Astrazione e generalità in matematica: alcune considerazioni semiotiche

Luis Radford

Berkeley e l'assurdità delle idee astratte

I matematici hanno posizioni divergenti su diverse questioni importanti. Si intendono, tuttavia, su un punto centrale: gli oggetti di cui si parla in matematica sono degli oggetti generali. Ciò che si enuncia relativamente a una figura geometrica, non vale per una figura in particolare, ma per *tutte* le figure prese in considerazione (tutti i triangoli, tutti i cerchi etc.). Ora, come si può *enunciare* e *provare* una proprietà che vale per tutte le figure di un certo tipo?

Tale questione è analizzata nel *Trattato Concernente i Principi della Conoscenza Umana* di George Berkeley (1685-1753), pubblicato nel 1710. In questo trattato Berkeley afferma:

«Avendo dimostrato che la somma dei tre angoli di un triangolo isoscele rettangolo sono uguali alla somma di due angoli retti, non posso concludere che questo risultato riguardi tutti gli altri triangoli... Sembra così che, per essere sicuri che questa proprietà sia universalmente vera, noi dobbiamo, dunque, fare una dimostrazione per ciascuno particolare triangolo, il che è impossibile, o meglio dimostrarla una volta per tutte a partire dall'idea astratta di triangolo» (Berkeley, 1710/1982, p. 15).

Ora, è questa stessa idea di "idea astratta di triangolo" che Berkeley trova imbarazzante. Per convincere il suo lettore, Berkeley propone un'esperienza mentale: gli chiede di "guardare" nei suoi pensieri per vedere se vi può trovare un'idea che corrisponda alla descrizione di un triangolo astratto che non è né ottuso, né rettangolo, né equilatero, né scaleno, ma tutto questo allo *stesso tempo*. Nell'impossibilità di pensare un tale triangolo, Berkeley credeva di aver gettato le basi per respingere l'idea astratta di triangolo (in effetti per rigettare l'esistenza di idea astratta in quanto tale). Come è possibile garantire, allora, il carattere generale di una proposizione se non ci sono idee astratte? Come è possibile affermare qualche cosa di generale se non si può pensare l'oggetto generale sul quale poggia il nostro enunciato? Dopo Berkeley, una dimostrazione poggia sempre su un oggetto particolare, per esempio un triangolo isoscele rettangolo, i cui lati hanno una determinata lunghezza. Ma ciò che permette alla dimostrazione di essere vera *in generale,* è che la stessa dimostrazione può essere applicata agli altri triangoli, poco importa quale sia la loro dimensione e la loro forma, poiché né la misura degli angoli né la particolare lunghezza dei lati sono prese in considerazione nella dimostrazione.

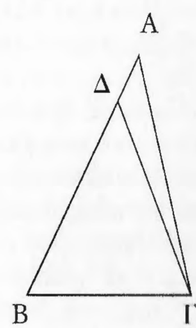
«È vero» afferma Berkeley, «il diagramma che ho in mente comprende tutte queste particolarità, ma non vi è la minima menzione di queste nella dimostrazione della proposizione... ciò prova in maniera sufficiente che il triangolo diritto poteva essere obliquo e i lati diversi tra loro» (Berkeley, 1710/1982, p. 15).

Per Berkeley, ciò che rende possibile un'idea generale è lo stabilirne le proprietà, non quindi la nostra capacità di formare delle idee astratte o di ragionare su quelle, ma piuttosto la nostra capacità di rimpiazzare o sostituire un oggetto particolare con un altro, non importa quale. Per dirlo in termini semiotici, per Berkeley, il particolare su cui si regge la dimostrazione è un simbolo o un rappresentante di tutta la sua classe.

Euclide e la tradizione greca

Prendiamo ora una proposizione degli *Elementi* di Euclide; per esempio, la proposizione VI del Libro I:

«Se due angoli di un triangolo sono uguali tra loro, i lati opposti a questi angoli uguali, saranno pure uguali tra loro».



