This article was published in 2009 in: B. D'Amore (Ed.), *Matematica, stupore e poesia* (pp. 146-154). Firenze: Italy.

Abstraction et généralité en mathématiques : quelques considérations sémiotiques[1]

Luis Radford
Université Laurentienne, Ontario, Canada

Berkeley et l'absurdité des idées abstraites

Les mathématiciens divergent sur plusieurs points importants. Ils s'entendent néanmoins sur un point central : les objets dont on parle en mathématiques sont des objets généraux. Ce qu'on énonce par rapport à une figure géométrique ne vaut pas pour une figure en particulier, mais pour *toutes* les figures prises en considérations (tous les triangles, tous les cercles, etc.). Or, comment peut-on *énoncer* et *prouver* une propriété qui vaut pour toute figure d'un certain type?
Cette question est étudiée dans le *Traité Concernant les Principes de la Connaissance Humaine* de George Berkeley, publié en 1710. Dans ce traité, Berkeley dit :

> Ayant prouvé que les trois angles d'un triangle isocèles rectangulaire sont égaux à deux angles droits, je ne peux pas conclure que ce résultat convient à tous les autres triangles… Il semble ainsi que, pour être sûr que cette propriété est universellement vraie, nous devons soit faire une démonstration pour chaque triangle en particulier, ce qui est impossible, ou bien la démontrer une fois pour toutes à partir de l'idée abstraite de triangle (Berkeley, 1710/ 1982, p. 15)

Or, c'est précisément cette idée d'idée abstraite de triangle que Berkeley trouve embarrassante. Pour convaincre son lecteur, Berkeley propose à celui-ci une expérience mentale : il lui demande de « regarder » dans ses propres pensées pour voir s'il peut y trouver une idée qui correspondrait à la description d'un triangle abstrait qui n'est ni oblique, ni rectangle, ni équilatéral, ni scalène, mais tout cela *en même temps*. Dans l'impossibilité de penser un tel triangle, Berkeley croyait avoir jeté les bases pour rejeter l'idée abstraite de triangle (et en fait pour rejeter l'existence de

---

[1] Les réflexions présentées ici proviennent d'un programme de recherché subventionné par Le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada / The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada.

toute idée abstraite). Comment alors garantir le caractère général d'une proposition si on n'a pas d'idées abstraites? Comment affirmer quelque chose de général si on ne peut pas penser l'objet général sur lequel porte notre énoncé? D'après Berkeley, une démonstration porte toujours sur un objet particulier –par exemple un triangle isocèle rectangulaire, dont les côtés sont d'une certaine longueur. Mais ce qui permet à la démonstration d'être vraie *en général*, c'est que la même démonstration s'applique aux autres triangles, peu importe leur taille et leur forme, car ni la mesure des angles ni la longueur particulière des côtés sont considérés dans la démonstration. « C'est vrai » dit Berkeley, « le diagramme que j'ai en vu comprend toutes ces particularités, mais il n'y a pas la moindre mention de celles-ci dans la preuve de la proposition… ce qui prouve de manière suffisante que le triangle droit pouvait être oblique et les côtés inégaux » (Berkeley, 1710/ 1982, p. 15).

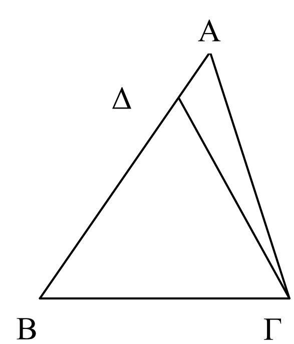
Pour Berkeley, ce qui rend possible une idée générale et l'établissement des propriétés de celle-ci, n'est pas notre capacité à former des idées abstraites et à raisonner sur celles-ci, mais plutôt notre capacité à remplacer ou à substituer un objet particulier par n'importe quel autre . Pour le dire en termes sémiotiques, pour Berkeley, le particulier sur lequel porte la démonstration est un symbole ou un représentant de toute sa classe.

Euclide et la tradition grecque

Prenons maintenant une proposition des *Éléments* d'Euclide; par exemple, la proposition VI du Livre I : « Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés opposés à ces angles égaux, seront aussi égaux entre eux. »

Voici la première partie de la démonstration : « Soit le triangle ΑΒΓ, ayant l'angle ΑΒΓ égal à l'angle ΑΓΒ; je dis que le côté ΑΒ est égal au côté ΑΓ.

