

UED
Colección en
Educación
Matemática

La teoría de la objetivación

Una perspectiva vygotskiana sobre
saber y devenir en la enseñanza
y el aprendizaje de las matemáticas

Luis Radford

 Universidad de
los Andes
Colombia

Facultad de
Educación

La teoría de la objetivación

Una perspectiva vygotskiana sobre
saber y devenir en la enseñanza
y el aprendizaje de las matemáticas

Luis Radford

Nombre: Radford, Luis, autor. | Gómez Guzmán, Pedro, escritor de prólogo.

Título: La teoría de la objetivación : una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas / Luis Radford.

Descripción: Bogotá : Universidad de los Andes, Facultad de Educación, UED, Ediciones Uniandes, 2023. | xvii, 314 páginas : ilustraciones ; 16,5 x 22,5 cm. | Colección en Educación Matemática

Identificadores: ISBN 9789587983944 (rústica) | ISBN 9789587983951 (electrónico) | ISBN POD 9789587983968

Materias: Vygotskiĭ, L. S. (Lev Semenovich), 1896-1934 | Matemáticas – Enseñanza – Aspectos sociales | Pedagogía – Filosofía | Teoría del conocimiento | Pedagogía culturalmente relevante | Objetivación (Psicología social) | Sociología de la educación

Clasificación: CDD 510.71 –dc23

SBUA

Primera edición: marzo del 2023

© Luis Radford

© Pedro Gómez Guzmán, del prólogo

© Universidad de los Andes, Facultad de Educación
UED-Centro de investigación y formación en Educación Matemática
Ediciones Uniandes
Carrera 1.ª n.º 18A-12, bloque Tm
Bogotá, D. C., Colombia
Teléfono: 601 339 4949, ext. 2133
<http://ediciones.uniandes.edu.co>
ediciones@uniandes.edu.co

ISBN: 978-958-798-394-4
ISBN e-book: 978-958-798-395-1
ISBN POD: 978-958-798-396-8
DOI: <http://dx.doi.org/10.51570/Educ202312>

Corrección de estilo: Manuel Romero
Diagramación: Precolombi EU, David Reyes
Diseño de cubierta: Angélica Ramos

Impresión:
Editorial Nomos S. A.
Diagonal 18 Bis n.º 41-17
Teléfono: 601 208 6500
Bogotá, D. C., Colombia

Impreso en Colombia – *Printed in Colombia*

Universidad de los Andes | Vigilada Mineducación. Reconocimiento como universidad: Decreto 1297 del 30 de mayo de 1964. Reconocimiento de personería jurídica: Resolución 28 del 23 de febrero de 1949, Minjusticia. Acreditación institucional de alta calidad, 10 años: Resolución 582 del 9 de enero del 2015, Mineducación.

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida ni en su todo ni en sus partes, ni registrada en o transmitida por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electro-óptico, por fotocopia o cualquier otro, sin el permiso previo por escrito de la editorial.

A Dora, por su infinita paciencia

Contenido

Prólogo a esta edición en castellano Pedro Gómez	XIII
Prefacio	xv
0. El ascenso de lo abstracto a lo concreto	1
1. Teorías en la Educación Matemática	3
1. Un episodio de aula de clase	3
2. Preguntas de investigación	8
3. Método	9
4. Principios teóricos	9
5. La epistemología genética de Piaget	10
6. Del método a la metodología	12
7. Teorías en la Educación Matemática: dos breves ejemplos	13
8. La teoría de la objetivación	18
2. Un panorama general de la teoría de la objetivación	21
1. Introducción	21
2. Bases teóricas de la teoría de la objetivación	25
3. Saber y conocimiento	47
1. Saber	48

2.	Conocimiento	61
3.	El ejemplo de la alcancía	64
4.	La dialéctica entre saber y conocimiento	66
5.	Las matemáticas como entidad a la vez ideal, sensible y material	69
6.	Síntesis	73
4.	Aprendizaje	77
1.	El aprendizaje como participación en la práctica social	77
2.	Internalización	79
3.	Procesos de objetivación	86
4.	Algunos significados de la objetivación	93
5.	Procesos de objetivación: una definición procesal	95
6.	El aprendizaje como objetivación	96
7.	Consciencia	97
8.	Actividad de enseñanza-aprendizaje	98
9.	Procesos de subjetivación	101
10.	Síntesis	101
5.	Procesos de objetivación	105
1.	La investigación de los procesos de objetivación	105
2.	Actividad de enseñanza-aprendizaje	108
3.	Un ejemplo de investigación de los procesos de objetivación	113
4.	Medios semióticos de objetivación	122
5.	Nodos semióticos	124
6.	Contracción semiótica	125
7.	Concepto	126
8.	Síntesis	128
6.	Corporalidad	133
1.	Introducción	133
2.	El entrelazamiento de los sentidos y la cultura	136
3.	Percepción	140
4.	Un ejemplo de aula	144
5.	La poética de la objetivación	155
6.	Contar lo que no se ve	156
7.	Síntesis	158

7. Diseño de tareas	163
1. Las bases del diseño de tareas	164
2. El movimiento de Tina, John y el perro	167
3. Síntesis	184
4. Apéndice: el Concurso de la caminata	185
8. La naturaleza cultural del pensamiento matemático	191
1. Introducción	192
2. La concepción relativista de la cultura de Boas	195
3. El venerable conflicto antropológico	197
4. Una visión dialéctico-materialista de la cultura	200
5. El pensamiento matemático griego	205
6. Síntesis	220
9. Procesos de subjetivación	225
1. La cuestión del sujeto	225
2. Sistemas semióticos de significación cultural	228
3. Ser, devenir y subjetividad	232
4. Resolución de ecuaciones en un aula de tercer grado	236
5. Síntesis	248
10. Ética	253
1. La ineludible presencia de la ética en el aula de matemáticas	254
2. Kant	257
3. Hobbes	259
4. La ética de Lévinas	261
5. La tarea indispensable de la Educación (Matemática)	267
6. Hacia una ética comunitaria	271
7. Síntesis	279
Referencias	283
Índice	311

Prólogo a esta edición en castellano

PEDRO GÓMEZ

En algunas oportunidades, me preguntan qué es la Educación Matemática. Acostumbro a dar una respuesta sencilla: la Educación Matemática es lo que hacen los educadores matemáticos. Pero ¿quiénes son y qué hacen los educadores matemáticos? Los educadores matemáticos somos aquellas personas (profesores, formadores, investigadores, encargados de política) que nos preocupamos por los fenómenos relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Al realizar las actividades propias de nuestra disciplina, hemos ido construyendo un saber. Este saber es producto de un proceso histórico y cultural que, en términos de la evolución de una disciplina, inició recientemente y que, en el último siglo, se ha desarrollado con gran intensidad. Este desarrollo se expresa en la ingente cantidad de publicaciones de nuestra disciplina en las últimas décadas. La mayoría de estas publicaciones hacen aportes a la comprensión de fenómenos concretos y a la respuesta a preguntas específicas. Los resultados de estos trabajos son, con frecuencia, contradictorios entre sí y se basan en posiciones teóricas diferentes. La teoría de la objetivación desarrollada por Luis Radford es una excepción.

La teoría de la objetivación es una teoría general que, con base en una visión sociocultural del aprendizaje, nos permite comprender y abordar los fenómenos y las preguntas relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Es una teoría unificada que ofrece una visión sistemática y amplia de los problemas que, como educadores matemáticos, nos interesan y preocupan. Luis Radford hace un esfuerzo encomiable para ubicar sus ideas en los contextos de los que surgen y para distinguir su teoría de otras ideas que han abordado las preguntas de la Educación Matemática en el pasado. En ese sentido, la teoría de la objetivación nos

enfrenta y nos desafía al proponer ideas que no corresponden necesariamente con nuestras visiones de los fenómenos y los problemas de nuestra actividad. Luis Radford también nos invita: nos exhorta a los educadores matemáticos, como individuos que tenemos un compromiso mutuo en el empeño de contribuir al aprendizaje de los niños y jóvenes en el aula de matemáticas, a transformar los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas de tal forma que logremos formar sujetos culturales críticos y reflexivos.

Este libro fue publicado en inglés por la editorial Brill en 2021. Para UED, el Centro de investigación y formación en Educación Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de los Andes, es un honor publicar la edición en castellano de esta obra.

Prefacio

Este libro presenta una exposición sistemática de una teoría sociocultural: la teoría de la objetivación. La teoría de la objetivación pretende superar la antigua tradición occidental que concibe el aprendizaje como el resultado de la experiencia subjetiva. Esta noción del aprendizaje se remonta al siglo XVIII, en el que se imaginaba al niño como un ser natural ya dotado de sus propias potencialidades. En esta línea de pensamiento, para que el niño aprenda se necesita simplemente un entorno propicio. En nuestra época, esta concepción del aprendizaje ha sido personificada por las pedagogías centradas en el niño y, más recientemente, por las diversas formas de constructivismo (por ejemplo, psicológico, social, radical). Sin embargo, en estos enfoques educativos, el aprendizaje sigue siendo ciego a las consideraciones de naturaleza social, cultural, histórica y política. En consecuencia, el aprendizaje se abstrae de las fuerzas antagónicas y conflictivas de la sociedad y acaba siendo descrito como un proceso saneado o purificado de esas fuerzas; el aprendizaje termina siendo así una mera experiencia subjetiva empobrecida. Al alejarse de las premisas naturalistas y subjetivistas de la pedagogía centrada en el niño y del constructivismo, la teoría de la objetivación es una invitación a concebir el aprendizaje como un auténtico proceso cultural-histórico colectivo.

La perspectiva del aprendizaje que se explorará en este libro depende, por supuesto, de cómo se conceptualice el colectivo. En efecto, se podría argumentar que, de una forma u otra, el aprendizaje implica algún tipo de colectivo, incluso en el modelo pedagógico de la enseñanza directa o de transmisión de saberes. El colectivo que la teoría de la objetivación pone

en primer plano no se refiere aquí a un conjunto de individuos —mónadas piagetianas en interacción— que negocian sus propios significados de forma idiosincrásica. Se refiere más bien a individuos que, dirigidos a la satisfacción de necesidades comunitarias, trabajan juntos (la mayoría de las veces con tensiones, conflictos y contradicciones); individuos —profesores, estudiantes— que, al trabajar juntos, aprenden juntos y se coproducen a sí mismos apoyados siempre en la cultura y la historia. Lo que une a los individuos de un colectivo es la actividad cultural-histórica.

La teoría de la objetivación se inspira en las filosofías de Hegel y Marx, en la obra fundamental de L. S. Vygotsky y sus colaboradores, y en el concepto de educación de Freire. Su objetivo es doble:

1. En primer lugar, ofrecer una concepción teórica precisa del aprendizaje como un auténtico proceso cultural-histórico colectivo.
2. En segundo lugar, explorar las condiciones pedagógicas prácticas que hacen posible un auténtico aprendizaje colectivo.

En este sentido, la teoría de la objetivación es más que una lente mediante la cual mirar e interpretar los fenómenos de aprendizaje; es también una invitación a transformar las prácticas pedagógicas y a convertir el aula en un lugar en el que los estudiantes puedan encontrarse con saberes culturales y voces diferentes de manera conceptualmente profunda y, al mismo tiempo, tener la experiencia de la vida colectiva, solidaria, plural e inclusiva.

Un prolegómeno de esta tarea es la necesidad de proceder a una reconceptualización de lo que son profesores y estudiantes. Al borrar las fronteras habituales que, en otros enfoques, separan a profesores y estudiantes, la teoría de la objetivación va más allá del concepto de profesor como patriarca del saber, una especie de entrenador (*coach*) que ayuda a los estudiantes a comprender los contenidos curriculares por medio de andamiajes u otras estrategias pedagógicas. La teoría de la objetivación articula la idea de profesores y estudiantes como seres en flujo, como proyectos de vida inacabados y en continua evolución, en busca de sí mismos, coproduciéndose cada día al comprometerse éticamente en un mismo esfuerzo en el que sufren, luchan y encuentran juntos el disfrute y la plenitud.

Este libro surgió de debates, presentaciones en conferencias y seminarios realizados a investigadores y estudiantes de pregrado y posgrado en varios países. Aprovecha la diversidad cultural de las audiencias. También aprovecha el trabajo adelantado en Canadá con los futuros profesores y

profesores en ejercicio y sus estudiantes a lo largo de más de veinte años. Es, en efecto, en el ámbito de clases de matemáticas concretas donde se formularon las preguntas que dieron lugar a la teoría. Las polémicas que las mencionadas discusiones y presentaciones engendraron en el país y en el extranjero son inevitablemente parte de los conceptos que llegaron a formar el núcleo de la teoría de la objetivación. Estos conceptos son portadores de voces y perspectivas disidentes.

Algunas de las ideas presentadas en el libro son revisiones, refinamientos y ampliaciones de ideas compartidas en trabajos anteriores. Los capítulos 3, 4 y 5 tienen su origen en mi artículo “Three key concepts of the theory of objectification” (*Tres conceptos clave de la teoría de la objetivación*), publicado en el *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44, 2013, tras un seminario de una semana organizado por Oh Nam Kwon en Corea del Sur. El capítulo 6 es una versión ampliada y modificada de “The eye as a theoretician” (*El ojo como un teórico*), publicado en *For the Learning of Mathematics*, 30(2), 2-7, 2010^[1] preparado primero para un seminario organizado por Bernadete Morey en la Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil. El último capítulo de este libro incluye pasajes de un trabajo en prensa que aparecerá en el libro *Ética: entre educación y filosofía* que publicará Ediciones Uniandes, Colombia, tras un seminario organizado por Maritza Silva Acuña en la Universidad Católica Silva Henríquez de Santiago de Chile y un trabajo publicado recientemente en un número especial de la *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, editado por Rodolfo Vergel e Isaías Miranda. Agradezco a esas editoriales el permiso para utilizar esos materiales.

Espero que este libro sea una contribución a la Educación en general y a la Educación Matemática en particular. Deseo agradecer a Sandra Siren y Andrew Sanderson su ayuda en la preparación del libro. También quiero agradecer el apoyo continuo del Consejo de Investigación en Ciencias Sociales y Humanidades de Canadá/Le conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH), y del Fondo de Investigación de Laurentian University.

1 Véase <https://flm-journal.org>.

Capítulo 0

El ascenso de lo abstracto a lo concreto

Este libro trata de una teoría de la enseñanza y el aprendizaje: la teoría de la objetivación. La teoría se inspira en el materialismo dialéctico contemporáneo. Uno de los principios del materialismo dialéctico es que el saber procede de lo abstracto a lo concreto. El saber aparece primero de manera general o abstracta. A medida que se desarrolla, el saber va adquiriendo un contenido específico o concreto. En la terminología del materialismo dialéctico, tal desarrollo se denomina ascenso de lo abstracto a lo concreto.

Este libro es un ejemplo de este ascenso. Está escrito de tal manera que se parte de lo general: ¿qué es una teoría en Educación Matemática? Luego, en los siguientes capítulos, aparecen los conceptos de la teoría de la objetivación, con su contenido concreto y sus componentes interrelacionados. A medida que avanzamos en el libro, nos encontramos con los conceptos de saber y conocimiento, ser y llegar a ser, aprender, el significado de cultura y de corporalidad, y, al final, llegamos al aspecto más concreto de la actividad humana histórico-cultural, a saber, la ética.

Capítulo 1

Teorías en la Educación Matemática

Mi punto de partida en este capítulo es que una teoría en Educación Matemática es como un sistema. Está formada por componentes interrelacionados y siempre está cambiando. Quiero sugerir que una teoría incluye tres componentes interrelacionados: (a) un conjunto organizado de principios teóricos, (b) una metodología y (c) algunas preguntas de investigación paradigmáticas. Desarrollaré esta idea en este capítulo. Mi análisis comienza con un episodio de una clase de cuarto grado que utilizo para introducir progresivamente los componentes mencionados. A continuación, trato brevemente dos ejemplos de teorías en Educación Matemática —el constructivismo y la teoría de las situaciones didácticas— y termino el capítulo con una breve referencia a la teoría de la objetivación.

1. Un episodio de aula de clase

Antes de empezar su clase de cuarto grado, delante de todos los estudiantes, la profesora —la señora Giroux— le pidió a Marc que contara a la clase algo sobre su reciente cumpleaños. Marc mencionó algunos de los regalos que había recibido. Entre los regalos, había una alcancía a la que Marc parecía tenerle especial cariño.

Sucedió que la profesora y su clase de cuarto grado de estudiantes de nueve a diez años iban a ocuparse muy pronto de la generalización de

patrones algebraicos. Al aprovechar el regalo de Marc, la profesora ideó una historia por medio de la que los estudiantes podrían empezar a investigar un enfoque covariacional para producir una fórmula (no necesariamente con simbolismo alfanumérico). En términos del plan de estudios, la fórmula debería permitir a los estudiantes calcular el valor de términos remotos en una secuencia sencilla. Unos pocos días después, los estudiantes estaban trabajando en pequeños grupos en un problema basado en la siguiente historia:

Para su cumpleaños, Marc recibe una alcancía con un dólar. Cada semana ahorra dos dólares. Al final de la primera semana tiene tres dólares, al final de la segunda tiene cinco dólares, y así sucesivamente.

La profesora entregó a los estudiantes fichas de bingo de dos colores (azul y rojo) y vasos de plástico numerados para representar la semana 1, la semana 2, etc., e invitó a los estudiantes a modelar el proceso de ahorro hasta la semana 5. Luego, con base en el modelo, la profesora invitó a los estudiantes a encontrar la cantidad de dinero ahorrado al final de las semanas 10, 15 y 25.

Este es un extracto de la discusión de un grupo de tres estudiantes: Albert a la derecha (parcialmente visible en las imágenes de abajo), Krysta en el centro y Manuel a la izquierda.

- 14 Krysta: Por lo tanto, debemos hacer... Que (véase la imagen izquierda de la figura 1) veces dos. Entonces, 11...
- 15 Albert: 11 más 11... 22.
- 16 Krysta: 22.
- 17 Albert: (*Se ríe*)
- 18 Krysta: Al final de... bien, al final...
- 19 Albert: Bueno, espera... No. Sería 11 más 10 porque...
- 20 Krysta: (*Señala la semana 5*) 5.
- 21 Albert: (*Señala la ficha de bingo azul*) Siempre empezamos con la... [ficha azul] (véase la imagen derecha de la figura 1).



Figura 1. Izquierda: Krysta señala las fichas de bingo enfrente de la semana 5; derecha: Albert señala la ficha de bingo azul

Como vemos, para responder a la pregunta acerca de la semana 10, los estudiantes recurren a la estrategia de duplicar. Calculan la cantidad de dólares ahorrados hasta la semana 5, la duplican y proceden a quitar un dólar de esa cantidad, que corresponde a la ficha de bingo azul, ya que siempre hay una y solo una ficha de bingo azul en una semana (véase la figura 2). La razón no está perfectamente articulada por Albert en las líneas 19 y 21, pero su claro gesto de señalar ayuda a llenar el vacío verbal de la explicación prevista.

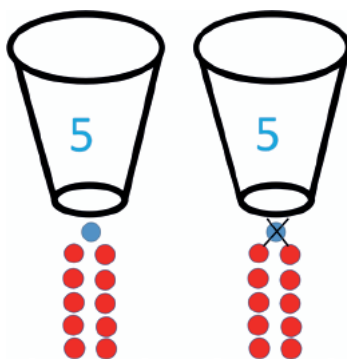


Figura 2. La estrategia de duplicar

La estrategia de duplicar puede aplicarse a otros casos, como lo notaron los estudiantes. Así, para determinar la cantidad de dinero ahorrada al final de, por ejemplo, la semana 25, observamos que algunos grupos empiezan por la semana 5; al duplicar, obtienen la cantidad de dinero ahorrado en la semana 10. Duplican otra vez y añaden la cantidad de la semana 5, sin

olvidar eliminar las fichas azules extra que se añadieron en el proceso. La estrategia funciona bien, pero es engorrosa para determinar la cantidad de ahorro en semanas “remotas”, como la semana 78 o la semana 103.

Pero sigamos con el ejemplo de la alcancía. Cuando la profesora fue a ver el trabajo de Krysta y sus compañeros, se dio cuenta de que los estudiantes estaban recurriendo a la estrategia de duplicar. La discusión fue la siguiente:

- 22 Profesora: Lo que me parece interesante aquí es que [en su modelo] tienen fichas de bingo de dos colores. ¿Qué significa eso?
- 23 Krysta: Porque la azul era la que él [Marc] ya tenía.
- 24 Manuel: Sí, porque esta [la historia del problema] dice que la alcancía tenía un dólar.
- 25 Albert: La alcancía tenía un dólar, así que esas (*señala en secuencia todas las fichas de bingo azules desde la semana 1 hasta la 5*) son todas el dólar que él ya tenía (*ahora señala las fichas de bingo rojas desde la semana 1 hasta la 5*) añadimos 2, 4, 6, 8, 10.
- 26 Profesora: Bien, bien. ¿Qué pasaría si fuera la semana 10?
- 27 Albert: Bueno (*señala la semana 5*), añadimos todo esto de nuevo (*hace un gesto de barrido; véanse imágenes 1 y 2 de la figura 3*), porque sabemos que $5 + 5 = 10$, así que...
- 28 Krysta: (*Interrumpe*) Más... añadimos... Añadimos todo esto (*señala las fichas de bingo rojas de la semana 5; véase la imagen 3 de la figura 3*), no la azul (*señala la ficha de bingo azul...*).
- 29 Profesora: (*Intenta hacer notar a los estudiantes la estructura covariacional*) ¿Qué observan en la semana 5 (*muestra el vaso correspondiente a la semana 5*) y (*señala las fichas de bingo rojas; véase la imagen 4 de la figura 3*) el número de fichas de bingo? (*realiza las mismas acciones*) ¿La cuarta semana y el número de fichas de bingo?

- 30 Albert: Siempre es dos veces...
- 31 Profesora: (*Repite*) Siempre es dos veces.
- 32 Krysta: Es el doble de lo que... ¡No! (*observa intensamente los artefactos durante un rato*) ¡Estoy confundida!
- 33 Albert: ¡Sí! Es el doble, ¡mira! (*cuenta las fichas rojas*) $1 + 1, 2; 2 + 2, 4; 3 + 3, 6; 4 + 4$.
- 34 Krysta: (*Interrumpe*) 8.
- 35 Albert: (*Al mismo tiempo*) 8.
- 36 Krysta: $5 + 5, 10$.
- 37 Albert: (*Señala las fichas de bingo de la semana 5*) $5 + 5, 10$.
- 38 Krysta: Súper. Es dos veces la semana...
- 39 Profesora: Entonces, si las rojas son dos veces [el número de la semana], ¿qué pasa con la ficha de bingo [azul]? (*señala la ficha de bingo azul de la semana 5*)
- 40 Krysta: Más 1.

Desde la línea 22 hasta la línea 28, los estudiantes explican su estrategia a la profesora. La estrategia no se identifica con una etiqueta (como la estrategia de duplicar u otra), sino que se explica en la acción, por medio de palabras y gestos.

En la línea 29, ocurre algo importante. En efecto, en la línea 29, la profesora trata de introducir lo que parece ser un nuevo enfoque para percibir las cosas. Dice: “¿qué observan en la semana 5 y el número de fichas de bingo? ¿La cuarta semana y el número de fichas de bingo?” Al final del pasaje, los estudiantes parecen empezar a notar una relación covariacional entre el número de la semana y las fichas rojas y azules.

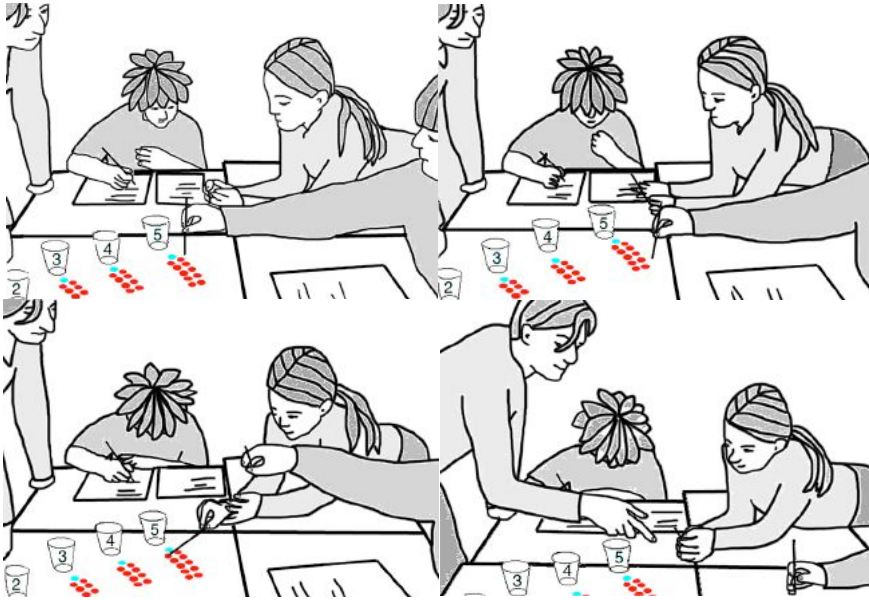


Figura 3. Los alumnos y la profesora discuten la estrategia

2. Preguntas de investigación

Por medio de sus preguntas de investigación, una teoría aborda los problemas específicos que pretende investigar. Por ejemplo, una teoría interesada en el problema de la interacción en el aula se plantearía preguntas sobre cómo se produce la interacción entre el profesor y los estudiantes, y, tal vez, preguntas sobre cómo evoluciona esta durante el año o a lo largo de los años. Una teoría interesada en los problemas de la enseñanza y el aprendizaje se plantearía preguntas como las siguientes: ¿qué están aprendiendo los estudiantes? y ¿cómo lo están aprendiendo? Una teoría de este tipo también se plantearía preguntas sobre el profesor. Por ejemplo, en lo que se refiere al episodio de la clase descrito, la teoría podría preguntarse: ¿cuál es la naturaleza de la intervención del profesor? y ¿su intervención es adecuada?

3. Método

Para responder a estas y otras preguntas similares, una teoría necesita producir algunos hechos. En efecto, los hechos son necesarios para articular explicaciones del fenómeno que se examina de forma convincente. Entonces, ¿en qué partes del ejemplo de la alcancía debemos centrar la atención? ¿Qué partes del episodio debemos mantener como hechos de la interacción de los estudiantes (en el caso de la primera teoría) o del aprendizaje de los estudiantes (en el caso de la segunda teoría)?

El comentario anterior hace ya evidente que la selección de hechos y su eventual interrelación no se producen al azar. Se producen sistemáticamente, por medio de algún método.

Un método hace aparecer algunos hechos y deja en segundo plano lo que el método considera “sin importancia”: el ruido. Así pues, si queremos responder a algunas de las preguntas mencionadas (por ejemplo, “¿cómo están aprendiendo los estudiantes en el ejemplo de la alcancía?”, si se supone que están aprendiendo algo), ¿debemos centrarnos en las acciones de los estudiantes? ¿Debemos centrarnos en el lenguaje de los estudiantes? ¿Debemos prestar atención a los vasos y a las fichas de bingo, así como a los gestos, las posturas corporales y la prosodia (por ejemplo, las entonaciones verbales) del profesor y de los estudiantes? ¿A qué debemos prestar atención exactamente? Hay muchas posibilidades. Esas posibilidades dependen de algo que va más allá del ámbito de los hechos: el ámbito de lo que algunos filósofos y lingüistas llaman *Weltanschauung* (Underhill, 2009); es decir, una visión del mundo (nuestras concepciones implícitas y explícitas sobre cómo es el mundo). De hecho, los hechos se interpretan con el trasfondo de nuestra visión del mundo y sus principios teóricos.

4. Principios teóricos

Tomemos el ejemplo de los antiguos griegos. Siguiendo a Aristóteles, los antiguos griegos creían que los hechos eran portadores o encarnación de propiedades universales. Este es un ejemplo de *principio teórico*. Da a los hechos un lugar preciso en la teoría y también dota al método de una función precisa. En cualquier teoría, los principios teóricos y el método

que produce hechos e interpretaciones deben encajar mutuamente. Veamos este encaje muy bien en el caso de los antiguos griegos. Para ellos, la función de un método era ayudar a dar sentido a las cosas concretas o ideales que ya existían, observándolas con atención. Un método era para ellos una especie de proceso contemplativo. Las clasificaciones, como las botánicas realizadas por Aristóteles, eran métodos para ordenar las cosas y comprenderlas. Así, se deduce, como sugirió Heidegger (1977), que, para los antiguos griegos, *theōrein* o *teoría* era una forma de ver, o de mirar algo atentamente, para hacer que se revele por medio del espectáculo de su apariencia.

Es interesante observar que, en la antigua cosmovisión griega, los objetos observados no eran forzados a aparecer. Hay que esperar a la Alta Edad Media y al principio del Renacimiento para encontrar la idea de que podemos forzar la aparición de los objetos examinados. Ese fue el papel del *experimento científico* (Dear, 1995; Shapin, 1994). El experimento científico trajo consigo un cambio en la concepción de los hechos. En efecto, desde la aparición del empirismo y, en particular, a principios del siglo xvii, bajo la influencia de Francis Bacon (1906), los hechos pasaron a entenderse como entidades en sí, libres de teoría. Como señala Mary Poovey (1998) en su libro *A History of the Modern Fact (Una historia del hecho moderno)*, algunos científicos sostenían que “se podían reunir datos completamente libres de cualquier componente teórico” (p. xviii). El principio teórico que se asume aquí es que los hechos generan conocimiento sobre el mundo mediante un proceso inductivo.

Antes de continuar nuestro examen sobre las teorías y, para ilustrar lo que hemos visto hasta ahora, quiero considerar el enfoque teórico de Piaget.

5. La epistemología genética de Piaget

Tres de los principios teóricos de la epistemología genética de Piaget son los siguientes.

1. Los mecanismos cognitivos universales sustentan la construcción y el desarrollo de las operaciones y estructuras cognitivas del niño.
2. Estas estructuras cognitivas se pueden describir en términos de estructuras lógico-matemáticas.

3. La construcción de las estructuras cognitivas del niño es el resultado de sus propios actos².

A partir de estos principios teóricos, Piaget ideó un método basado en las entrevistas clínicas. Las entrevistas clínicas ofrecieron a Piaget un espacio ideal para la experimentación y la observación.

En las entrevistas, un adulto presentaba problemas o preguntas metódicamente preparadas a un niño. Los problemas o preguntas se diseñaban para que Piaget produjera hechos e interpretaciones. A partir de esos hechos y sus interpretaciones, Piaget era capaz de articular narrativas para responder a sus preguntas sobre el desarrollo mental.

La sustancia o el material a partir del que se producían los hechos de Piaget eran las acciones (por ejemplo, al manipular algunos objetos concretos) y los enunciados del niño. Estos constituían los datos brutos a partir de los cuales Piaget y sus colaboradores se esforzaban por encontrar las huellas del pensamiento lógico. Como señaló Gardner:

Piaget examina el protocolo de un niño y selecciona las proposiciones significativas subyacentes (que luego puede ordenar en el lenguaje lógico de las “p” y las “q”); la acción mental reflejada en el protocolo es una serie de operaciones realizadas sobre las proposiciones. El individuo ha alcanzado las operaciones formales cuando puede explorar sistemática y exhaustivamente las relaciones entre las proposiciones que describen un fenómeno. (Gardner, 1970, p. 359)

El método de Piaget le permite discernir hechos entre lo que el niño dice y hace. Al estar vinculado a una visión del mundo y a principios teóricos sobre la mente humana, el método le permite a Piaget interpretar los hechos y producir relatos o narraciones para demostrar algo sobre el intelecto del niño.

Al igual que en el caso de los antiguos griegos, vemos una adecuación apta entre: (a) el método y su producción e interpretación de los hechos y (b) los principios teóricos. Los métodos y los principios teóricos se alinean

2 Como señaló Walkerdine, “en la obra de Piaget se utilizaba un modelo evolutivo en el que el razonamiento científico y matemático se entendía como la cúspide de un proceso evolutivo de adaptación. El modelo consideraba el mundo físico como gobernado por leyes lógico-matemáticas, que llegaron a constituir la base del desarrollo de la racionalidad de los niños” (Walkerdine, 1997, p. 59).

de tal manera que los relatos pueden articularse de forma convincente para responder a las preguntas de investigación de la teoría.

6. Del método a la metodología

Hay que decir algo sobre la naturaleza de los principios teóricos de una teoría, ya que tiene consecuencias importantes en la comprensión de las teorías en general: es imposible explicitar todos los principios de una teoría. Solo en las teorías formales (por ejemplo, la teoría axiomática de conjuntos) es posible elaborar una lista de principios (axiomas). Las teorías de la Educación Matemática (y de las ciencias sociales en general) no son teorías formales. Algunos de sus principios (por ejemplo, los que se consideran más importantes) pueden hacerse explícitos; otros principios, sin embargo, quedan en segundo plano. En consecuencia, la articulación entre el método y los principios (una articulación que permite interpretar los hechos) debe considerarse como algo no necesariamente permanente. Siempre existe una tensión (una tensión dialéctica) entre los principios teóricos y el método de una teoría. Además, a medida que la teoría produce resultados, los principios teóricos y los métodos pueden verse afectados. Por eso, es mejor pensar en una teoría como un sistema en movimiento y transformación. Una de las consecuencias de esta visión de las teorías es que los métodos, a pesar de los empiristas, no pueden reducirse a una serie de pasos que hay que seguir rigurosamente. Un método es algo mucho más complejo. Por eso, para Vygotsky (1997a), “Encontrar un método es una de las tareas más importantes del investigador” (p. 27). Para Vygotsky, la principal característica de un método es ser inquisitivo y reflexivo. Para Vygotsky, un método es verdaderamente una práctica filosófica. Para subrayar esta concepción no instrumentalista del método, en lo que sigue utilizaré el término *metodología* en lugar de *método*.

Puedo resumir la exposición anterior diciendo que una metodología, M, solo puede tener sentido por medio de su interrelación con un conjunto de principios teóricos, P. Estos principios conllevan características implícitas y explícitas de la visión del mundo subyacente, y las preguntas de investigación, Q, a las que la teoría trata de responder. En otro lugar (Radford, 2008a, 2017a), al referirme al campo de investigación de la Educación Matemática, he sugerido llamar *teoría* al triplete (P, M, Q). Las flechas de la figura 4 indican que existe una relación dialéctica entre

ellas. En su interrelación, cada una de ellas altera a las demás, haciendo de la teoría un sistema dinámico.



Figura 4. Una teoría como unidad dinámica constituida por tres componentes (P, M, Q)

7. Teorías en la Educación Matemática: dos breves ejemplos

Me limito aquí a examinar brevemente dos grandes teorías en Educación Matemática: el constructivismo (Cobb, 1988; Cobb y Yackel, 1996) y la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2002).

7.1. Constructivismo

Ernst von Glasersfeld (1995) formuló de manera clara y explícita los principios del constructivismo (radical). Los principios son:

p1: El saber no se recibe pasivamente, sino que lo construye el sujeto cognoscente.

p2: La función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización del mundo experiencial, no al descubrimiento de la realidad ontológica (p. 18).

La verdadera novedad educativa del constructivismo no descansa en el primer principio. El primer principio fue el eje principal en torno al que los pedagogos progresistas de la llamada reforma educativa de principios del siglo xx construyeron su programa pedagógico (Darling y Nordenbo, 2002; Röhrs y Lenhart, 1995; Rugg y Shumaker, 1969), aunque no lo

articularon tan claramente como lo hizo von Glasersfeld. Este principio también constituía una piedra angular en la epistemología genética de Piaget (1970) (véase el principio 3 en la sección 1.5). La verdadera novedad del constructivismo reside más bien, como afirma von Glasersfeld, en las posturas epistémicas y ontológicas que transmite el segundo principio y su concepto concomitante de saber. Sin negar necesariamente la existencia de una realidad preexistente, y siguiendo la teoría del conocimiento de Kant (2003), el constructivismo no pretende que el saber construido por el sujeto cognoscente se corresponda con dicha realidad. Su epistemología descansa precisamente en la negación de la posibilidad de llegar a conocer la realidad (Ernest, 1991). Hay un tercer principio que, aunque no se menciona explícitamente, opera de forma omnipresente en la práctica del aula constructivista. El tercer principio no es exactamente un principio de naturaleza epistemológica u ontológica. El tercer principio nos proporciona una idea de cómo debe producirse la construcción del saber en los entornos de instrucción y, por tanto, es de naturaleza pedagógica. El principio puede enunciarse como sigue:

p3: El sujeto cognoscente no solo construye su propio saber, sino que debe hacerlo de forma autónoma.