Ecco la prima parte della dimostrazione:

«Sia ΑΒΓ, il triangolo con l'angolo ΑΒΓ uguale all'angolo ΑΓΒ; affermo che il lato ΑΒ è uguale al lato ΑΓ. Perché se il lato ΑΒ non è uguale al lato ΑΓ, uno di loro sarà maggiore dell'altro. Sia ΑΒ il maggiore; individuiamo sul lato maggiore ΑΒ il segmento ΔΒ uguale al lato minore

AΔ, e congiungiamo Δ con Γ. Poiché ...» etc. (Cit. dall'ediz. di Peyfard, 1993, p. 7).

Nell'estratto che abbiamo riportato, riconosciamo l'organizzazione tipica di una dimostrazione matematica greca: comincia con un enunciato di ciò che sarà dimostrato. Si tratta di un enunciato generale condizionale chiamato *prótasis* che possiamo scrivere, seguendo Reviel Netz (1999, pp. 252 e succ.), come: $C(x) \rightarrow P(x)$.

Si considera poi un oggetto geometrico "particolare" *a* (per esempio, "il triangolo ABΓ", come nella proposizione VI qui sopra). Questo oggetto particolare permette di esprimere la premessa C come $C(a)$. L'enunciato che ha come argomento l'oggetto particolare *a* è chiamato *ékthesis*. In questo caso l'*ékthesis* è «Sia ABΓ, con l'angolo ABΓ uguale all'angolo AΓB». Poi segue l'affermazione sistematica P applicata all'oggetto particolare *a*, vale a dire $P(a)$: «Affermo che il lato AB è uguale al lato AΓ», che è chiamata *diorismós*. La struttura dimostrativa è dunque la seguente:

1. $C(x) \rightarrow P(x)$	(*prótasis*)
2. $C(a)$	(*ékthesis*)
3. Affermo che $P(a)$	(*diorismós*)

La catena è seguita da una sequenza di costruzioni, eventualmente accompagnate da un disegno. La prova termina con il *diorismós* $P(a)$ e menzionando ancora una volta la *prótasis*, $C(x) \rightarrow P(x)$, preceduta questa volta dall'espressione "dunque". In altri termini, la catena precedente è seguita da:

4. Poiché $C(b)$, ..., $C(n)$, $P(b)$, ... $P(a)$
5. Dunque $C(x) \rightarrow P(x)$.

Come fa notare Netz, la sequenza $C(b)$, ..., $C(n)$, $P(b)$, ..., $P(a)$ non è una dimostrazione di $P(x)$. Questa sequenza è una dimostrazione che $P(a)$ deriva da $C(a)$. Che cosa allora assicura la validità della proposizione generale? Netz afferma che:

«Il fatto che il *diorismós* è dimostrabile assumendo l'*ékthesis* – il fatto che $P(a)$ può essere necessariamente inferita da $C(a)$ – è la dimostrazione del risultato generale, che $C(x) \rightarrow P(x)$. L'aspetto cruciale è che, assumendo l'*ékthesis* e nient'altro, il *diorismós* è per ciò necessariamente vero. Il nesso necessario tra $C(a)$ e $P(a)$ costituisce il fondamento per $C(x) \rightarrow P(x)$» (Netz, 1999, p. 256).

Euclide era un berkeleyano? Vale a dire, il concetto di oggetto generale in Euclide è conforme alla descrizione che ne fa Berkeley? La risposta è negativa. La generalità della dimostrazione non è garantita qui da un criterio di sostituzione di un oggetto particolare (per esempio un triangolo) con un altro oggetto particolare.

Infatti, anche se Euclide afferma: «Sia ABΓ *il* triangolo, con l'angolo ABΓ uguale all'angolo AΓB» e non «Sia ABΓ *un* triangolo, con l'angolo ABΓ uguale all'angolo AΓB», il triangolo in questione nella dimostrazione non è un triangolo *particolare strictu sensu*, avente queste e quelle misure. Rappresenta un triangolo *qualunque*, sottostante a certe condizioni. In breve, l'oggetto triangolo in questione è già un oggetto *generale*.

