino también a la resta (el caso más problemático)


Observa

Diferencia sin la funda:

M → 12.700
S → – 9.500
D → 3.200

Diferencia con la funda:

$12.700 \xrightarrow{+1.000} 13.700$
$9.500 \xrightarrow{+1.000} -10.500$
3.200

La diferencia de precio, en los dos casos, es de 3.200 pesetas.

En una resta, la diferencia no varía cuando se suma o se resta un mismo número al minuendo y al sustraendo.

Figura 12. Restas equivalentes

Podemos observar que para obtener un resultado general: (M ± A) – (S ± A) = M–S, los autores comienzan con un caso general (sugerido por las letras, M, S y D) para después hacer intervenir un caso particular: (12.700 + 1.000) – (9.500 + 1.000) = 12.700 – 9.500 para concluir finalmente un resultado general que expresan mediante un enunciado: “En una resta, la diferencia no varía cuando se suma o se resta un mismo número al minuendo y al sustraendo” (p. 23). Se observa que los autores han tenido muy presente la complejidad semiótica asociada y han buscado (1) una explicación que la reduzca considerablemente y (2) una formulación de la propiedad que permita obviar el uso de paréntesis y el doble uso del signo menos (como símbolo de la resta y como símbolo del “opuesto de un número”). A pesar de ello, en este apartado también se observa una complejidad semiótica importante, ya que los autores vuelven a dejar a cargo de los alumnos la aplicación de las funciones semióticas que relacionan extensivos con intensivos (faceta extensivo-intensivo).

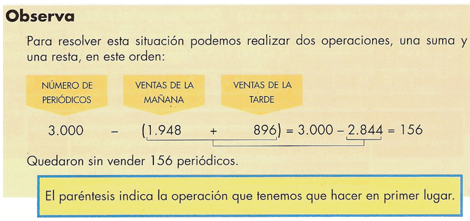
Esta sección del libro de texto termina con tres ejercicios. En el primero, se proponen dos casos en los que se suma el mismo número al minuendo y al sustraendo y dos casos en los que se resta el mismo número y se les pide que comprueben que el resultado no varía. En los otros dos problemas se les proponen dos situaciones contextualizadas en las que han de aplicar la propiedad explicada anteriormente.

Sección 6: Sumas y restas combinadas. Uso del paréntesis

La situación contextualizadora propuesta para motivar el uso de los paréntesis en la realización de las operaciones se puede resolver mediante la realización de dos restas sucesivas:

> “En el quiosco había 3.000 periódicos. Por la mañana se vendieron 1.948 y por la tarde, 896. ¿Cuántos periódicos quedaron sin vender? (p. 24)

La solución presentada (Figura 13) parece forzada, ya que no se pide como paso intermedio hallar la cantidad de periódicos vendidos. ¿Por qué no operar sin usar los paréntesis, primero 3.000 – 1.948 y después al resultado restarle 896?


Observa

Para resolver esta situación podemos realizar dos operaciones, una suma y una resta, en este orden:

NÚMERO DE PERIÓDICOS | VENTAS DE LA MAÑANA | VENTAS DE LA TARDE

$3.000 - (1.948 + 896) = 3.000 - 2.844 = 156$

Quedaron sin vender 156 periódicos.

El paréntesis indica la operación que tenemos que hacer en primer lugar.

Figura 13. Uso de paréntesis

En este apartado, podemos observar un conflicto semiótico potencial ya que el alumno puede entender, implícitamente, que se hace lo mismo que en los otros apartados, es decir, que a partir de un ejemplo particular se obtiene un resultado general. Sin embargo, lo que se está haciendo es introducir una convención:

"el paréntesis indica la operación que tenemos que hacer en primer lugar" (p. 24). Además, esta convención, implícitamente, puede entrar en contradicción con lo que se ha dicho al explicar anteriormente la propiedad asociativa. Según dicha propiedad, si se ha de efectuar, por ejemplo, (30 + 50) + 25, no es necesario sumar primero 30 con 50, puesto que, si se quiere se puede sumar primero 50 con 25.

6. Consideraciones finales

Con relación a la idoneidad epistémica de la lección analizada, nuestra conclusión es que su grado de idoneidad es moderadamente elevado, si tomamos como referencia la configuración empírica descrita en el apartado 3.2.

En cambio, la idoneidad semiótica es bastante más discutible. Basándonos, sobre todo en dos de las cinco facetas duales (expresión-contenido y extensivo-intensivo), hemos mostrado una variedad de conflictos semióticos potenciales, algunos de los cuales se pueden resolver mediante ciertos cambios en las tareas y en las explicaciones proporcionadas. De hecho, la identificación de conflictos semióticos lleva consigo, en algunas ocasiones, la posibilidad de establecer condiciones de control de posibles procesos de estudio con relación a los objetos matemáticos que se ponen en funcionamiento en la lección.