De hecho, la autonomía intelectual formaba parte de dos de los objetivos generales identificados por el constructivismo desde el principio: “la enseñanza por imposición es incompatible con dos objetivos generales de la enseñanza de las matemáticas que se desprenden del constructivismo, la construcción de estructuras conceptuales cada vez más potentes y el desarrollo de la autonomía intelectual” (Cobb, p. 1988, 99).

Estos principios proporcionan las bases para conceptualizar el aprendizaje: el aprendizaje se equipara con el hacer del individuo; es decir, se equipara con las acciones del estudiante que, transformadas en esquemas, llegan a constituir un conocimiento *viable* (von Glasersfeld, 1995) o *asumido como compartido* (Cobb, Yackel y Wood, 1992). Además, estos principios están en interrelación con la producción e interpretación metodológica de los hechos que cuentan como evidencia admisible del aprendizaje.

Los constructivistas exploran las acciones de los estudiantes por medio de lo que hacen o dicen al recurrir a un diseño específico de experimento de enseñanza que puede durar largos períodos, por ejemplo, un año. En Cobb, Stephen, McClain y Gravemeijer (2001), se explica el enfoque metodológico constructivista que implica secuencias de actividades de

instrucción, así como el marco interpretativo que utilizan para organizar sus análisis de los acontecimientos del aula. Dado que los constructivistas hacen una clara división entre lo social, por un lado, y lo individual, por el otro, sus análisis funcionan sobre la base de una coordinación de estas dos dimensiones: coordinan una perspectiva social de las actividades del aula con una perspectiva psicológica que intenta captar el razonamiento de los estudiantes.

Estos principios y su metodología concomitante pueden permitirnos afirmar, desde un punto de vista constructivista, si Krysta, por ejemplo, está aprendiendo o no en el ejemplo de la alcancía que vimos. También pueden permitirnos hacer afirmaciones sobre la idoneidad de la participación del profesor.

Veamos ahora brevemente la teoría de las situaciones didácticas (TSD).

7.2. La teoría de las situaciones didácticas

La TSD pretende ofrecer un modelo, inspirado en la teoría matemática de los juegos, para investigar de forma científica los problemas relacionados con la enseñanza de las matemáticas y los medios para mejorarla.

Al principio, el término *situación* se refería al entorno del estudiante manejado por el profesor, para quien la “situación” aparece como una herramienta en el proceso de enseñanza. Después, la situación se amplió para incluir al propio profesor e incluso al sistema educativo como un todo (Brousseau, 2003). Vemos aquí un ejemplo de la evolución o transformación de una teoría.

La TSD se basa en un conjunto de principios, entre ellos los siguientes principios epistemológicos:

*p*1: El saber es el resultado de una solución “óptima” a una determinada situación o problema.

*p*2: El aprendizaje es —de acuerdo con la epistemología genética de Piaget— una forma de adaptación cognitiva.

El primer principio está relacionado con un tercer principio que puede enunciarse así:

*p*3: Para cada saber matemático, hay una familia de situaciones que le dan un significado apropiado.

Esta familia se denomina *situación fundamental*. Para Brousseau (2002, p. 30), la búsqueda de situaciones fundamentales y su inserción en el proyecto más general de enseñanza y aprendizaje en el aula requieren al menos dos elementos: una buena teoría epistemológica, que revele la profundidad del saber matemático e informe el proceso de enseñanza, y una buena ingeniería didáctica, que se oriente al diseño de situaciones y problemas para que resuelvan los estudiantes.

La solución “óptima” expresada en el principio *p1* se refiere a la solución matemática, tal como la reconocen los matemáticos profesionales, la escuela y el currículo. Un cuarto principio especifica aún más el concepto de aprendizaje en la TSD expresado en el principio *p2*. En efecto, el principio general *p2* nos dice que el aprendizaje es de naturaleza adaptativa; consiste en las adaptaciones de los estudiantes a un medio, pero no dice nada sobre las condiciones sociales y de interacción que deben cumplirse para que se produzca. El cuarto principio no se enuncia explícitamente, pero opera en la práctica dentro de la TSD y proporciona la base para otros conceptos clave de la teoría (por ejemplo, la llamada situación adidáctica, el efecto Topaz y una distinción práctica entre aprendizaje genuino y aparente). El cuarto principio es el siguiente:

p4: La autonomía del estudiante es una condición necesaria para el auténtico aprendizaje de las matemáticas.

Como vemos, el cuarto principio tiene que ver con la relación entre profesores y estudiantes. Este principio le da una coherencia teórica impecable a la TSD, aunque, como el propio Brousseau reconoció, da lugar a algunas paradojas prácticas. Así, según este principio, si el proceso de aprendizaje no se realiza de forma autónoma respecto al profesor, el aprendizaje, según la TSD, no se ha producido. Porque “si el estudiante produce su respuesta sin haber tenido que hacer por sí mismo las elecciones que caracterizan el saber adecuado y que diferencian este saber del insuficiente, la evidencia [del aprendizaje] se vuelve engañosa” (p. 41). En otras palabras, si “el profesor le enseña [a su estudiante] el resultado, ella [la estudiante] no lo establece por sí misma y, por tanto, no aprende matemáticas” (2002, pp. 41-42).

La coyuntura paradójica radica en los límites impuestos al espacio agéntico de profesores y estudiantes: los profesores dicen, pero realmente no pueden decir (para una discusión, véase Radford, 2018a). Aquí los profesores y los estudiantes navegan por la coyuntura paradójica por

medio de una postura contractual: un *contrato didáctico* (llego a esta idea en el capítulo 10).

Como en el caso del constructivismo, los principios y la metodología de la TSD proporcionan la base para hacer afirmaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes. Las afirmaciones tendrán en cuenta el significado de lo que quiere decir hacer y aprender matemáticas dentro de la TSD. Como explica Brousseau (2002), hacer y aprender matemáticas “debe ser a veces similar a [la] actividad científica [de los matemáticos]” (p. 22). En consecuencia, “una reproducción fiel de una actividad científica por parte del estudiante requeriría que produjera, formulara, demostrara y construyera modelos, lenguajes, conceptos y teorías” (p. 22).

El diseño didáctico de las actividades debe permitir que los estudiantes investiguen, produzcan y formulen métodos de resolución de problemas:

Por lo tanto, el profesor debe simular en su clase una microsociedad científica si quiere que el uso del saber sea una forma económica de plantear buenas preguntas y resolver disputas, y si quiere que el lenguaje sea una herramienta para convencer a los compañeros en situaciones de formulación y demostración matemática. (p. 23)

En el marco de estas ideas y principios, el investigador puede afirmar si los estudiantes están aprendiendo o no en nuestro ejemplo introductorio de la alcancía (o en cualquier otra situación de enseñanza y aprendizaje). Los principios y la metodología de la TSD permiten también hacer afirmaciones sobre la pertinencia de la intervención del profesor.

El constructivismo y la TSD presentan algunas similitudes (por ejemplo, ambas teorías hacen hincapié en la importancia de la autonomía del estudiante frente al profesor). Sin embargo, difieren en otros aspectos. Por ejemplo, no tienen la misma concepción del aprendizaje, en parte debido a las diferencias en sus conceptos de saber. En la TSD, el saber tiene un carácter social-institucional, muy diferente y en realidad opuesto al significado subjetivo que tiene en el constructivismo. En consecuencia, pueden finalizar con afirmaciones o razones diferentes sobre el aprendizaje de los estudiantes en el ejemplo de la alcancía o en cualquier otro ejemplo.

Hay un punto importante en el que estas dos teorías pueden coincidir en nuestro ejemplo de la alcancía: el constructivismo y la TSD pueden estar de acuerdo con la afirmación de que la intervención del profesor tiene un efecto palpable en la conceptualización de los estudiantes. Quizás ambas teorías dirían que la intervención del profesor dirige la atención de los

estudiantes hacia una forma covariacional de pensar en el problema de la generalización. En la línea 29, la profesora intenta hacer notar a los estudiantes una estructura covariacional cuando dice: “¿Qué observan de la semana 5 y el número de fichas de bingo? ¿La cuarta semana y el número de fichas de bingo?”. Dado que la forma de pensamiento covariacional no procede de los estudiantes, no nace de ellos, se puede percibir que el profesor les impide a los estudiantes tomar sus propias decisiones. La intervención del profesor (vista a través de las lentes del constructivismo) no solo llega a interferir con la “autonomía intelectual” de los estudiantes (Cobb, 1988, p. 99), sino que (vista a través de las lentes del TSD) también puede producir pruebas engañosas de aprendizaje.

8. La teoría de la objetivación

El ejemplo de la alcancía introducido al principio de este capítulo nos proporcionó materia prima para recordar que las interpretaciones y las afirmaciones que se pueden hacer sobre los fenómenos del aula dependen de la teoría a la que recurramos para analizarlos (véanse también Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014; Niss, 1999; Scheiner, 2020; Scheiner y Pinto, 2019).

He hecho una brevísima incursión en dos de las principales teorías en la Educación Matemática: el constructivismo y la TSD. Aunque demasiado breve para hacer justicia a la complejidad que hay detrás de cada una de estas teorías, la incursión en ellas nos permite ver que las teorías suponen y conllevan concepciones específicas del saber que tienen un gran impacto en la forma de entender el aprendizaje y la enseñanza. Pero las teorías educativas también suponen y conllevan ideas sobre los profesores y los estudiantes. Hemos visto, por ejemplo, la importancia que tanto el constructivismo como la TSD le dan a la autonomía. Esta postura se basa, por supuesto, en ideas más generales sobre la naturaleza individual y humana. Ya tendré tiempo de detenerme en este punto más adelante en este libro.

Para exponer estos puntos, ciertamente podría haber elegido también otras teorías. Sin embargo, eso me habría alejado del objetivo de este libro, que no es el de las teorías en la Educación Matemática. Solo puedo decir que quizás mi elección sea de naturaleza biográfica. Vivo en Canadá, donde el constructivismo ha tenido una enorme influencia. Y fue en Francia, durante mis estudios de doctorado, donde estuve expuesto a la influencia de la TSD. De ahí que mi inmersión en la tradición intelectual

francesa como estudiante, por un lado, y mis actividades profesionales como educador matemático en Canadá, por otro, puedan explicar mi elección. Esta razón biográfica también puede explicar el tremendo impacto que estas teorías han tenido en la teoría que es objeto de este libro: la teoría de la objetivación³.

Sin embargo, la teoría de la objetivación, muy influenciada por el constructivismo y la TSD, se aleja de estas. ¿En qué sentido se aparta la teoría de la objetivación de esas teorías? Hay una respuesta corta, una intermedia y una larga a esta pregunta. A la respuesta larga solo se puede llegar después de leer este libro. Para evitar decepciones, en el siguiente capítulo ofrezco una respuesta intermedia. En efecto, en ese capítulo presento una visión general de la teoría de la objetivación y su lugar en el paisaje de teorías al que pertenece: las teorías socioculturales contemporáneas en la Educación Matemática. Pero como el lector puede seguir encontrando esta forma de acción decepcionante, permítanme ofrecer en el resto de este capítulo la respuesta corta.

El constructivismo y la TSD se basan en ideas teóricas que se remontan a las filosofías de la Ilustración, y a la filosofía de Kant en particular —tal vez no directamente; tal vez como las ideas de Kant fueron refinadas y reafirmadas por Piaget (y von Glasersfeld, en el caso del constructivismo)—. La teoría de la objetivación se basa en una tradición filosófica diferente, a saber, la filosofía de Hegel (1991) y el materialismo dialéctico resultante (por ejemplo, Artinian, 2017; Fedoseyev, Oizerman, Melukhin, Ilyenkov, Lektorsky, et al., 1977; Fischbach, 2014; Ilyenkov, 1977; Lefebvre, 2009; Levant y Oittinen, 2014). Las principales fuentes de la teoría de la objetivación no son Kant y Piaget, sino Hegel, Vygotsky, Leont'ev, Luria y otros psicólogos como Rubinstein (1983). En la práctica, lo que significa es que los conceptos de saber, enseñanza y aprendizaje, y el propio concepto de estudiantes y profesores, no son los mismos que nos han llegado de la tradición ilustrada en que se apoya el constructivismo y la TSD.

3 El diálogo continuo de la teoría de la objetivación con el constructivismo en general, con la TSD (Brousseau, 2002), con la aproximación lingüística vygotskiana (Sfard, 2008) y, más recientemente, con el Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016a; Radford, 2016a) y el inferencialismo (Derry, 2017; Radford, 2017b) no pretende crear polaridades. Es un esfuerzo por comprender mejor nuestra propia teoría. Vygotsky sugirió que “A través de los demás, nos convertimos en nosotros mismos” (1998, p. 170). Lo mismo ocurre con las teorías. Por medio del diálogo con otras teorías, las teorías forman una identidad.

Todavía hay otra respuesta breve que puede ayudar a dar sentido a las diferencias que estoy tratando de señalar. La teoría de la objetivación se inscribe en un proyecto educativo que no es el mismo que el adoptado por el constructivismo o el seguido por la TSD. Como vimos antes, el constructivismo identifica dos objetivos generales de la Educación Matemática: “la construcción de estructuras conceptuales cada vez más potentes y el desarrollo de la autonomía intelectual” (Cobb, 1988, p. 99). La TSD, por el contrario, se orienta hacia la difusión del saber matemático. La TSD se inscribe en un proyecto social cuyo objetivo es que los estudiantes adquieran un saber constituido (Brousseau, 2003). En consecuencia, en la TSD, el énfasis se ha puesto generalmente en el saber matemático y en la gestión eficaz del entorno de aprendizaje (el *milieu*). En el constructivismo, el énfasis se ha puesto generalmente en el individuo —más específicamente, en la comprensión de las formas idiosincrásicas en que los estudiantes construyen su propio saber—. En el primer caso, la orientación teórica subyacente ha sido esencialmente epistemológica; en el segundo caso, la orientación teórica ha sido psicológica. La teoría de la objetivación se ubica en un proyecto educativo diferente: plantea la meta de la Educación Matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural orientado a la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionen críticamente en discursos y prácticas matemáticas histórica y culturalmente constituidas, y que ponderen nuevas posibilidades de acción y pensamiento.

La teoría se basa en la idea fundamental de que el aprendizaje consiste tanto en saber como en llegar a ser. Detrás de esta idea fundamental se encuentra la concepción neohegeliana, dialéctica, dinámica y constitutiva de los sujetos y las culturas: tanto el individuo como la cultura son entidades interrelacionadas en perpetuo flujo, uno se convierte continuamente en el otro y el otro en el uno.

Pasemos ahora al segundo capítulo de este libro, en el que identifico el lugar que ocupa la teoría de la objetivación en el panorama de las teorías socioculturales contemporáneas en la Educación Matemática.

Capítulo 2

Un panorama general de la teoría de la objetivación

En este capítulo, presento un panorama general de la teoría de la objetivación. Empiezo con un breve relato histórico de la aparición de la investigación sociocultural en la Educación Matemática. Este relato histórico prepara el camino para comprender mejor el lugar que ocupa la teoría de la objetivación en el panorama de la investigación sociocultural actual. El relato histórico también ofrece un trasfondo para la discusión de algunas de las orientaciones conceptuales básicas de la teoría, incluyendo una reconceptualización de conceptos educativos clave como el de aprendizaje y los conceptos de profesor y estudiante. Para comprender mejor la orientación conceptual general de la teoría, en este capítulo también analizo el papel que esta atribuye a los artefactos, los signos, el lenguaje y la corporalidad. Las ideas introducidas aquí se abordarán de forma más exhaustiva en el resto del libro, especialmente en los capítulos más “teóricos”, cuando introduzca con detalle otros conceptos clave (por ejemplo, el concepto de saber y conocimiento, y el concepto de ser y llegar a ser).

1. Introducción

La teoría de la objetivación forma parte del creciente campo de las teorías socioculturales educativas contemporáneas (por ejemplo, Atweh, Forgasz

y Nebres, 2001; Bartolini Bussi y Mariotti, 2008; Cantoral, 2013; Lave, 1988; Lave y Wenger, 1991; Sfard, 2008; Saxe, 2012; Stetsenko, 2017), cuyo denominador común es la afirmación de que los seres humanos son consustanciales a la cultura o las culturas en las que viven sus vidas. Lo que la consustancialidad significa es que existe un profundo entrelazamiento entre las culturas y lo que sus individuos piensan, hacen, sienten, imaginan, esperan y sueñan.

Las teorías socioculturales contemporáneas son el resultado de un proceso histórico milenario de dar sentido al Otro. Este proceso se acentuó a finales de la Edad Media con los intercambios comerciales con China y Mongolia, y luego con las expediciones colonizadoras europeas del siglo xv. En el transcurso de estos encuentros con otras culturas, los conquistadores, comerciantes, funcionarios y sacerdotes se vieron inmersos en mundos diferentes, poblados por individuos con cosmovisiones y valores distintos. El encuentro con el Otro fue primero (y, en gran medida, sigue siendo hoy) una experiencia de asimilación: la asimilación de “ellos” a “nosotros”. En su libro *The conquest of America: The question of the Other* (*La conquista de América: la cuestión del Otro*), uno de los más famosos estudiosos de la obra de Bakhtin o Bajtín (1981, 1986), el crítico literario búlgaro-francés Tzvetan Todorov, señala cómo Cristóbal Colón asimila sistemáticamente las palabras aborígenes a la semántica de la cosmovisión europea. Todorov (1984) escribe: “se le escapa [a Colón] toda la dimensión de la intersubjetividad ... del carácter humano y por tanto arbitrario de los signos” (p. 29). Todorov relata un episodio revelador en el que

Al haber aprendido la palabra india *cacique*, él [Colón] se preocupa menos de saber lo que significa en la jerarquía convencional y relativa de los indios que de ver a qué palabra española corresponde, como si se siguiera de por sí que los indios establecen las mismas distinciones que los españoles, como si el uso español no fuera una convención entre otras, sino el estado natural de las cosas (p. 29).

El siglo xx ha sido testigo de una serie de esfuerzos por comprender al Otro en nuevos términos (por ejemplo, Said, 1994) y el papel de la cultura en la constitución de la mente y del yo (véase, por ejemplo, Lévy-Strauss, 1962; Lévy-Bruhl, 1928, 1922; Luria 1931, 1934, 1979; Tulviste, 1991). Uno de los mayores obstáculos en este empeño ha sido superar la visión asimilativa —epitomizada por Colón— que reduce a los otros, sus

lenguas, sus valores y su forma de entender el mundo a una determinada cosmovisión.

En el ámbito de la Educación Matemática, las teorías socioculturales surgieron durante las décadas de 1980 y 1990. La fuerza motriz fue la necesidad apremiante de ofrecer alternativas a:

1. los enfoques individualistas del aprendizaje que han dominado el campo (véase Lerman, 1996a, 1996b), y
2. la concepción eurocéntrica de las matemáticas (véase, por ejemplo, Bishop, 1988; D'Ambrosio, 1985).

Para responder a estas necesidades generales, algunos investigadores de la Educación Matemática trataron de elaborar concepciones de la mente orientadas hacia lo social, lo histórico y lo cultural, así como una concepción de la psicología más amplia que la estrecha concepción idealista centrada en el sujeto, inspirada en las ciencias naturales. Estos investigadores de la Educación Matemática abordaron, de diferentes maneras y desde distintas perspectivas, la cuestión de la consustancialidad de los individuos y su cultura, y acabaron centrándose en diferentes problemas: por ejemplo, el lenguaje y el discurso, la cultura material y su efecto en la cognición del individuo, el contexto sociocultural y político de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y las consiguientes maneras de hacer matemáticas y de pensarlas.

Este abanico de problemas es, de hecho, lo que se desprende de una visión general de la investigación sociocultural publicada en las reuniones del Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática (PME) desde 1978 hasta 2005. En esta visión general, Lerman identificó cuatro categorías cruciales:

1. Psicología cultural, incluidos los trabajos basados en Vygotsky, la teoría de la actividad, la cognición situada, las comunidades de práctica, las interacciones sociales y la mediación semiótica.
2. Etnomatemáticas.
3. Sociología, sociología de la educación, posestructuralismo, hermenéutica y teoría crítica.
4. El discurso, que incluye las perspectivas psicoanalíticas, la lingüística social y la semiótica (Lerman, 2006, p. 351).

Aunque cada una de estas categorías no puede considerarse estrictamente separada o independiente de las demás, podemos reconocer a los

primeros representantes de la primera categoría en los trabajos de Bartolini Bussi (1991), Bishop (1985) y Lerman (1992). Dos representantes de la investigación de PME en la categoría de etnomatemáticas son Bishop y Pompeu (1991), y Lea (1990), mientras que Atweh y Cooper (1991), por un lado, y Ellerton (1991), por otro, son representantes de la tercera y cuarta categoría de Lerman, respectivamente.

De diferentes maneras, estos investigadores se interesaron por comprender el papel de la cultura, la historia y la sociedad en las concepciones de las matemáticas y en las ideas sobre el aprendizaje de los estudiantes, ideas que todavía estamos tratando de comprender y que están lejos de estar asentadas. Bartolini Bussi (1991) y Bartolini Bussi y Mariotti (1999, 2008), por ejemplo, recurrieron a la obra de Vygotsky para investigar el papel de la interacción y el papel de los artefactos culturales en el aula, y llamaron la atención sobre el problema de la mediación semiótica. Arzarello y sus colaboradores también se centraron en los artefactos y, más específicamente, en los signos matemáticos y su evolución (Arzarello, Bazzini y Chiappini, 1994). Inspirado también en los trabajos de Vygotsky (1987) y de la psicología discursiva (Harré y Gillet, 1994), Lerman (1996b) estudió el papel del lenguaje en la constitución de la intersubjetividad. Boero, Pedemonte y Robotti (1997) investigaron la conceptualización matemática emergente de los estudiantes como un fenómeno en la encrucijada de la filogénesis y la ontogénesis mediante la historicidad del habla y el lenguaje.

Estos estudios pioneros aportaron una concepción diferente del lenguaje, la interacción y la cultura material. El trabajo de Boero y su equipo, por ejemplo, recurrió a la obra de Bakhtin (1986) y a sus conceptos de lenguaje e intersubjetividad. Dichos conceptos de Bakhtin están ciertamente en desacuerdo con el concepto de lenguaje de la psicología tradicional y su idea del individuo como una entidad autónoma que viene al mundo de alguna manera dotada de los mecanismos cognitivos internos necesarios para su desarrollo intelectual (Martin, 2004). Morgan (2006, 2018) recurrió a la semiótica social, mientras que Sfard (2001), basándose en Vygotsky, sugirió que el pensamiento —una de esas características humanas tradicionalmente consideradas como las más privadas y personales— tiene sus raíces en el plano social de la comunicación: “el pensamiento”. Dice Sfard, “surge como una versión privada modificada de la comunicación interpersonal” (p. 26). ¿Dónde se sitúa la teoría de la objetivación frente a esas tendencias socioculturales? Para responder a esta pregunta, en las siguientes secciones esbozo los fundamentos teóricos de la teoría de la objetivación.

2. Bases teóricas de la teoría de la objetivación

Comienzo esta sección con un examen de los conceptos de profesor y estudiante tal y como los concibe la teoría de la objetivación. A continuación, paso a los tipos de teorización centrados en el lenguaje, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Luego examino el concepto de actividad que ofrece el materialismo dialéctico. Dicho concepto aparece como concepto central en la teoría de la objetivación. El concepto, sin embargo, se reformula como labor conjunta por razones que se explican a continuación.

2.1. Profesores y estudiantes

En el capítulo anterior, me referí a un episodio de la clase de cuarto grado y planteé la pregunta: si nos interesa dar cuenta del aprendizaje de los estudiantes, ¿a qué debemos atender exactamente? Dentro de un paradigma pedagógico piagetiano, la respuesta sería: a los estudiantes. Más precisamente, serían las acciones y las expresiones de los estudiantes, ya que, en dicho paradigma pedagógico, el aprendizaje es precisamente lo que emana de lo que los estudiantes hacen y dicen. La teoría de la objetivación toma un camino diferente. Atiende a los estudiantes, pero de forma distinta a como lo hace la pedagogía centrada en el niño. El problema de pasar a una concepción diferente del estudiante no es ciertamente fácil: venimos de una larga tradición histórica que ve al estudiante como el autor de su propio aprendizaje. Encontramos esta idea claramente articulada en el programa pedagógico de “Enseñanza Universal” del educador francés Joseph Jacotot (1770-1840) en el siglo XIX. La idea fundamental de Jacotot era que cualquier individuo puede aprender cualquier cosa por sí mismo. No es necesario enseñar a los estudiantes. Ellos aprenderán por sí mismos. Como dice Jacotot (1828) a sus estudiantes: “No sabéis el cálculo integral, pero podéis aprenderlo sin explicaciones” (p. 25). Como vimos en el capítulo anterior, esta concepción del estudiante fue avalada por las pedagogías constructivistas y se ha convertido en una especie de segunda naturaleza en la Educación Matemática.

Por eso, la intervención de la profesora en la línea 29 del ejemplo de la alcancía (capítulo 1) puede resultar molesta. De hecho, como se ha señalado al final del capítulo 1, la intervención de la profesora puede parecer intrusiva; puede interpretarse como que interfiere en el aprendizaje de los estudiantes.

¿Y si dejamos en suspenso por un segundo la idea de que los conceptos, el significado y la intencionalidad tienen que surgir necesariamente del estudiante para que comprenda y aprenda realmente las matemáticas? No estoy defendiendo —y debería apresurarme a aclararlo— una pedagogía en la que el profesor diga a los estudiantes cómo deben resolver los problemas y pensar matemáticamente. Lo que digo es que las cosas pueden ser mucho más complejas. Infortunadamente, la investigación y la práctica educativa han reducido la relación profesor/estudiantes a dos posibilidades:

- A. el aprendizaje surge de los estudiantes o
- B. surge del profesor.

Esta posición de “o (A) o (B)” es lo que Lerman (1996b) llama, en su crítica al constructivismo, la *alternativa absolutista*. Siguiendo a Lerman, sostengo que la posición absolutista lleva a considerar la relación profesor/estudiantes de una manera demasiado simplista.

La posibilidad (B) —que el aprendizaje surja de los saberes que el profesor enseña a los estudiantes— supone que los saberes pueden transmitirse de un individuo a otro (de un emisor a un receptor). Esta es la idea principal del modelo pedagógico de transmisión de saberes, y es realmente muy ingenua. Recurre a una idea muy burda del saber: el saber se conceptualiza como algo que los individuos poseen o no, por lo tanto, a un concepto reificado o mercantilizado del saber. También recurre a una idea muy superficial y problemática del profesor y del estudiante.

Si se busca superar la pedagogía centrada en el profesor —posibilidad (B)— desde la posición absolutista, la única solución posible parece ser entonces la posibilidad (A): que el saber tiene que empezar y ser el resultado de los actos de los estudiantes. Esta es la posición que adopta Williams (2016) en su crítica al libro de Roth y Radford (2011). Al trabajar dentro de las fronteras de la posición absolutista, Williams opta por la posibilidad (A). La conclusión no es difícil de adivinar: acaba adoptando las ideas del saber y del estudiante del constructivismo y de la pedagogía piagetiana (véase Radford y Roth, 2017, para un análisis detallado).

La crítica de Williams es quizás una muestra de las dificultades que se derivan de intentar superar la posición absolutista. Ya en sus primeros trabajos, Vygotsky reivindicaba el papel crucial del estudiante en su propio aprendizaje, sin por ello reducir el aprendizaje a los actos y acciones de los estudiantes. Así, la antigua pedagogía (es decir, la pedagogía de transmisión de saberes), decía Vygotsky, “trataba al estudiante como una

esponja que absorbe nuevos saberes”. Al elaborar la idea con más detalle, afirmaba que esta pedagogía hace una suposición falsa: “La suposición de que el estudiante es simplemente pasivo ... es el mayor de los pecados, ya que toma como base la falsa regla de que el profesor lo es todo y el estudiante nada” (Vygotsky, 1997b, p. 48).

Desde una perspectiva Vygotskiana, el curso de acción no consiste en elegir entre (A) o (B), ni tampoco en mantener ambas, como sugieren Godino y Burgos (2020) en su artículo sobre transmisión e indagación. De hecho, en lugar de (A) o (B), Godino y Burgos sugieren (A) y (B). Debido a la complejidad del saber matemático, la autonomía del estudiante, argumentan, no puede ser el punto de partida. Se puede partir de (B), con una “guía didáctica mínima” (p. 96), para llegar a (A) por medio de un proceso que termine con la adquisición de saberes institucionales por parte de los estudiantes. Siguiendo las ideas de Vygotsky, la teoría de la objetivación es un intento de superar la posición absolutista: no se trata ni de (A) y/o (B), ni de sus posibilidades combinatorias.

En la línea de pensamiento de la teoría de la objetivación, aceptemos dejar en suspenso la idea de que el aprendizaje tiene que venir de los estudiantes o del profesor. Entonces, el episodio de clase al que nos referimos en el capítulo anterior aparece bajo una nueva luz. Aparece mucho más complejo. Requiere que veamos la intervención de la profesora y las reacciones de los estudiantes a través de nuevas lentes. La interacción de la profesora y los estudiantes aparece como una danza de consciencias que intentan captar algo juntos.

Naturalmente, esta nueva visión de la interacción entre el profesor y los estudiantes exige ver la enseñanza y el aprendizaje de una manera diferente. No solo hay que revisar el concepto de estudiante, sino también el de profesor. Según Vygotsky (1997b), el profesor no puede ser imaginado como un inyector de saberes en la mente del estudiante. En efecto,

Al igual que un jardinero actuaría de forma insensata si tratara de influir en el crecimiento de una planta al jalar directamente sus raíces con las manos desde abajo, el profesor está en contradicción con la naturaleza esencial de la educación si dirige todos sus esfuerzos a influir directamente en el estudiante. (p. 49)

Hace unos años, Brent Davis, en una conferencia en Toronto, señaló que el enfoque de la Educación Matemática ha cambiado históricamente: de los problemas sobre la organización del currículo pasamos a los

problemas relativos al pensamiento matemático del niño y de ahí pasamos a los problemas relativos al profesor. En este punto nos encontramos hoy. Sin embargo, en gran medida, el profesor sigue siendo considerado como un agente técnico —una especie de operador industrial— cuya misión es impartir un plan de estudios (Brown, 2010; Grootenboer y Jorgensen [Zevenbergen], 2009; Pais, 2013; Valero, 2004). Se trata de una visión muy restrictiva del profesor, que el educador canadiense Ted Aoki criticó por reducir al profesor a “un implementador competente”

que tiene habilidades y técnicas orientadas al control eficiente. Este punto de vista de la implementación del saber, entendido como saber-hacer, está integrado en los sistemas científicos y tecnológicos de pensamiento/acción que reduce la competencia humana a la razón instrumental y a la acción instrumental. En este caso, el profesor es visto como un ser orientado y gobernado por las reglas dentro de un *ethos* [espíritu] manipulador, un *ethos* en el que incluso su futuro se concibe en términos de reglas. (Aoki, citado en Pinar e Irwin, 2005, p. 113)

El concepto de profesor y de estudiante que ofrece la teoría de la objetivación se basa en una perspectiva antropológica que presento brevemente más abajo. Digamos, por el momento, que se trata de una perspectiva en la que los profesores y los estudiantes no se conciben como seres autosuficientes, no se conciben como seres que se forjan ellos mismos y que, en esencia, ya saben lo que quieren hacer. Más específicamente, no se considera al estudiante como un cogitador racional o sujeto epistémico, ni se le reduce a un sujeto cognitivo. Del mismo modo, el profesor no es considerado un tecnócrata que está ahí para ayudar o guiar a los estudiantes, alguien que dispensa saberes mediante andamiajes u otras estrategias pedagógicas*. Tampoco se le considera un mediador, como suelen sugerir algunas teorías socioculturales. Uno de los problemas de esta visión patriarcal del profesor (ayudante, entrenador, asistente, guía, mediador, etc.) es que el profesor es imaginado como una entidad ya dada. Es decir, se le imagina en el proceso de enseñanza como un participante independiente y benévolo que observa, desde una perspectiva privilegiada, al estudiante. Esto no es lo que veo en nuestros programas de formación de profesores, ni en

* Por *andamiaje* (*scaffold* en inglés) entendemos los esfuerzos progresivos que hace el profesor para ir guiando la acción del estudiante (nota de la presente edición).

las aulas donde realizo mis investigaciones. Lo que veo son profesores que luchan junto con sus estudiantes para conseguir que las cosas salgan bien. Así, en lugar de ser considerados como entidades ya dadas, como fuentes del saber y la intencionalidad, tanto los estudiantes como los profesores son considerados como subjetividades en formación, subjetividades abiertas al mundo. Profesores y estudiantes son conceptualizados como seres humanos en flujo, como proyectos de vida inacabados y en continua transformación, en busca de sí mismos, comprometidos juntos en un mismo empeño en el que sufren, luchan y encuentran juntos el disfrute y la plenitud.

Al ver el ejemplo de la alcancía a través de las lentes de la teoría de la objetivación, la profesora aparece enteramente comprometida en el proceso de aprendizaje de Albert, Krysta y Manuel. La profesora no está haciendo lo mismo que los estudiantes. Sin embargo, la profesora y los estudiantes están trabajando juntos, tratando de poner en primer plano una forma de pensamiento covariacional sobre las secuencias. Lo que están haciendo es la creación de lo que Hegel (2001) llamó una obra común.

En la teoría de la objetivación, la *obra común* se define como el apareamiento sensual o sensible del saber, es decir, en nuestro ejemplo, el apareamiento sensual o sensible de una forma de pensamiento covariacional algebraico mediante el planteamiento y la resolución de problemas colectivos, y de la discusión y el debate en el aula de clase. La obra común del profesor y de los estudiantes es portadora de tensiones dialécticas debido a las contradicciones emocionales y conceptuales de las que está hecha. En la obra común, el saber aparece sensorial y sensiblemente en el aula (por medio de la acción, la percepción, los símbolos, los artefactos, los gestos, el lenguaje) de forma muy parecida, y con similar fuerza estética, a la manera en que la música aparece auditivamente en una sala de conciertos mediante la obra común de los miembros de la orquesta (Radford, 2019)⁴.

Esta visión del profesor y de los estudiantes está en armonía con el proyecto educativo general freireano en el que se basa la teoría de la objetivación y que mencioné al final del capítulo anterior: un esfuerzo político, social, histórico y cultural que tiene como objetivo la creación dialéctica de profesores y estudiantes reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en los discursos y las prácticas matemáticas histórica y culturalmente constituidos, y reflexionan y deliberan sobre nuevas posibilidades

4 Vuelvo a esta idea en el capítulo 3.

de acción y pensamiento. Lo que la teoría de la objetivación atiende es, por tanto, no solo el ámbito del saber, sino también el ámbito del devenir del ser. Es decir, en la teoría de la objetivación, el foco de atención se desplaza de cómo los estudiantes reciben el saber (enseñanza por transmisión de saberes) y de cómo los estudiantes construyen su propio saber (constructivismo), a cómo los profesores y los estudiantes, al trabajar juntos, producen saberes en el aula apoyados siempre en su historia y su cultura. Pero el enfoque también se desplaza a cómo los profesores y los estudiantes se coproducen a sí mismos como sujetos, en general, y como sujetos de la educación, en particular.

2.2. Lenguaje

Acabo de decir que una de las especificidades de la teoría de la objetivación es que se centra en los profesores y los estudiantes a la hora de dar cuenta de la enseñanza y el aprendizaje. ¿Qué pasa con el lenguaje? El lenguaje es sin duda un elemento importante en esta teoría. Sin embargo, su posicionamiento teórico es diferente del que encontramos en otras teorías socioculturales. Me explico.

Ya he mencionado que el lenguaje fue una de las orientaciones teóricas en la base de la emergencia de las teorías socioculturales en la Educación Matemática. El interés por el lenguaje no ha disminuido. Por el contrario, en las últimas dos décadas, el lenguaje se ha convertido en una de las áreas de investigación más prominentes en la Educación Matemática (Radford y Barwell, 2016). Y tal protagonismo no debería ser una sorpresa.