Il disegno del triangolo che accompagna la dimostrazione di Euclide potrebbe indurci a pensare che la dimostrazione si regga su *questo* triangolo particolare. Tuttavia, è molto facile convincersi che non è affatto così. Nei testi euclidei, la figura è assoggettata alla dimensione discorsiva che fissa i gradi di libertà delle figure che accompagnano il testo. In effetti, se il ragionamento di Euclide si reggesse sulle figure disegnate, Euclide non si darebbe tanta pena a mettere in evidenza delle relazioni concettuali che si potrebbero facilmente *leggere* sulle figure. Nella proposizione VI, per esempio, non avrebbe interesse a perdere il suo tempo a chiederci di supporre che AB è il lato maggiore, perché *lo si vedrebbe*. (Egli afferma infatti che: «Poiché se il lato AB non è uguale al lato AΓ, uno di loro sarà maggiore dell'altro. Sia AB il maggiore...»). La figura, infatti, è una illustrazione di un'idea generale, perché non è una illustrazione che costituisce un caso particolare. Può essere utile riportare nella nostra discussione il celebre passo tratto da *Repubblica* dove Platone ci ricorda che i geometri «fanno uso e parlano di figure visibili, anche se non stanno veramente pensando a quelle, ma a quelle originali cui assomigliano» (*Repubblica*, 510d).

Si vede allora perché l'idea generale di triangolo e il modo in cui diventa oggetto del discorso e dell'attenzione nella dimostrazione euclidea è differente dall'idea generale proposta da Berkeley. Come abbiamo detto precedentemente, per costui, la dimostrazione si regge su un oggetto particolare:

«Così, quando dimostro non importa quale proposizione concernente i triangoli, si deve supporre che io abbia in mente l'idea universale di triangolo, che non deve essere intesa come se io potessi avere una idea di triangolo che non è né equilatero, né scaleno né isoscele. Ma solamente che il triangolo particolare che io considero, poco importa che sia di un tipo o di un altro, prende il posto di e rappresenta tutti i triangoli rettilinei possibili, ed è in questo senso che è universale» (Berkeley, 1710/1982, p. 15).

In Berkeley, dunque, il particolare è investito di uno statuto semiotico che non è presente in Euclide. Per il primo, la generalità non è che il risultato di un meccanismo di utilizzazione di particolari che, pur essendo completamente particolari, sono pensati come delle *rappresentazioni* di tutte le altre idee singolari della stessa specie:

«La generalità non consiste in un'essenza o in un concetto positivo assoluto di una cosa qualunque, ma in una relazione di qualche cosa con un'altra cosa singolare che è in questo modo designata o rappresentata» (Berkeley, 1710/1982, p. 15).

Ma ritorniamo a Euclide e riformuliamo ancora una volta la questione cruciale relativa a ciò che giustifica, secondo lui, la determinazione di una proprietà generale. Detto altrimenti, cos'è che permette secondo un legame necessario il passaggio da $C(a) \rightarrow P(a)$ a $C(x) \rightarrow P(x)$? Nel suo lavoro molto interessante sulla formazione della deduzione in Grecia, Netz suggerisce che il senso più profondo di tale legame risiede nella possibilità potenziale del matematico di effettuare la stessa dimostrazione su un altro oggetto particolare a', poi su a'', poi su a''' etc. In altri termini, il significato della generalizzazione per i matematici greci, seguendo l'idea di Netz, starebbe nella possibilità di *ripetizione* (Netz, 1999, pp. 256-257). Ora, questo ci riporta all'idea di Berkeley. Euclide sarebbe certamente d'accordo sul fatto che si possa prendere un triangolo particolare,

poi un altro triangolo particolare etc. e ripetere la dimostrazione su ciascuno. Tuttavia, se guardiamo meglio, la generalità delle proposizioni euclidee non sembra basarsi su una ripetizione o su una sostituzione illimitata di oggetti *particolari* gli uni al posto degli altri, ma piuttosto sulla possibilità di pensare di già a un oggetto *generale,* descritto attraverso dei termini linguistici *generali* (per esempio il triangolo ΑΒΓ), triangolo che viene specificato attraverso un diagramma, senza tuttavia, in questo modo, diventare un oggetto particolare. Quando Euclide afferma: «Sia ΑΒΓ il triangolo, con ...» non fa riferimento a un oggetto particolare, con queste o quelle misure o con una data forma precisa fissata dalla figura, ma a un oggetto generale. Si dovrebbe, dunque, rivedere la struttura della dimostrazione euclidea (sintetizzata nelle 5 tappe citate sopra) non come una procedura che investe un oggetto particolare a, come suggerisce Netz, ma un oggetto generale a, che permette di ottenere la generalità espressa dalla *prótasis.*

Queste idee risulteranno probabilmente più chiare se facciamo riferimento, adesso, a Edmund Husserl.