Car si le côté ΑΒ n'est pas égal au côté ΑΓ, l'un d'eux sera plus grand que l'autre. Soit ΑΒ le plus grand; retranchons du plus grand côté ΑΒ la droite ΔΒ égale au plus petit ΑΓ, et joignons ΔΓ. Puisque … », etc.[2]



L'extrait présenté ici de cette proposition nous rappelle l'organisation typique d'une preuve mathématique grecque: elle commence avec l'énoncé de ce qui sera démontré. Il s'agit d'un

[2] Cité d'après l'édition de Peyfard (1993), p. 7.

énoncé général conditionnel appelé *protasis,* que nous pouvons écrire, en suivant Netz (1999, p. 252 ff.), comme ceci : $C(x) \rightarrow P(x)$.

Ensuite, on considère un objet géométrique « particulier » *a* (par exemple, « le triangle ABΓ », comme dans la proposition VI ci-dessus). Cet objet particulier permet d'exprimer la prémisse C comme $C(a)$. L'énoncé au sujet de l'objet particulier *a* est appelé *ekthesis*. Ici l'*ekthesis* est « Soit le triangle ABΓ, ayant l'angle ABΓ égal à l'angle AΓB »). Suit ensuite l'affirmation systématique P appliquée à l'objet particulier *a*, c'est-à-dire $P(a)$: « je dis que le côté AB est égal au côté AΓ »), ce qui est appelé le *diorismos.* La structure démonstrative est donc :

1. $C(x) \rightarrow P(x)$ (*protasis*)
2. $C(a)$ (*ekthesis*)
3. Je dis que $P(a)$ (*diorismos*)

La chaîne est suivie d'une séquence de constructions, accompagnée éventuellement par un dessin. La preuve se termine par le diorismos $P(a)$ et la mention encore une fois de la protasis, $C(x) \rightarrow P(x)$, précédée cette-fois-ci de l'expression « donc ». En d'autres termes, la chaîne précédente est suivie de :

4. Car C(b), …, C(n), P(b), … P(a)
5. Donc $C(x) \rightarrow P(x)$.

Comme le remarque Netz, la séquence C(b), …, C(n), P(b), … P(a) n'est pas une preuve de P(x). Cette séquence est une preuve que P(a) résulte de C(a). Qu'est-ce qui assure alors la validité de la proposition générale? Netz dit :

> The fact that the *diorismos* is provable on the assumption of the *ekthesis* –the fact that P(a) may be necessarily inferred from C(a)– is the proof for the general result, that $C(x) \rightarrow P(x)$. The crucial thing is that, assuming the *ekthesis* and nothing else, the *diorismos* is thereby necessarily true. The necessary nexus between C(a) and P(a) forms the ground for $C(x) \rightarrow P(x)$. (Netz, 1999, p. 256).

Est-ce que Euclide état un Berkeleen? C'est-à-dire, est-ce que le concept d'objet général chez Euclide est conforme à la description qu'en fait Berkeley? La réponse est non. La généralité de la preuve n'est pas garantie ici par un critère de substitution d'un objet particulier (par exemple un triangle) par un autre objet particulier.

En fait, même si Euclide dit: « Soit *le* triangle ΑΒΓ, ayant l'angle ΑΒΓ égal à l'angle ΑΓΒ ») et non pas « Soit *un* triangle ΑΒΓ, ayant l'angle ΑΒΓ égal à l'angle ΑΓΒ », le triangle dont il est question dans la preuve n'est pas un triangle *particulier stricto sensu*, ayant telles et telles mesures. Il représente un triangle *quelconque*, assujetti à certaines conditions. Bref, l'objet triangle dont il est question est déjà un objet *général*.

Le dessin du triangle qui accompagne la démonstration d'Euclide pourrait nous laisser penser que la démonstration porte sur *ce* triangle particulier. Cependant, il est très facile de s'apercevoir que cela n'est pas le cas. Dans les textes euclidiens, la figure est assujettie à la dimension discursive qui, elle, fixe les degrés de liberté des figures accompagnant le texte. En effet, si le raisonnement d'Euclide portait sur les figures dessinées, Euclide ne se donnerait pas tant de peine à mettre en évidence des relations conceptuelles qu'on pourrait facilement *lire* sur les figures. Dans la proposition VI, par exemple, il n'aurait pas intérêt à perdre son temps à nous demander de supposer que AB est le plus grand côté, car *cela se verrait*.[3] La figure, en fait, est une illustration d'une idée générale, mais ce n'est pas parce qu'elle est une illustration qu'elle constitue un cas particulier. Il n'est pas inutile de ramener à notre discussion le célèbre passage de la *République* où Platon nous rappelle que les géomètres "make use of and argue about visible figures, though they are not really thinking about them, but about the originals which they resemble" (*République* 510d).