De hecho, en el corazón de las teorías socioculturales desarrolladas en antropología y sociología, encontramos una lucha constante por comprender el problema de la relación entre lo individual y lo social, lo subjetivo y lo objetivo, y la vida interior y exterior. En este contexto, en la obra de Wilhelm von Humboldt (1998), Ernst Cassirer (1980), Mikhail Bakhtin (1986) y Valentín Voloshinov (1973), el lenguaje llegó a considerarse el vínculo entre las culturas y sus individuos. Bakhtin (1986), por ejemplo, se centró en la literatura y los géneros del habla. Vio en los géneros del habla históricamente desarrollados las formas por medio de las que los individuos se relacionan con su cultura. Los géneros del habla ofrecen a los individuos lugares sociales desde donde poder ver, interpretar y expresarse. Voloshinov (1973, también escrito como Vološinov) se centró en el signo. Consideró que el signo es a la vez subjetivo (en el sentido de que

es producido por un individuo y expresa sus intenciones) y objetivo (en el sentido de que la expresividad del signo está integrada en un sistema cultural de expresiones y valores). El signo garantiza un entrelazamiento entre lo subjetivo y lo objetivo, de modo que “la propia noción de una diferencia fundamental y cualitativa entre el elemento interior y el exterior [de la vida] no es válida para empezar” (Voloshinov, 1973, p. 85). Según Voloshinov, el signo por excelencia es la palabra. La “palabra está presente en todos y cada uno de los actos de comprensión y en todos y cada uno de los actos de interpretación” (p. 15). Según Voloshinov, “la palabra está implicada literalmente en todos y cada uno de los actos o contactos entre las personas” (p. 19). Al basarse en esta concepción de la palabra, Voloshinov, al igual que Bakhtin (1986), llegó a ver al lenguaje y la literatura no solo como uno de los campos de la experiencia estética y la cognición, sino como el campo central por medio del que se refractan los demás campos culturales. Para ellos, es en última instancia por medio del lenguaje y la literatura como se produce e interpreta la realidad⁵. El problema de lo individual y lo social, de lo subjetivo y lo objetivo, y de la vida interior y exterior se resuelve, en la perspectiva de Voloshinov, en la tensión dialéctica entre las formas centrípetas relativamente estables de la cultura (personificadas por la novela) y las formas centrífugas de la resistencia y la novedad (personificadas en la idea del carnaval de Bakhtin). Sin embargo, como señala Tihanov (1998),

Vološinov acabó reduciendo la cultura a un modo de existencia monoideal [single-ideal-mode of existence] ... [uno en el que] el lenguaje tiene un papel conspicuo y autónomo en la formación de la vida social. Así pues, ... Vološinov emprendió un tipo de teorización centrada en el lenguaje en el ámbito del pensamiento social. (p. 615)

En la teoría de la objetivación, el lenguaje sigue siendo un componente extremadamente importante. El lenguaje aparece como un medio

5 Bakhtin consideraba que la novela era el género discursivo mejor logrado. Siguiendo la visión materialista dialéctica de la realidad como algo que se despliega y mueve continuamente, sostenía que “La novela es el único género en desarrollo y, por tanto, refleja más profunda, más esencial, más sensible y más rápidamente, la realidad misma en el proceso de su despliegue. Solo aquello que está en desarrollo mismo puede comprender el desarrollo como proceso. La novela ... es la que mejor refleja las tendencias de un mundo nuevo que aún se está gestando” (1981, p. 7).

poderoso dentro de las esferas del saber y del devenir del ser. Sin embargo, no es la categoría ontológica central, como es el caso de otros enfoques socioculturales (por ejemplo, Harré y Gillett, 1994; Sfard, 2008). La categoría ontológica central de la teoría de la objetivación no es el lenguaje, sino la actividad (entendida como labor conjunta).

La cuestión de si una teoría vygotskiana o, más en general, una teoría materialista dialéctica basada en el lenguaje y el discurso y una basada en el concepto de actividad son equivalentes sigue siendo un punto muy discutido entre los teóricos socioculturales⁶. No creo que ambas escogencias conduzcan a teorías equivalentes. No creo que produzcan la misma comprensión del aprendizaje y la enseñanza o la comprensión de la intersubjetividad. Por un lado, la unidad de análisis no es la misma; por otro lado, tampoco lo son los enfoques metodológicos por medio de los que la unidad de análisis se somete a examen. Sin embargo, creo que ambos tipos de teorías materialistas dialécticas tienen una afinidad conceptual distintiva. Esta afinidad será mayor o menor dependiendo de cómo se conceptualicen respectivamente el discurso y la actividad.

Antes de pasar a la definición precisa de la actividad en la teoría de la objetivación, permítanme decir algo sobre la difícil cuestión del papel de los signos y artefactos en la formación social de la mente.

2.3. Signos y artefactos

Las teorías socioculturales han defendido ampliamente el papel distintivo de los signos y artefactos en la vida y la cognición humana. Wartofsky (1979), por ejemplo, afirmó que “lo que constituye una forma de acción distintivamente humana es la creación y el uso de artefactos, como herramientas, en la producción de los medios de existencia y en la reproducción de las especies” (p. 202). Una idea compartida es que los signos y los artefactos son portadores de significados producidos por la actividad intelectual de generaciones humanas anteriores (Baudrillard, 1968; Borba y Villareal, 2006; Leontiev, 1968; Malafouris, 2004; Meira, 1998; Vygotsky, 1929). La inteligencia humana está incrustada y encarnada en ellos. Sin embargo, la personificación o encarnación de la inteligencia humana

6 Para una discusión sobre las diferencias entre los enfoques discursivos y otros socioculturales, véase Stetsenko y Arieivitch (1997). Véase también el inspirador libro de Markus (1986), *Language and Production: A Critique of Paradigms*.

en los objetos materiales o en el lenguaje/discurso no es suficiente para que esta inteligencia se revele automáticamente a los individuos. La cinta métrica que utilizamos en la construcción es un buen ejemplo. El trabajo de LaCroix (2014) muestra lo difícil que es para los estudiantes plomeros dar sentido a la aritmética de $\left(\frac{1}{2}\right)''$, que está detrás de la cinta métrica. Para revelarse a la consciencia, es necesario que los estudiantes se impliquen en actividades de enseñanza-aprendizaje. Una vez que los estudiantes se familiarizan con dicha aritmética, se revela un nuevo mundo de posibilidades de acción y pensamiento.

Ahora bien, a pesar del acuerdo generalizado con el papel distintivo de los signos y los artefactos en la vida y la cognición humana, su función precisa en el desarrollo humano ha sido una cuestión controvertida, incluso en la evolución de una misma teoría sociocultural.

Tomemos el caso de Vygotsky. Sabemos, en efecto, que, a finales de la década de 1920, al tratar de comprender la cognición humana desde una perspectiva más amplia que la ofrecida por la investigación reflexiva y la psicología racionalista de su tiempo, Vygotsky destacó el impacto del uso de los signos en el pensamiento humano. Para él, los signos no se consideran un medio para representar cosas —como es el caso en otros enfoques semióticos, como el de Peirce (1931–1958)—. Influidor por su trabajo sobre la educación especial, Vygotsky desarrolló una nueva concepción de los signos (Vygotsky, 1993). En un artículo sobre la cuestión del desarrollo cultural del niño, Vygotsky señaló que

Desde el punto de vista pedagógico, un niño ciego o sordo puede, en principio, equipararse a un niño normal, pero el niño sordo o ciego alcanza los objetivos de un niño normal por medios diferentes y por un camino distinto. (p. 60)

¿Cómo? Mediante la educación, “creando técnicas culturales, artificiales, es decir, un sistema especial de signos y símbolos culturales” (p. 168). En otras palabras, los medios culturales materiales auxiliares (por ejemplo, los puntos en braille) compensan las diferencias en la organización sensorial del niño. Vygotsky consideraba estos medios compensatorios como signos.

Pero sería un error considerar los signos como meros dispositivos de compensación. Para Vygotsky, lo más importante era que, por medio de los signos, llegamos a controlar nuestro comportamiento psicológico. En otras palabras, los signos sirven para realizar operaciones psicológicas y, al

hacerlo, alteran la cognición humana (Radford y Sabena, 2015). Así, en un pasaje de *Tool and Symbol in Child Development (Herramienta y símbolo en el desarrollo del niño)*, Vygotsky y Luria sostenían que

el uso de los signos, que son al mismo tiempo un medio de autoestimulación, lleva al hombre [sic] a una estructura de comportamiento completamente nueva y específica, al romper con las tradiciones del desarrollo natural y crear por primera vez una nueva forma de comportamiento psicológico cultural. (Vygotsky y Luria, citados en van der Veer y Valsiner, 1994, p. 145)

En este contexto, Vygotsky formuló su concepto de signo, sus famosas “leyes genéticas del desarrollo cultural”, la idea concomitante y controvertida de la internalización (a la que volveré en el capítulo 4) y su concepto de mediación semiótica. Estos conceptos fueron las categorías teóricas centrales en el estudio de la mente que realizó Vygotsky en un período que se extiende aproximadamente de 1927 a 1931. Estos conceptos pertenecen a lo que los estudiosos contemporáneos de Vygotsky llaman “fase” o “momento” instrumental de Vygotsky (para más detalles, véase Presmeg, Radford, Roth y Kadnuz, 2016). Por la analogía del signo con la herramienta laboral, González Rey (2009) califica el momento 1927-1931 como un giro instrumentalista en el pensamiento de Vygotsky.

Sin embargo, al final de su vida, Vygotsky fue cambiando de opinión sobre el papel de los signos. Comenzó a avanzar hacia un programa de investigación más amplio. Aunque los signos y las herramientas siguieron estando presentes, perdieron, sin embargo, su sabor tecnológico de la fase instrumentalista, “en la que la psique se seguía considerando por analogía con una máquina, un dispositivo técnico” (Zavershneva, 2010, p. 72). Los signos y las herramientas pasaron a ser considerados en términos de lo que significan. Vygotsky pasaba así de una concepción instrumentalista de los signos a una concepción estética, dando cabida a un estudio programático de la consciencia en el que el afecto, las emociones y el significado pasaban a un primer plano. Vygotsky (1997c) señaló: “La consciencia en su conjunto tiene una estructura semántica. Juzgamos la consciencia por su estructura semántica. ... El análisis semiótico es el único método adecuado para el estudio de la estructura sistémica y semántica de la consciencia” (p. 137).

En unas notas manuscritas de 1934, Vygotsky escribe: “hay 2 unidades de actividad dinámica: el pensamiento y la actividad real. ... De hecho, el papel del pensamiento en la actividad consiste en introducir nuevas

posibilidades dinámicas en la actividad” (citado en Zavershneva, 2010, p. 83). Dentro del programa de investigación que Vygotsky preveía al final de su vida, el pensamiento y la actividad se entrelazaron.

Notemos, sin embargo, que este cambio de orientación programática que ocurre al final de la vida de Vygotsky no disminuye la importancia de los signos y los artefactos. Los signos y los artefactos aparecen ahora subsumidos en un concepto diferente y más abarcador: el concepto de actividad. Esta es la postura conceptual que adopta la teoría de la objetivación sobre el papel de los signos y artefactos. Los signos y artefactos no aparecen como mediadores de la actividad, como ocurre en otros enfoques socioculturales: más bien se consideran parte integrante del pensamiento y la actividad humana.

2.4. Actividad

En las aproximaciones subjetivistas, el saber es considerado el resultado de la actividad del individuo. El saber (K) se ve, por tanto, como una extensión del sujeto (S). Si queremos expresar la idea mediante una ecuación, podemos escribir $K = S$. Para producir saber, basta con la actividad subjetiva del sujeto. Al identificarse pura y simplemente con el saber y sus objetos, al situarse como fundamento epistemológico, el sujeto se presenta como una totalidad, un todo (Ricard, 1999, p. 279). Esta no es la posición teórica asumida en la teoría de la objetivación. En la teoría de la objetivación, el punto de partida es que, en los entornos de aprendizaje (por ejemplo, un aula), el saber (el saber cultural) se crea y recrea por medio de la actividad histórico-cultural sensual y sensible. El saber solo puede llegar a la existencia sensible mediante la actividad práctica y colectiva; es decir, la actividad con otros. Porque, como saben muy bien los estudiantes plomeros, la inteligencia humana encarnada en la cinta métrica no se manifiesta de manera directa e inmediata; tampoco puede reconstruirse a partir de la sola experiencia personal. En efecto, ninguna experiencia personal, por muy rica que sea, puede llegar a establecer por sí sola un sistema cultural de ideas, como la aritmética de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ que se encuentra detrás de la cinta métrica, el sistema jurídico romano, la lógica formal o la teoría de conjuntos. Una empresa de esta magnitud requeriría no una vida, sino miles (Leont'ev o Leontiev, 1968), o quizás no pueda reconstruirse en absoluto. Para que se produzca el aprendizaje se requiere, por tanto, un esfuerzo

humano específico: una actividad. La producción de saberes en el aula y su revelación progresiva a la consciencia de los estudiantes está ligada a la actividad en el aula que hace posible dicha producción/revelación. En consecuencia, el tipo de actividad matemática que podemos fomentar en el aula llega a ser extremadamente importante.

Ahora bien, la actividad a la que me refiero aquí tiene un sentido específico que es muy diferente de las concepciones habituales que reducen la actividad a una serie de acciones que un individuo realiza en la consecución de su objetivo. Esta última línea de pensamiento reduce la actividad a una concepción funcional y técnica: la actividad equivale a los hechos y actos de los individuos. La actividad en la teoría de la objetivación no significa simplemente hacer algo. La actividad (*Tätigkeit* en alemán y *deyatel'nost'* en ruso) se refiere a un sistema dinámico en el que los individuos interactúan colectivamente en un fuerte sentido social, lo que hace que los productos de la actividad sean también colectivos. Por ello, la actividad como *Tätigkeit* no debe confundirse con la actividad como *Aktivität/aktivnost'*; es decir, como el simple hecho de estar ocupado en algo, como ver televisión (Roth y Radford, 2011)⁷. La actividad como *Tätigkeit* es un esfuerzo conjunto por medio del que los individuos producen sus medios de subsistencia. Incluye “nociones de autoexpresión, desarrollo racional y disfrute estético” (Donham, 1999, p. 55). Más concretamente, la actividad como *Tätigkeit* es una forma de vida. Es el proceso interminable mediante el que los individuos se inscriben en la sociedad (Presmeg, Radford, Roth y Kadnuz, 2016). Para evitar la confusión con otros significados, en la teoría de la objetivación, la actividad como *Tätigkeit* se denomina labor conjunta.

2.5. Labor conjunta

La labor conjunta es la principal categoría ontológica de la teoría de la objetivación. Me gustaría insistir en el hecho de que esta elección teórica no descarta el papel del lenguaje, los signos y los artefactos en los procesos de conocer y devenir. Esta elección afirma más bien el papel ontológico y epistemológico fundamental de la materia, el cuerpo, el movimiento, la acción, el ritmo, la pasión y la sensación en lo que es ser humano.

7 Engeström (1999, p. 21) se queja de que “el término inglés *activity* es incapaz de transmitir el significado filosófico más profundo del concepto original alemán de *Tätigkeit*”.

Permítanme intentar aclarar más la elección de la actividad como la principal categoría organizadora y su relación con el lenguaje. En una breve nota, el chelista estadounidense Yo-Yo Ma escribe sobre la publicación de 2018 de sus *Seis Evoluciones — Bach: Suites para violonchelo*. Dice: “Durante casi seis décadas, [las *suites* para violonchelo de Bach] me han dado sustento, consuelo y alegría en momentos de estrés, celebración y pérdida. ... Comparto esta música, que ha ayudado a dar forma a la evolución de mi vida”⁸. El lenguaje hace posible que Ma dé contenido conceptual a una serie de emociones, como el consuelo y la alegría, la celebración y la pérdida, que de otro modo quedarían en meras sensaciones. Por medio del lenguaje puede reconocerlas y nombrarlas. Por medio del lenguaje puede compartir estas emociones. Pero estas emociones están vinculadas a cosas, acontecimientos e individuos que formaban parte de diversas actividades significativas en la vida de Ma, actividades que ciertamente incluían el lenguaje y el discurso, pero que no se reducían a ellos.

A principios de la década de 1940, Leont’ev desarrollaba las últimas ideas de Vygotsky sobre la centralidad de la actividad en la comprensión del pensamiento humano. En una conferencia de 1940, publicada después con el título de *La génesis de la actividad*, Leont’ev subrayaba la importancia del lenguaje y la comunicación, al decir que “la comunicación es el aspecto de la labor que hace que el habla o lenguaje sea esencial, pero el habla y el lenguaje surgen en conexión directa con la propia labor, y por lo tanto lo propio del habla o lenguaje solo se hace posible en el proceso de la labor” (Leontiev, 2005, p. 69).

La actividad (o labor conjunta con otras personas, en nuestra terminología) incluye el lenguaje, pero también incluye de manera decisiva las experiencias corpóreas del movimiento, la acción, el ritmo, la pasión y la sensación. Volviendo a nuestro debate sobre la educación, en el ámbito práctico, el concepto de labor conjunta permite revisar el concepto de actividad de enseñanza y aprendizaje en el aula y el papel del lenguaje, los signos y los artefactos en ella. Por un lado, como he mencionado, el lenguaje, los signos y los artefactos no se consideran mediadores de la actividad. Más bien se consideran parte de la actividad de los individuos. Y puesto que el pensamiento y la actividad se consideran aquí entrelazados (Vygotsky, citado en Zavershneva, 2010), el lenguaje, los signos y los

8 Véase <https://www.yo-yoma.com/sounds-symphonies-archive/six-evolutions-bach-cello-suites/>

artefactos también se consideran parte del pensamiento. Forman parte de la textura material del pensamiento de los individuos.

Por otro lado, el concepto de labor conjunta permite concebir la enseñanza y el aprendizaje en el aula no como dos actividades separadas, una realizada por el profesor (la actividad del profesor) y otra realizada por el estudiante (la actividad del estudiante), sino como una única y misma actividad: la misma labor conjunta de profesores-y-alumnos. Si volvemos al ejemplo de la alcancía comentado en el capítulo anterior y lo vemos a través de las lentes de la teoría de la objetivación, el profesor no aparece necesariamente como un poseedor de saberes que está entregando o transmitiendo saberes a los estudiantes ni como alguien que está simplemente ayudando o guiando a los estudiantes. Los estudiantes tampoco aparecen como sujetos pasivos que reciben saberes. En el ejemplo de la alcancía, el profesor y los estudiantes aparecen laborando juntos en la producción de una obra común: en el ejemplo de la alcancía, la obra común es la aparición sensual o sensible de una forma covariacional de pensar secuencias de números. En la producción de esta obra común, vemos a los estudiantes encontrarse con formas histórico y culturalmente constituidas de pensamiento matemático y tomar consciencia de ellas de manera gradual.

2.6. Procesos de objetivación

Ya he mencionado que, en las perspectivas subjetivistas, la relación entre saber y sujeto puede resumirse mediante la ecuación $K = S$. El sujeto, S , produce su propio saber, K . Esto no ocurre en la teoría de la objetivación. Antes de encontrar el saber, el saber se nos presenta como algo diferente a nosotros: algo que, en su alteridad, en su otredad, con su propia presencia, nos objeta; es decir, se resiste o se opone a nosotros. La ecuación es $S \neq K$. Antes de nuestro encuentro con el saber, este es el signo de una diferencia. La objetivación es el intento de borrar esa diferencia. Esta ocurre en la labor conjunta. Los encuentros con formas históricas de pensamiento matemático, movilizados por la labor conjunta, se denominan procesos de objetivación. Son procesos progresivos de encuentro que son sensibles y sensoriales, ideacionales y materiales, simbólicos y discursivos, afectivos y emocionales, críticos y subversivos, y transformadores y poéticos.

En los próximos capítulos, presentaré una definición operativa de la objetivación junto con algunos ejemplos concretos. Por el momento, en la siguiente subsección me detengo en la concepción antropológica del humano.

2.7. La concepción antropológica del humano

Los seres humanos, siguiendo la postura spinozista de Marx (1988) (véase Spinoza, 1989), se consideran como parte de la naturaleza: son seres naturales. Que los humanos sean seres naturales significa que son seres sensibles, inevitablemente afectados por otras partes de la naturaleza. En este contexto, las sensaciones y las pasiones se conceptualizan como afirmaciones ontológicas de la naturaleza del individuo en cuanto ser natural (Fischbach, 2014).

Una consecuencia importante de esta postura teórica es que los individuos no pueden ser concebidos como entidades sustanciales, producidas desde adentro, tal y como propone la corriente humanista en la que se inspiran el constructivismo y otras teorías educativas contemporáneas. Los individuos son entidades relacionales de principio a fin. Están profundamente vinculados a un conjunto de relaciones con otras partes de la naturaleza —incluidas las relaciones sociales— y su existencia se basa en condiciones de vida histórica y culturalmente constituidas. En esta línea de pensamiento, ser un ser natural significa también que, al igual que otros seres vivos naturales, los humanos son seres de necesidad que encuentran su satisfacción en objetos externos a ellos mismos.

Para satisfacer sus necesidades (tanto las de supervivencia como las artísticas, espirituales y otras creadas por la sociedad y en ella), los seres humanos se implican activamente en el mundo: producen. Lo que producen para satisfacer sus necesidades ocurre en un proceso social que es, al mismo tiempo, el proceso de inscripción de los individuos en el mundo social y el de la producción de su propia existencia. El nombre de este proceso es lo que he denominado labor conjunta. La labor conjunta sensual y material se considera el campo último de la experiencia estética, la subjetividad y la cognición.

Las ideas anteriores me llevan a la cuestión de la corporalidad.

2.8. Corporalidad

Al igual que en el caso de otros conceptos centrales (como la actividad y la cultura material que se han comentado), la corporalidad en la teoría de la objetivación adquiere un significado preciso. No se refiere al cuerpo material que se trata en otros enfoques de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (para una visión crítica de la corporalidad en la Educación

Matemática, véase Radford, Arzarello, Edwards y Sabena, 2017). La corporalidad está relacionada con la idea de la *cognición sensual* (Radford, 2013a, 2014a), que se basa en una comprensión histórica específica de los sentidos, la sensación, la materialidad y su entrelazamiento con el ámbito conceptual. Dentro de esta perspectiva teórica, nuestro dominio cognitivo solo puede entenderse como una forma histórica y culturalmente constituida de responder, actuar, sentir, imaginar, transformar y dar sentido al mundo de forma creativa.

El carácter histórico de los sentidos y de la sensación y el entrelazamiento de la cognición y el mundo hacen imposible reducir el mundo material a pura materia. La materia, a pesar de los empiristas, no es simplemente la materia concreta que tocamos con certeza sensorial con nuestras manos o percibimos con nuestros ojos, algo tan banal como, por ejemplo, un cerezo. La materia —todo lo que se nos revela en nuestro trato con el mundo— es histórica-cultural en el sentido de que lleva en sí misma las huellas de la labor humana y de la actividad intelectual. Ver la materia solo subjetivamente es cometer el error que Marx reprochó al filósofo materialista Ludwig Feuerbach (1966):

[Feuerbach] no ve que el mundo sensual que le rodea no es una cosa dada directamente desde toda la eternidad, que permanece siempre igual, sino el producto de la industria y del estado de la sociedad; y, de hecho, [un producto] en el sentido de que es un producto histórico, el resultado de la actividad de toda una sucesión de generaciones. ... Incluso los objetos de la más simple “certeza sensual” solo le son dados por medio del desarrollo social, la industria y el comercio. (Marx, 1998, p. 45)

Lo que Feuerbach no capta, sostiene Marx, es que a lo que accedemos por medio de nuestros sentidos no es el mundo en su materialidad intacta, el mundo intacto de Adán y Eva, sino un mundo del trabajo repleto de actividad sensual histórica y cultural:

El cerezo, como casi todos los árboles frutales, fue, como es bien sabido, trasplantado por el *comercio* a nuestra zona hace solo unos siglos, y por lo tanto solo por esta acción de una sociedad definida en una época definida se ha convertido en “certeza sensual” para Feuerbach. (p. 45, énfasis en el original)

El concepto de cognición sensual se basa en esta comprensión del sentido, la sensación y el mundo material como productos históricos y

culturales. Sin embargo, el concepto de cognición sensual que dota a la corporalidad de un significado específico en la teoría de la objetivación va más allá de afirmar que la mente, el cuerpo y el mundo son entidades dialécticamente entrelazadas. También afirma que la cognición y los sentidos humanos son transformados por la labor humana y la práctica social. Es decir, la cognición humana y nuestro cuerpo y sentidos no son un fenómeno natural, sino histórico-cultural.

Como podemos ver en el ejemplo de la alcancía del capítulo anterior, la profesora y los estudiantes recurren a los gestos y a la cultura material de forma decisiva. Los gestos, los vasos de plástico, las fichas de bingo, su color, etc., son cruciales en el desarrollo de la labor conjunta. Por medio de ellos, la profesora y los estudiantes infunden un significado emergente a la forma de percibir, intuir y pensar las secuencias de números, significado que aparece poco a poco. Sin embargo, este significado emergente solo puede entenderse con el trasfondo de la labor conjunta de la profesora y los estudiantes.

Al igual que en el caso de los signos y las herramientas, en la teoría de la objetivación, las acciones corpóreas (gestos, postura corporal, movimiento corporal, percepción, tactilidad, prosodia) no se consideran dispositivos mediadores de la actividad, sino partes de la actividad y parte del pensamiento desplegado del profesor y de los estudiantes.

2.9. Variaciones del ejemplo de la alcancía

Detengámonos un momento e imaginemos el mismo problema de la alcancía tratado en el capítulo 1 en un escenario diferente. Imaginemos que el episodio se desarrolla ahora según el modelo educativo de transmisión de saberes. La profesora está delante de la clase y explica a los estudiantes cómo resolver el problema. Los estudiantes escuchan y toman notas. ¿Podemos decir que hay una labor conjunta? Repitamos el mismo experimento mental, pero esta vez el episodio se desarrolla según el modelo constructivista centrado en el estudiante. Los estudiantes intentan resolver por sí mismos el problema de la alcancía y la profesora se abstiene de intervenir. ¿Podemos decir que hay una labor conjunta? En ambos casos, lo que hacen profesores y estudiantes no es algo realmente colectivo en un sentido social fuerte, orientado a la satisfacción de una necesidad común. Profesores y estudiantes participan en la actividad del aula, pero es una actividad en el sentido de *Aktivität/aktivnost*. Más concretamente, en

el modelo de transmisión de saberes, el profesor y los estudiantes están implicados en una coordinación funcional y técnica de las acciones: por un lado, el profesor dice a los estudiantes lo que tienen que hacer; por otro, los estudiantes escuchan e intentan dar sentido por sí mismos a lo que el profesor hace y dice. En el modelo constructivista, “el profesor y los estudiantes construyen cada uno de ellos interpretaciones individuales que dan por compartidas con los demás” (Cobb, Yackel y Wood, 1992, p. 17). Lo que resulta de tal actividad no puede ser una “obra común”, sino algo que simplemente se “toma como compartido”.

El ejemplo de la alcancía presentado en el capítulo 1 nos proporciona un ejemplo de proceso de objetivación. Al trabajar juntos, la profesora y los estudiantes están produciendo (por medio de gestos, postura corporal, actividad perceptiva, lenguaje, artefactos) una obra común, que permite a los estudiantes ser progresivamente conscientes de una manera diferente de pensar en el problema (una forma de pensar covariacionalmente).

Por medio de estos procesos sociales, materiales, corpóreos y semióticos, los estudiantes y los profesores no solo crean y recrean saberes, sino que también se coproducen a sí mismos como sujetos en general y como sujetos de la educación, en particular. Más precisamente, producen subjetividades; es decir, individuos singulares en formación. Por eso, desde esta perspectiva, los procesos de objetivación son al mismo tiempo procesos de subjetivación.

2.10. Síntesis

La teoría de la objetivación es un intento de entender la enseñanza y el aprendizaje no como el resultado de los propios actos de los individuos (como lo hacen las perspectivas individualistas del aprendizaje), sino como procesos histórico-culturales. Pretende estudiar los modos en que los estudiantes toman progresivamente consciencia de las formas de pensar y actuar histórica y culturalmente constituidas, y cómo, en cuanto subjetividades en transformación, profesores y estudiantes se posicionan en las prácticas matemáticas. Esta investigación incluye el lenguaje, los signos, los artefactos y el cuerpo, pero el constructo teórico central es la labor conjunta. Por medio de la inteligencia histórica que portan, los signos y los artefactos proporcionan a la labor conjunta de los individuos posibilidades de organización de la acción y del pensamiento. Como parte de la cultura material, los signos y los artefactos están entrelazados con el cuerpo y la cognición en general. Pero el cuerpo y la cognición se entienden aquí en

su sentido dialéctico materialista: no como entidades que evolucionan de forma natural; se entienden como formas histórica y culturalmente constituidas, corpóreas y materialmente sensibles de actuar, sentir, imaginar, transformar, responder y dar sentido al mundo de forma creativa.

En este contexto, el concepto de labor conjunta que aquí se presenta adquiere un significado específico. En particular, tal y como lo trato en los próximos capítulos, recurre a formas colectivas de producción de saberes y a formas no alienantes de colaboración humana. A diferencia de otras teorías que se centran solo en el aprendizaje de los contenidos matemáticos y que ven en la interacción en el aula una herramienta técnica para precipitar el aprendizaje, la teoría de la objetivación pretende proporcionar las condiciones no solo para un aprendizaje matemático conceptual profundo, sino también para la aparición de formas de colaboración humana culturalmente desarrolladas que pueden ser propicias para la formación de subjetividades críticas. Como veremos en el último capítulo de este libro, estas formas de colaboración humana se apoyan en una ética comunitaria que incluye, entre otras cosas, un compromiso ético. Este compromiso ético es el que vemos en el ejemplo de la alcancía cuando, por ejemplo, en la línea 29 la profesora se compromete con los estudiantes y les invita a ver la estrategia de resolución de problemas bajo una nueva luz. Los estudiantes responden a la llamada de la profesora y, al laborar con ella, se esfuerzan por dar sentido a esta nueva estrategia. Volveré sobre estas ideas y trataré de profundizarlas en el resto del libro. Mientras tanto, en la sección siguiente, presento un panorama sinóptico de lo dicho hasta ahora.

2.11. Un panorama sinóptico de la teoría de la objetivación

La teoría de la objetivación es una teoría de la enseñanza y el aprendizaje inspirada en el materialismo dialéctico, el concepto de educación de Freire y la escuela de pensamiento de Vygotsky. Se aleja de las concepciones subjetivistas (por ejemplo, empiristas y constructivistas) del aprendizaje y de las epistemologías tradicionales de sujeto-objeto, y concibe la enseñanza y el aprendizaje como un único proceso que implica tanto el saber como el devenir de los individuos.

Palabras clave

La teoría de la objetivación implica las siguientes palabras clave.

Aprendizaje. La teoría de la objetivación conceptualiza el aprendizaje en términos de procesos que son al mismo tiempo procesos de objetivación y procesos de subjetivación.

Procesos de objetivación. Los procesos de objetivación son los procesos activos, corpóreos, discursivos, simbólicos y materiales por medio de los que los estudiantes encuentran, notan y se familiarizan críticamente con sistemas de pensamiento, reflexión y acción histórica y culturalmente constituidos. En este encuentro, los estudiantes se enfrentan a lo ajeno, el Otro. Este encuentro es entendido como el encuentro de algo que se opone; etimológicamente hablando, algo que se erige frente al individuo o se contrapone a este.

Procesos de subjetivación. Los procesos de subjetivación se basan en la idea de que nosotros, los humanos, somos siempre proyectos de vida inacabados, sujetos en perpetua creación. Los procesos de subjetivación son los procesos de creación incesante del sujeto, de la creación continua de un sujeto histórico y cultural singular (y único).

Matemáticas. Las matemáticas son simultáneamente ideales y concretas. Las matemáticas son visuales, táctiles, auditivas, materiales, artefactuales, gestuales y kinestésicas, algo producido por la labor conjunta de los profesores y los estudiantes.

Labor conjunta. La labor conjunta no es un mero conjunto de acciones coordinadas. Es la actividad conjunta (*deyatel'nost'* en ruso) llevada a cabo por el profesor y los alumnos, una forma de energía que integra el flujo de componentes emocionales, afectivos, éticos, intelectuales y materiales interrelacionados a partir de los cuales aparecen las matemáticas y se produce la objetivación y la subjetivación.

Obra común. La obra común se define como el aparecimiento sensual o sensible del saber; por ejemplo, el aparecimiento sensual o sensible de una forma de pensar algebraica covariacional mediante el planteamiento y la resolución de problemas colectivos, y la discusión y el debate en el aula.

Principios básicos

La teoría de la objetivación tiene los siguientes principios básicos.

1. Los entornos educativos no solo producen saberes, sino también subjetividades.
2. En consecuencia, la Educación Matemática debe implicar tanto la dimensión del saber como la del devenir (la dimensión del sujeto).

3. La teoría de la objetivación considera la Educación Matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural. Dicho esfuerzo busca la creación dialéctica de sujetos éticos que se posicionan críticamente en las prácticas matemáticas histórica y culturalmente constituidas y reflexionan y deliberan sobre nuevas posibilidades de acción y pensamiento.

Contribuciones

Por medio de análisis epistemológicos detallados, la teoría de la objetivación proporciona elementos para configurar entornos educativos ricos que promueven el desarrollo de formas sofisticadas de producción de saberes en el aula. Por medio de los principios de una ética comunitaria que giran en torno a las ideas de solidaridad, responsabilidad y la práctica de la empatía y el cuidado del otro, la teoría de la objetivación promueve formas de cooperación humana no alienantes y orientadas socioculturalmente. En estos entornos, los estudiantes jóvenes comienzan a inscribirse progresivamente en el mundo social al mismo tiempo que dan sentido a sistemas complejos de pensamiento matemático históricamente constituidos (por ejemplo, aritmético, algebraico). Por medio de prolongados procesos de objetivación y subjetivación, los estudiantes se involucran en formas de labor conjunta cada vez más elaboradas y en estructuras de intersubjetividad cada vez más complejas (yo-tú, nosotros-tú, nosotros-ellos). La actividad semiótica multimodal de los estudiantes y profesores se reorganiza y se perfecciona, lo que da lugar a formas culturales complejas de percepción, imaginación, discursividad, simbolización y pensamiento.

Agradecimiento

Esta es una versión revisada y ampliada de Radford, L. (2018). A teoria da objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em educação matemática. En V. Moretti y W. Cedro (Eds.), *Educação Matemática e a teoria histórico-cultural* (pp. 229-262). Campinas, São Paulo: Mercado de Letras. Revisado con el permiso del titular de los derechos de autor.

Capítulo 3

Saber y conocimiento

Los capítulos anteriores han sentado las bases para abordar dos conceptos clave de la teoría de la objetivación: los conceptos de saber y conocimiento. Estos conceptos son necesarios para definir, en el siguiente capítulo, el concepto de aprendizaje.

A primera vista, una discusión sobre el saber y el conocimiento podría parecer esotérica e inútil. Sin embargo, me parece que, si las teorías de la Educación Matemática tienen la esperanza de ofrecer una explicación coherente y convincente del aprendizaje, primero deben aclarar lo que entienden por saber. En efecto, aprender es siempre aprender algo: un contenido (por ejemplo, en matemáticas, el aprendizaje puede ser de saberes algebraicos, geométricos, etc.). Por consiguiente, la investigación del aprendizaje no puede evitar abordar la cuestión del saber y su naturaleza.

En la siguiente sección, presento una discusión sobre el saber tal y como se ha entendido generalmente en la Educación Matemática; es decir, como *construcción*. Luego, presento las definiciones de saber y conocimiento tal y como se entienden en la teoría de la objetivación. Estas secciones son inevitablemente teóricas. El capítulo termina con una sección menos teórica en la que hago una analogía entre las matemáticas y la música, que —espero— pueda ayudar a explicar mejor el significado de los conceptos de este capítulo.

1. Saber

Uno de los desafíos más importantes con el que se enfrentan las teorías socioculturales educativas es el de ofrecer un concepto de saber que sea coherente con la orientación sociocultural general que sostiene que los saberes están profundamente arraigados en las culturas de donde surgen. Ese desafío no podrá ser enfrentado y superado si no estamos en condiciones de responder a la siguiente pregunta crucial: ¿por qué los saberes en una cultura son diferentes de los saberes en otra cultura? Para responder a esta pregunta, la teoría de la objetivación sugiere hacer una distinción entre saber y conocimiento, ligando ambos conceptos a las especificidades de las propias culturas. Esta sección está dedicada a tratar de esclarecer el concepto de saber.

1.1. El saber como construcción

En general, la investigación en Educación Matemática no distingue realmente entre saber y conocimiento⁹. En este contexto, es muy común hablar de saber/conocimiento como algo que uno *hace* o *construye*. Saber o conocer es construir algo.

La metáfora fundamental que subyace a esta idea es que el saber es algo similar a los objetos concretos del mundo. Uno construye o ensambla el saber como uno construye o ensambla las partes de una silla. Esta idea del saber/conocimiento como construcción es relativamente reciente. Surgió gradualmente durante los siglos XVI y XVII, cuando la fabricación y la producción comercial de objetos se convirtieron en la principal forma de producción económica humana en Europa.