Sin embargo, ciertos conflictos semióticos identificados tienen difícil solución (si nos atenemos a los conocimientos didáctico-matemáticos actuales). Un tipo de estos conflictos semióticos son aquellos originados por configuraciones didácticas que presuponen que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones de la experiencia empírica. En este tipo de configuraciones los conceptos y las propiedades se intentan justificar por su acuerdo con una realidad extra matemática. Este intento topa con una dificultad que se convierte en el origen de importantes conflictos semióticos, que no es otra que el carácter convencional de algunas reglas matemáticas. Este tipo de conflictos han aparecido en la lección en el momento de introducir la regla "el paréntesis indica la operación que tenemos que hacer en primer lugar" a partir de una justificación basada en su acuerdo con situaciones extra matemáticas. Para solucionar este tipo de conflictos semióticos es necesario que los autores de los textos sean conscientes de las limitaciones que tiene la concepción que considera que "las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones de la experiencia empírica".

Otro tipo de conflictos semióticos potenciales de difícil solución son los relacionados con el intento de soslayar ciertas características del razonamiento algebraico. Los autores, por una parte, pretenden el inicio de una reflexión sobre la estructura algebraica de los conjuntos y operaciones con números; tal es el caso de los enunciados generales de las propiedades conmutativa, asociativa, o de la relación entre el minuendo, el sustraendo y la diferencia. Por otra parte, conscientes de la complejidad semiótica que ello representa intentan soslayar ciertas características del razonamiento algebraico, en especial la consideración de que los símbolos no están condicionados por la situación que inicialmente representaban y que, por tanto, son objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones. En la lección analizada, los símbolos substituyen a números y su función es representarlos,

los símbolos representan objetos, acciones sobre objetos o relaciones entre objetos, pero ellos mismos no se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones. Este tipo de conflictos semióticos han aparecido en la lección en el momento de introducir la relación entre los términos de una resta.

Un problema didáctico de mayor alcance, relacionado con el criterio de idoneidad “mediacional” expuesto en la introducción, se pone de manifiesto cuando relacionamos las situaciones introductorias de las distintas configuraciones y las prácticas operativas y discursivas asociadas. Se supone que tales situaciones deben permitir la contextualización de los conocimientos pretendidos y crear las condiciones para la exploración personal de los alumnos. Sin embargo, el texto presenta inmediatamente la solución y las generalizaciones pretendidas, lo que convierte de hecho al proceso de estudio en una presentación magistral. Se trata de un problema relativo a la gestión del tiempo didáctico (*cronogénesis*) y a la gestión de las responsabilidades del profesor y de los alumnos en el proceso de aprendizaje (*topogénesis*) (Chevallard, 1991).

Para terminar, queremos resaltar que el análisis de textos se revela como un componente importante del análisis didáctico de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Con frecuencia, los textos y documentos de estudio asumen una parte sustancial de la dirección del proceso de enseñanza y aprendizaje. Es cierto que en los niveles de educación primaria el alumno no afronta solo el estudio de los contenidos curriculares, usando el libro de manera personal y autónoma. El profesor desempeña un papel de mediador entre el libro y el alumno. Pero un libro de texto escolar que tenga una baja idoneidad epistémica y semiótica implicará una mayor carga para el profesor y menor autonomía para los alumnos.

La metodología de análisis descrita puede ser una herramienta útil para la preparación de profesores. El diseño y desarrollo de unidades didáctica debe tener en cuenta las experiencias e investigaciones previas realizadas, las cuales se concretan habitualmente en las lecciones elaboradas por equipos de expertos. Una pregunta clave para el profesor es: ¿cómo puedo adaptar a mi contexto y circunstancias la unidad didáctica que me ofrece este libro de texto y en la medida de lo posible optimizarla? Para responder esta pregunta es necesario adoptar unos criterios de mejora o idoneidad de un proceso de estudio matemático.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del proyecto MCYT – FEDER: SEJ2004-00789, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica. Madrid.

Referencias

Brousseau, B. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dordrecht: Kluwer.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Contreras A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(2), 151–186.

Ferrero, L. y cols. (1999). *Matemáticas 5. Serie Sol y Luna*. Anaya.

Font, V. y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. *Revista de Educación*, *338*, 309-346.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématique, 22*(2/3), 237–284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 3–36.

Godino, J. D., Wilhelmi M. R. y Bencomo, D. (2005). "Suitability criteria for a mathematical instruction process. A teaching experience with the function notion". *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *4.2*, 1–26.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (aceptado).

Hiebert, J., Morris, A. K., y Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 66*, 201–222.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. En A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 99-137): Dorchecht: Kluwer A. P.

Vygotski, L.S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, 2ª edición. Barcelona, ESP: Crítica-Grijalbo, 1989.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations.* N. York, Macmillan.

Juan D. Godino
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada
España

E-mail: jgodino@ugr.es

Vicenç Font
Departament de Didáctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica
Universitat de Barcelona
España

E-mail: vfont@ub.edu

Miguel R. Wilhelmi
Departamento de Matemáticas e Informática
Universidad Pública de Navarra
España

E-mail: miguel.wilhelmi@unavarra.es