On voit alors pourquoi l'idée générale de triangle et la façon dont il devient objet de discours et d'attention dans la preuve euclidienne est différente de l'idée générale avancée par Berkeley. Comme nous l'avons dit précédemment, pour celui-ci, la preuve est vue comme portant sur un objet particulier :

> Ainsi, quand je démontre n'importe quelle proposition concernant les triangles, on doit supposer que j'ai en vue l'idée universelle de triangle, ce qui ne doit pas être compris

[3] Euclide dit : « Car si le côté AB n'est pas égal au côté ΑΓ, l'un d'eux sera plus grand que l'autre. Soit AB le plus grand… ».

> comme si je pouvais avoir une idée de triangle qui n'est ni équilatéral ni scalène ni isocèle. Mais seulement que le triangle particulier que je considère, peu importe qu'il soit d'une sorte ou d'une autre, prend la place et représente tous les triangles rectilignes possibles, et c'est dans ce sens universel (Berkeley, 1710/ 1982, p. 15).

Chez Berkeley, le particulier est donc investi d'un statut sémiotique qu'il n'a pas chez Euclide. Pour le premier, la généralité n'est que le résultat d'un mécanisme d'utilisation des particuliers qui, tout en étant des particuliers, sont pensés comme des *représentations* de toutes les autres idées singulières de la même espèce : « la généralité ne consiste pas dans l'essence ou dans le concept positif absolu d'une chose quelconque, mais dans la relation de quelque chose à une autre chose singulière qui est par là désignée ou représentée. » (Berkeley, 1710/ 1982, p. 15).

Mais revenons à Euclide et reformulons encore une fois la question cruciale de ce qui justifie, chez lui, l'établissement d'une propriété générale. Autrement dit, qu'est-ce qui permet le passage du lien nécessaire $C(a) \rightarrow P(a)$ à $C(x) \rightarrow P(x)$? Dans son travail très intéressant sur la formation de la déduction grecque, Netz suggère que le sens le plus profond de ce lien repose dans la possibilité potentielle du mathématicien d'effectuer la même démonstration sur un autre objet particulier *a'*, puis *a''*, puis *a'''*, etc. En d'autres termes, la généralisation pour les mathématiciens grecs signifierait, d'après Netz, la possibilité de *répétition* (Netz, 1999, pp. 256-257). Or, cela nous ramène à l'idée de Berkeley. Euclide serait certainement d'accord sur le fait qu'on puisse prendre un triangle particulier, puis un autre triangle particulier, etc. et répéter la démonstration sur chacun d'eux. Toutefois, à y voir de plus près, la généralité des propositions euclidiennes ne semble pas reposer sur une répétition ou sur une substitution illimitée d'objets *particuliers* les uns par les autres, mais plutôt sur la possibilité de penser déjà à un objet *général*, décrit à travers des termes linguistiques généraux (par exemple, le triangle ΑΒΓ), triangle qui se spécifie à travers un diagramme, sans pour autant devenir par là objet particulier. Quand Euclide dit : « Soit le triangle ΑΒΓ, ayant … », il ne fait pas référence à un objet particulier, ayant telles et telles mesures ou cette forme précise fixée par le diagramme, mais à un objet général. Il faudrait donc revoir la structure de la preuve euclidienne (synthétisée dans les étapes 1à 5 ci-dessus) comme procédure portant non pas sur un objet particulier *a*, comme le suggère Netz, mais sur un objet général *a*, qui permet la visée de la généralité qu'exprime la *protasis*.

Ces idées deviendront plus claires probablement si nous nous tournons maintenant du côté d'Edmund Husserl.

Husserl et l'abstraction en tant que visée intentionnelle

Dans la critique des théories de l'abstraction qu'il mène dans les *Recherches Logiques*, Husserl met justement en évidence que le problème de la généralité, tel que posé par Berkeley, ne parvient pas à son but du fait que le problème de la signification du signe n'est pas bien posé. Pour Husserl, la possibilité du général ne résulte pas de la substitution de particuliers. Elle repose plutôt sur une *expérience intentionnelle*, basée sur ce qu'il appelle des actes corrélatifs de remplissement et qui constituent la représentation « proprement dite » du général. Dans une démonstration comme celle de la proposition VI du Livre I des *Éléments*, bien qu'on ait l'air d'être en train de penser à un triangle particulier tel que donné par le dessin, ce n'est pas ce triangle-là que l'on vise. Un cas singulier quelque peu concret sert de base à la fonction remplissante de signification lors de la saisie d'une généralité, mais ce n'est pas ce cas concret qui est visé par la conscience de généralité. Dans la saisie du général, il y donc un changement dans l'acte de viser : cet acte n'est pas le même selon que nous visons un cas individuel ou un cas général. Pour Husserl, c'est justement ce changement intentionnel qui manque indéniablement à la théorie de l'abstraction de Berkeley. Husserl met en évidence le fait que Berkeley confond le cas singulier concret qui sert à la conscience à remplir le sens du général avec l'objet de l'intention de la pensée. « Il faut entendre par abstraction non pas la simple mise en relief d'un contenu partiel, mais la conscience d'un genre particulier qui appréhende directement l'unité spécifique sur la base intuitive » (Husserl, 1901/1961, p. 184). Bref, la généralité telle que conçue par l'empirisme reste, dans la critique de Husserl, une généralité psychologique sans arriver à élucider le problème du contenu de la signification générale elle-même.