Hanna Arendt resume esta idea moderna de saber/conocimiento de la siguiente manera: “Conozco algo cuando comprendo cómo llegó a ser” (Arendt, 1958, p. 585). Así, dentro de la visión general de los siglos XVI y XVII de un mundo de manufacturas, el conocimiento se concibe por primera vez como una especie de producto construido. Arendt cita al filósofo del siglo XVIII Giambattista Vico al decir que “las cuestiones matemáticas las podemos demostrar porque nosotros mismos las fabricamos” (p. 584).

9 Una excepción es la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2002) que utiliza los términos *savoir* et *connaissance*.

Encontramos esta misma idea en la *Crítica de la razón pura* de Immanuel Kant, un libro monumental del siglo XVIII cuya influencia no ha dejado de afectarnos. Kant nos dice que “las matemáticas ... derivan su conocimiento no de los conceptos sino de la construcción de los mismos” (Kant, 2003, p. 590; A 734/B762).

Este concepto de saber/conocimiento como construcción fue desarrollado por Piaget en su epistemología genética y fue ampliamente adoptado en la Educación Matemática, en la que se puso el énfasis en la dimensión personal de la construcción del saber: usted y solo usted puede construir su propio saber. Según este punto de vista, el saber no es algo que alguien pueda construir y transmitir a otro; lo que uno sabe es el resultado de su propia experiencia.

Como han señalado muchos investigadores, esta visión del saber es problemática por muchas razones. Por ejemplo, deja poco espacio para dar cuenta del importante papel de los demás y de la cultura material en la forma en que hemos llegado a conocer, lo que conduce a una visión simplista de la cognición, la interacción, la intersubjetividad y la dimensión ética, y elimina el papel crucial de las instituciones sociales y los valores y tensiones que transmiten, y des-historiza el saber (véanse, por ejemplo, Campbell, 2002; Lerman, 1996b; Otte, 1998; Roth, 2011; Valero, 2009, 2004; Zevenbergen, 1996).

Como veremos en la siguiente subsección, hay otras formas de considerar el saber y la relación de los estudiantes con él.

1.2. Enfoques socioculturales

Los enfoques sociocultural y constructivista son muy divergentes. Sin embargo, convergen en su oposición a la pedagogía de transmisión de saberes y en su énfasis en la importancia de la participación de los estudiantes en el aprendizaje¹⁰. En los enfoques sociocultural y constructivista, concebir el aprendizaje como la transmisión y recepción de saberes es un tipo

10 Esta puntual convergencia ha llevado a algunos educadores matemáticos a situar a Vygotsky entre los constructivistas. Vygotsky aparece como un constructivista social, lo que me parece ignorar el hecho importante de que la obra de Vygotsky y el constructivismo se basan en paradigmas filosóficos completamente diferentes. Borrar esta diferencia nos llevaría a ver a Vygotsky como un kantiano y a Piaget como un marxista.

de conductismo. Los perros aprenden a responder con éxito a determinados estímulos; los ratones aprenden a salir de un laberinto por medio de *inputs* específicos. La mente humana, por el contrario, es mucho más compleja; el modelo conductista de estímulo-respuesta es definitivamente insuficiente. En una frase ya famosa, Vygotsky y Luria sostuvieron que la cultura material e ideacional media en el comportamiento humano y sugirieron sustituir el segmento estímulo-respuesta (S-R) por un triángulo (figura 5) que, a pesar de su aparente simplicidad, añade un nivel inimaginable de complejidad al estudio de la mente humana. Los signos externos (S) y otros componentes de la cultura material y espiritual (X) alteran la historia natural de la mente humana (R).

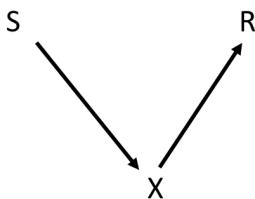


Figura 5. El famoso triángulo anticonductista de Vygotsky (Vygostky y Luria, 1994, p. 144)

Como vimos en el último capítulo, los seres humanos realizan operaciones por medio de signos. Lo importante es que el uso de los signos altera fundamentalmente nuestra forma de pensar y actuar. Vygotsky y Luria (1994) dijeron: “Con la transición a operaciones con signos no solo procedemos a procesos psicológicos de altísima complejidad, sino que de hecho abandonamos el campo de la historia natural de la psique y entramos en el dominio de la formación histórica del comportamiento” (p. 144).

Sin embargo, si el saber no es algo que se construye subjetivamente ni algo que se transmite, ¿qué es? ¿Cuál es la diferencia con el conocimiento? En la siguiente sección, presento un concepto histórico-cultural de saber y conocimiento. La idea es considerar el *saber* (por ejemplo, el saber que se requiere para resolver ecuaciones lineales o el saber para pensar algebraicamente) no como un objeto determinado o delimitado, sino como una capacidad generativa para hacer algo o pensar de cierta manera. El saber se presenta, así, como una fuente de posibilidad. En este contexto, el saber no existe en la cabeza de los individuos. No es una entidad psicológica o cognitiva, sino histórico-cultural. El saber es un arquetipo histórico de

acciones colectivas*. El saber existe en la cultura y surge y cambia continuamente por medio de la actividad humana. En efecto, mediante su actividad, los individuos activan el saber, lo ponen en movimiento, lo actualizan o lo materializan, con lo que hacen concretos ciertos tipos de acción y reflexión. Al ser actualizado, el saber se muestra y se materializa en algo perceptible, sensible, concreto. La materialización del saber es lo que llamaremos *conocimiento*. En otras palabras, el conocimiento es una actualización del saber. En lo que sigue, veremos estas ideas con más detalle.

1.3. El saber como labor histórico-cultural

En la teoría de la objetivación, el saber se entiende como una entidad general. El saber es un sistema de arquetipos de pensamiento, acción y reflexión constituido histórica y culturalmente a partir de la labor colectiva material, sensual y sensible¹¹.

Imaginemos una comunidad rural que, a lo largo del tiempo, ha producido formas de pensar, reflexionar y hacer cosas —por ejemplo, cómo sembrar la tierra, cómo pensar en el espacio, la cantidad, el tiempo, etc.—. Estas formas de pensar, hacer y reflexionar sobre cosas son arquetipos generales que constituyen el saber de la cultura. Imaginemos ahora una cultura basada en formas de producción comercial capitalistas. Esta cultura podría producir un saber diferente —por ejemplo, diferentes arquetipos de pensamiento, acción y reflexión para tratar las cuestiones de la venta y la compra, tasas de interés, financiación, etc.—. El saber cambia de una cultura a otra y de un período histórico a otro.

Ahora bien, ontológicamente hablando, cada uno de nosotros nació en una cultura; frente a cada uno de nosotros había no solo un mundo poblado

* En trabajos anteriores he utilizado la metáfora de la cristalización. El saber es labor cristalizada. La metáfora tiene el mérito de ligar el saber a maneras culturales de hacer cosas; tiene la desventaja de sugerir que, porque ya está cristalizado, el saber no se puede transformar. Como veremos en un momento, el saber es una entidad *dinámica*. No hay metáfora perfecta, no porque no hemos encontrado la metáfora exacta, sino porque las metáforas pasan por el lenguaje, el cual es impotente para dar cuenta, de manera precisa, de entidades ideales como el saber. La metáfora del arquetipo parece ser, hasta hoy, relativamente adecuada (nota de la presente edición).

11 Para caracterizar el saber, en trabajos anteriores he utilizado el término *conjunto*. Quiero agradecer a Rodolfo Vergel la sugerencia de utilizar el término “sistema”, que resalta mejor la idea de elementos o unidades interrelacionadas en movimiento.

de objetos concretos, sino también un mundo poblado de ideas, de saberes —saberes culturales—. Para un bebé nacido en ese momento en la cultura rural que mencioné antes, habría, frente a él, arquetipos de pensamiento sobre el mundo. Estos arquetipos se le presentarían como potencialidades de acción y reflexión. Otro bebé, nacido en la cultura capitalista antes mencionada, encontrará otras potencialidades. El problema central que tengo que abordar en el siguiente capítulo es el del aprendizaje: ¿cómo aprende el niño esos arquetipos que constituyen el saber de su cultura? Por el momento, tenemos que seguir explorando nuestro concepto de saber.

Aristóteles utilizó el término *potencialidad* (δύναμις, *dynamis*) para referirse a una capacidad de hacer algo (1984; véase *Metafísica*, 1048a). Los seres vivos y los mecanismos tienen potencialidad. Un instrumento musical, por ejemplo, tiene la capacidad de producir sonidos. Un pez tiene la capacidad de moverse en el agua. La *actualidad* (ἐνέργεια, *energía*), en cambio, es la ocurrencia concreta de aquello que, antes de ponerse en movimiento, antes de actualizarse, era potencialidad. Por eso, Sachs (2015, p. 3) dice que la actualidad es el ser-en-presencia, algo que sucede ante nosotros, como el sonido claro y concreto que emite un instrumento o el recorrido específico que sigue un pez en el agua.

La potencialidad es algo indefinido, sin forma, como el sonido antes de producirse o como la capacidad del pez antes de desplazarse por el agua; algo puramente potencial que, por medio del movimiento, se materializa (adquiere materia, consistencia) o se actualiza (act-ualizado: transformado por un *act-ion*).

Sin embargo, la potencialidad de la que gozan los seres vivos y los mecanismos puede ser natural o adquirida. El pez está equipado biológicamente para moverse en el agua. Otras potencialidades o capacidades se adquieren (Aristóteles, 1984, *Metafísica*, 1048a). Este es el caso del saber —véase Hegel (2009), quien menciona precisamente el saber matemático como una instancia de potencialidad—.

Ontogenéticamente hablando, el saber es eso: capacidad generativa, potencialidad. El saber algebraico, por ejemplo, es potencialidad incrustada en la cultura: capacidades que se ofrecen a los individuos para pensar, reflexionar, plantear y resolver problemas de una manera específica.

Sería un error, sin embargo, entender la idea de saber que estoy esbozando aquí como si el saber fuera una especie de forma platónica. El hecho de que cuando cada uno de nosotros nació se encontró frente a una serie de saberes/pensamientos científicos, éticos, estéticos, jurídicos, etc.,

ya establecidos histórica y culturalmente, no significa que esas formas de saber sean formas platónicas. Las formas platónicas son universales y atemporales, independientes del trabajo humano. Por el contrario, el saber, tal y como lo articulo en este libro, es una entidad dinámica: una producción cultural, producida por personas concretas por medio de su trabajo, sus acciones, sus reflexiones, sus alegrías, sus sufrimientos y sus esperanzas.

El siguiente ejemplo puede arrojar algo de luz sobre la producción de saber. Se trata de la quiebra de nueces en los chimpancés. La quiebra de nueces en los chimpancés no es un proceso obvio. Como señalan los primatólogos, la rotura de nueces incluye los siguientes pasos:

1. el chimpancé coge una nuez;
2. la pone en una superficie particular: un yunque de piedra;
3. recoge y sostiene otra piedra (la piedra martillo);
4. golpea la nuez en el yunque de piedra con la piedra martillo, y
5. se come el corazón de la nuez partida.

La figura 6 muestra cómo Yo, el chimpancé del medio, rompe una nuez mientras los chimpancés jóvenes siguen atentamente el proceso (de Matsuzawa, Biro, Humle, Inoue-Nakamura, Tonooka, y Yamakoshi, 2001, p. 570).



Figura 6. Yo, el chimpancé del medio, rompe una nuez

Los estudios realizados en la selva sugieren que los chimpancés jóvenes tardan de tres a siete años en aprender el proceso de quebrar nueces.

Los jóvenes no empiezan necesariamente utilizando la piedra martillo y la piedra yunque. La atención adecuada a los objetos, su selección (tamaño, dureza, etc.) y la coordinación espacial y temporal de los tres objetos (nueces, yunque y martillo) son un proceso largo. Los chimpancés de seis meses suelen manipular un solo objeto (una nuez o una piedra). Son capaces de coger una nuez y pisarla. A medida que maduran, pueden utilizar los tres objetos, pero no en la secuencia correcta, lo que da lugar a intentos fallidos. Un aspecto clave de este proceso es la aparición de habilidades adecuadas; por ejemplo, aplicar “suficiente presión sobre la cáscara de una nuez para romperla” (p. 98).

Los chimpancés aprenden a quebrar nueces como un proceso social. Las crías, que normalmente permanecen con su madre hasta los cuatro o cinco años, observan atentamente cómo su madre rompe nueces y luego intentan hacerlo ellas mismas, aparentemente sin entender el objetivo del proceso¹².

No todos los grupos de chimpancés rompen nueces y, entre los que lo hacen, no todos rompen el mismo tipo de nueces. Los primatólogos creen que la habilidad de romper nueces se desarrolló en alguna parte de África Occidental y luego se transmitió socialmente de una generación a la siguiente. La práctica de romper nueces se extendió a los grupos vecinos como resultado de la migración de los chimpancés (Hirata et al., 2009, p. 88; Matsuzawa et al., 2001, pp. 569-570).

Quebrar nueces es un ejemplo de saber: la serie de pasos resumidos anteriormente constituye, de hecho, un arquetipo cultural de acciones. Como arquetipo, el saber es algo general: no puede reducirse a esta o aquella secuencia particular de acciones coordinadas con estas o aquellas piedras. Su génesis se encuentra en la vida sensible y concreta de los chimpancés. El saber existe en la cultura de los chimpancés. Podemos pensar en el saber como una forma ideal de las acciones, en contraposición a las acciones mismas. El saber como forma ideal está relacionado con cada una de sus instancias o realizaciones concretas, pero es al mismo tiempo diferente de cada una de ellas. Cada una de estas realizaciones concretas mantiene, en su materialización, la generalidad de la forma ideal que la engendra, pero no coincide con la forma ideal. Como ya he dicho, el saber no tiene nada que ver con las formas platónicas. En lugar de considerar el saber de

12 Por ejemplo, juegan con las piedras que utilizan los adultos para cascar nueces; véase http://www.youtube.com/watch?v=5Cp7_In7f88.

la comunidad de chimpancés que rompen nueces que vive en las selvas del monte Nimba en la República de Guinea como formas platónicas o cosas kantianas en sí mismas, podemos considerarlo como un arquetipo de reflexión y acción sensual y material constituida histórica y culturalmente. La “forma ideal” para quebrar nueces debe entenderse como una forma general o arquetipo de hacer cosas. Más que situarse en un ámbito de ideas eternas, esta forma ideal está codificada en la memoria cultural. A diferencia de las formas platónicas, cuya naturaleza es precisamente la de existir independientemente de lo que hagan las distintas especies en la tierra, el saber es una forma ideal que resulta de la práctica concreta y que se materializa en dicha práctica.

El ejemplo de saber que acabo de explicar tiene, me parece, una virtud pedagógica. Es un ejemplo “sencillo”; no hace intervenir al lenguaje u otros sistemas semióticos complejos, como suele ocurrir con el saber humano. El saber de quebrar nueces es, como otros saberes producidos por los chimpancés (por ejemplo, lavar papas con agua o sacar hormigas con las ramas de arbustos), *kinestésico*.

Merece la pena detenernos ahora en un ejemplo de saber matemático. Abordemos el caso de la generalización de patrones.

Al igual que muchos de mis colegas, en mi investigación en el aula, he utilizado la generalización de patrones para introducir a los alumnos en el álgebra (véanse, por ejemplo, Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Cai y Knuth, 2011; Kieran, 2018; Rivera, 2011). La idea fundamental es presentar a los alumnos secuencias geométricas o números sencillos (normalmente secuencias aritméticas que pueden expresarse de forma lineal: $y = ax + b$, como el problema de la alcancía comentado en el capítulo 1). Normalmente, damos a los alumnos unos cuantos términos (véase la figura 7) y luego les pedimos que inventen varias formas de calcular el número de objetos en términos “remotos” (por ejemplo, términos 10, 25, 100).

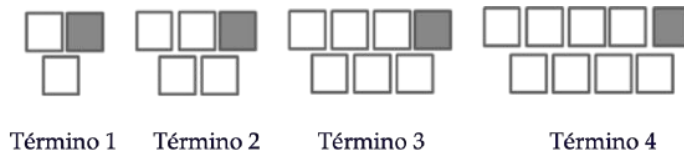


Figura 7. Los primeros términos de una secuencia

Con ello buscamos que los estudiantes entren en relación con un sistema histórico-cultural de acciones y reflexiones: formas muy específicas (que institucionalmente reconocemos como algebraicas) de percibir, reflexionar, producir e investigar secuencias por medio de símbolos, diagramas, objetos concretos, etc. Este sistema de acciones y reflexiones es el saber matemático, más precisamente, el saber algebraico.

Como todo saber, el algebraico se constituyó históricamente. De hecho, la investigación de las secuencias aritméticas apareció en civilizaciones antiguas, como la Mesopotamia, y fue un tema muy popular en la Antigüedad tardía en los círculos neopitagóricos (Lawlor y Lawlor, 1979; Nicomachus de Gerasa, 1926; Tarán, 1969). Los neopitagóricos estaban particularmente interesados en los números poligonales —números representados por la forma de un polígono regular—. Por ejemplo, los primeros números triangulares son 1, 3, 6, 10; los primeros números cuadrados son 1, 4, 9, 16; y los primeros números pentagonales son 1, 5, 12, 22 (véase la figura 8).

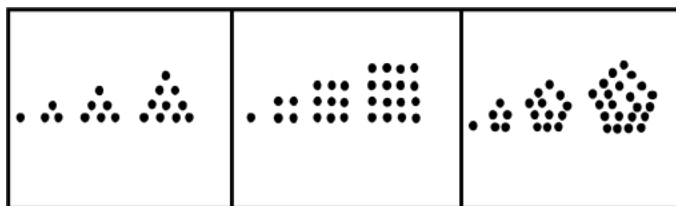


Figura 8. Los primeros números triangulares, cuadrados y pentagonales

Apoyándose en los registros históricos, los historiadores piensan que las primeras investigaciones griegas sobre las secuencias se hicieron con pequeñas piedras dispuestas en forma de figuras (como se sugiere en la figura 8). De este modo, las formas de acción, reflexión e investigación de los primeros estudios griegos sobre secuencias se habrían basado en argumentos perceptivos. También de esta manera perceptiva se habrían establecido las primeras propiedades de los números pares e impares (Lefèvre, 1981).

Según los historiadores, la investigación de las propiedades de las secuencias aritméticas basada no en argumentos perceptivos sino en argumentos deductivos apareció por primera vez en el texto de Hipsicles,

conocido como *Anaphorikós* (véase Radford, 2006)¹³. La proposición 1 se enuncia de la siguiente manera:

Si se considera un número cualquiera de términos de manera que [comenzando desde el más grande], cada dos números sucesivos tienen la misma diferencia, siendo [los términos] pares en número, entonces, la diferencia entre [la suma de] la mitad del número de términos [empezando por el más grande], y [la suma de] los restantes, es igual al múltiplo de la diferencia común por el cuadrado de la mitad del número de términos. (Manitius, 1888, p. 2)

En el simbolismo moderno, la proposición afirma que si un número de 2_n términos, a_1, a_2, \dots, a_{2_n} son tales que $a_1 > a_2 > \dots > a_{2_n}$, y $a_i - a_{i+1} = d$ para $i = 1, 2, \dots, 2n-1$, entonces:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}) - (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}) = n^2 \times d.$$

La proposición de Hipsicles afirma una propiedad de lo que hoy llamamos secuencia aritmética. Diofanto (ca. 250 a. C.), en su corto texto, *Sobre los números poligonales* (véase Eecke, 1959), presenta una fórmula para calcular cualquier número poligonal, S_n , dados el lado n del número poligonal y el ángulo a . La fórmula es:

$$S_n = \frac{[(2n-1)(a-2)+2]^2 - (a-4)^2}{8(a-2)}.$$

Supongamos que deseamos calcular el tercer término de los números pentagonales. En este caso, $n = 3$ y $a = 5$.

$$S_3 = \frac{[(2 \times 3 - 1)(5 - 2) + 2]^2 - (5 - 4)^2}{8(5 - 2)},$$

lo que da como resultado $S_3 = 12$.

Naturalmente, Diofanto no expresó esta fórmula utilizando el simbolismo moderno. Lo que sí nos dijo fue:

Tome el doble del lado del número poligonal; quítele una unidad; multiplique el resultado por el número de ángulos menos 2; luego añada 2

13 Hipsicles vivió en Alejandría. Los historiadores no saben mucho sobre su vida, pero piensan que vivió entre el siglo II a. C. y el siglo II d. C.

unidades. Tome el cuadrado del resultado. A este quítele el cuadrado del número de ángulos menos 4. Divida el resultado por 8 veces el número de ángulos menos 2 unidades. Esto da el número poligonal que estamos buscando. (Basado en la traducción de Ver Eecke, 1959, pp. 290–291)

En resumen, este ejemplo sugiere que una primera forma de percibir, producir, reflexionar e investigar secuencias numéricas basada en guijarros dispuestos de determinadas maneras se transformó en una forma diferente basada en la investigación de las propiedades teóricas analítico-deductivas de las secuencias numéricas. Pero el ejemplo es más que un ejercicio histórico: nos permite darnos cuenta de la constitución ontológica del saber tal como se entiende en la teoría de la objetivación. En su constitución ontológica (es decir, en su naturaleza íntima), el saber se entiende como un “todo” sistémico, dinámico y fluido, compuesto por componentes individuales y sus conexiones. El saber es considerado como una entidad “multivariada en su interior, rica en determinaciones e históricamente formada. Es como, no un átomo aislado, sino un organismo vivo, una estructura socioeconómica o una formación similar” (Ilyenkov, citado en Bakhurst, 1991, p. 138). Decir que el saber es un sistema dinámico significa que el estudio y la investigación del saber es el estudio de su movimiento, de su continua transformación y del movimiento de sus partes e interconexiones.

En esta línea de pensamiento, los primeros saberes matemáticos griegos sobre las secuencias, tal y como los practicaban los primeros Pitagóricos, se refinaron y transformaron en algo más específico y determinado: algo que ahora revela nuevas interconexiones entre el número poligonal S_n , el lado n y el número de ángulos a que, como sugieren los testimonios históricos, no se habían observado antes.

El materialismo dialéctico tiene un término específico para explicar el movimiento y la transformación del saber. El nuevo saber es, con respecto al anterior, más *concreto*. Evidentemente, el significado de “concreto” en el materialismo dialéctico tiene un sentido diferente al empirista. En este último, lo concreto es visto como algo tangible, algo que, al tocarlo, nos lleva a formar ideas abstractas. En el pensamiento empirista (véase, por ejemplo, Locke, 1825), cada idea supuestamente encarna propiedades de los objetos empíricos, “bien delimitadas y fijamente separadas unas de otras” (Inwood, 1992, p. 30). En la visión materialista dialéctica adoptada en la teoría de la objetivación, lo concreto está más bien relacionado con los vínculos fluidos entre sus componentes; está relacionado con el movimiento del saber y con las nuevas comprensiones del mundo (Ilyenkov, 1982).

Este proceso de movimiento, transformación y refinamiento del saber se produce por medio de un proceso de determinaciones que se suceden entre sí y en el que aparecen nuevas conexiones. Las nuevas conexiones del saber no se limitan a sustituir a las antiguas; las nuevas conexiones vehiculan, de forma condensada y con tensiones, los significados de las formaciones teóricas previas. La emergencia del simbolismo alfanumérico con Vieta y Descartes revela nuevas conexiones y permite distinciones más profundas entre las clases de números (Filloy y Rojano, 1984; Rojano, 1996). En este proceso histórico, los significados anteriores quedan subsumidos en los nuevos significados.

Por ejemplo, en la obra del matemático y pintor renacentista Piero de la Francesca, la incógnita en los problemas algebraicos se denomina “la cosa”. La incógnita se conceptualiza en asociación con el lado de un cuadrado, por lo que tres incógnitas se escriben como $\bar{3}$; el lado del cuadrado aparece encima del número, como un signo que significa *icónicamente* (Radford, 2006). Se necesitará más de un siglo para llegar a la simbolización moderna, $3x$ (Høyrup, 2008). Este ejemplo muestra cómo los significados anteriores se sedimentan y quedan subsumidos en la expresión simbólica. Entre el momento histórico en que las 3 incógnitas se pensaron como $\bar{3}$ hasta el momento en que se pensó en ellas como $3x$, se ha producido un cambio no solo en el simbolismo matemático, sino también en el saber matemático. En la escuela contemporánea, los niños no encuentran $\bar{3}$ en su conceptualización geométrica original del Renacimiento. Encuentran un saber que ha sufrido un proceso de transformaciones que lo hace más definido, más concreto. Como dijo Marx: “Lo concreto es concreto porque es la concentración de muchas determinaciones, y por lo tanto es unidad de lo diverso. ... [Lo concreto] aparece en el proceso del pensamiento, por tanto, como proceso de concentración, como resultado, no como punto de partida” (1973, p. 101). Solo dentro de una perspectiva empirista las cosas aparecen al revés, en la que lo concreto (entendido como tangible) se toma como punto de partida (pero entonces, entramos en los problemas que rodean a Feuerbach y su “certeza sensual”).

El problema que estoy tratando aquí no es simplemente un problema de terminología: no es una cuestión de significados diferentes, como en el empirismo, en el que lo concreto se refiere a lo sensible y perceptible, mientras que en el materialismo dialéctico lo concreto se refiere al movimiento del saber. Detrás de esta diferencia hay un contraste irreductible entre dos conceptos de saber. Como señala Bakhurst, uno de los principales

problemas del concepto empirista de lo concreto es que supone que las ideas se generan mediante la experiencia sensible del mundo del individuo y olvida que “para cada individuo, el punto de partida de la cognición no es la experiencia sensorial bruta, no procesada, sino una concepción del mundo ‘ya lista’, *heredada* de la comunidad de la que el individuo es miembro” (Bakhurst, 1991, p. 150, énfasis en el original).

Dentro de la concepción del saber que presento en este capítulo, la producción y transformación del saber no debe considerarse como algo que ocurre como si lo hiciera una mano invisible o una supuesta lógica intrínseca de desarrollo del saber (como hace el racionalismo). La evolución del saber no se debe concebir como un fenómeno natural sino cultural. Al igual que el capital solo puede comprenderse como la concreción histórica de conceptos abstractos como la división del trabajo, la moneda, el valor, entre otros; el saber matemático solo puede entenderse como una concreción de formas abstractas previas de pensamiento y acción matemática. Así, cuando hablo de determinaciones que se suceden una a la otra, y que revelan, en ese proceso, nuevas conexiones en el objeto de estudio, no quiero decir que, desde un punto de vista filogenético, esas conexiones ya estaban ahí, a la espera de ser descubiertas. Las conexiones son el resultado del trabajo humano; no son determinaciones absolutas dadas fuera de la cultura, la política y la economía (véase el capítulo 8). Aparecen dentro de los límites y las posibilidades de la “suma de fuerzas productivas, fondos de capital y formas sociales de relación, que cada individuo y cada generación encuentra en existencia como algo dado” (Marx, 1998, p. 62). La producción y la transformación del saber se producen, en otras palabras, dentro de los límites y las posibilidades de lo que es la base real de la existencia humana en un momento y lugar específicos.

Precisamente por eso, en cada momento histórico de una cultura, el saber contiene ciertas partes y ciertas conexiones entre sus partes y no otras; ese saber ofrece a los individuos ciertas capacidades generativas de acción, reflexión y pensamiento específicas de ese momento histórico. Vygotsky lo señala en su texto sobre la imaginación y la creatividad cuando dice

Todo inventor, incluso un genio, es también un producto de su tiempo y su entorno. Sus creaciones surgen de necesidades que fueron creadas antes que él [*sic*] y se apoyan en capacidades que también existen fuera de él. ... Ningún invento o descubrimiento científico puede producirse antes de que hayan aparecido las condiciones materiales y psicológicas necesarias para que se produzca. La creación es un proceso histórico

y acumulativo en el que cada manifestación sucesiva está determinada por la anterior. (Vygotsky, 2004, p. 30)

Las capacidades de las que habla Vygotsky, que existen fuera del individuo, son las que he denominado *saber*.

Mi ejemplo del saber sobre secuencias aritméticas no contiene nada especial. Podrían darse ejemplos similares sobre cualquier tema de las matemáticas. Lo importante es, por tanto, que el saber matemático se ha creado mediante un largo proceso de refinamientos y concreciones (lenguaje natural, simbolismo alfanumérico, gráficos, etc.) y se ha codificado en la memoria y en las prácticas culturales, y está presente ahora en muchos planes de estudio en muchas partes del mundo. Es con este saber con el que los estudiantes se encuentran en la escuela y que les llevaría a ver que el término 100 de la secuencia mostrada en la figura 7, por ejemplo, tiene $1 + 2 \times 100$ cuadrados.

En la siguiente sección sugiero una definición de conocimiento.

2. Conocimiento

En su constitución ontológica, es decir, en su naturaleza constitutiva, el *saber* es un “todo” o sistema dinámico y fluido compuesto por componentes individuales y sus conexiones. En su constitución epistemológica, es decir, como una capacidad generativa, el saber es una forma histórico-cultural de hacer, pensar y reflexionar. En esta línea de pensamiento, el conocimiento puede definirse como la actualización o materialización del saber.

Cuando digo que el conocimiento es la actualización o materialización de algo que ya existe, corro un gran riesgo de ser malinterpretado. El conocimiento puede parecer una simple repetición. Por supuesto, eso no es cierto. El saber es potencialidad. El conocimiento es una materialización del saber. Es algo que podemos percibir, notar, sentir: algo que puede ser captado por la consciencia humana. Así que, cuando sugiero que el conocimiento es una actualización o materialización del saber, tenemos que distinguir entre:

1. El saber como entidad general.
2. El proceso mediante el cual se actualiza o materializa el saber.
3. El conocimiento como actualización o materialización del saber.

Analícemos detenidamente estos tres puntos.

2.1. El saber como entidad general

Afirmar que el saber es algo general significa que el saber no puede reducirse a ninguna de sus materializaciones o actualizaciones, como en el ejemplo de los chimpancés. Es afirmar lo que hemos dicho: que el saber es una capacidad generadora de acción y de pensamiento; es la posibilidad y la capacidad de romper esta o aquella nuez, o la posibilidad de encontrar una propiedad de las secuencias aritméticas o el término 100 de una secuencia dada. Esta posibilidad es una potencialidad que “aún no ha surgido a la existencia” (Hegel, 2001, p. 36), como la potencialidad de un instrumento musical. Para que surja a la existencia, el saber tiene que materializarse mediante un *proceso de actualización*.

2.2. El proceso de actualización del saber

El término *actualización* evoca una naturaleza temporal. Hay ya algo allí, pero que es simple potencialidad, y para que surja a la existencia, debe ponerse en movimiento y aparecer: tiene que convertirse en algo actual; tiene que actualizarse.

El nombre de este proceso por medio del cual se actualiza el saber es *actividad*: mediante la actividad el saber adquiere una determinación sensible (o contenido) y como resultado el saber se actualiza. “Es solamente por esta actividad que las características abstractas de lo general son realizadas, actualizadas. Por sí mismo, [lo general] no tiene poder” (Hegel, 2001, p. 36). En otras palabras, el general (el saber) no tiene el poder de aparecer por sí mismo. A esta concepción hegeliana del saber es a la que se refiere Vygotsky (1987) cuando afirma que todo fenómeno conceptual debe ser estudiado como un proceso en movimiento y cambio.

Sin embargo, la actividad no es un simple canal por medio del cual el saber hace su aparición. Ya se ha mencionado en el capítulo 2 que este concepto de actividad (*Tätigkeit*) es un sistema dinámico y complejo que incluye la energía que los individuos ponen en movimiento, una energía que se configura en función de los propios motivos y la biografía de los individuos, así como de las posibilidades cognitivas y materiales que ofrecen el lenguaje, los signos y los artefactos. Volveremos más adelante a este concepto de actividad que es central en el materialismo dialéctico y

en la teoría de la objetivación. Por el momento, detengámonos en la idea de actualización.

2.3. Actualización

El conocimiento es el contenido conceptual concreto por medio del cual el saber se encarna, se materializa o se actualiza. Sin embargo, su contenido conceptual y concreto solo aparece y puede aparecer por medio de la actividad humana. Esta actividad actualiza el saber, le da vida, como la actividad de tocar un violín da vida a las notas musicales. Esto significa que entre el saber y el conocimiento se encuentra la actividad. En otras palabras, el conocimiento es resultado de una mediación. No existe el conocimiento sin mediación: todo conocimiento es mediado, y lo que lo media es una actividad¹⁴.

Sin embargo, no debemos pensar que la actividad mediadora es algo dado, como un puente que une dos entidades ya dadas. La actividad es una entidad en relación dialéctica con el saber y el conocimiento. En efecto, la actividad es algo que se despliega en el tiempo y en el espacio, que mueve el saber y, al mismo tiempo que lo mueve, lo materializa y lo convierte en conocimiento. Al mismo tiempo, en el despliegue de la actividad, la misma materialización afecta a la actividad. Existe una estrecha relación dialéctica entre la actividad y lo que aparece. Al final, el sentido de esa mediación es el siguiente: el conocimiento lleva la huella o la impresión de la actividad que lo media (Ilyenkov, 1977). La actividad demarca la manera en la que el saber se manifiesta en el conocimiento. En términos aún más sencillos, la manera en la que llegamos a saber algo (por ejemplo, cómo resolver ecuaciones) es consustancial a las especificidades de la actividad por medio de la cual el saber se revela sensiblemente a la consciencia humana.

Permítanme resumir la relación entre saber, actividad y conocimiento de la siguiente manera. El saber es una entidad general. Los humanos no podemos sentir ni pensar el saber (algebraico, geométrico, etc.) como tal, como general. Un ejemplo de ello es la observación realizada por el matemático y didacta Laurent Vivier (2020) en un reciente seminario en París. Vivier observó que no podemos tratar la noción de tangente en general. Una tangente como tal no es pensable. Necesitamos un contexto,

14 “La actividad”, dice Andy Blunden, “es simultáneamente subjetiva y objetiva; la actividad es el ‘término medio’ que media entre el sujeto y el objeto” (2010, p. 98).

por ejemplo, funcional, cinemático o geométrico. Para convertirse en un objeto de pensamiento y de consciencia, el saber tiene que ponerse en movimiento. Lo que pone en movimiento la noción de tangente o el saber en general es la actividad contextual-sensual-intelectual-material humana (*Tätigkeit*). Al ponerse en movimiento, el saber adquiere determinaciones contextuales y se transforma en una forma singular. En nuestra terminología, esta forma singular sensible es el conocimiento.

3. El ejemplo de la alcancía

Volvamos al ejemplo de la alcancía que comentamos en el capítulo 1 y considerémoslo a la luz de las ideas anteriores. Antes de comenzar la lección, el saber algebraico existe como capacidad generativa de acción y pensamiento sobre el problema de la secuencia del ahorro. El saber algebraico es el resultado de un proceso histórico y existe en la cultura de los estudiantes. El profesor u otra persona ya familiarizada con el saber algebraico puede resolver el problema de forma efectiva: puede implementar una serie de acciones que lleven a encontrar, mediante procedimientos algebraicos culturalmente reconocidos, la cantidad de dinero ahorrado en las semanas 10, 25, etc. Sin embargo, hasta esa mañana, este saber quedaba fuera del reconocimiento de nuestros estudiantes de cuarto grado. De hecho, como se ha comentado en el capítulo 1, los estudiantes recurrieron a procedimientos y conceptos aritméticos (véase la figura 2). La profesora organizó la actividad en el aula de manera que, por medio del trabajo colectivo, el saber algebraico pudiera adquirir progresivamente determinaciones y ser transformado en una forma sensible singular. Esta organización incluye la elección de las preguntas y el orden en que aparecen en la hoja de trabajo. También incluye las formas de cooperación humana (por ejemplo, la organización interactiva del espacio del aula, el trabajo en pequeños grupos, las discusiones, etc.). El saber algebraico que, en su generalidad, aún se escapa a la consciencia y al pensamiento de nuestros estudiantes es puesto en marcha por la actividad del aula. Mediante la labor conjunta de la profesora y los estudiantes, el saber algebraico empieza a moverse y a mostrarse; el saber empieza a tomar forma y a materializarse. Y lo que se materializa es el conocimiento. El conocimiento es esa obra común que se menciona en el capítulo 2: un trabajo colectivo sensible de pensamientos y acciones llevados a cabo con el cuerpo, los artefactos y el habla que

están tan entrelazados que no hay distinción posible entre ellos. El saber algebraico es el que aparece —o comienza a aparecer— y se insinúa en la famosa línea 29 y en las líneas que le siguen. El saber algebraico aparece por medio del lenguaje, la percepción, la postura corporal de los estudiantes y de la profesora, las fichas de bingo, los colores, etc.:

- 29 Profesora: (*Intenta hacer notar a los estudiantes la estructura covariacional*). ¿Qué observan de la semana 5 (*muestra el vaso correspondiente a la semana 5*) y (*señala las fichas de bingo rojas; véase la imagen 4 de la figura 3 del capítulo 1*) el número de fichas de bingo? (*realiza las mismas acciones*) ¿La cuarta semana y el número de fichas de bingo?
- 30 Albert: Siempre es dos veces...
- 31 Profesora: (*Repite*) Siempre es dos veces.
- 32 Krysta: Es el doble de lo que... ¡No! (*observa intensamente los artefactos durante un rato*) ¡Estoy confundida!
- 33 Albert: ¡Sí! Es el doble, ¡mira! (*cuenta las fichas rojas*) $1 + 1, 2; 2 + 2, 4; 3 + 3, 6; 4 + 4.$
- 34 Krysta: (*Interrumpe*) 8.