Husserl e l'astrazione in quanto obiettivo intenzionale

Nella critica delle teorie dell'astrazione che conduce nelle *Ricerche Logiche*, Husserl giustamente mette in evidenza che il problema della generalità, come posto da Berkeley, non raggiunge il suo obiettivo, poiché il problema della significazione del segno non è ben posto. Per Husserl, la possibilità del generale non risulta dalla sostituzione di particolari. Essa piuttosto fa affidamento su un'*esperienza intenzionale*, basata su ciò che egli chiama «atti correlativi di riempimento» e che costituiscono la rappresentazione "propriamente detta" del generale. In una dimostrazione come quella della proposizione VI del Libro I degli *Elementi*, anche se si ha l'impressione di star pensando a un triangolo particolare come è dato dal disegno, non ci si riferisce a quel triangolo lì. Un caso singolare sufficientemente concreto serve come base per la funzione di riempimento del significato al momento di afferrare una generalità, ma non è a questo caso concreto che si rivolge la coscienza che coglie la generalità. Nell'afferrare la generalità, si ha un cambiamento nell'atto intenzionale: questo atto non è lo stesso a seconda che noi guardiamo un caso individuale o un caso generale. Per Husserl, è proprio questo cambio intenzionale che innegabilmente manca alla teoria dell'astrazione di Berkeley. Husserl mette in evidenza che Berkeley confonde il caso singolare concreto che serve alla coscienza per riempire il senso del generale con l'oggetto intenzionale del pensiero:

«Non bisogna intendere per astrazione la semplice messa in rilievo di un contenuto parziale, ma la coscienza di un genere particolare che afferra direttamente l'unità specifica su base intuitiva» (Husserl, 1901/1961, p. 184).

In breve, così come è concepita dall'empirismo, la generalità rimane, nella critica di Husserl, una generalità psicologica, senza arrivare a chiarire il problema del contenuto della significazione generale stessa.

Nei suoi lavori, Husserl sottolinea la consustanzialità tra gli atti correlativi di riempimento del generale e le modalità di predicazione, come "*un* triangolo", "*tutti* i triangoli", "*il* triangolo in generale". È per questo motivo che per lui la generalità risulta correlata alla funzione logica predicativa (Husserl, 1973). Così, «Ciò che la piccola parola *un* esprime», afferma Husserl parlando della forma "*un* A", «è una forma che, in maniera evidente, appartiene all'intenzione della significazione o al riempimento della significazione, e questo relativamente a *ciò che* essa intenziona» (Husserl, 1901/1961, p. 173). È lo stesso quando si usa la forma predicativa 'il A', come fa Euclide quando parla del triangolo ABΓ. In questo caso, l'intenzione non è rivolta verso una rappresentazione singolare, ma verso una modalità differente di significare, un'espressione che comprende l'estensione *tale e quale.*

Husserl ha il grande merito di mettere in evidenza i limiti delle teorie empiriste come quella di Berkeley, in particolare la confusione, che non arrivano a superare, tra l'atto di attenzione e l'atto di significare o di intenzionare. Queste teorie non arrivano a dirimere la confusione tra *l'intenzione dell'atto* e *il contenuto presente alla coscienza.* Questi atti non sono l'obiettivo a cui miriamo, ma sono il mirare stesso. Come diceva Husserl:

«Quando noi concepiamo un'idea di una forma A qualunque, facendo così, noi portiamo la nostra attenzione precisamente su un A qualunque, e non sul siffatto A presente» (Husserl, 1901/1961, p. 191). «L'uno qualunque o non importa quale, tutti o ciascuno... non sono niente che possa essere indicato in un oggetto dell'intuizione fondato (*sic*) sull'intuizione sensibile» (*ibid*, p. 191).