Dans ses travaux, Husserl souligne la consubstantialité entre les actes corrélatifs du remplissement du général et les manières de prédication, telles que '*un* triangle', '*tous* les triangles, '*le* triangle en général'. C'est pour cela que la généralité apparaît, chez lui, corrélée à la fonction logique prédicative (Husserl, 1973). Ainsi, « Ce que le petit mot *un* exprime », dit Husserl en parlant de la forme '*un* A', « est une forme qui, d'une manière évidente, appartient à l'intention de signification ou au remplissement de signification, et cela relativement à *ce qu*'elle vise. » (Husserl, 1901/1961, p. 173). Il en va de même quand on utilise la manière prédicative « le A », comme fait Euclide en parlant du triangle ΑΒΓ. Dans ce cas, l'intention n'est pas tournée vers une représentation singulière, mais vers une façon différente de signifier, une façon qui embrasse l'extension *telle quelle*.

Husserl a le grand mérite de mettre en évidence les limites des théories empiristes comme celle de Berkeley, en particulier la confusion qu'elles n'arrivent pas à surmonter entre l'acte d'attention et l'acte de signifier ou de viser. Ces théories n'arrivent pas à démêler la confusion entre l'*intention de l'acte* et le *contenu présent à la conscience*. Ces actes ne sont pas l'objectif que nous visons, ils sont bien la visée. Comme Husserl disait, « Quand nous concevons une idée de la forme un A quelconque, ce faisant, nous portons précisément notre attention sur un A quelconque, et non sur tel A présent. » (Husserl, 1901/1961, p. 191). « Le un quelconque ou le n'importe quel, le tous ou le chaque … ne sont rien qui puisse être indiqué dans un objet de l'intuition fondé (sic) dans l'intuition sensible » (*ibid*, p. 191). Husserl a aussi le mérite d'avoir mis en évidence le fait que l'acte d'abstraction est à la base d'un genre conceptuel fondamentalement nouveau à travers lequel un nouvel objet devient objet de conscience. Bien qu'il ait dit que nous oublions que les objets dont nous devenons conscients ne sont pas simplement présents dans la conscience comme dans une boîte, « de telle sorte qu'on ait qu'à les y trouver et à les saisir; mais que c'est dans les formes diverses de l'intention objective qu'ils se constituent comme ce qu'ils sont et valent pour nous » (p. 193), il n'a pas abordé le problème des conditions qui rendent possible à une conscience de se tourner d'une certaine façon vers une généralité *déjà là*, ce qui constitue un problème fondamental en éducation. Il n'a pas non plus abordé le problème de la nature constitutive entre cette conscience qui vise le général et le général produit dans l'acte intentionnel même. Sa description en termes noétique-noématiques reste prisonnière d'une épistémologie à deux pôles, sujet-objet, sans pouvoir déboucher sur une conception culturelle, malgré les efforts importants qu'il a fournis à la fin de sa vie pour y intégrer la dimension intersubjective (Radford, 2006). Emporté par l'idéalisme transcendantal, il supposait l'existence de *formes logiques primitives* ou premières, exprimables dans des modes prédicatifs langagiers, continuant ainsi une tradition ontologique qui remonte à Aristote. Ces formes logiques primitives étant corrélées à des « modes de conscience » propres, conscience --

et par là généralité et abstraction-- demeurent dans la théorie de la connaissance husserlienne tout au plus médiatisées par le langage, sans qu'il y ait pris en compte d'autres formes de visée, comme les formes corporelles et gestuelles, et de la praxis sociale dans son sens le plus général.

Références

Berkeley, G. (1710/1957). *A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge*. New York: Liberal Arts Press.

Euclide (1993). Les Œuvres d'Euclide, traduites par F. Peyfard. Paris : A. Blanchard.

Hussel, E. (1901/1961). *Recherches logiques. Première partie, Recherches I et II*. Paris: Presses Universitaires de France.

Husserl, E. (1973). *Experience and Judgment*. Evanston: Northwestern University Press.

Netz, R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Radford, L. (2006). The Anthropology of Meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 39-65.