El conocimiento es todo aquello que comienza a materializarse en esas líneas. Es la materialización de una capacidad generativa para comprender, pensar, reflexionar y actuar sobre el problema en términos covariacionales; es la capacidad generativa en acción, transformada y materializada en algo sensible gracias a la mediación de la labor conjunta.

Evidentemente, el saber algebraico no se revela totalmente. Lo que se revela es una forma singular, una forma desarrollada: lo que ocurrió en el aula esa mañana. Pero lo que ocurrió y se mostró esa mañana permitirá a la profesora y a los alumnos continuar su aventura en su investigación del saber matemático. Más adelante, la discusión puede centrarse en otros problemas o en los mismos problemas para tratar de lograr una comprensión más profunda. Esto es lo que ocurrió en esa clase, como veremos en el próximo capítulo. Lo que ocurrió es algo de carácter más general que tiene que ver con la dialéctica entre el saber y el conocimiento. Por lo tanto,

no debería ser una sorpresa encontrar esta dialéctica en la transformación histórica del saber y del conocimiento. En la siguiente sección, presento un ejemplo para ilustrar esta idea.

4. La dialéctica entre saber y conocimiento

Algunas tablillas de arcilla babilónicas presentan problemas de conteo. Un signo impreso en una tablilla de arcilla es el signo de una unidad (Damerow, 1996; Høyrup, 2002; Jasim y Oates, 1986; Schmandt-Besserat, 1992). Las primeras configuraciones numéricas más sencillas se crearon mediante la iteración de un signo para la unidad. Estos “numerales” tenían el propósito de facilitar el cálculo sistemático de sumas y restas. Incrustada en actividades prácticas orientadas a la solución de problemas administrativos y otros problemas sociales, la representación constructiva-aditiva de los números fue sistematizada y convertida en una forma cultural de contar; es decir, en un saber, en un saber aritmético elemental que, en el aspecto cognitivo, fue de la mano con la emergencia de una estructura aritmética aditiva cognitiva elemental. Aunque las cadenas de signos iterados eran útiles para hacer frente a algunas demandas sociales, contar grandes cantidades de objetos no era práctico. Las formas culturales de contar aparecieron en el mundo concreto y tuvieron que ampliarse para contar grandes colecciones de objetos. Así que, más adelante, encontramos la introducción de nuevos signos para sustituir las cadenas de iteraciones de unidades-signos y las consiguientes reglas de sustitución de símbolos, lo que finalmente condujo a un sistema numérico posicional. La expansión del saber se logró mediante la actividad humana. En efecto, en la actividad humana fue donde aparecieron nuevas formas de contar (contar por grupos, encontrar signos para los nuevos grupos, etc.) y donde se produjo un nuevo proceso de sistematización social que dio lugar a nuevos saberes. Sin la posibilidad de actualizarse —es decir, de transformarse en conocimiento— el saber seguiría siendo general y sin posibilidades de modificarse y ampliarse.

Las figuras 9a y 9b tratan de capturar la relación entre el saber (K , del inglés *Knowledge*), la actividad (A) y el conocimiento (k , del inglés *knowing*). Desde un punto de vista filogenético, en un momento del desarrollo de una cultura, el saber K (véase la figura 9a) se pone en movimiento por la actividad humana (simbolizada por las flechas) y se actualiza o materializa en una forma desarrollada (como conocimiento, k). Mediante la actividad,

que es siempre movimiento que se ve afectado por K y el k emergente, los individuos pueden ahora refinar, ajustar, ampliar y transformar el saber K , lo que da como resultado un nuevo saber K' . El nuevo saber K' , convertido en nueva potencialidad, puede, gracias a la mediación de otras actividades (las flechas de la figura 9b) revelarse o actualizarse en otro conocimiento k' (véase la figura 9b).

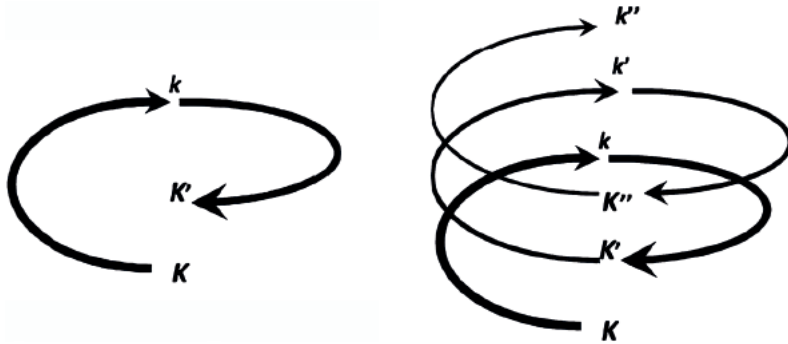


Figura 9. La dialéctica entre saber y conocimiento y sus respectivas expansiones

El conocimiento es el contenido concreto y conceptual del saber: es la forma en que la potencialidad se transforma en actualidad (Maybee, 2009). Del mismo modo que el sonido preciso del violín es el contenido áureo de su potencial, el conocimiento matemático es el contenido teórico del saber matemático. El modo en el que el saber adquiere su contenido depende de la actividad que lo pone en movimiento¹⁵.

Cuando los estudiantes de cuarto grado que mencionamos en el capítulo 1 llegaron al sexto grado, resolvieron la ecuación que aparece en

15 A la luz de la figura 9, vale la pena volver a mencionar (véase el capítulo 2) las diferencias teóricas entre, por un lado, el concepto de actividad en el corazón de la teoría de la objetivación y, por otro, el concepto de actividad adoptado por algunas teorías contemporáneas de la acción. En la teoría de la objetivación, la actividad (*Tätigkeit*) es lo que pone en movimiento el saber histórico-cultural, lo transforma en conocimiento y explica su desarrollo posterior en un nuevo saber. La actividad (*Tätigkeit*) está conformada por (a) las formas históricas y culturales de producción material, intelectual y espiritual de la vida colectiva y (b) las formas de colaboración humana. La actividad no es, como en muchas otras teorías, una mera secuencia de acciones o una toma de turnos discursivos que se produce durante la conversación o la interacción social.

la primera línea del costado derecho de la figura 10 (es decir, la ecuación $5n + 3 = 3n + 19$). Para resolver esta ecuación, los estudiantes materializaron una forma cultural de acción y reflexión (saber). La materialización del saber ocurre por medio de una actividad particular en el aula que incluía el uso de símbolos y artefactos, el lenguaje, los gestos, la postura corporal, etc., y que consiste en reflexiones y acciones sobre la ecuación dada. De esta actividad aparece el conocimiento: una forma intelectual-material de hacer/reflexionar sobre lo que se necesita para resolver la ecuación mencionada y que es al mismo tiempo sensual y sensible, material e ideal.



Figura 10. Estudiantes de sexto grado que materializan un pensamiento

El conocimiento como materialización del saber es siempre una forma singular (es decir, única) desarrollada. La actualización no puede capturar el saber en su totalidad. En el ejemplo de la figura 10, en la materialización del saber, aparecen sustracciones de incógnitas y números positivos. En cambio, no hay reflexiones sobre fracciones o coeficientes negativos. En ese sentido, el conocimiento es siempre un déficit. Pero, al mismo tiempo, el conocimiento es exceso: dada su naturaleza material sensible, el conocimiento supera la potencialidad y abre la brecha para plantear nuevos problemas y para crear nuevas líneas de reflexión e investigación. Por lo tanto, al encarnar el saber, el conocimiento confirma y afirma el saber; y, al mismo tiempo, como exceso, lo niega. El principio dialéctico del saber y del conocimiento no es un principio de identidad: es un principio de diferencia.

En la sección que sigue, continúo tratando el principio dialéctico entre el saber y el conocimiento y presente, con cierto detalle, una idea

que se deriva de ahí: la idea de las matemáticas como algo que es al mismo tiempo ideal, sensible y material.

5. Las matemáticas como entidad a la vez ideal, sensible y material

Los conceptos dialécticos de saber y conocimiento introducidos en las secciones anteriores conducen a una concepción específica de las matemáticas y su naturaleza. Tuve la oportunidad de esbozar esta concepción hace algunos años, durante una semana en un Coloquio sobre Cognición Simbólica que Stephen Hegedus y el Centro Kaput organizaron en un apartado y remoto hotel en Vermont, en los Estados Unidos.

Como muchos otros participantes en el Coloquio, aterricé en el aeropuerto de Boston. Un taxi me estaba esperando. Al subir al taxi, el conductor me informó de que teníamos que esperar a otro participante que llegaría en cualquier momento. “¿Y quién es?” pregunté. El conductor consultó su hoja de registro y respondió: “El Sr. Colette Laborde”. Le corregí y le dije: “Sra. Colette Laborde”. Volvió a consultar su hoja de registro y dijo con rotundidad: “*El señor Colette Laborde*”, y añadió: “Y viaja con esquís”.

Mientras rodeábamos las distintas puertas del aeropuerto de Boston en busca de un hombre con esquís, intenté convencer al conductor de que no había nadie llamado Colette Laborde que asistiera a la reunión; recurrí al modelo de argumentación de Toulmin, respaldé mis afirmaciones con garantías cuidadosamente elegidas, pero fracasé estrepitosamente. Entonces vi a Colette delante de una de las puertas. La saludé y ella me devolvió el saludo. El taxi se detuvo y ella subió. No llevaba esquís. El conductor se sorprendió, llamó a la central y se quejó. Entonces nos fuimos. Condujimos durante unos 45 minutos y llegamos por la noche a un espléndido y rústico hotel. La mayoría de los participantes ya había llegado. El grupo estaba compuesto por unos quince investigadores que trabajan en cognición simbólica y en semiótica. Entre ellos estaban Norma Presmeg, Adalira Sáenz-Ludlow, Nathalie Sinclair, Hyman Bass, David Tall, Gerald Goldin y Gari Davis.

Como parte del programa, en la tarde de uno de los primeros días del coloquio, tuvimos un invitado especial: el neuroantropólogo Terrence Deacon, autor de *The Symbolic Species (La especie simbólica)* (Deacon, 1997).

Deacon se bajó de un carro, se dirigió directamente a la sala principal, sacó unas notas, tomó dos largas bocanadas de aire y dio una extraordinaria charla sobre el aprendizaje del lenguaje en los chimpancés.

Al día siguiente, estaba desayunando con algunos matemáticos y profesores de matemáticas en una mesa junto a la ventana. Podíamos ver el hermoso paisaje, totalmente blanco. Llevaba días nevando sin interrupción. Era enero y hacía frío. No recuerdo qué nos llevó a discutir la naturaleza de las matemáticas. Tal vez fue una buena noche de descanso o la interesante discusión sobre los símbolos del día anterior tras la charla de Deacon, o ambas cosas. Me aventuré a mencionar que las matemáticas no podían equipararse a los símbolos. Las matemáticas, argumenté, no se componen de los símbolos de las páginas de un libro. Los símbolos en las páginas de un libro son exactamente eso: símbolos, o marcas, para decirlo más claramente.

Para apoyar mi afirmación, recurrí a la música. Del mismo modo que no hay música en una partitura, no hay matemáticas en las páginas de un libro de texto. La música es lo que escuchamos cuando se tocan los instrumentos. La música es una entidad sensorial áurea.

Las matemáticas son también una entidad sensual o sensible: aparecen de forma muy parecida a la música cuando una orquesta toca, por ejemplo, una sinfonía. Al igual que la música, las matemáticas son algo que aparece cuando los estudiantes y los profesores participan en la actividad del aula. Lo que aparece en el aula de matemáticas no es exactamente un fenómeno auditivo, ni visual, ni táctil, ni olfativo. Sin embargo, algo aparece (y quizás es algo que es todo eso: visual, táctil, olfativo, auditivo, material, artefactual, gestual y kinestésico) y, siendo todo eso, se convierte en objeto de consciencia y pensamiento. La matemática escolar, en esta línea de pensamiento materialista y fenomenológica, es lo que se hace sensible a través de la actividad de profesores y estudiantes.

Para seguir con la metáfora de Vermont, hay que hacer algunas distinciones. No estoy diciendo que las matemáticas y la actividad que las produce sean lo mismo, del mismo modo que no se puede confundir la música que se escucha con la actividad de la orquesta. Sin embargo, ambas están profundamente entrelazadas: la actividad y lo que la actividad produce. No podemos separar la una de la otra: no podemos separar las matemáticas de la actividad del aula, como no podemos separar la actividad de la orquesta de lo que escuchamos. A medida que la actividad se despliega, las matemáticas aparecen, del mismo modo que, por ejemplo,

una sinfonía aparece a medida que la actividad de la orquesta se despliega. Despliegue y aparición deben entenderse aquí en una relación dialéctica. Se trata exactamente de la relación dialéctica que mencioné en la sección 2. El despliegue afecta, mueve y transforma el aparecer, y el aparecer afecta, mueve y transforma el despliegue.

Pero las cosas no ocurren o aparecen de la nada. El sonido que produce un violín, por ejemplo, tiene, como ya se ha dicho, su origen en el instrumento. El sonido puede producirse o no. Y, si se produce, puede producirse de innumerables maneras. Es a la vez contingente e históricamente delimitado. Al ser producido, el sonido materializa o actualiza lo que era potencialidad o pura posibilidad. Si volvemos a la terminología de Hegel y a las conceptualizaciones relacionadas, podemos considerar tanto las matemáticas como la música como formas sensuales evolucionadas de algo que, antes de materializarse y llegar a la existencia sensible, era general. Lo general no tiene forma. Pertenece al ámbito de la potencialidad. Pero (¡otra vez!) no es una forma platónica. El ámbito de la potencialidad pertenece a una esfera inmaterial de la cultura, siempre cambiante, que se entrelaza con el mundo material de los objetos y las acciones humanas. Esta esfera inmaterial de la cultura forma parte de lo que Marx (1988, p. 75) denominó el ámbito “inorgánico” de la naturaleza y también forma parte de las condiciones en las que se elabora la existencia humana. Esta esfera no puede ser percibida por nosotros, los humanos, mediante nuestros sentidos y sensaciones histórica y culturalmente evolucionados. ¿Podemos sentir, percibir o tocar el teorema de Pitágoras como tal? No podemos. ¿Podemos oír la séptima sinfonía de Beethoven como tal? No podemos. Para ser captado por la consciencia y el pensamiento, para ser sentido, lo general (la matemática como general; la música como general) tiene que ser puesto en movimiento para transformarlo en algo sensible y aparecer. Su aparición es lo que en la terminología de Hegel se denomina singular (y que, en el caso de las matemáticas, hemos llamado conocimiento). Lo singular es la aparición de lo general gracias a la mediación de la actividad humana.

Para aclarar la idea anterior, permítanme recurrir a la música de Beethoven, que Adorno (1998, p. 224) consideraba “música burguesa en su máxima expresión”. Permítanme volver a la *Séptima sinfonía* de Beethoven. Como sabemos, la *Séptima sinfonía* de Beethoven tiene cuatro movimientos: *Poco sostenuto-Vivace*, *Allegretto*, *Scherzo* y *Allegro*. La tabla 2 presenta la duración de la sinfonía dirigida por dos directores de orquesta

considerados entre los mejores especialistas en Beethoven del siglo xx: Herbert von Karajan y Leonard Bernstein.

La grabación de Bernstein es alrededor de 12% más larga que la de Karajan. Y creo que el lector estará de acuerdo conmigo en que 12% es mucho. No es una diferencia insignificante. ¿Cuál es la verdadera *Séptima sinfonía*? Ninguna de las dos. La *Séptima sinfonía* como tal es una general. Las grabaciones de Bernstein y de Karajan son materializaciones de ese general; es decir, son singulares, o, en otras palabras, son apariciones del general: lo que hemos llamado conocimiento.

Tabla 2

Tiempo total de dos grabaciones famosas de la Séptima sinfonía de Beethoven

	Herbert von Karajan (Orquesta Filarmónica de Berlín, grabación de 1963)	Leonard Bernstein (Orquesta Filarmónica de Nueva York, grabación de 1958)
Poco sostenuto – Vivace	11:25	12:27
Allegretto	8:02	9:44
Scherzo	7:50	8:23
Allegro	6:37	7:27
Tiempo total	33:54	38:01

Como todas las entidades generales, la *Séptima sinfonía* se inscribe en una determinada tradición cultural. Pertenece a una tradición musical de prólogos sinfónicos pausados, un paradigma romántico, una creciente atención al ritmo y el uso inteligente de los artefactos musicales disponibles (por ejemplo, los metrónomos para medir el tempo), entre otros (Marx y Burnham, 1997; Will, 2004). Más que existir en sí mismas y por sí mismas, las entidades generales se encuentran en la cultura y la historia.

Me gustaría resumir estas ideas diciendo que lo singular (el conocimiento) es la aparición del general (es decir, el saber: el saber matemático, el saber musical, etc.)¹⁶. En otras palabras, lo singular es la llegada a la existencia de lo general como una forma ontológica desarrollada y

16 En una carta de 1943 a Rudolph Kolisch sobre la música de Beethoven, mientras estaba exiliado en Los Ángeles, Adorno escribe: “Y al igual que usted, creo en la estricta conocibilidad de la música, porque la música es en sí misma saber, y a su manera un saber muy estricto” (Adorno, 1998, p. 180).

transformada por la fuerza de una actividad (en el sentido de *Tätigkeit/deyatel'nost'*, como se define en el capítulo 2). Que esta actividad no es simplemente una *Aktivität* o *aktivnost'* se demuestra por el hecho de que la *Aktivität* o *aktivnost'* produciría otra cosa, algo así como una *Séptima sinfonía* interpretada únicamente por artefactos programados y dispositivos mecánicos. Tal aparición carecería, de hecho, exactamente de aquello que hace de la *Tätigkeit/deyatel'nost'* lo que es, a saber, la vida humana, natural.

Volvamos ahora a las matemáticas y a la actividad en el aula de matemáticas. Lo que la actividad humana produce son las matemáticas como fenómeno sensible, una forma singular desarrollada de algo general que antes de ser puesto en movimiento por la actividad en el aula era potencialidad, pura posibilidad. La actividad que ocurre en el aula puede ser “buena” o “mala”. La actividad mala es precisamente aquella que se parece bastante a la mecánica de mi ejemplo, en la que las personas no se conectan realmente, en la que no trabajan juntas. Se limitan a hacer cosas, como en *Aktivität* o *aktivnost'*. Es una actividad sin vida (D'Amore, 2015). Como quedará claro en los próximos capítulos, en la teoría de la objetivación, estamos interesados en fomentar actividades en las que los estudiantes y los profesores se comprometen, debaten, están de acuerdo y en desacuerdo, en las que objetan y encuentran un lugar para la subversión, y en las que los estudiantes podrían mostrar solidaridad, responsabilidad y cuidado mutuo.

6. Síntesis

En este capítulo, he abordado los conceptos de saber y conocimiento en la teoría de la objetivación. Sugerí que el saber es una entidad general, un sistema de formas o arquetipos de pensamiento, acción y reflexión histórica y culturalmente constituidos a partir de la labor colectiva, material, corporal y sensible. Para distinguir entre saber y conocimiento, me basé en la distinción hecha por Aristóteles y Hegel entre potencialidad y actualidad, en la que la segunda se considera una manifestación sensible desarrollada de la primera. El punto de partida de mi teorización fue el hecho bastante banal de que, cuando nacemos, el saber (entendido como sistema siempre cambiante, siempre en transformación) existe en nuestra cultura (por ejemplo, cómo contar, cómo pensar y distinguir formas en el espacio, etc.). Nos encontramos con el saber y participamos en su transformación mediante actividades histórico-culturales.

Ahora bien, las discusiones en seminarios y otros contextos me han mostrado que, a veces, la idea de saber que articulo aquí puede interpretarse como si el saber fuera un objeto platónico. Esta interpretación explica el esfuerzo que he hecho en este capítulo para disipar malentendidos. El saber en la teoría de la objetivación no es una entidad platónica.

Pero hay otra fuente de malentendidos: pensar que el saber en esta teoría es algo que los individuos internalizan. En mi trabajo anterior ya he mencionado algunas de las deficiencias de la idea del saber como internalización (véase, por ejemplo, Radford, 2018b; vuelvo a este punto en el capítulo 4). Sin embargo, Roth (2020) dice erróneamente

Las formas matemáticas tienden a ser teorizadas como signos (cosas) que se refieren a algo más (por ejemplo, el “significado”). La apoteosis de este enfoque existe en la Teoría de la Objetivación del Saber (Radford, 2013), según la cual el saber internalizado se manifiesta en formas matemáticas externas que pueden ser compartidas dentro de grupos de individuos. Estas formas matemáticas se refieren así a algo que existe en el interior de la persona y que de otro modo es inaccesible; las formas son signos que apuntan a algo más. (Roth, 2020, p. 91)

El error de Roth consiste en entender nuestra idea de saber como un problema de referencia semiótica. Él interpreta erróneamente la relación entre saber y conocimiento como si uno se refiriera al otro (como en x y $f(x)$). En la teoría de la objetivación, la relación entre el saber y el conocimiento es dialéctica en un sentido materialista. En primer lugar, el saber matemático es un sistema de formas, no de signos. El saber es un sistema de formas de acción y pensamiento (por ejemplo, sumar números en el sistema de base 10 como hacemos nosotros o en base 60 como hacían los escribas babilónicos); su génesis se encuentra en la actividad práctica, sensual, concreta, cultural e histórica. En segundo lugar, es esa actividad práctica la que da vida al conocimiento. Pero lo que aparece (es decir, el conocimiento) no es una $f(x)$ de una x . No existe tal cosa como f . Esta es una interpretación terriblemente estática de la relación dialéctica dinámica entre el saber y el conocimiento. Como he insistido en este capítulo, el conocimiento es un exceso respecto al saber. Lo que este exceso significa es que el conocimiento no está determinado por el saber; el conocimiento está sobredeterminado por el saber y por todo el contexto histórico-cultural. Sin esta sobredeterminación, estaríamos repitiendo cosas como marionetas. El conocimiento niega y subvierte el saber. En la actividad

concreta, siempre vamos más allá de lo dado. Así es como Descartes pudo imaginar la geometría analítica y fue más allá de la geometría euclidiana. En el capítulo 8, vuelvo a la cuestión de la sobredeterminación cuando me ocupo del concepto de cultura y cómo el saber cultural afecta a la forma en que pensamos y hacemos las cosas.

En la última sección de este capítulo, hice una excursión al ámbito de la música y del saber musical para intentar desarrollar mejor la idea del saber matemático como algo que es al mismo tiempo ideal, sensible y material. El saber matemático, como todo saber, se manifiesta continuamente en la realidad a través de la actividad práctica; lo que aparece es la forma y el contenido, lo ideal-sensible en su materialidad.

Agradecimiento

Esta es una versión revisada y ampliada de Radford, L. (2013). Tres conceptos clave de la teoría de la objetivación: Conocimiento, Saber y Aprendizaje. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44.

Capítulo 4

Aprendizaje

En el capítulo anterior, presenté los conceptos de saber y conocimiento de la teoría de la objetivación. Este capítulo se centra en el concepto de aprendizaje. Este concepto es fundamental para las teorías socioculturales. Sin embargo, como veremos, su formulación no es nada fácil. En la primera parte del capítulo, examino el concepto de aprendizaje como participación en las prácticas sociales y el concepto de internalización de Vygotsky. En la segunda parte, introduzco los conceptos de objetivación y aprendizaje.

1. El aprendizaje como participación en la práctica social

En las teorías socioculturales que acuden a la participación para explicar el aprendizaje, la idea fundamental es que los individuos adquieren conocimientos culturales como resultado de su participación en las prácticas sociales. Hay una intención explícita de ir más allá de las concepciones individualistas ofrecidas por la psicología y la filosofía dominantes en las que el individuo es la unidad de análisis y el centro de la investigación.

La idea de participación fue desarrollada por Rogoff (1990), Lave (1988) y Lave y Wenger (1991), entre otros. Rogoff, por ejemplo, concibe

el aprendizaje como *apprenticeship* en un contexto de participación guiada*. Rogoff (1990) dice: “El concepto de participación guiada trata de mantener los roles del individuo y del contexto sociocultural en foco” (p. 18). A continuación, afirma que utiliza la analogía del *apprenticeship* “para enfocarme en cómo el desarrollo de habilidades implica aprendices activos que observan y participan en una actividad cultural organizada con la guía y el desafío de otras personas” (p. 19).

Al hablar del aprendizaje como *apprenticeship*, Rogoff muestra cómo los niños y los padres participan en procesos sutiles de atención compartida y cómo, con la ayuda de los adultos, los niños van ganando comprensiones sobre referencias sociales (por ejemplo, la interpretación que hace el niño de las expresiones faciales de los adultos), las formas de resolver problemas y las maneras de responder a las demandas sociales. Ella señala que “por medio de la participación guiada con los demás, los niños llegan a comprender y participar en las actividades de su cultura” (p. 191).

Al seguir los pasos de Rogoff, y basarse en la investigación etnográfica sobre el *apprenticeship* artesanal entre los sastres de Vai y Gola en Liberia, Lave y Wenger (2009) exploraron el concepto de aprendizaje por medio del constructo de la participación periférica legítima.

La “participación periférica legítima” proporciona una forma de hablar de las relaciones entre los recién llegados y los veteranos, y de las actividades, identidades, artefactos y comunidades de saber y práctica. Se refiere al proceso por el que los recién llegados pasan a formar parte de una comunidad de práctica. (p. 29)

Dentro de este enfoque participativo, “el significado del aprendizaje se configura por medio del proceso de convertirse en un participante pleno en una práctica sociocultural” (p. 29).

Sin embargo, si miramos de cerca, nos damos cuenta de que, en los enfoques participativos, el aprendizaje sigue siendo al final un proceso cuyo objetivo es adaptarse a las prácticas sociales, insertarse en ellas. A pesar de la interesante variedad de nuevos conceptos que aporta la aproximación participacionista, el aprendizaje resulta ser concebido como un tipo de adaptación, al igual que en la aproximación de Piaget. La diferencia

* Dejamos sin traducir el término *apprenticeship*; vale señalar que dicho término se refiere a la manera en que novicios aprenden un oficio viendo a expertos en acción (nota de la presente edición).

es que mientras que, para Piaget, la adaptación se lleva a cabo mediante mecanismos cognitivos universales de formación de saberes que son los mismos “en todos los diferentes períodos de la historia humana y en todos los niños, independientemente del grupo social y la etnia” (Piaget y García, 1989, pp. 266-267), en el paradigma participacionista el aprendizaje es la adaptación por medio de mecanismos sociales (participación guiada, participación periférica, etc.) a un mundo cultural de prácticas.

Además, el aprendizaje se investiga como un concepto general. Este es un punto que Lave y Wenger (1990) dejan claro en su libro *Situated Learning (Aprendizaje situado)*. Su atención se centra, como dicen, en el aprendizaje en general.

Debemos subrayar, por tanto, que la participación legítima periférica no es en sí misma una forma educativa, y mucho menos una estrategia pedagógica o una técnica de enseñanza. Es un punto de vista analítico sobre el aprendizaje, una forma de entender el aprendizaje. (p. 40)

En la teoría de la objetivación, el interés es explorar el aprendizaje no en general, sino tal y como ocurre cuando los estudiantes se dedican a aprender matemáticas. Aunque una reflexión general sobre el aprendizaje puede arrojar luz sobre el aprendizaje de las matemáticas, nuestra hipótesis es que la investigación del aprendizaje se ve afectada por las especificidades de lo que se aprende, concretamente: el saber, el saber matemático.

Como se pondrá de manifiesto en los capítulos de este libro, la intención de la teoría de la objetivación es ofrecer un enfoque sociocultural de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que no es precisamente de naturaleza participativa. En la siguiente sección retomo el concepto de internalización de Vygotsky que, a menudo, se ha asociado con cuestiones de aprendizaje en los enfoques socioculturales (véanse, por ejemplo, Daniels, 2002; Kozulin, Gindis, Agseyev y Miller, 2005; Vadeboncoeur, 2017).

2. Internalización

La idea de internalización o interiorización fue desarrollada en el campo de la psicología por Pierre Janet (1929) y Vygotsky (1929) a finales de los años veinte. Es un constructo teórico para describir la relación entre el desarrollo psicológico del individuo y su entorno. Janet (1929), por ejemplo, sostenía que todas las leyes psicológicas tienen dos aspectos: un aspecto exterior (que

trata con otras personas) y un aspecto interior (que trata con uno mismo). Casi siempre, dice, “el segundo es posterior al primero” (p. 288).

La internalización (*Вращивание*—*vrashchivanie*) es una de las ideas centrales de la teoría histórico-cultural de Vygotsky. La idea se articula en varios de los escritos de Vygotsky, entre ellos “The Problem of the Cultural Development of the Child” (“El problema del desarrollo cultural del niño”) (Vygotsky, 1929), “Tool and Sign in the Development of the Child” (“Herramienta y signo en el desarrollo del niño”) (Vygotsky y Luria, 1994) y el capítulo 5 de *Thinking and Speech (Pensamiento y lenguaje)* (Vygotsky, 1987). La internalización aparece como un constructo teórico relacionado con la concepción de Vygotsky del desarrollo de la mente, concepción que el psicólogo ruso expresa en términos de “leyes genéticas del desarrollo cultural”.

La primera ley hace énfasis en la distinción entre (a) las funciones mentales innatas y (b) las funciones mentales artificiales; es decir, las que se ven afectadas por el uso de signos y artefactos. Las funciones mentales artificiales o superiores son precisamente funciones mediadas por la cultura material. Vygotsky enuncia esta ley de la siguiente manera:

La primera ley del desarrollo y la estructura de las funciones mentales superiores, que son el núcleo básico de la personalidad que se está formando, puede llamarse la ley de la transición de las formas y métodos de comportamiento directos, innatos y naturales a las funciones mentales mediadas, artificiales que se desarrollan en el proceso de desarrollo cultural. (Vygotsky, 1998, pp. 167-168)

La segunda ley de Vygotsky afirma que las formas de comportamiento social colectivo se convierten en métodos de adaptación y de pensamiento individual. Vygotsky escribe:

La segunda ley puede formularse así: considerando la historia del desarrollo de las funciones mentales superiores que comprenden el núcleo básico en la estructura de la personalidad, encontramos que la relación entre las funciones mentales superiores fue en un tiempo una relación concreta entre personas; las formas sociales colectivas de comportamiento en el proceso de desarrollo se convierten en un método de adaptaciones individuales y formas de comportamiento y pensamiento de la personalidad. (p. 168)

Vygotsky reformula esta ley de la siguiente manera:

Cada función en el desarrollo cultural del niño aparece en el escenario dos veces, en dos formas: primero como social, luego como psicológica; primero como una forma de cooperación entre personas, como grupo, una categoría intermental, luego como un medio de comportamiento individual, como una categoría intramental. Esta es la ley general para la construcción de todas las funciones mentales superiores. (p. 169)

A continuación, Vygotsky introduce la tercera ley sobre el desarrollo cultural de las funciones mentales superiores: “La tercera ley, conectada con la segunda, puede formularse como la ley de transición de una función desde fuera hacia dentro” (p. 170).

La tercera ley se refiere, por tanto, a la transición de lo social a lo individual. Es aquí donde Vygotsky introduce el concepto de internalización: “La internalización de las formas culturales de comportamiento implica la reconstrucción de la actividad psicológica sobre la base de operaciones con signos” (p. 57).

El concepto de internalización es uno de los más conocidos de la obra de Vygotsky. Permitió a la psicología repensar el papel de la sociedad y de los signos y artefactos en la cognición humana. Sin embargo, su transposición a los problemas educativos de la enseñanza y el aprendizaje no es algo sencillo de realizar. Hay varias razones. En lo que sigue menciono cuatro.

2.1. El problema del enfoque y el contenido

En primer lugar, existe un problema de enfoque y contenido. En efecto, el enfoque y el contenido del concepto de internalización de Vygotsky no es el aprendizaje, sino las funciones psicológicas superiores (como la memoria, la atención y la percepción). El problema que la internalización trata de explicar no es cómo aprende el niño, sino cómo surgen las funciones psicológicas superiores a partir del comportamiento y las relaciones sociales, cómo se transfieren al plano interior o mental y cómo se desarrollan.

Por supuesto, el concepto de internalización insiste en la existencia de una relación entre lo que se aprende y el desarrollo intelectual de los niños. No es de extrañar, por tanto, que, en la investigación empírica de la internalización, los psicólogos de la educación hayan recurrido al aprendizaje. Así, en su artículo “La formación por etapas como método de investigación psicológica”, Piotr Iakovlevich Gal’perin (1992), uno de

los más destacados seguidores de Vygotsky y conocido por sus investigaciones sobre la internalización (Gal'perin, 1967), se ocupa de tres tipos de aprendizaje: el de ensayo y error, el formal y el basado en la internalización de un esquema que orienta las acciones y que revela al mismo tiempo la consecución de un nivel superior de desarrollo. En este tipo,

el aprendizaje [está] dirigido a la adquisición de un método general de estudio de los objetos, que, en “forma mental”, representaba un método de pensamiento del tipo que los niños no habían tenido antes, y que significaba una transición a un nivel cualitativamente superior de desarrollo intelectual. (Gal'perin, 1992, p. 77)

En esta línea de investigación psicológica educativa, el aprendizaje se considera un problema de desarrollo, no un problema educativo en sí mismo. En consecuencia, el centro de atención sigue siendo en gran medida la cuestión del desarrollo cognitivo; el niño es visto a través de lentes cognitivas (es decir, como un “sujeto cognitivo”), y (siguiendo el camino externo-interno de la internalización) el problema por explicar gira en torno a cómo las acciones sensibles y materiales se convierten en “acciones mentales”, o en “pensamiento puro” (Gal'perin, 1992, p. 63; véase también el artículo de 1989 de Gal'perin “Organización de la actividad mental y la eficacia del aprendizaje”).

2.2. Los planos externo-interno

En segundo lugar, el concepto de internalización parece problemático en el sentido en que implica una dicotomía entre dos planos: uno interno y otro externo. Esta postura problemática puede entenderse mejor si tenemos en cuenta que la teoría de Vygotsky se desarrolló como un intento de superar los planteamientos reflexológicos e idealistas de su época. Vygotsky solía afirmar que la psicología inspirada en las investigaciones reflexológicas era una psicología conductista sin mente y que la psicología inspirada en el idealismo subjetivo (por ejemplo, la introspección) era una teoría de la mente sin comportamiento. Basándose en la obra de Spinoza (1989), Vygotsky intentó superar las teorías dualistas (teorías basadas en dos sistemas, el interno y el externo) y formular una teoría monista de la consciencia. Sin embargo, a pesar de sus encomiables esfuerzos, la elaboración teórica resultante del vínculo entre lo social y lo individual no

está exenta de contradicciones. Veresov (1999) —considerado uno de los especialistas contemporáneos más importantes de Vygotsky— se pregunta:

¿Qué significa esencialmente abandonar el postulado de la existencia de dos sistemas y a qué conclusiones y efectos lógicos conduce esto? Esto conduce lógicamente a un rechazo total de la idea de la existencia de lo interno y lo externo y, en consecuencia, al rechazo radical del concepto de internalización como mecanismo del origen de las estructuras internas de la consciencia. De hecho, el concepto de internalización pierde todo sentido. (p. 226)

Esta línea de investigación, basada en la dicotomía interno-externo, llevó a los teóricos vygotskianos a intentar encontrar una salida a ella¹⁷. Aunque estos teóricos estaban de acuerdo con la idea de que “la actividad intelectual ... emerge evolutivamente de la actividad externa, práctica, del sujeto” (El’konin, 1995, p. 32), intentaron “refutar” (p. 33) la oposición dualista mostrando la unidad genética de las actividades internas y externas; es decir, que ambas tienen la misma estructura, que la primera es análoga a la actividad práctica externa. “Asumimos”, dice El’konin, “que toda actividad interna era el componente orientador de una actividad externa” (p. 33). Sin embargo, argumenta El’konin, la actividad intelectual es una actividad en sí misma. Pero entonces, esta actividad intelectual debería tener una actividad orientadora, como la tiene la actividad práctica “externa”. Nos encontramos aquí con una regresión infinita: la nueva actividad orientadora de la actividad intelectual será una actividad en sí misma, etc. ¿Qué encontramos al final del proceso? El’konin temía que la psicología se redujera entonces a la lógica. Al final, parece que esta línea de investigación, basada en la premisa de dos planos —el interno y el externo—, lleva a pensar que la solución al problema de la relación entre la actividad intelectual y la externa era de algún modo insatisfactoria. Como dijo uno de los estudiantes de Vygotsky,

Bajo la dirección de Vygotsky, empezamos a examinar estas cuestiones, pero luego nos alejamos de ellas porque surgieron otros problemas y quedaron relegadas a un segundo plano. Esencialmente, durante mucho tiempo nos vimos obligados a contentarnos con el hecho de que

17 Véanse también Arieviditch (2003), Matusov (1998) y Daniels (2002, pp. 39-44).

se establecieran algunas correlaciones externas entre la actividad y los procesos mentales. (Zaporozhets, 2002a, p. 49)

2.3. El individuo como réplica de su cultura

En tercer lugar, el concepto de internalización también parece ser problemático en la medida en que el individuo parece concebirse como una réplica de su cultura. De hecho, esto es lo que se desprende de las leyes genéticas del desarrollo cultural. Como señala González Rey (2009), la noción de internalización de Vygotsky estaba asociada a una visión instrumental-operativa de los individuos y su mundo (p. 62).