Husserl ha anche il merito di aver messo in evidenza che l'atto di astrazione è alla base di una forma concettuale fondamentalmente nuova attraverso la quale un nuovo oggetto diventa oggetto di coscienza. Sebbene egli abbia detto che noi dimentichiamo che gli oggetti di cui diventiamo coscienti non sono semplicemente presenti nella coscienza come in una scatola, «tale per cui non possiamo che trovarli lì e afferrarli; ma che è dentro le diverse forme dell'intenzione oggettiva che essi si costituiscono come ciò che sono e valgono per noi» (p. 193), egli non ha affrontato il problema di individuare le condizioni che rendono possibile a una coscienza di rivolgersi in un certo modo verso una generalità che è *già là,* un problema fondamentale per la didattica. Egli non ha più affrontato il problema della natura costitutiva di questa coscienza che mira al generale e produce il generale dentro l'atto intenzionale stesso. La sua descrizione in termini noetici (cioè di ciò che si pensa) e noematici (cioè di ciò che si percepisce), resta prigioniera di un'epistemologia bipolare, soggetto-oggetto, senza poter sfociare in una concezione di tipo culturale, malgrado gli sforzi importanti che egli ha profuso alla fine del sua vita, per integrarvi la dimensione intersoggettiva (Radford, 2006). Trascinato dall'idealismo trascendentale, egli supponeva l'esistenza di *forme logiche primitive,* o primarie, esprimibili in forme predicative linguistiche, continuando così una tradizione ontologica che risale ad Aristotele. Essendo tali forme logiche primitive correlate a dei "modi di coscienza" propri, la coscienza – e con essa generalità e astrazione – dimora dentro la teoria della conoscenza husserliana tutt'al più mediata dal linguaggio, senza che egli abbia preso in considerazione altre forme di intenzionalità, come le forme corporali e gestuali, e la prassi sociale nel suo senso più generale.

NOTA

Questo lavoro rientra nel programma di ricerca sovvenzionato dal Conseil de recherches en sciences humaines du Canada/Social Sciences and Humanities Research Council of Canada. La traduzione dal francese all'italiano è di George Santi.

BIBLIOGRAFIA

Berkeley G. (1710/1957). *A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge.* New York: Liberal Arts Press.

Euclide (1993). *Les Œuvres d'Euclide.* Paris: A. Blanchard.

Husserl E. (1901/1961). *Recherches logiques. Première partie, Recherches I et II.* Paris: Presses Universitaires de France.

Husserl E. (1973). *Experience and Judgment.* Evanston: Northwestern University Press.

Netz R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Radford L. (2006). The Anthropology of Meaning. *Educational Studies in Mathematics.* 61, 39-65.

8. Matematica e filosofia

Fin dall'inizio di questo libro, abbiamo dovuto fare i conti con la filosofia: impossibile fare un discorso *sulla* matematica che non sfoci in filosofia; diverso è fare un discorso *di* matematica, nel quale si possono ignorare i problemi ontologici o fondazionali, e puntare sui contenuti matematici.

Per esempio, se il Lettore avesse deciso di studiare un po' di matematica-matematica, e non di filosofia o di didattica, sappia che esistono molte belle raccolte di matematica divulgativa seria, cioè scritta in modo attendibile; il testo da molti considerato il numero uno credo sia il libro di Richard Courant (1888-1972) e Herbert Robbins (1915-2001), scritto nel 1941 (Courant, Robbins, 1971).

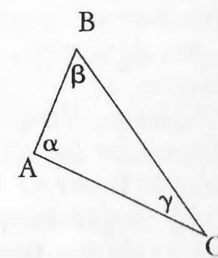
Ma in questo capitolo, anche se solo per brevi cenni, vedremo ancora un tassello del legame tra matematica e filosofia.

Per molte persone, la matematica è una disciplina di certezze, mentre la filosofia è disciplina di possibilità; per cui, la matematica si occupa del vero, la filosofia delle possibili verità.

La domanda banale che ne deriva è: che cosa è questo "vero"?

Ciò che assicura le verità delle asserzioni della matematica si chiama "dimostrazione".

Vediamo un esempio che discuteremo; dunque non è tanto l'esempio in sé che il Lettore deve ora esaminare, ma quel che ne diremo poi.



Consideriamo un triangolo ABC ed i suoi angoli interni α, β e γ.

Per un qualche scopo, o anche solo per curiosità, ci si chiede: quanto mi-