Naturalmente, Vygotsky no tenía en mente una especie de transición mecánica de lo social a lo individual. Así, en “Tool and Sign in the Development of the Child” (“Herramienta y signo en el desarrollo del niño”), Vygotsky sostiene que

La transferencia de los métodos sociales de comportamiento al interior del sistema de formas individuales de adaptación no es en absoluto una transferencia puramente mecánica; no se realiza de forma automática, sino que está relacionada con un cambio en la estructura y la función de toda la operación y constituye una etapa especial en el desarrollo de las formas superiores de comportamiento. Las formas complejas de cooperación transferidas a la esfera del comportamiento individual comienzan a funcionar según las leyes del todo primitivo, del que ahora forman parte orgánica. (Vygotsky, 1999, p. 53)

A pesar de la afirmación de Vygotsky sobre la naturaleza no mecánica de la transferencia externa-interna, el resultado es que “la subjetividad y el sujeto [se convirtieron] en meros epifenómenos de las prácticas discursivas, semióticas y lingüísticas” (González Rey, 2011a, p. 36). Al final de su vida, para comprender mejor el punto de anclaje entre el individuo y el contexto social, Vygotsky ideó el concepto de *perezhivanie*, “un concepto que permite estudiar el papel y la influencia del entorno en el desarrollo psicológico del niño en el análisis de las leyes del desarrollo” (Vygotsky, 1994, p. 343). Véase también Veresov (2017). Sin embargo, en la formulación de las leyes del desarrollo genético, no queda mucho espacio para la

* *Agency* viene del latín *agens*, “haciendo”, y del latín *agentia*, “efectividad”; significa la capacidad del individuo de iniciar una acción (nota de la presente edición).

*agencia** humana y la subjetividad, lo que hace que su teorización sea “uno de los principales desafíos actuales en la teoría de la actividad histórico-cultural” (Stetsenko, 2020, p. 5).

2.4. Internalización de las relaciones entre las personas

En cuarto lugar, además de lo anterior, las funciones psicológicas superiores se reducen a la internalización de relaciones: “relaciones concretas entre las personas”, como dice Vygotsky. Infortunadamente, el concepto de *relaciones entre personas* de Vygotsky sigue sin especificarse. Y creo que, aunque intentemos especificarlo, no podremos avanzar mucho. Por ejemplo, ¿cómo distinguir entre las “relaciones concretas entre personas” (Ley 2) que estarían en el origen del pensamiento matemático y las “relaciones” que estarían en el origen del pensamiento jurídico? E incluso dentro de las matemáticas mismas, ¿cómo podemos distinguir entre las relaciones entre personas que llevarían al pensamiento geométrico y las que llevarían al pensamiento probabilístico? Parece que falta algo.

Ciertamente, en la sexta tesis de *las Tesis sobre Feuerbach*, Marx dice: “la esencia del hombre no es una abstracción inherente a cada individuo individual. En su realidad es el conjunto de las relaciones sociales” (Marx, 1998, p. 570). Así es como Marx superó las ideas sustancialistas sobre el individuo de la corriente romántica posilustrada de su tiempo (para más detalles, véase el excelente libro *Marx* de Michel Henry, 1976). Roth (2018) sostiene que el adjetivo *social* que califica a la palabra *relación* en la sexta tesis sobre Feuerbach debería traducirse en realidad como *societal*. La diferencia no es puramente terminológica, sino conceptual. La diferencia es importante en la medida en que implica en sí misma una idea clave de la relación entre el individuo y el mundo sociocultural tal como lo concibe el materialismo dialéctico. Dice Roth:

Se considera que “lo societal” es un índice de algo específico de la sociedad como un todo, mientras que “lo social” es un índice de cualquier situación en la que hay dos o más personas implicadas en alguna relación. Así, mientras que “lo societal” implica “lo social”, lo segundo no implica lo primero. (Roth, 2018, p. 3)

Las relaciones sociales (o, mejor dicho, las relaciones societales) que aparecen, por tanto, en la sexta tesis de *las Tesis sobre Feuerbach*, significan que no son relaciones meramente contingentes, sino culturalmente

históricas de punta a punta. Van más allá de las relaciones que aparecen en cada interacción en la que participa el individuo. Ahora bien, es evidente que las relaciones humanas, en el sentido de relaciones sociales, tienen que ver de manera crucial con el modo en que cada uno de nosotros llega a conceptualizar el mundo. Pero este énfasis en la dimensión relacional no me parece suficiente para hacer de dichas relaciones el único sustrato de las funciones psicológicas superiores y menos aún el único sustrato de la conceptualización (matemática, jurídica u otra).

Los últimos escritos de Vygotsky muestran sus esfuerzos por superar estas dificultades, en particular su búsqueda de una definición amplia del concepto de significado (véase el capítulo 2; véase también Presmeg, Radford, Roth y Kadunz, 2016). No me ocuparé aquí del esfuerzo de Vygotsky y lo que el concepto de significado aporta a la resolución del problema que él intentaba superar, pues mi intención es solo mostrar que la teoría de Vygotsky, basada en la idea de internalización, formulada en un período en el que los estudiosos contemporáneos de Vygotsky identifican como el “período instrumental” de Vygotsky o (como se mencionó en el capítulo 2) “giro instrumentalista” (véase González Rey, 2011b), no está libre de dificultades teóricas que tienen implicaciones para nuestras concepciones educativas del aprendizaje.

En la siguiente sección, exploro un camino diferente al sugerido por el concepto de internalización. Mi aproximación no es psicológica. Por lo tanto, no intento resolver las dificultades mencionadas. Dejo que los psicólogos vygotskianos se ocupen de ellas. Mi problema es educativo y más concretamente relacionado con el aprendizaje. Quiero explorar el aprendizaje al seguir otro camino sugerido por el mismo Vygotsky: el aprendizaje como un problema de consciencia (entendido en un sentido dialéctico-materialista, como el hecho de tomar consciencia de algo y de verse transformado uno mismo en el curso de esa toma de consciencia).

3. Procesos de objetivación

Si concebimos el saber como una capacidad generativa o una potencialidad cultural, como sugerí en el capítulo 3, el saber no puede ser algo que se “posee” o que podamos “poseer”. El saber es más bien algo que existe en nuestra cultura y que encontramos en el curso de nuestra vida. Nuestro encuentro con los sistemas de pensamiento histórico-cultural (matemático,

científico, estético, jurídico, etc.) es lo que denomino *objetivación*. Dado que dicho encuentro no se produce de repente, la objetivación es más bien un proceso. Las siguientes secciones tiene la intención de proporcionar una descripción de la objetivación como un concepto procesal. La descripción se articula en torno a ideas específicas sobre:

1. el individuo involucrado o comprometido con el aprendizaje,
2. lo que hay que aprender (es decir, el saber); y
3. el significado de objetivación.

3.1. El individuo que aprende

Como ya se ha mencionado, la idea del individuo implicado o comprometido en el aprendizaje (el sujeto que aprende) adoptada en la teoría de la objetivación es diferente de la que aparece en la pedagogía centrada en el estudiante, que la toma prestada de las filosofías idealistas y racionalistas. En dichas filosofías, el sujeto aparece como una entidad dada: se considera que el sujeto es la fuente del pensamiento, el saber y el significado. En su crítica a Kant y a la postura idealista/racionalista, Hegel llama a esta concepción la “identidad originaria del yo” (Hegel, 1991, p. 83). La sección 47 de la *Enciclopedia* de Hegel comienza precisamente con un resumen de esta postura idealista/racionalista, que asume lo siguiente:

En mi consciencia siempre me encuentro a mí mismo (α) como el *sujeto determinante* [es decir, el sujeto que determina al mundo], (β) como un *singular* o como algo abstractamente simple, (γ) como lo que es *Uno* y lo *mismo* en todo lo múltiple de lo que soy consciente —como *algo*— *idéntico*, (δ) como algo *que me distingue* como pensamiento de *todo lo que está fuera de mí*. (Hegel, 1991, p. 90, énfasis en el original)

La idea de que el sujeto es el sujeto *determinante* significa que es una parte invariable de la experiencia. Es el “*Uno y el mismo* en todo lo múltiple” mencionado por Hegel. Este punto es particularmente relevante e importante en las discusiones educativas, ya que conduce a la siguiente pregunta: ¿cuál es, de hecho, el papel del entorno social y del contexto histórico, político, económico y cultural en la formación del sujeto?

La filosofía racionalista de la Ilustración trató de resolver este problema concibiendo al individuo como un ser racional —*homo rationalis*—. La razón se considera universal, la misma en todas partes. Las diferencias antropológicas que notamos de una cultura a otra no serían, según esta

aproximación, más que diferentes expresiones de una misma racionalidad (Radford, 2020a). Precisamente la adopción de estas ideas le permite a Piaget (Piaget y García, 1989) afirmar que los mecanismos de construcción del saber son invariables a lo largo de las culturas y del tiempo. Con este supuesto, Piaget (1970) puede pensar en el desarrollo del sujeto en términos lógicos y universales que se producen de forma ordenada en etapas sucesivas. Transpuesta de la filosofía a la pedagogía, esta concepción del sujeto conduce a una concepción racionalista del estudiante. El psicólogo canadiense Jack Martin ha descrito brillantemente el resultado de esta transposición: el estudiante aparece como un sujeto individualista que aprende de forma autorregulada, ajeno al entorno social y a la cultura. En palabras de Martin (2004), el estudiante es

un individuo que trabaja en una soledad relativa. ... Cuando se consideran los factores sociales, se enmarcan principalmente como variables que median o influyen en lo que es predominantemente un patrón de desarrollo altamente individualista. Ciertamente hay poco aquí que pueda hablar de la posible constitución sociocultural, política y moral de la persona. La preocupación central es la de un actor individual capaz de actuar y reflexionar simultáneamente sobre esta acción, de forma muy parecida a la del estereotipo del científico que examina y juzga de cerca los fenómenos experimentales de interés. (pp. 193-194)

Este individuo, señala Martin, actúa como un pensador cartesiano, un individuo

aislado de su entorno, incluso cuando se ve moldeado y afectado por las circunstancias y los acontecimientos, que, aunque siempre influyen, no se consideran en modo alguno constitutivos del yo central ... [Un yo] que examina el paisaje exterior en busca de signos de afirmación personal y posibilidades de expresión, por un lado, y de pistas para la acción estratégica, por otro. Además, sus recursos más vitales están aparentemente disponibles dentro de su supuesta interioridad independiente. Actúa como árbitro final sobre si sus estrategias son o no efectivas. ... Se trata de un yo que ... solo requiere un entorno facilitador para socializarse más plenamente y comprometerse intelectualmente. (Martin, 2004, p. 197)

Según la perspectiva dialéctico-materialista que adopto aquí, el sujeto no se considera como una entidad dada. La objetivación es un

encuentro; pero no es un simple encuentro de un sujeto ya hecho con el saber histórico-cultural. El encuentro es, sobre todo, la constitución y transformación del sujeto que aprende como resultado de este encuentro.

3.2. El saber histórico-cultural y el sujeto que aprende

Además de articularse en torno a una concepción específica del sujeto que aprende, el concepto de objetivación que aquí articulo se apoya también en una concepción del saber diferente de las posiciones filosóficas antes mencionadas. He mencionado en el capítulo 2 que el idealismo puede definirse como la identidad entre el sujeto (*S*) y el saber (*K*): $K = S$. En otras palabras, el saber es lo que el sujeto produce: su prolongación. No hay mediación entre el sujeto y el saber. El sujeto construye su propio mundo y las ideas que contiene. Encerrado en su propio mundo, el sujeto solo puede pensar y concebir lo que él mismo ha producido. El sujeto es un sintetizador de representaciones que hace que el “yo” sea invariable a lo largo de las experiencias epistémicas. Dado que la síntesis de representaciones es y solo puede ser puramente subjetiva, el saber resultante de esta síntesis no es algo que pueda referirse a un mundo cultural real (un mundo “objetivo” con respecto a una cultura determinada).

Comentando la posición epistemológica de Kant, en la sección 46 de la *Enciclopedia*, Hegel dice que el saber obtenido por medio de la unidad de la autoconsciencia no tiene nada de objetivo; la objetividad que se le atribuye es solo subjetiva (Hegel, 1991, p. 89) —algo supuestamente compartido o “tomado-como-compartido”, como dicen los constructivistas contemporáneos (véase, por ejemplo, Cobb, Stephen, McClain y Gravenmeijer, 2001)—. En la teoría de la objetivación, la situación es diferente: el saber (por ejemplo, las diferentes formas de pensar y hacer las cosas en una determinada cultura) existe en el momento de nuestro nacimiento, independientemente de cada uno de nosotros. El saber ha sido producido colectivamente por generaciones anteriores de individuos. Desde el punto de vista del sujeto que aprende, el saber no se genera desde “adentro”. Como señala Mijailov (1980), al principio, los saberes, las destrezas y las habilidades “existen sin mí” (p. 200). Están ahí, en nuestra cultura. Nos encontramos con ellas en el transcurso de nuestra vida.

Como hemos visto antes, en la figura 6 del capítulo 3, un chimpancé adulto llamada Yo quiebra nueces de coula. Con su mano derecha, Yo coloca la nuez sobre el yunque y, de forma coordinada, sostiene la piedra

martillo con su mano izquierda, mientras los jóvenes chimpancés situados a su izquierda y derecha lo observan atentamente. Los jóvenes chimpancés aún no dominan las habilidades motrices y conceptuales relativamente sofisticadas que se requieren para lograr quebrar la nuez. Estas habilidades ya existen en su cultura. Existen como una capacidad generativa de acciones. Sin embargo, para los jóvenes chimpancés, esta capacidad generativa existe todavía solo como potencialidad, y llegará a ser parte del repertorio de acción y reflexión de los chimpancés jóvenes después de un largo período de aprendizaje que incluye una intensa práctica y observación.

Ahora bien, para un chimpancé nacido en una comunidad en la que actualmente no existe la práctica de romper nueces, esa capacidad generativa no existe. Este chimpancé no puede encontrar esta capacidad generativa como los chimpancés jóvenes de la comunidad de Yo. Habría que esperar a que el proceso de quebrar nueces se creara y se reconociera colectivamente; es decir, el proceso de institucionalización y reconocimiento cultural de acciones y maneras de hacer algo. Como resultado de un proceso cultural, estas acciones y maneras de hacer se establecen como saber. Biro, Sousa y Matsuzawa (2006), por ejemplo, relatan el caso de una comunidad de chimpancés en Bossou (Guinea), en la que dos chimpancés adultos rompen nueces de panda; sin embargo, este conjunto de acciones no es retomado por otros chimpancés de la comunidad. Boesch, Marchesi, Marchesi, Fruth y Joulian (1994) señalan que pueden haberse dado casos similares en otras comunidades: “el rompimiento de nueces pudo haber sido inventado en algún momento, pero nunca fue [culturalmente] establecido” (p. 336). En nuestros términos, el proceso cultural de legitimación de las acciones no se lleva a cabo, por lo que el saber no se produce. Para que se produzca el saber, debe producirse un proceso cultural de legitimación¹⁸.

En el caso de los estudiantes jóvenes que se están iniciando en el aprendizaje de temas específicos de las matemáticas (por ejemplo, geometría o álgebra), los saberes matemáticos ya existen en su cultura. Pero estos estudiantes no dominan necesariamente las habilidades motrices y conceptuales relativamente sofisticadas que se necesitan para investigar figuras complejas o ampliar secuencias aritméticas. Por ejemplo, los matemáticos identificarían fácilmente los aspectos de los términos de la figura 7 (véase el capítulo anterior) que son relevantes para la tarea de generalización:

18 Como puede verse, el proceso de *legitimación* hace del saber algo inherentemente cultural, social, político y económico.

probablemente verían los términos divididos en dos filas y se darían cuenta rápidamente de la relación funcional entre el número del término y la cantidad de cuadrados en cada una de las filas. La percepción de estas relaciones variacionales suele ser tan rápida que los matemáticos ni siquiera se dan cuenta del complejo trabajo que hay detrás. Los matemáticos también extenderían fácilmente la propiedad identificada a otros términos que no están presentes en el campo perceptivo, como el Término 100; concluirían que ese término tiene $100 + 101$ cuadrados; es decir, 201 cuadrados (véase la figura 11). Mejor aún, dirían que la cantidad de cuadrados de cualquier término, por ejemplo n , es $2n + 1$.

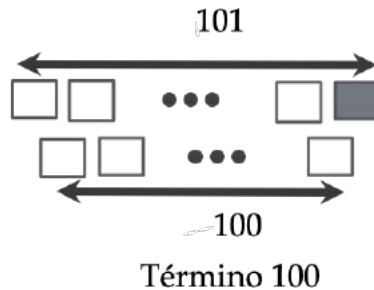


Figura 11. Imaginación rápida del Término 100 para ojos entrenados, reportada con frecuencia

El ojo novato no ve necesariamente la secuencia de esa manera. La figura 12 muestra un ejemplo de cómo un estudiante de segundo grado (7-8 años) extiende la secuencia más allá de los cuatro términos dados.



Figura 12. Términos 5 y 6 dibujados por un alumno de segundo grado (7-8 años)

El estudiante se centra en la numerosidad de los cuadrados, dejando la espacialidad de los términos en la periferia. No podemos decir que la respuesta del estudiante en la figura 12 sea incorrecta. La respuesta tiene sentido para el estudiante, aunque probablemente sea cierto que, al enfocarse en la numerosidad de los términos de la secuencia, puede resultar más

difícil llegar a una fórmula general, como $2n + 1$. Esto es lo que hemos observado una y otra vez en nuestras investigaciones con estudiantes de primaria y con estudiantes mayores (13–17 años). Los estudiantes mayores tienden a utilizar métodos de ensayo y error que no son algebraicos, sino aritméticos (Radford, 2010).

El problema no radica en que los estudiantes no vean las dos filas de cuadrados para cada término. En la figura 13, vemos a un estudiante de segundo grado que se enfrenta por primera vez a una tarea de generalización del tipo que se ve en la figura 7 (véase el capítulo anterior); en la figura 13, vemos que el estudiante señala con su bolígrafo la fila inferior, y luego la fila superior, después de mover el bolígrafo entre las filas para distinguirlas. Sin embargo, cuando el estudiante dibuja el término 5, la dimensión espacial de los términos queda relegada a un segundo plano; no desempeña un papel organizador en el dibujo del término. El alumno dibuja una fila que contiene todos los rectángulos del término. El problema radica más bien en la no identificación de que la espacialidad de los términos proporciona pistas interesantes desde el punto de vista algebraico.

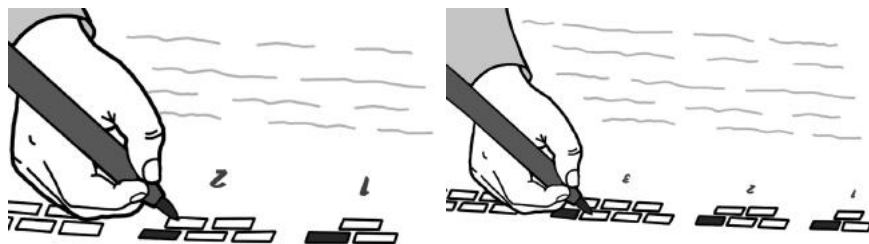


Figura 13. Un estudiante que investiga la secuencia

Las formas culturales de acción, percepción y reflexión que sustentan el pensamiento algebraico no son invocadas naturalmente por los estudiantes. Estas formas existen potencialmente, pero, para los estudiantes, estas permanecen irreconocibles y no identificadas. Son potencialidad sin actualización. Para encontrarlas y notarlas, estas formas de acción y percepción tienen que ponerse en movimiento. ¿Cómo? Mediante la actividad en el aula. Estas formas aparecerán entonces de manera sensible, como conocimiento. Y de esta manera sensible, por medio de procesos de objetivación, el saber puede convertirse en un tema de consciencia y pensamiento, y el aprendizaje puede finalmente ocurrir.

4. Algunos significados de la objetivación

Merece la pena mencionar dos términos alemanes relacionados, pero diferentes, utilizados por Hegel en su filosofía y que tienen que ver con el concepto de objetivación que estaré tratando aquí¹⁹. Los términos son *Gegenstand* y *Objekt*. Usualmente, ambos términos se traducen como *objeto*, aunque sus significados no son los mismos.

Objekt se refiere a un objeto en general, independiente del individuo. Por el contrario, *Gegenstand* significa un objeto de consciencia, mediado por la consciencia y continuamente cambiante con respecto a ella²⁰. La diferencia es, pues, que *Gegenstand* hace referencia a un objeto intencional —un objeto de la consciencia o del pensamiento— mientras que *Objekt* se refiere al objeto en su sentido lógico, no subjetivo —un objeto (no necesariamente material) en el mundo, un objeto histórico-cultural— (Inwood, 1992, p. 204).

Algunos traductores de la obra de Hegel hacen una distinción explícita entre *Gegenstand* y *Objekt*. Por ejemplo, en su traducción al francés del trabajo de Hegel, Bernard Bourgeois utiliza un guion para distinguir los dos conceptos. Usa *ob-jet* para traducir *Gegenstand* y *objet* para traducir *Objekt* (véase Hegel, 1994). En su traducción al inglés, Geraets, Suchting y Harris (Hegel, 1991) hacen lo mismo: utilizan *ob-ject* y *object*, respectivamente.

Así, en la sección 46 de la *Enciclopedia*, cuando Hegel está criticando a Kant por reducir el concepto crucial de conocer o cognición como algo que deriva de categorías abstractas cuya fuente pertenece, según Kant, a la unidad de la autoconsciencia del individuo, Hegel utiliza *Gegenstand* (que Bourgeois y Geraets et al. traducen por *ob-jet* y *ob-ject*, respectivamente), dado que el único “objeto” que el individuo puede llegar a conocer es un “objeto” subjetivo (un *ob-jeto*).

19 La terminología fenomenológica de Hegel sigue la tradición filosófica basada en los términos clave de *sujeto* y *objeto*. El objeto, sin embargo, entendido como objeto de saber o como objeto de consciencia, debe entenderse no como “cosa”, sino como un contenido temático. Así, decir que X es un objeto de la consciencia significa que X es un contenido temático en el ámbito de la consciencia humana.

20 Véase la nota de los traductores de Hegel, Geraets, Suchting y Harris en Hegel (1991, pp. xliii-xliv).

En la traducción de Geraets, Suchting y Harris:

To be cognizant, however, means nothing else but the knowing of an ob-ject according to its *determinate* content. A determinate content, however, contains a manifold *connection* within itself and is the basis for connections with many other ob-jects. So, this [Kantian] reason has nothing but the categories for its determination of the *thing-in-itself* ... and when it wants to use them for this purpose, it *flies off* (and becomes “transcendent”). (p. 89; énfasis en el original)

En español, tendríamos esto:

Ser *cognoscente*, sin embargo, no significa otra cosa que el conocimiento de un ob-jeto según su contenido *determinado*. Un contenido determinado, sin embargo, contiene una *conexión* múltiple dentro de sí mismo y es la base de las conexiones con muchos otros ob-jetos. Así pues, esta razón [kantiana] no tiene más que las *categorías* para su determinación de la *cosa-en-sí* ... y cuando quiere utilizarlas para este fin, [la cosa-en-sí] se le *escapa* (y se vuelve “trascendente”). (p. 89; énfasis en el original)

Veamos cómo traducen Bourgeois (1994, p. 89) la primera frase: “Or, connaître ne signifie rien d’autre que savoir un ob-jet selon son contenu *déterminé*”.

En el original: “*Erkennen heißt nun nichts anderes, als einen Gegenstand nach seinem bestimmten Inhalte zu wissen*” (Bourgeois, 1994, p. 88).

Por el contrario, cuando Hegel, en la misma sección, utiliza lo objetivo y la objetividad como algo más allá de la voluntad del individuo, utiliza dos términos relacionados con *Objekt*: *Objektives* y *Objektivität*. En el siguiente pasaje, Hegel afirma que lo que se llega a conocer en la aproximación de Kant no lleva ningún tipo de objetividad, ya que es el resultado de una síntesis de la autoconsciencia, y por lo tanto algo puramente subjetivo: “daß somit die Erkenntnis durch dieselbe[n] in der Tat nichts Objektives enthalte und die ihnen zugeschriebene Objektivität selbst nur etwas *Subjektives* sei” (Hegel, 1994, p. 90).

En la traducción de Bourgeois: “que par conséquent la connaissance obtenue grâce à elle[s] ne contient en réalité rien d’objectif, et que l’objectivité qui leur est attribuée est seulement quelque chose de *subjectif*” (Hegel, 1994, p. 91). Vemos que Bourgeois no utiliza el guion en la traducción de “objetivo y objetividad”.

En la traducción de Geraets, Suchting y Harris, sucede lo mismo: “hence it is the view that in fact cognition through the categories contains nothing objective, and that the objectivity that is ascribed to them is itself only something *subjective*” (Hegel, 1991, p. 89).

Por tanto, no hay que confundir la objetivación en el sentido de *Objektivierung* —que es parte de la idea de construir un objeto y hacer su reificación— con la idea de objetivación que estoy articulando aquí. Tampoco debe confundirse con el sentido de objetivación que aparece en ciertos planteamientos ontológicos, en los que el término se refiere a algo objetivo que es universal e independiente del ser humano. La idea de objetivación que propongo es más bien una idea fenomenológica que tiene el sentido de *Vergegenständlichung*: un proceso que incluye el esfuerzo del individuo por aprehender un objeto (*Objekt*) que ya está ahí (objeto dinámico, cambiante, siempre relacionado con la cultura); un proceso en el que el individuo se expresa precisamente por medio del esfuerzo que realiza por aprehender el objeto (*Objekt*).

Como nos dice el autor de un diccionario sobre los términos filosóficos de Hegel, en el dialecto swabiano de Hegel, *Gegenstand* significa “obstáculo”, lo que, estando frente a mí, me hace resistencia (Inwood, 1992, p. 203). Etimológicamente, *Gegenstand* tiene su semejante en la palabra latina *ob-jacere*. Lo que me *objeta*: *objectare*. Es desde este sentido de la objetivación, como algo que está ante mí y cuya presencia me interpela, de donde toma prestado su nombre la teoría de la objetivación.

Estas distinciones conceptuales serán útiles para definir en la siguiente sección el concepto de procesos de objetivación.

5. Procesos de objetivación: una definición procesal

Volvamos a nuestra definición del saber como potencialidad, como capacidad generativa histórica y cultural de acción y pensamiento —por ejemplo, las formas matemáticas contemporáneas de acción y reflexión del matemático o las formas de romper nueces del chimpancé—.

Esta capacidad generativa existe como algo latente que podemos (o no) encontrar en el transcurso de nuestra vida dependiendo de las redes político-culturales de acceso al saber que operan ubicuamente en nuestra sociedad. Si nos encontramos con esta capacidad generativa, aparece como

algo independiente de nosotros; aparece como un *Objekt*. Por medio de la actividad intelectual y sensible, nuestra consciencia puede empezar a notarlo, a asirlo o aprehenderlo desde nuestro punto de vista subjetivo. Usando la terminología presentada anteriormente, podemos decir que la objetivación es un proceso en el curso del cual el objeto cultural (*Objekt*), hasta ahora no reconocido o encontrado, se transforma en un objeto de consciencia (*Gegenstand*) (en el sentido de la nota 19). La naturaleza de tal transformación es que, al notarlo y aprehenderlo o asirlo, el objeto y nuestra consciencia se transforman. Del lado de la consciencia, aparecen nuevos significados. Del lado del objeto, el saber (como *Objekt*, no como cosa, sino como sistema de pensamiento y acción) se transforma y se constituye en objeto de consciencia. Volveré sobre este punto dentro de un momento. Por el momento, para precisar más el concepto de objetivación, permítanme definirlo en términos más procesales de la siguiente manera: los procesos de objetivación son los procesos sociales de toma de consciencia progresiva de sistemas histórico-culturales de pensamiento y de acción, algo de lo que nos damos cuenta gradualmente y a la vez lo dotamos de significado. Los procesos de objetivación son aquellos actos de notar con sentido algo que se revela a nuestra consciencia por medio de nuestra actividad semiótica corpórea, sensorial y artefactual. Se trata de notar o percibir algo en el curso de nuestra actividad práctica concreta por medio de las intenciones y comprensiones emergentes y en movimiento a medida que nos proyectamos y las tematizamos dentro de los límites y posibilidades de la expresividad histórico-cultural de los sistemas semióticos, los artefactos y el movimiento kinestésico de nuestro cuerpo.

6. El aprendizaje como objetivación

El significado fenomenológico de la objetivación como *Vergegenständlichung*, es decir, como un proceso en el que el individuo se expresa precisamente mediante el esfuerzo que realiza para aprehender, asir y dar sentido a un sistema cultural-histórico de pensamiento y acción, nos permite visualizar el aprendizaje como procesos de objetivación y como su producto. El aprendizaje consiste en notar esos sistemas histórico-culturales de pensamiento y acción. En términos metafóricos, el aprendizaje consiste en “tocarlos” o “agarrarlos”, como sugiere su etimología. En efecto, aprender proviene de la palabra latina *apprehendere*, compuesta por dos prefijos: *ad*, que significa

hacia, y *prae-*, que significa antes, y el verbo *hendere*, que significa coger o agarrar. El aprendizaje es un movimiento hacia adelante que intenta agarrar algo que está delante de nosotros. Es el encuentro complejo con el saber y su transformación subjetiva en un *objeto de consciencia*.

La mencionada transformación de un objeto (*Objekt*) en un objeto de consciencia (*Gegenstand*) que situamos en el corazón de la objetivación y el aprendizaje no supone un acto de sumisión o subordinación. Aquí nos separamos de las teorías participativas. El aprendizaje, en la teoría de la objetivación, requiere, de hecho, una legítima autenticidad; es decir, una mirada crítica sobre el saber y un espacio para disentir. El aprendizaje, en efecto, es el reconocimiento del saber, pero no su adopción incondicional. Por eso, desde la perspectiva crítica que propongo aquí, la enseñanza y el aprendizaje no se ven como canales de normalización social, sino como procesos que se abren a caminos subversivos donde se pueden ponderar nuevas ideas y formas de acción.

7. Consciencia

Al concepto de aprendizaje antes introducido subyace un concepto particular de *consciencia*. La consciencia no se considera en la teoría de la objetivación como una construcción metafísica escondida en algún lugar de una supuesta interioridad con la que todos habríamos nacido. Esta metáfora de la “interioridad” se inventó hacia el final de la Antigüedad. Los griegos de la Antigüedad se habrían escandalizado ante tal idea. Para los griegos, las ideas (*eidos*) no están dentro de los individuos, sino delante de ellos (véanse Fried, 2009; Radford, 2004). La idea de la interioridad fue desarrollada por Agustín en un contexto religioso y posteriormente fue articulada por Descartes y su famosa visión dicotómica del mundo: la de la interioridad (mente, ideas, consciencia, etc.) y la de la exterioridad (el mundo concreto) (para una discusión detallada, véase Taylor, 1989).

En la teoría de la objetivación, la consciencia emerge de la actividad y es en la actividad histórico-cultural humana en la que la consciencia encuentra su sustancia. Leont’ev lo expresó así: la “actividad del individuo es la sustancia de su consciencia” (Leontyev [o Leont’ev], 2009a, p. 26). La actividad da forma y contenido a la consciencia, de modo que, como dijo Vygotsky (1979), “la consciencia debe verse como un caso particular de la experiencia social” (p. 31). El resultado es que la estructura de la consciencia es la relación del individuo con el mundo (Vygotsky, 1997).

En este contexto dialéctico-materialista, la consciencia es, por tanto, una relación y un posicionamiento subjetivo respecto al mundo. La consciencia es el proceso subjetivo emocional y afectivo por medio del cual cada uno de nosotros, como sujetos individuales, reflexiona y se orienta en el mundo. Esta reflexión no es contemplativa. La consciencia individual es una forma específicamente humana de reflexión subjetiva de la realidad concreta en el curso de la cual llegamos a formar sensibilidades culturales para ponderar, reflexionar, comprender, sentir, disentir y objetar cosas y eventos acerca de los demás, nosotros mismos y nuestro mundo. La consciencia solo puede entenderse como el producto de relaciones y mediaciones histórico-culturales y emergentes que, más que estar dadas, “surgen en el curso del establecimiento y desarrollo de la sociedad” (Leont’ev, 1978, p. 79). Dentro de esta visión, la consciencia aparece en la vida concreta, no como su origen, sino como su resultado.

8. Actividad de enseñanza-aprendizaje

El aprendizaje/objetivación es un proceso vinculado a la actividad. Ocurre dentro del espacio creado por la actividad de enseñanza-aprendizaje que transforma el saber en conocimiento. El aprendizaje ocurre de acuerdo con los límites y posibilidades que le ofrece la actividad. En consecuencia, el aprendizaje tomará un rumbo u otro en función de la actividad de enseñanza-aprendizaje de donde resulta.

Volvamos al ejemplo de la alcancía (capítulos 1 y 2). Pensemos que este ejemplo tiene lugar dentro de una actividad de enseñanza basada en la transmisión de saberes. La profesora muestra a los estudiantes cómo calcular el dinero ahorrado en las semanas 10, 15 y 25. Luego, la profesora deja que los estudiantes respondan a preguntas similares. Se puede afirmar que existe, dentro de esta actividad, un proceso de objetivación. Hay, de hecho, un encuentro con el saber histórico-cultural. Pero el encuentro es muy limitado. La división del trabajo que subyace a la actividad (la profesora dice; los estudiantes escuchan e imitan) conduce a una forma muy restringida de producción de saberes. La participación de los estudiantes es muy escasa. No habrá mucho espacio para echar un vistazo crítico a las ideas producidas en la clase (que son las ideas de la profesora).

Pensemos ahora en el mismo ejemplo en el contexto de una actividad piagetiana de aprendizaje centrada en el estudiante. En este caso, los

estudiantes son responsables de generar sus propias estrategias. Se implican activamente. Producen sus propias ideas. Pero no hay necesariamente un encuentro con el saber histórico-cultural. Vimos en el capítulo 2, por ejemplo, cómo los estudiantes generaron una estrategia no algebraica: la estrategia de duplicación aritmética. Si la profesora hubiese dejado a los estudiantes resolviendo el problema a su propia manera, no se habría producido un encuentro con el saber cultural algebraico; los estudiantes no habrían tomado consciencia de él y, por tanto, no se produciría un proceso de objetivación. No hubiera habido encuentro con la cultura y la historia, no hubiera habido encuentro con el Otro.

En la teoría de la objetivación, el tipo de actividad de enseñanza-aprendizaje es diferente. Es lo que hemos llamado *labor conjunta*. La labor conjunta implica una conceptualización diferente de la división del trabajo en la actividad del aula y una conceptualización diferente del profesor y de los estudiantes. En la labor conjunta, el aprendizaje consiste en notar y dar sentido al saber histórico-cultural de forma activa y creativa. En la labor conjunta, profesores y estudiantes trabajan juntos, pero no hacen las mismas cosas.

Si volvemos al ejemplo de la alcancía (capítulo 1), vemos que, en la línea 29 y en adelante, la profesora y los estudiantes empiezan a trabajar juntos. El objeto de la actividad se refracta de forma diferente en la consciencia de la profesora y en la consciencia de los estudiantes. Los estudiantes, de hecho, aún no saben hacia dónde se dirigen. El objeto de la actividad todavía no está claro para ellos. Pero, en principio, esto no es motivo para no participar en la actividad de la clase. Usualmente, la participación de los estudiantes en una actividad de enseñanza-aprendizaje tiene otros motivos que analizo en otro capítulo. Así, en el ejemplo de la alcancía, Albert y sus compañeros se implican en la actividad de enseñanza-aprendizaje. En la línea 29, al trabajar con la profesora, los estudiantes empiezan a notar algo nuevo: las dos columnas de fichas de bingo rojas se pueden ver de forma diferente. En un mismo término de la secuencia, estas columnas tienen la misma cantidad de fichas. Mediante el lenguaje, los estudiantes nombran este acto de consciencia perceptiva, y alcanzan un contenido teórico que la percepción sola o la acción sola no pueden ofrecer. Esto es lo que ocurre cuando, en la línea 30, Albert dice: “Siempre es dos veces...”. Para resaltar la consciencia emergente, la profesora repite la frase de Albert (línea 31). Aparecen nuevas posibilidades conceptuales:

- 30 Albert: Siempre es dos veces...
- 31 Profesora: (*Repite*) Siempre es dos veces.

Krysta reformula lo que va apareciendo progresivamente a la consciencia e intenta completar la frase, ya que queda por definir a qué se refiere “dos veces”:

- 32 Krysta: Es el doble de lo que... ¡No! (*observa intensamente los artefactos durante un rato y dice*) ¡Estoy confundida!

Sin embargo, la consciencia que implica este proceso de objetivación aún no está del todo clara. Krysta admite estar confundida. En la línea siguiente, Albert intenta formular una explicación más precisa, pero la formulación verbal parece estar incompleta. Siguen faltando palabras. Lo que Albert produce entonces es una forma dinámica sensual y material de contar por medio de la cual la relación funcional entre el número de la figura y la cantidad de fichas de bingo rojas comienza a aparecer a la consciencia:

- 33 Albert: ¡Sí! Es el doble, ¡mira! (*cuenta las fichas rojas*) $1 + 1, 2; 2 + 2, 4; 3 + 3, 6; 4 + 4.$
- 34 Krysta: (Interrumpe) 8.

La relación funcional entre las variables sigue siendo implícita. Todavía no se ha articulado del todo.

Con base en el concepto de saber discutido en el capítulo anterior, podemos decir que hay ciertos componentes y vínculos entre los componentes del saber que empiezan a aparecer a la consciencia de los estudiantes, como la simetría en las columnas de las fichas de bingo rojas y el hecho de que cada columna aumenta una unidad de un término de la secuencia al siguiente. Lo que se ha notado, aquellos componentes y vínculos del saber, deben ser notados con mayor profundidad. Para ello, debe continuar la labor conjunta en que se subsume el proceso de objetivación. Será necesario un gasto adicional de energía material, intelectual y emocional,

y de un esfuerzo para que la relación funcional entre las variables matemáticas como *Objekt* se transforme en un objeto de consciencia (*Gegenstand*).

9. Procesos de subjetivación

Como mencioné, en el encuentro del estudiante con el saber se produce una transformación del saber, que es, al mismo tiempo, la constitución y transformación de la consciencia de los estudiantes. Por eso, dentro de la teoría de la objetivación, el aprendizaje no consiste simplemente en llegar al saber, sino también en el *devenir del ser* (la transformación de los sujetos).

Notemos que, en esta perspectiva, el aprendizaje no es imitación. Tampoco es la participación en una práctica preestablecida, ni la inserción del sujeto en un mundo ajeno, como suelen sugerir las corrientes socioculturales que adoptan el punto de vista de la enculturación. El aprendizaje no es un proceso de inserción del mundo en la interioridad del sujeto, ni el “transporte” de un proceso de una esfera exterior a otra interior (Gal’perin, 1967, p. 29). En la teoría de la objetivación, el aprendizaje es la fusión entre los modos culturales de reflexionar y hacer y una consciencia emergente y fluida que busca percibirlos (Radford, 2007, pp. 1790-1791). El aprendizaje es un encuentro continuo y tenso de transformación dialéctica mutua entre un mundo cultural y los individuos únicos que se encuentran con él. En el curso de esta fusión, el mundo que aparece a la consciencia y la consciencia que surge de este encuentro se transforman continuamente. Por esta razón, los procesos de objetivación se entremezclan con los procesos de subjetivación, es decir, aquellos procesos de creación de un yo particular (y único)²¹.

10. Síntesis

En este capítulo he introducido el concepto de objetivación. He destacado que el término *objetivación* tiene varios significados.

1. Uno de ellos es el significado de *Objektivierung*: objetivación significa convertir algo en un objeto, como en la transformación de las

21 Los procesos de subjetivación se tratan con más detalle en los capítulos 9 y 10.

acciones del sujeto en un objeto; es decir, en algo estable a lo largo de una reificación de las acciones.

2. Otro sentido de objetivación es el adoptado por las filosofías realistas o platonistas en las que se supone una realidad trascendental como ya dada e independiente de los individuos y de la actividad humana. La objetivación aparece aquí como algo relacionado con una verdad universal, con algo objetivo y portador de objetividad (en el sentido de *Objektivität*).
3. El significado adoptado en la teoría de la objetivación es diferente de los significados anteriores. En la teoría de la objetivación, el significado de objetivación proviene de la fenomenología hegeliana: como objeto/entidad que, en su desarrollo ontogenético, se sitúa frente a los individuos como objeto que los objeta.

Empecé presentando el concepto fenomenológico de objetivación como un encuentro con los sistemas de pensamiento y sus significados culturales, sistemas y significados que preceden a nuestra aparición en el mundo. A continuación, refiné el concepto como el proceso dentro del cual se produce la transformación del saber cultural en saber subjetivo, y observé que esta transformación va de la mano con la formación y transformación continua de la consciencia de un individuo: la objetivación es un proceso social a lo largo del cual el individuo se hace progresivamente consciente de manera crítica de las formas histórico-culturales de pensar y hacer; durante este proceso se forma y *trans*-forma la consciencia.

En esta línea de pensamiento, la objetivación aparece como un proceso interminable, pues, en su constitución dialéctica, el saber y la consciencia están en perpetuo movimiento transformador. Siempre podemos seguir comprendiendo, intentando e imaginando cosas nuevas, investigando más allá de donde estamos.

El aprendizaje, sugerí, consiste en tomar consciencia de forma activa y creativa de estos sistemas históricos y culturales de pensamiento y acción. Hice hincapié en los adverbios *activamente* y *creativamente* para recordar que el “tomar consciencia” en la definición de aprendizaje no es un acto contemplativo (como en el modelo pedagógico de transmisión de saberes), ni es algo puramente mental (como en las aproximaciones idealistas). Es algo que requiere esfuerzo y energía y que ocurre simultáneamente a nivel del individuo y a nivel del mundo histórico-cultural. Una de las fuerzas del materialismo dialéctico (tal como lo desarrollaron Marx e Ilyenkov después

de Hegel) es precisamente insistir en la inseparabilidad de la cultura, la historia y el individuo. Por lo tanto, darse cuenta o tomar consciencia de algo en el curso de nuestra actividad práctica concreta significa que la toma de consciencia es siempre incompleta y se realiza progresiva e interminablemente a través de nuestras intenciones y comprensiones emergentes, a medida que estas se despliegan en la actividad y se expresan por medio de nuestro cuerpo, el lenguaje, los gráficos y otros sistemas semióticos de acuerdo con su propia expresividad histórico-cultural.

Pero también insistí en que el aprendizaje es un proceso entrelazado a la actividad de enseñanza-aprendizaje. Desde el punto de vista de la teoría de la objetivación, no basta con dedicarse activa y creativamente a notar o percibir o comprender algo. La actividad de enseñanza y aprendizaje debe abrir un espacio para un posicionamiento crítico sobre el saber cultural. De ahí que no sean dos sino tres los adverbios que califican el aprendizaje: *activamente, creativamente y críticamente*.

¿Qué es lo que distingue el concepto de aprendizaje sugerido en la teoría de la objetivación de los que se encuentran en la pedagogía de transmisión de saberes y en la pedagogía centrada en el estudiante? Menciono aquí dos elementos que hacen una clara distinción.

El primero tiene que ver con el concepto de saber. En la teoría de la objetivación, el saber no es algo que pueda transferirse, como si fuera una cosa o una mercancía, de una persona a otra, como en la enseñanza basada en la transmisión de saberes. Tampoco es algo producido subjetivamente, como en la pedagogía centrada en el niño. Es una entidad histórico-cultural siempre en movimiento.

El segundo elemento que distingue el aprendizaje tal y como lo concibe la teoría de la objetivación de las concepciones del aprendizaje basado en la transmisión de saberes y aquellas centradas en el niño es el recurso al concepto de consciencia. Aprender es tanto tomar consciencia como crear consciencia. Los enfoques educativos transmisivos, constructivistas y otros no necesitan el concepto de consciencia para definir el aprendizaje. Si se eliminara el concepto de consciencia de la teoría de la objetivación, esta se derrumbaría.

Esta elección teórica para definir el aprendizaje no debería sorprender. La consciencia es un concepto clave en el materialismo dialéctico. Está presente en toda la obra de Vygotsky, desde la ponencia presentada en el Segundo Congreso de Psiconeurólogos, celebrado en Leningrado en 1924 y publicada en 1925 (véase Vygotsky, 1979) hasta el final de su vida.

En el siguiente capítulo me centraré en algunos aspectos de la investigación práctica y metodológica de los procesos de objetivación y aprendizaje.

Agradecimiento

Esta es una versión revisada y ampliada de Radford, L. (2013). Tres conceptos clave de la teoría de la objetivación: Conocimiento, Saber y Aprendizaje. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44. Agradezco a la revista la autorización para usar y ampliar las ideas allí presentadas.

Capítulo 5

Procesos de objetivación

La investigación de los procesos de objetivación se centra en el estudio de la manera en que formas históricas y culturales de pensamiento y acción se convierten en objetos de consciencia en los estudiantes. La conclusión a la que llegamos en el capítulo anterior fue que, dado el papel mediador que desempeña la actividad en la transformación del saber en conocimiento, la actividad es un componente clave de la investigación de los procesos de objetivación. En este capítulo profundizamos en el estudio de estos procesos y nos detenemos con más detalle en la actividad en la cual estos ocurren. Se presentan algunos constructos teóricos relacionados con el estudio de los procesos de objetivación. Estos constructos son los siguientes: medios semióticos de objetivación, nodos semióticos y contracción semiótica. El capítulo termina con la introducción de la noción de concepto.

1. La investigación de los procesos de objetivación

Recordemos que el concepto de actividad tiene un significado específico en la teoría de la objetivación. Es lo que llamamos labor conjunta (labor conjunta de profesores y estudiantes). Ya he indicado que la actividad (de enseñanza-aprendizaje) o labor conjunta incluye la cultura material, como los signos matemáticos y artefactos. La cultura material es portadora de

inteligencia histórica, pero no puede revelar por sí misma las ideas que la labor humana ha depositado en ella.

Por ejemplo, en el problema de la alcancía que comentamos en el capítulo 1, al principio de la lección, proporcionamos a los estudiantes de cuarto grado (9-10 años) fichas de bingo para que abordaran un problema de secuencia aritmética. Les dimos fichas de bingo de dos colores (azul y rojo) y vasos transparentes numerados que representaban la alcancía en las semanas 1, 2, 3, etc., para que los estudiantes pudieran modelar el proceso de ahorro hasta la semana 5. Luego les pedimos que generalizaran: debían responder preguntas sobre la cantidad de dinero ahorrado en las semanas 10, 15 y 25.

Los estudiantes empezaron por modelar el proceso de ahorro a modo de “situación real”: colocaron las fichas de bingo en los vasos (tres fichas en el vaso de la semana 1, cinco fichas en el vaso de la semana 2, etc.; véase la figura 14).

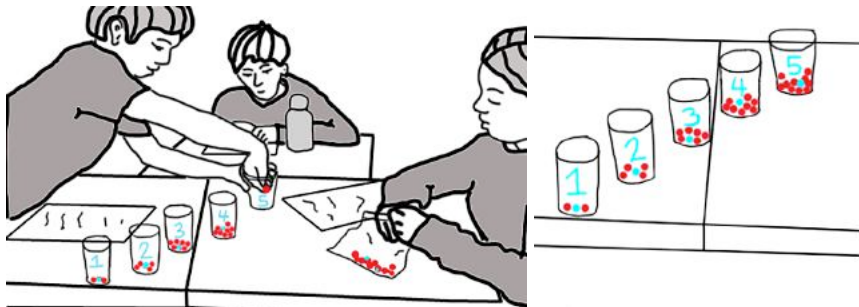


Figura 14. Modelación del proceso de ahorro

Aunque el modelo era plausible, resultaba poco útil para responder a las preguntas sobre la cantidad de dinero ahorrada en semanas lejanas (como la semana 25). De hecho, la atención de los estudiantes se centró en añadir dos fichas de bingo cada vez. Como resultado, las fichas de bingo formaban montones en cada vaso y no estaban vinculadas a una estructura multiplicativa más abstracta. Los artefactos no fueron suficientes para ayudar a los estudiantes a revelar la conceptualidad general a la que apuntaba el proyecto didáctico de la profesora. Los artefactos fueron utilizados para desplegar un contenido conceptual cotidiano alejado del contenido teórico–algebraico.

Así, al cabo de cierto tiempo, los estudiantes terminaron de colocar las fichas de bingo en los vasos sin darse cuenta de ninguna estructura algebraica. La profesora estaba hablando con otro grupo en otra parte del

aula. Yo estaba grabando a uno de los grupos (el de Albert); me quité los auriculares, dejé la cámara de video encendida y fui a hablar con el grupo. Les sugerí que pusieran las fichas de bingo enfrente de los vasos. Los estudiantes aceptaron mi sugerencia y empezaron a apilarlos sin distinguir los colores. Entonces les sugerí que utilizaran una ficha azul para representar el dólar inicial en la alcancía. Siguiendo esta sugerencia, los tres estudiantes de este grupo crearon un modelo del proceso de ahorro (véase la figura 15; el vaso de la semana 1 no es visible en la figura).



Figura 15. Un modelo de secuencia aritmética con fichas de bingo de dos colores

La nueva disposición del material concreto ayudó a los estudiantes a comprender mejor el proceso de ahorro. Sin embargo, como vimos en el capítulo 2, los estudiantes no produjeron una fórmula algebraica para calcular el ahorro en semanas remotas.

El problema es que las formas histórico-culturales de pensamiento (en este ejemplo, las formas algebraicas de pensamiento relacionadas con las secuencias numéricas) no pueden ser directamente “vistas”. El saber algebraico como tal no puede mostrarse en sí mismo. No se puede ver, tocar o sentir. Para que el saber sea algo que pueda ser percibido o sentido por la consciencia humana (es decir, que sea inteligible), los individuos necesitan hacer algo: es, en efecto, por medio de una actividad intelectual-material-sensible que el saber puede aparecer, y lo que aparece es una forma materializada (o inteligible) de este mismo (esta es la idea que comunica el diagrama de la figura 9, capítulo 3). Por supuesto, podríamos recurrir a la actividad que subyace a la enseñanza transmisiva o por transmisión de

saberes, pero, como sugerí en el capítulo anterior, esta actividad es muy pobre. No incluye al estudiante, salvo como observador pasivo. Por lo tanto, el tipo de consciencia que surge de dicha actividad es también muy pobre. Este no es el tipo de actividad al que recurrimos en la teoría de la objetivación. El concepto de actividad que queremos fomentar debe dotar al saber algebraico de un contenido conceptual particularmente rico de manera que ese saber sea significativo para los estudiantes.

2. Actividad de enseñanza-aprendizaje

En esta sección, sugiero distinguir entre dos “componentes” de la actividad de enseñanza-aprendizaje. Un componente tiene que ver con su organización didáctica (por ejemplo, la elección de los problemas que se van a discutir y su organización). El segundo componente tiene que ver con la actividad en sí misma (la actividad como sistema en movimiento), algo que, en la teoría de la objetivación, abarca mucho más que la interacción de las personas entre sí. Se considera que una actividad es más que un medio de interacción con personas y artefactos. Es una forma de vida, algo orgánico y sistémico; un evento creado por la búsqueda con otras personas de la solución a un problema; una búsqueda que es al mismo tiempo cognitiva, sensible, material, emocional y ética.

Veamos con algún detenimiento estos componentes de la actividad de enseñanza-aprendizaje.

2.1. La estructura Φ (o componente didáctico)

La actividad de enseñanza-aprendizaje tiene un *objeto*. Antes de la actividad, este objeto es identificado por el profesor; forma parte de su proyecto de enseñanza. Este objeto puede ser el encuentro de los estudiantes con formas histórico-culturales de pensar algebraicamente sobre las secuencias. También puede ser el encuentro con formas histórico-culturales de pensar matemáticamente sobre el movimiento, el tiempo, las fracciones, etc. (véanse, por ejemplo, LaCroix, 2014; Miranda, Radford y Guzmán, 2007).

Para que la actividad se desarrolle en la dirección de su objeto, se pueden identificar una o varias *metas*. Si seguimos con nuestro ejemplo algebraico, una meta puede ser resolver problemas sobre secuencias de forma algebraica. Para lograr las metas de la actividad, se puede concebir

una *tarea* específica. La tarea puede consistir en una secuencia de problemas relacionados de dificultad conceptual creciente²².

La estructura objeto-meta-tarea, que vamos a representar con la letra Φ , fue introducida por Leont'ev (1978) en un contexto más general. La estructura de Leont'ev me parece útil para dar cuenta de la intención pedagógica de la actividad de enseñanza-aprendizaje por niveles. Sin embargo, la estructura no es suficiente. En la teoría de la objetivación, añadimos un análisis epistemológico del contenido matemático que nos parece útil complementar con un *análisis a priori* (Artigue, 2009, 1995).

Además del objeto de la actividad, Leont'ev sugirió el concepto de motivo, que se divide en el motivo de la actividad y el motivo de los participantes (Roth y Radford, 2011). El concepto de motivo está relacionado con el concepto de *necesidad*; no como necesidad en sí misma, sino como algo que nos mueve hacia un objetivo²³. “El motivo”, dice Leont'ev (1978, p. 171), “debe entenderse no como una experiencia de la necesidad en sí misma, sino como aquel objetivo en el que esta necesidad se encuentra en unas circunstancias determinadas, que hace de [ese objetivo] un objeto y por ello dirige la actividad hacia un resultado determinado”.

En un intento de reinterpretar la estructura de la actividad, Davydov introdujo otro elemento: el *deseo*. Davydov (1999) comienza señalando que la actividad de enseñanza y aprendizaje es un caso muy particular de actividad: la actividad de aprendizaje.

La escuela de Elkonin investiga un tipo específico de actividad, la actividad de aprendizaje. Al ser la actividad de muchos tipos, aspectos y formas, es difícil orientarse en su estructura y contenido y elaborar una teoría abstracta a menos que se estudie un tipo de actividad de forma extensa y exhaustiva. (p. 40)

Continúa diciendo que

Me basaré en la estructura de la actividad presentada por A. N. Leontiev. Considera que la actividad se compone de necesidades, tareas, acciones

22 En la teoría de la objetivación, la secuencia se organiza en torno a la unidad conceptual y contextual de la actividad. Este concepto se tratará en el capítulo 7. Por el momento, mi intención es destacar la estructura que se deriva de la distinción entre objeto, meta y tarea.

23 Este concepto de necesidad se trató en el capítulo 2 en el curso de nuestro examen sobre la concepción antropológica de lo humano.

y operaciones. Estoy de acuerdo con esta estructura de actividad, pero la amplío de la siguiente manera: A. N. Leontiev no consideraba el deseo como un elemento de la estructura psicológica de la actividad. En mi opinión, la estructura de la actividad no puede ser psicológica, es interdisciplinaria, por eso solo un cierto aspecto de ella puede ser estudiado en la psicología. (pp. 40-41)

¿Qué entiende Davydov por *deseo*? “Un deseo [*nuzhda*] es la base fundamental de una necesidad” (p. 41). A continuación, el psicólogo ruso afirma que “no se puede decir nada sobre la actividad si no se comprende el deseo espiritual u orgánico y cómo se transforma en una necesidad” (p. 41).

Aunque simpatizo con Davydov y encuentro su idea de la actividad extremadamente interesante, confieso que no estoy convencido de que, en una explicación de cómo se produce el aprendizaje, tengamos que basarnos en la transformación de los deseos en necesidades. Creo que debemos tener en cuenta tanto los deseos como las necesidades en nuestra investigación del aprendizaje, pero no veo por qué los deseos tienen que transformarse en necesidades. Creo que los deseos y las necesidades refractan diferentes aspectos de la vida subjetiva de los individuos. Por ello, tomo un camino diferente, en el que el centro de atención no es solo el aprendizaje (la actividad de aprendizaje de Davydov), sino también la enseñanza. Me interesa la actividad de enseñanza-aprendizaje.

2.2. Actividad de enseñanza-aprendizaje

En la sección anterior, examinamos brevemente la estructura Φ de la actividad. Veamos ahora la actividad en sí misma. La actividad en sí, entendida como actividad de enseñanza-aprendizaje, es un proceso: el que materializa el saber en algo inteligible. Expresémoslo con la letra griega Θ . La figura 16 (izquierda) presenta la estructura de la actividad y (derecha) la actividad como proceso. Θ es una función del proyecto didáctico y de otras variables.

Las flechas de la izquierda de la figura 16 muestran cómo la tarea se alinea con la meta de la actividad, que a su vez se alinea con el objeto de la actividad. En la práctica, usualmente se define el objeto de la actividad, luego la meta y, a continuación, la tarea con sus distintos problemas.

En la figura 16 (derecha), las flechas entre K y k representan la actividad como un proceso particular: como una forma de vida colectiva, una

energía que los participantes liberan y que llega a envolverlos, una energía espaciotemporal que es sensible y sensual, material e ideacional, discursiva y gestual, un flujo portador de intenciones, deseos y motivos²⁴.

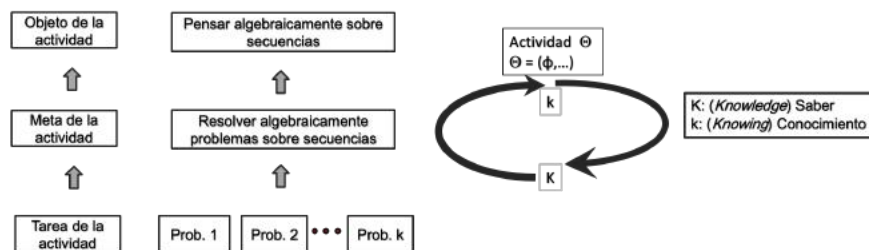


Figura 16. Izquierda: estructura Φ de la actividad; derecha: actividad Θ en sí misma; Θ es una función del proyecto didáctico y de otras variables

La figura 16 intenta capturar la idea de que la actividad Θ que materializa el saber (K) en conocimiento (k) es un proceso sujeto a cambios: es lo que la discontinuidad de las flechas sugiere. Como mencioné en el capítulo 3, si bien es cierto que la actividad media K y k , también es cierto que K y k median la actividad. Esta mediación recíproca es precisamente el significado de la naturaleza de los elementos en un proceso dialéctico.

La naturaleza dialéctica de la actividad puede entenderse mejor si tenemos en cuenta la idea de que una actividad es un proceso situado en el espacio y el tiempo que, aunque esté afectado por el proyecto didáctico Φ , no puede determinarse de antemano. Los profesores e investigadores pueden tener una idea, pero el proceso no es mecánico ni determinista. La forma en que se produzca la actividad dependerá de cómo se impliquen los estudiantes y los profesores en la actividad, de cómo se respondan unos a otros y de sus relaciones dinámicas con el saber en general y con las instituciones, etc.

En el caso de la teoría de la objetivación, dado que la actividad aparece como un sistema dinámico y complejo, solemos identificar “momentos” en la actividad. En general, dividimos la clase en pequeños grupos de dos, tres o cuatro estudiantes. Un primer “momento” puede ser la presentación

24 Chaiklin (2019) ofrece una interesante discusión sobre el concepto de actividad en la psicología soviética y muestra, en particular, cómo este concepto apareció primero como la actividad de un individuo y se expandió más tarde a la actividad de un colectivo.

de la actividad por parte del profesor (véase la figura 17). A continuación, los estudiantes trabajan en pequeños grupos. El profesor visita los grupos y hace preguntas a los estudiantes, les hace comentarios, etc. (véase “discusión profesora-estudiantes” en la figura 17). El profesor puede invitar a dos o más grupos pequeños a reunirse para debatir una idea concreta (véase “discusión entre pequeños grupos” en la figura 17). En algún momento, el profesor puede invitar a la clase a participar en una discusión general en la que los grupos pueden presentar sus ideas y otros grupos pueden cuestionarlas críticamente o hacer sugerencias de mejora o generalización (véase “discusión general” en la figura 17). La clase puede terminar ahí o los estudiantes pueden seguir trabajando en pequeños grupos.

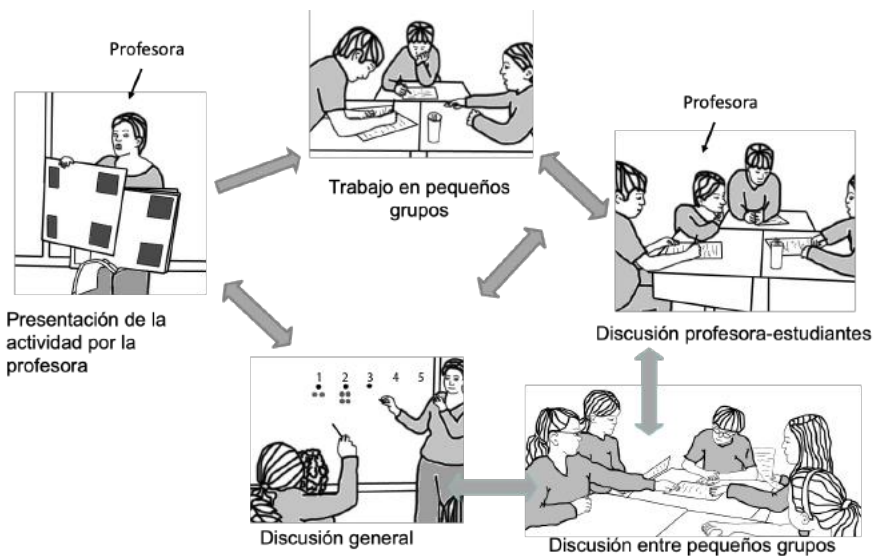


Figura 17. La actividad Θ y algunos de sus “momentos”

El proceso de objetivación se produce cuando los estudiantes y los profesores, mediante su labor conjunta, materializan el saber al que se dirige el proyecto didáctico —es decir, lo transforman en algo susceptible de ser objeto de consciencia— y los estudiantes empiezan a darse cuenta o a tomar consciencia de él por medio de dicha materialización. En el ejemplo de la alcancía, el proceso de objetivación tiene lugar cuando aparece en el aula una forma algebraica de ver la secuencia del ahorro. Es el proceso de transformación de un objeto cultural (*Objekt*) —en este caso, una forma

algebraica histórico-cultural de pensar en las secuencias numéricas— en un objeto de consciencia (*Gegenstand*).

Como se mencionó en el capítulo 2, para distinguir el concepto de actividad que estoy tratando aquí (actividad como forma genuinamente colectiva de vida y aprendizaje) de otros conceptos de actividad que existen en la literatura educativa, nos referimos a la actividad como labor conjunta. La labor conjunta no es solo un conjunto de acciones coordinadas, sino la actividad que realizan hombro a hombro el profesor y los estudiantes. Es una forma de energía que incorpora el flujo de componentes emocionales, afectivos, éticos, intelectuales y materiales, y a partir de la cual las matemáticas aparecen sensiblemente en el aula. El concepto de labor conjunta es un constructo teórico que permite superar el antagonismo entre profesores y estudiantes que aparece en el modelo de enseñanza transmisiva y su pedagogía conductista, así como los diversos modelos constructivistas y su pedagogía centrada en el niño (Radford, 2014b, 2020b).

3. Un ejemplo de investigación de los procesos de objetivación

En nuestro ejemplo de la alcancía, después de que los estudiantes terminaran de modelar con las fichas de bingo como se muestra en la figura 15, se enfrentaron a la cuestión de la cantidad de ahorro de la semana 10. Como vimos en el capítulo 1, al principio, los estudiantes sugirieron duplicar el ahorro de la semana 5 y quitar una de las fichas de bingo azules (véase la figura 18, que es la reproducción de la figura 2 del capítulo 1). Así, en lugar de la expresión esperada $10 \times 2 + 1$, los estudiantes sugirieron $11 + 10$.

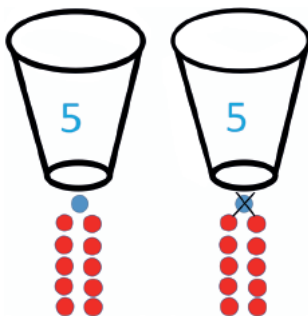


Figura 18. La estrategia de los estudiantes para calcular el ahorro en la semana 10

Tras una discusión con la profesora, los estudiantes idearon una fórmula verbal para calcular las fichas de bingo en la semana 5. La fórmula era “5 más 5 más 1”. En el capítulo 1, se presentó la primera parte de esta discusión entre la profesora y los estudiantes. Tras esa discusión, la profesora invitó a los estudiantes a escribir los cálculos que hay que hacer para determinar el ahorro de la semana 5 y de la semana 10. La profesora esperaba una fórmula como $5 + 5 + 1$ y $10 + 10 + 1$, respectivamente. Sin embargo, los estudiantes no produjeron nada de eso. Se quedaron centrados en intentos de combinar la estrategia de duplicación (véanse las líneas 22 a 28 del capítulo 1) y la consciencia emergente de una relación entre las variables (véanse las líneas 29 a 40 del capítulo 1)*. El siguiente extracto da una idea de la conversación con la profesora:

- 47 Profesora: ¿Qué fórmula podemos escribir?
- 48 Albert: *(Piensa de forma vacilante)* Hmmm...
- 49 Profesora: ¿Qué tipo de cálculos se puede hacer?
- 50 Albert: Por 2 o más, por 2.
- 51 Profesora: Semana 5... *(toma el vaso de la semana 5 y se lo muestra a Albert)*
- 52 Albert: Por 2, no, sería por 4. Cinco por 4.
- 53 Profesora: Semana 5...
- 54 Albert: Por 4 más 1.
- 55 Profesora: ¿Por qué por 4?

La actividad ha llevado a tomar consciencia de dos formas de proceder: una es el planteamiento de Albert, la otra es la forma algebraica esperada a la que se dirige la profesora. Estas formas de proceder conducen a algo que en el materialismo dialéctico se llama *contradicción*. La contradicción

* El método de duplicación reposa sobre un pensamiento proporcional: funciona como relación entre cuatro magnitudes; es un método aritmético. El método de las variables es un paso hacia el pensamiento algebraico. Es muy distinto del proporcional, que es más “estático” (nota de la presente edición).

no se considera un fallo, un fallo lógico o un fallo del diseño didáctico. Por el contrario, la contradicción es vista como el motor que empuja la actividad hacia adelante y la mantiene en movimiento. La contradicción forma parte del movimiento del saber. Veamos ahora el resto de la discusión.

Tras un intercambio con los estudiantes, la profesora tomó el quinto vaso (imagen 1 de la figura 19) y preguntó a Albert²⁵:

67 Profesora: ¿Qué has hecho aquí? 5... (*señala las fichas de bingo rojas; véase la imagen 2 de la figura 19*) ¿Por...?

68 Albert: ... 2

69 Profesora: (*Señala la ficha de bingo azul; véase la imagen 3*) ¿Más?

70 Albert: 1

A continuación, la profesora tomó el vaso de la semana 5 (imagen 4 de la figura 19), la movió hacia su izquierda hasta un lugar en el que se esperaba que estuviera el vaso de la semana 10 como si la secuencia se hubiese prolongado materialmente, y preguntó:

71 Profesora: ¿Qué harías con la semana 10, si la semana 10 estuviera aquí? (véase la imagen 4)

Albert se esforzó por responder, pero no llegó a la fórmula esperada. Como sugiere el análisis de la grabación, en este momento, tanto la profesora como el estudiante estaban muy tensos (véase, por ejemplo, la postura corporal de Albert en la imagen 5). La profesora comienza de nuevo:

77 Profesora: (*Toma con su mano de nuevo el vaso de la semana 5 y habla de la semana 5*) ¿Qué has hecho aquí? (*imagen 6; la profesora es parcialmente visible*)

25 Obsérvese que el primer vaso de la izquierda no aparece en la imagen y que Albert es parcialmente visible.

- 78 Albert: (*Respira profundamente y golpea el escritorio con el bolígrafo mientras la profesora sostiene el vaso de la semana 5; véase la imagen 7*) Ok.
- 79 Profesora: (*Todavía sostiene el vaso, pronuncia en voz baja*) 5...
- 80 Albert: (*En sincronía con el gesto de la profesora que señala al lado de las fichas de bingo rojas; véase la imagen 8*) Por 2...
- 81 Krysta: (*Que está siguiendo la discusión*) Por 2 igual...
- 82 Profesora: (*Señala ahora la ficha de bingo azul; véase la imagen 9*) Más 1.
- 83 Albert: (*Casi al mismo tiempo*) Más 1.
- 84 Profesora: (*Señala ahora un espacio vacío donde estaría la semana 10; véase la imagen 10*) ¿10?
- 85 Albert: (*La profesora señala en silencio el lugar en que deberían estar las fichas de bingo rojas; véase la imagen 11*) Por 2.
- 86 Krysta: (*Al mismo tiempo*) Por 2.
- 87 Profesora: (*Señala en silencio el lugar donde debería estar la ficha de bingo azul; véase la imagen 12*)
- 88 Krysta: Más 1.
- 89 Albert: (*Mira a la profesora*) ¿Menos 1? ¿Por 2 menos 1? ¿Más 1?

A pesar del resultado inconcluso de la interacción en las líneas 47 a 55 del diálogo, en la línea 71, la profesora empieza a intentar involucrar a Albert. En la línea 77 ella pregunta, “¿Qué has hecho aquí?” y luego, en la línea 79, hace una invitación con la palabra: “cinco”, que pronuncia mientras sostiene el quinto vaso. Albert muestra la aceptación de la invitación de la profesora con todo su cuerpo: respira profundamente y golpea el escritorio con su bolígrafo (imagen 7). La forma en que la profesora formula sus preguntas anima a Albert: da a entender que Albert puede resolver el problema pero que no se ha fijado lo suficiente en la configuración de las fichas de bingo; no se ha fijado en lo que se espera que vea, es decir, en la estructura matemática desde el punto de vista algebraico.

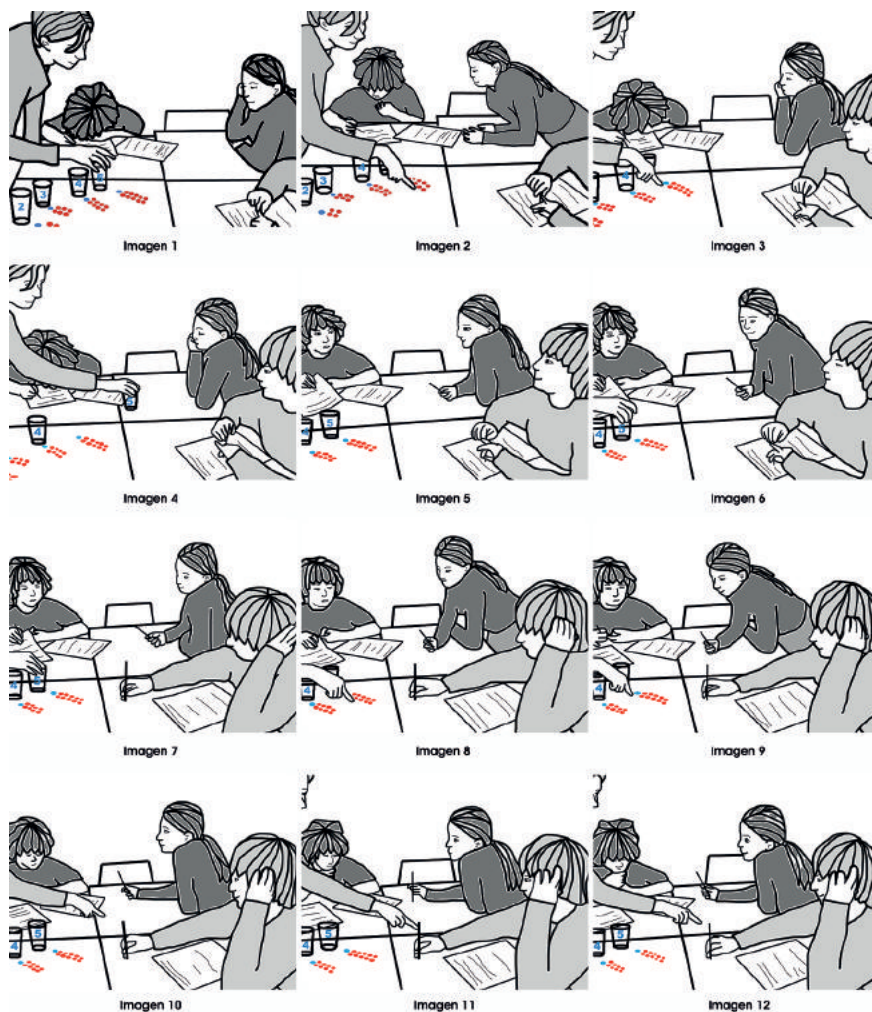


Figura 19. La profesora y Albert se implican en una labor conjunta

Está implícito que la profesora conoce esta estructura algebraica, pero no basta con conocerla. No es suficiente porque la profesora no puede inyectar esta estructura en la consciencia del estudiante. Para que el saber algebraico aparezca, tanto el estudiante como la profesora tienen que trabajar juntos. La profesora y el estudiante deben participar en un proceso de objetivación. Este proceso comenzará a tener lugar cuando el saber buscado salga del ámbito de la atención latente, deje de ser un potencial, y sus partes y conexiones comiencen a cruzar la frontera de la atención

explícita y empiecen a aparecer refractadas en la consciencia de Albert. Pero Albert y la profesora aún no han llegado a ese punto.

Sin hablar, en la línea 80, la profesora mueve la mano para señalar las fichas de bingo rojas (véase la imagen 8). Albert dice: “Por 2”. A continuación, la profesora señala la ficha de bingo azul (imagen 9) y dice, casi al mismo tiempo que Albert, “Más 1”. Luego mueve la mano hacia el punto donde debería estar el modelo de la semana 10 (imagen 10) y dice en voz baja: “¿10?” A continuación, sin hablar, la profesora señala la posición imaginaria de las fichas de bingo rojas (imagen 11), mientras Albert mira el gesto deíctico y dice: “Por 2” (véase la imagen 11).

Esta energía que envuelve a la profesora y a Albert, energía que es sensible y sensual, material e ideacional, discursiva y gestual, y que es un flujo portador de intenciones y motivos parcialmente expresados y parcialmente comprendidos, es la actividad o lo que llamamos *labor conjunta*. Envuelta en esta energía, la profesora mueve silenciosamente su mano para señalar con un gesto deíctico la posición imaginaria de la ficha de bingo azul (véase la imagen 12) y Albert dice: “¿Menos 1? ¿Por 2 menos 1? ¿Más 1?”

En este punto de la actividad/energía/labor conjunta de enseñanza-aprendizaje, se está produciendo el encuentro de Albert con aspectos del saber algebraico. Albert todavía tiene que percibir mejor los distintos componentes y conexiones del saber; tiene que percibir mejor cada uno de los elementos de la fórmula matemática. No le llevará mucho tiempo.

Unos minutos después, la profesora organizó una discusión general. Invitó a varios estudiantes a exponer sus ideas. En un momento dado, pide a Albert que explique los cálculos para determinar la cantidad de dinero al final de la semana 2. La profesora no estaba segura de que Albert conociera ya todos los elementos de la fórmula. Quizás Albert tampoco estaba seguro. La invitación era ciertamente arriesgada. Pero Albert aceptó la invitación y respondió con algunas dudas:

- 191 Albert: (*Refiriéndose a la segunda semana*) Es 2; la segunda semana es dos veces porque se añadieron 2 eh, dólares...
- 192 Profesora: Bien...
- 193 Albert: Entonces, 2 por 2 igual 4, que son las fichas de bingo, los dólares rojos.

- 194 Profesora: Ok (mientras Albert habla, la profesora identifica los dibujos correspondientes de las fichas de bingo en la pizarra; véase la imagen 1 de la figura 20).
- 195 Albert: 4 es dos veces el [número de la] semana.
- 196 Profesora: (Repite, para resaltar la idea) ¡Dos veces la semana!
- 197 Albert: Y 1, más 1, como...
- 198 Profesora: (Para dar sentido a la suma de Albert) Y vas a sumar... (señala el dibujo correspondiente a la ficha de bingo azul en la pizarra; véase la imagen 2).
- 199 Albert: Sí, más uno, lo que hace 5.
- 200 Profesora: Bien... Haz lo mismo con la semana 4. La misma idea, 4.
- 201 Albert: 4 por 2...
- 202 Profesora: 4 por 2 porque es dos veces...
- 203 Albert: Más 1, 4 por 2 más 1 igual 9.

A lo largo de la discusión general, hay una coordinación entre lo que dice Albert y los gestos de la profesora en la pizarra; los gestos se dirigen a Albert y a toda la clase, para dar un sentido visual a lo que dice Albert (véase la figura 20).

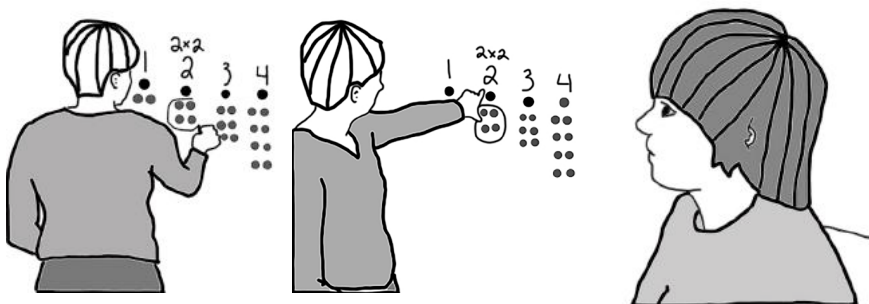


Figura 20. Coordinación de los gestos en la pizarra con lo que dice Albert desde su escritorio

En la línea 195, Albert verbaliza la relación entre las variables. En la línea 196, la profesora aprovecha para subrayar la idea de Albert. En la línea 197 se muestra la adición que no quedó clara para Albert en la línea 89. En la línea 198, la profesora ayuda a completar el significado de la adición. Las líneas 200 a 203 contienen los cálculos de la semana 4.

La lección terminó con esta discusión general. Al día siguiente, los estudiantes trabajaron en un problema isomorfo. El personaje de la historia (el que ahorra dinero) no se llama Marc sino Marianne. En esta ocasión, la alcancía tenía 6 dólares cuando Marianne la recibió y ahorra 3 dólares a la semana, por lo que al final de la primera semana tenía 9 dólares, al final de la segunda semana tenía 12 dólares, y así sucesivamente. Mientras hablaba con sus compañeros de clase sobre cómo calcular los ahorros al final de la semana 10, Albert, dijo: “Añadimos 3 dólares cada semana. Entonces lo haremos así, 3 por 10 es 30 [más 6] es 36. Sí, es 36”.

En un largo proceso de objetivación, que sin duda debe continuar para refinar la toma de consciencia de la forma algebraica de pensar en las secuencias, Albert consiguió reconocer gradualmente la estructura matemática general que subyace al proceso de ahorro. Albert fue capaz de encontrar rasgos importantes de una forma histórico-cultural de pensar algebraicamente relacionada con la secuencia de ahorro, que era el objeto de esas lecciones de matemáticas. Fue capaz de extender esta consciencia a nuevas situaciones durante una evaluación que se realizó para toda la clase más de una semana después del final de las clases de álgebra. En la evaluación se pidió a los estudiantes que encontraran una expresión para el término 25 de la secuencia que se muestra en la figura 21.

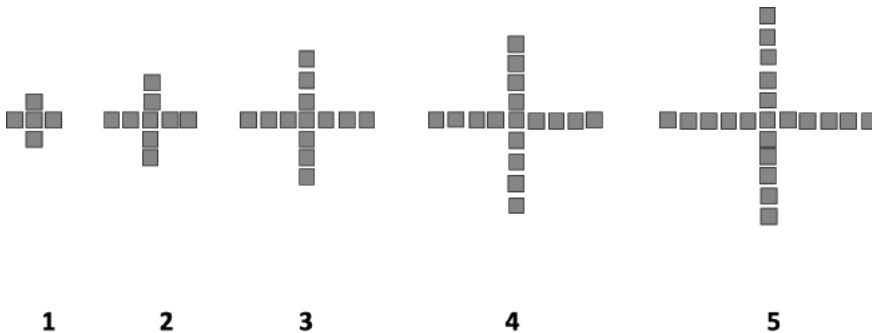


Figura 21. Secuencia presentada en una evaluación que tuvo lugar más de una semana después

La respuesta de Albert fue: $25 \times 4 + 1$. Incluso hizo algo más, ya que sugirió la siguiente fórmula para calcular el número de cuadrados de cualquier término de la secuencia:

$$\text{---} \times 4 + 1 = \text{---}$$

En sus propias palabras, la primera línea de la fórmula “es para el número del término”. El número 4 significa “el número de cuadrados que se suman cada vez. El número 1 es el primer [cuadrado] con el que empezamos. La segunda línea [a la derecha del signo igual] es la respuesta”.

Este ejemplo muestra varios conceptos que he introducido anteriormente. Veámoslos a continuación.

3.1. Labor conjunta

El ejemplo muestra las características morfológicas de la labor conjunta: vemos cómo, como sistema dinámico, la labor conjunta aparece como un fenómeno espaciotemporal cuya textura es una energía que proviene del esfuerzo de los participantes. Esta energía es sensible y sensual, material e ideal, discursiva y gestual, un flujo cuyo curso imprevisible es impulsado por la dinámica de las dimensiones afectivas, intelectuales y éticas que se van configurando a medida que se produce la actividad. Vale la pena repetirlo: este concepto de actividad como labor conjunta no tiene nada que ver con el concepto de actividad de otros enfoques, en los que la actividad se reduce, en el mejor de los casos, a la coordinación de acciones de sujetos y objetos. En la labor conjunta, estudiantes y profesores se implican, trabajan juntos y se comprometen responsablemente.

3.2. Conocimiento

El conocimiento es lo que el profesor y los estudiantes producen por medio de su labor conjunta, lo que llamamos en el capítulo 2 *obra común*. Fenomenológicamente hablando, el conocimiento es esa entidad inteligible que, por medio de la labor conjunta, aparece como un fenómeno sensible de pensamiento y consciencia. En este ejemplo, la entidad inteligible que aparece en el aula es la forma algebraica de ver, percibir, pensar y hablar sobre el problema del ahorro. El conocimiento no es algo psicológico o mental. Es, como la *Séptima sinfonía* de Beethoven interpretada y escuchada

en una sala de conciertos, una entidad sensible. Lo que aparece —el conocimiento— es un *singular*: algo siempre diferente de ejecución en ejecución, de orquesta en orquesta, de director en director, de clase en clase. Y, al igual que la música, lo que hace aparecer el saber es la labor conjunta del profesor y los estudiantes.

3.3. Objetivación

El ejemplo anterior muestra un proceso de objetivación; es decir, un proceso mediante el cual el saber cultural (*Objekt*) se transforma progresivamente en un objeto de consciencia (*Gegenstand*). Esta transformación, sin embargo, no consiste en llevar algo del exterior al interior. El movimiento de transformación va en la dirección opuesta: los estudiantes se mueven hacia algo frente a ellos. Esta transformación conduce a una nueva forma de percibir, hablar y abordar conceptualmente las secuencias numéricas. Esta transformación es al mismo tiempo la transformación de la consciencia, cuyo contenido emocional aparece claramente en la duda expresada por Albert en la línea 89 del diálogo anterior y que luego es sustituida por una forma confiada de calcular. Lo que resulta de un proceso de objetivación no es el producto de las acciones individuales, ni el resultado de la contemplación. El resultado de un proceso de objetivación es el aprendizaje. El aprendizaje es siempre un esfuerzo arriesgado, ya que requiere que abandonemos la comodidad de nuestro propio nicho solipsista para dirigirnos a *la otredad*, a algo distinto de nosotros mismos, una región desconocida en la que, sin embargo, podemos establecer nuestro hogar y sentirnos en casa (Russon, 2017).

En el resto de este capítulo, me ocupo de cuatro conceptos que son importantes en la investigación de los procesos de objetivación y en la explicación del aprendizaje de los estudiantes.

4. Medios semióticos de objetivación

En los procesos de objetivación, por lo general, los profesores y los estudiantes recurren a una variedad de artefactos, signos y otros dispositivos. Estos dispositivos son fundamentales para el modo en que las cosas se hacen notar progresivamente. Estos objetos, herramientas, dispositivos lingüísticos y signos que los individuos utilizan intencionadamente en los

procesos de creación de significados sociales para lograr una forma estable de consciencia, hacer evidentes sus intenciones y llevar a cabo sus acciones para alcanzar la meta de sus actividades se denominan *medios semióticos de objetivación*. Son semióticos en cuanto son piezas clave en la producción de significados incrustados en los procesos de objetivación.

Si volvemos al ejemplo de la alcancía, vemos el importante papel que desempeñaron los vasos, las fichas de bingo y su color en el proceso de objetivación. Fueron importantes para producir una organización visual del modelo de ahorro. En la imagen 4 de la figura 19, vemos cómo la profesora utiliza el vaso de la semana 5 para ayudarse a sí misma y a los estudiantes a imaginar el vaso de la semana 10. Los vasos, las fichas de bingo y el color de las fichas de bingo son ejemplos de medios semióticos de objetivación. Pero las imágenes 2 y 3 muestran también el papel del gesto *indexical* de la profesora (usamos *indexical* en el sentido de que indica o apunta a algo). En la imagen 2, el gesto *indexical* señala las fichas de bingo rojas. En la imagen 3, el gesto *indexical* señala la ficha de bingo azul. Estos gestos *indexicales* también son ejemplos de medios semióticos de objetivación.

Hay otros gestos *indexicales* en este proceso de objetivación. En efecto, las imágenes 10, 11 y 12 muestran tres gestos que son diferentes de los de las imágenes 8 y 9. Mientras que, en las imágenes 8 y 9, el referente del gesto es visible, en las imágenes 10 a 12 no es así: el referente no está ahí. No está en el ámbito de percepción de los estudiantes y la profesora.

Podemos decir que estos gestos *indexicales* cumplen una función *deíctica* diferente. Siguiendo a Bühler (2011), podemos decir que los primeros gestos *indexicales* son *deícticos oculares*: muestran su referente, realizan una *demonstratio ad oculos*. Los segundos gestos de señalamiento, por el contrario, los que no apuntan a nada en el ámbito de la percepción, podemos llamarlos *deícticos am phantasma*.

Ahora bien, si se presta más atención al proceso de objetivación que nos ocupa, se observa también la presencia del lenguaje natural, la prosodia (por ejemplo, la entonación), la posición del cuerpo y el ritmo. Todos ellos son medios semióticos de objetivación. Vienen a ocupar diferentes posiciones en la actividad en general y en el proceso de objetivación en particular. No funcionan solos. Trabajan juntos. Contribuyen al despliegue del significado global y tienen diferentes significados particulares a medida que se desarrolla el proceso de objetivación. Así, los *deícticos am phantasma* en la imagen 11 y en la imagen 12 se refieren a las fichas de bingo rojas y azules, respectivamente.

5. Nodos semióticos

La visión sistémica de la actividad en el aula que se adopta aquí lleva a distinguir “momentos” de la actividad, que se definen en función de lo que el profesor y los estudiantes están haciendo (por ejemplo, trabajar en pequeños grupos o mantener una discusión general en el aula). En esos momentos, se espera que la atención, la consciencia y la comprensión matemática de los estudiantes se muevan hacia el objeto de la actividad. Pero el movimiento de la consciencia no es lineal. En el camino del encuentro con el saber cultural, la consciencia de los estudiantes va en diferentes direcciones, a veces notando algunos de los componentes y conexiones del objeto del saber, y a veces en direcciones diferentes a las esperadas por el objeto didáctico de la actividad. Esto significa que los procesos de objetivación pueden o no estar ocurriendo en un momento determinado de la actividad en el aula. Si intentamos trazar un gráfico de los procesos de objetivación en una clase determinada, podemos encontrar que se producen en determinadas partes de la actividad; pueden interrumpirse y volver a iniciarse más adelante. Si volvemos al episodio comentado en el capítulo 1, los estudiantes empezaron a generar una estrategia que podemos reconocer como aritmética, y no como algebraica (para una discusión de la distinción entre pensamiento aritmético y algebraico, véase Radford, 2014c, 2018c). Si seguimos nuestra definición de proceso de objetivación, no hay proceso de objetivación en la parte de la actividad que va desde el inicio de la lección hasta la línea 28. Hay una actividad en el aula, pero no hay proceso de objetivación todavía. La intervención de la profesora en la línea 29 cambia el curso de la atención y la consciencia de los estudiantes. Podemos decir que empieza a desarrollarse un proceso de objetivación. Si seguimos la actividad (lo que ha sido posible gracias a la posibilidad de grabar en video la actividad de los estudiantes en el aula), observamos que después de la línea 40 (véanse, por ejemplo, las líneas 47 a 55 anteriores) los estudiantes siguen intentándolo sin éxito. Cuando los estudiantes intentan escribir los cálculos que hay que realizar para hallar la cantidad de fichas de bingo en la semana 5, las relaciones entre las variables siguen sin estar claras. En estas líneas, no hay proceso de objetivación. El proceso de objetivación vuelve a aparecer en la línea 67. Y es diferente del proceso de objetivación de las líneas 29 a 40 (capítulo 1). En la terminología del capítulo 3, se han aclarado los componentes y las conexiones del objeto de saber.

Podemos tratar de ir más allá y señalar dentro de un proceso de objetivación aquellas partes del proceso en las que los componentes y las conexiones del saber se van haciendo evidentes para los estudiantes. En el ejemplo que estamos comentando, la relación entre la variable “número de semana” y la variable “número de fichas de bingo” se va aclarando de la línea 77 a la línea 89. Este segmento del proceso de objetivación, en el que los recursos semióticos de distinto tipo pasan a desempeñar un papel crucial, se denomina *nodo semiótico*. Otro ejemplo claro de nodo semiótico es el segmento que va de la línea 191 a la línea 203. Lo interesante aquí es que los gestos son realizados por la profesora en coordinación con el lenguaje de Albert, con lo que él está diciendo (véase la figura 20). Un nodo semiótico es una especie de núcleo de un proceso de objetivación.

En términos más precisos, un nodo semiótico es una parte de la labor conjunta en la que los signos corpóreos y otros signos de diversos sistemas semióticos se ponen a trabajar juntos en los procesos de objetivación. Un nodo semiótico se refiere a segmentos de actividad en los que los estudiantes y los profesores proponen posibles interpretaciones matemáticas y cursos de acción con el telón de fondo de las formas histórica y culturalmente constituidas de pensar y hacer (Radford, Demers, Guzmán y Cerulli, 2003; Radford y Sabena, 2015).

6. Contracción semiótica

Hay un fenómeno que considero una prueba del aprendizaje y sobre el que me gustaría llamar la atención. Si comparamos el segmento de actividad que va de las líneas 191 a 199 con el segmento de actividad que va de las líneas 200 a 203, observamos que las cosas se hicieron más rápido. Observamos el mismo fenómeno si comparamos el segmento que va de las líneas 200 a 203 con el enunciado de Albert reportado cuando estaba tratando con los ahorros de Marianne al día siguiente (por ejemplo, “3 por 10 es 30 [más 6] es 36. Sí, son 36”).

Estamos asistiendo a un proceso genético en el que se toman decisiones sobre lo que se considera relevante e irrelevante. Este proceso conduce a una contracción de la actividad semiótica anterior, lo que da lugar a una vinculación más refinada de los recursos semióticos. La importancia de este proceso es que refleja un nivel más profundo de consciencia e inteligibilidad

del problema en cuestión. Lo considero una prueba del aprendizaje. El nombre de este proceso es *contracción semiótica*²⁶.

7. Concepto

El constructo teórico de *concepto* es otra noción clave de la teoría de la objetivación en su explicación del aprendizaje. Normalmente, se considera que un concepto es un tipo de entidad mental. Este no es el caso en la teoría de la objetivación, en la que un concepto se entiende como una entidad que es al mismo tiempo subjetiva y objetiva, material e ideal, y que se expresa en la actividad práctica y concreta del estudiante. Un concepto es algo que ofrece posibilidades reales de acción: algo que permite al sujeto hacer cosas en un contexto cultural con otros.

Una tradición occidental relativamente antigua que comenzó con Spinoza y que fue continuada por Kant y reapareció en la obra de Davydov es ver el concepto de un objeto como una reproducción mental de la esencia del objeto. En Kant la idea aparece como la reproducción del objeto mediante reglas o normas. Este es su concepto de *esquema* (Radford, 2005). Sin embargo, Heidegger (1977) sugirió que el saber no es la simple aplicación de conceptos. En otras palabras, no hay ninguna regla o norma capaz de revelar en sí misma la esencia del objeto. Por un lado, hay una estética del objeto que escapa a la regla. Por ejemplo, los conceptos de *justo*, *bueno* y *bello* no pueden reducirse a reglas o normas de aplicación o producción, algo que saben muy bien los abogados y los artistas. Pensemos ahora en el peso de un objeto. El peso de un objeto es una medida numérica del mismo. Independientemente de su precisión, no puede revelar el objeto medido en su totalidad. Adopto una posición teórica según la cual la naturaleza más íntima del saber es ser evasivo, ser esquivo. Independientemente de su sofisticación conceptual, los conceptos siempre serán precarios: siempre serán incapaces de dar cuenta por completo del saber que intentan revelar. Hay un exceso de saber, un exceso que no se revela plenamente en el concepto. Y esto también es cierto en el caso de los conceptos científicos.

26 Para otros ejemplos, véase Radford (2008b, 2014c). También encontraremos otros ejemplos en el siguiente capítulo. De hecho, las contracciones semióticas no son difíciles de encontrar; no son fenómenos raros.

Así, creo que, al contrario que Spinoza (1989) y otros filósofos y epistemólogos que le siguieron, el objeto “círculo” no puede reducirse a su regla o norma de producción. Hay una dimensión poética que escapa a la regla. Detrás de mi posición teórica hay una idea muy particular de la relación sujeto–objeto. En lugar de pensar en el objeto como algo que se entrega plenamente a la consciencia por medio de una regla o norma, pienso en esta relación como una relación de contacto en la que el sujeto y el objeto se unen y, al unirse, producen algo híbrido. Creo que esta es otra forma de entender una idea central del materialismo dialéctico, y creo que Vygotsky la seguía cuando busca, en la unidad del hidrógeno y el oxígeno, no un compuesto, sino algo nuevo. Algo nuevo surge de la relación dialéctica de dos cosas diferentes. El concepto y el individuo se fusionan dialécticamente y producen algo híbrido (Moretti, Panossian y Radford, 2018). Esta es la idea que subyace a la noción de concepto que se sugiere aquí: un concepto es algo que nos permite involucrarnos de determinadas maneras en el mundo, algo que, como el lenguaje, en lugar de poseerlo, llegamos a disfrutar. Y al disfrutarlo, al abordar nuevas situaciones, cambiamos, nos transformamos (para una discusión más elaborada del concepto de concepto, véase Radford, 2020c).

Los datos analizados en este capítulo nos proporcionan un ejemplo de concepto. La relativa facilidad y libertad con la que Albert se enfrenta a la semana 4 durante la discusión general y al problema de Marianne al día siguiente son posibles porque Albert ha llegado a habitar un concepto, que le permite enfrentarse también a otros problemas similares, como la secuencia de cruces que los estudiantes encuentran en la evaluación (figura 21). Un concepto, en este sentido, es algo que se aplica a una serie de situaciones. Albert habita un concepto matemático (algebraico): el concepto de generalización algebraica de secuencias lineales, que incluye el reconocimiento de las variables implicadas, su relación funcional, etc. Y recíprocamente, el concepto habita en él. Aunque todavía frágil, este concepto, originado en la actividad, se convierte en un “órgano” del cuerpo de Albert. Esta es la hibridez a la que me refería antes. Al habitar un nuevo concepto, Albert ha cambiado, como sugieren los datos. En efecto, el Albert de los primeros pasajes no es el mismo Albert de los últimos pasajes de la actividad en el aula. El concepto conecta a Albert con la cultura y la historia y lo transforma al mismo tiempo en un sujeto histórico-cultural.

En esta visión del concepto y de los individuos, hay que verlos en movimiento, no de forma estática. Los conceptos tienen fronteras, sus

fronteras se mueven a medida que los individuos que los habitan y disfrutan abordan y reflexionan sobre nuevas situaciones. Los conceptos cambian y, al cambiar, los individuos que los habitan también cambian.

8. Síntesis

En este capítulo, he tratado con cierto detalle el concepto de procesos de objetivación, que sirve para definir el concepto de aprendizaje. Presenté algunas ideas sobre cómo investigar los procesos de objetivación. Con base en las ideas introducidas en los capítulos anteriores, argumenté que el saber se compone de formas de acción y reflexión histórica y culturalmente constituidas. Al principio, en el transcurso de nuestras vidas, estas formas histórico-culturales se nos presentan como simples potencialidades, como capacidades generativas de acción y pensamiento. Tales potencialidades existen en la cultura y es allí donde las encontramos por primera vez. Pero no las encontramos directamente. Para ser encontradas, estas potencialidades deben ponerse en movimiento y hacerse inteligibles para la consciencia y el pensamiento. En el caso de la geometría, por ejemplo, estas potencialidades incluyen formas de acción y reflexión histórica y culturalmente constituidas sobre el espacio y sus objetos. Incluyen una concepción de las figuras y una serie de reflexiones sobre ellas (por ejemplo, su clasificación cultural, cómo representarlas, cómo medirlas, cómo establecer verdades sobre sus propiedades, etc.). En la línea de investigación que sigo aquí, la consciencia no puede captar estas potencialidades como tales. Por ejemplo, Albert (o cualquiera de nosotros) no puede captar una forma de pensamiento como tal. Una forma de pensamiento es un todo (un todo dinámico y siempre cambiante) y no puede revelarse *in toto*. Estas potencialidades solo pueden aparecer de forma transformada. Esta transformación es la materialización del saber, el saber revelado por medio de una presencia sensible, tangible, y es lo que hemos llamado conocimiento: la aparición del saber como una forma singular desarrollada.

Lo que hace posible la transformación del saber en conocimiento es la actividad —la actividad humana, sensible y práctica—.

Frente a un problema elemental algebraico, geométrico o de otro tipo, el matemático es capaz de realizar una actividad sensible, material e ideal con vistas a resolver el problema dado. En el curso de esta actividad, la capacidad generativa cultural se materializa sensiblemente por medio de

signos, diagramas, lenguaje, atención, percepción teórica, etc., que dejan huellas visibles sobre las que el matemático puede seguir reflexionando. A Kant le divertía y le resultaba curioso que los geómetras empezaran a hacer matemáticas volviendo sensible aquello de lo que hablaban o pensaban. Si el tema es sobre triángulos, el geómetra, observaba Kant, “comienza de inmediato construyendo un triángulo” (Kant, 2003, A716/B744, p. 579).

Ya he mencionado que, cuando preguntamos a los matemáticos el número de cuadrados en el Término 100 de la secuencia mostrada en la figura 7 (capítulo 3), el matemático “ve” muy a menudo que los términos de la secuencia están formados por dos filas. Al hacer una generalización muy rápidamente, es capaz de imaginar las siguientes filas y deducir que habrá $100 + 101$ cuadrados en el Término 100. El conocimiento, es decir, la aparición sensible del saber por medio de esta actividad se produce sin problemas. No es el caso del estudiante que apenas comienza a encontrarse con esa forma histórico-cultural de acción y pensamiento que llamamos álgebra elemental. El estudiante novato todavía tiene que encontrarse con estas formas de pensamiento, acción y reflexión.

En este contexto teórico, sugerí que el aprendizaje es nuestro encuentro con estas formas, un encuentro que tiene lugar en lo que hemos llamado procesos de objetivación. Estos procesos se definen como procesos que ocurren dentro de una actividad mediante la cual, al adquirir una forma singular desarrollada, el saber se muestra. Esta aparición fenomenológica del saber es, en efecto, la única manera de que el saber se convierta en objeto de consciencia para nosotros los humanos.

El ejemplo de la alcancía que he comentado ilustra estas ideas. Presentamos a los estudiantes de cuarto grado una serie de problemas (de ahorro) cada vez más difíciles cuya meta era la materialización de una forma de pensar histórico-cultural que reconocemos como algebraica. Esta forma de pensar no puede aparecer de la nada. Solo puede materializarse (es decir, llenarse de contenido teórico) mediante una actividad Θ . Nuestra configuración didáctica de la actividad —nuestro componente Φ (véase la figura 16)— favoreció un contenido teórico en el que se buscaba una fórmula generalizada, al utilizar preguntas conceptuales específicas de dificultad creciente, objetos materiales culturales (vasos, fichas de bingo, papel, bolígrafo) y formas sofisticadas de cooperación social (véase la figura 17).

Los extractos presentados de la actividad en el aula muestran que la forma de pensamiento histórico-cultural pasó inicialmente inadvertida para los estudiantes, que recurrieron a formas aritméticas de generalización.

Para que los estudiantes puedan encontrar las formas de pensamiento algebraico, la actividad de enseñanza-aprendizaje tiene que desarrollarse de tal manera que las formas de pensamiento algebraico a las que se dirige la actividad se conviertan en objetos de consciencia, es decir, que puedan ser reconocidas. Reconocer aquí no significa encontrar algo que ya hemos visto. Reconocer es el establecimiento de una relación de diferencia entre el “yo” y lo que se ha reconocido. Más concretamente, es nuestro intento de superar la diferencia. Según Heidegger, “*re-conocer* = diferenciar, es decir, algo como eso y aquello, y así *captarlo* como ‘sí mismo’” (Heidegger, 2004, p. 16, énfasis en el original).

“Eso” que Albert todavía parece no percibir con claridad es lo que aparece tímidamente en las líneas 79 a 81, cuando Albert empieza a notar que puede haber una forma diferente de ver las fichas de bingo. Comienza una diferenciación, es decir, un reconocimiento, un encuentro. El siguiente intenso intercambio entre la profesora y Albert, en el que ambos laboran juntos, conduce a una materialización del saber. En medio de un proceso conjunto de objetivación, la forma histórico-cultural del pensamiento algebraico (*Objekt*) aparece progresivamente a la consciencia dotada de un contenido teórico específico (aparece como *Gegenstand*).

Metodológicamente hablando, la identificación de los nodos semióticos y los medios semióticos de objetivación movilizados por el profesor y los estudiantes proporciona una especie de ventana a la investigación de los procesos de objetivación. Un ejemplo de nodo semiótico es el segmento que va de la línea 77 a la línea 89. En este nodo semiótico, reconocemos los vasos, las fichas de bingo, el color de las fichas de bingo, los gestos, el lenguaje, el ritmo y la prosodia como medios semióticos de objetivación. La investigación de los nodos semióticos y de los medios semióticos de objetivación proporciona una información rica e importante sobre cómo se produce el aprendizaje.

El concepto de contracción semiótica proporciona información adicional sobre los procesos de objetivación que subyacen al aprendizaje. La contracción semiótica muestra, en efecto, cómo y en qué medida los estudiantes van tomando consciencia del contenido conceptual singular del saber materializado en conocimiento.

Ahora bien, la consciencia de este contenido conceptual único lleva a aplicarlo no solo a tal o cual problema de la alcancía. Albert es capaz de aplicarlo también a otros problemas, como el problema abordado durante la evaluación, que no tiene nada que ver con el ahorro. En la terminología

introducida en este capítulo, Albert ha llegado a habitar un concepto. Un concepto es la versión subjetiva del saber cultural. Es la refracción del saber en la consciencia del individuo por medio de las formas sensibles desarrolladas del saber que aparecieron en la actividad. En nuestro ejemplo, la refracción del saber en la consciencia de Albert lo transforma y le permite participar de nuevas maneras en el mundo. En este sentido, el concepto es una entidad híbrida en la que la naturaleza orgánica e inorgánica (histórico-cultural conceptual) produce un nuevo Albert, al que, aunque diferente al del inicio de las actividades de álgebra, seguimos llamando Albert.

Agradecimiento

Esta es una versión revisada y ampliada de Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44. Agradezco a la revista la autorización para usar y ampliar las ideas allí presentadas.

Capítulo 6

Corporalidad

En este capítulo, presento una visión general de la corporalidad en la teoría de la objetivación y examino en particular el concepto resultante de cognición sensual o sensible (*sensuous cognition*). Comienzo mencionando algunos de los problemas a los que se enfrentan las teorías de la corporalidad en su explicación de la naturaleza del pensamiento. Sostengo que las explicaciones que ofrecen las teorías de la corporalidad sobre la naturaleza del pensamiento deben afrontar el problema de la relación entre el cuerpo como lugar de constitución de significados subjetivos de los estudiantes y el sistema histórico-cultural de significados matemáticos que los estudiantes encuentran en la escuela. En la explicación de la corporalidad que sugiero, el cuerpo, los sentidos y los objetos de sensación no se consideran entidades dadas, sino entidades mutuamente transformadas por la actividad histórico-cultural. En esta línea de pensamiento, la cognición sensual o sensible se refiere a la idea de que la cognición humana es una forma multimodal sensible histórica y culturalmente constituida de responder, actuar, sentir, transformar y dar sentido al mundo de forma creativa. Ilustro estas ideas por medio de algunos episodios en una clase de segundo grado.

1. Introducción

La corporalidad se ha convertido en uno de los temas más destacados de la investigación reciente en el ámbito de la Educación Matemática y en

otros ámbitos. La corporalidad viene con una promesa: hacernos superar la tradición idealista occidental que concibe a la actividad mental como la productora y generadora de las ideas del individuo. Para los teóricos de la corporalidad, este supuesto idealista es inexacto, si no erróneo. Algo muy importante ha quedado fuera de la ecuación epistemológica: el cuerpo. Y algunos afirman que no se trata solo del cuerpo, sino de algo que engloba al cuerpo: la materia. La promesa de la corporalidad parece ciertamente fascinante e invita a la reflexión. La corporalidad promete llevarnos por un nuevo camino para explorar aspectos de la cognición humana que, por estar mirando hacia otro lado, ocupados en encontrar el origen de las ideas en los mecanismos internos de la mente, se nos pasaron por alto.

El nuevo camino, sin embargo, está poblado de una serie de problemas teóricos que el paradigma de la corporalidad debe superar si quiere ir más allá del idealismo y del empirismo clásico. En efecto, el cuerpo, con toda su materialidad, podría seguir siendo considerado como el refugio del “yo” trascendental del idealismo²⁷. En este caso, el cuerpo no sería más que una versión ampliada de la mente del individuo, de modo que lo que antes se consideraba “mental” aparece ahora con un nuevo nombre, “corpóreo”, pero en el fondo seguiríamos hablando de lo mismo. Lo que habría cambiado es el recurso a un vocabulario ampliado. Los gestos, por ejemplo, serían una especie de “ventanas” que nos permitirían vislumbrar el interior de la mente del individuo para ver cómo produce sus ideas. O bien, siguiendo la línea del empirismo, el cuerpo también podría verse como aquello por medio de lo cual producimos el saber. La génesis del saber se encontraría en lo que tocamos, percibimos y olemos, en las sensaciones kinestésicas de nuestra experiencia sensual o sensible del mundo. Pero, entonces, al final de nuestro viaje, después de haber recorrido el nuevo camino prometido por el paradigma contemporáneo de la corporalidad, nos encontraríamos con los fantasmas de Locke, Hume y otros empiristas de los siglos XVII y XVIII que nos dirían que, efectivamente, eso es lo que ellos decían. Podrían reconocer que nuestros teóricos contemporáneos de la corporalidad han llevado sus ideas más lejos; reconocerían quizás la fineza de análisis que permiten las grabaciones, pero, al final, no dirían que, en

27 Ya nos hemos encontrado con la idea del “yo” trascendental; se trató en la sección anterior 4.3.1. Es el “yo” trascendental del que se ocupa Hegel (1991) en la sección 47 de su *Enciclopedia*.

esencia, estamos hablando de lo mismo, que todavía estamos navegando en las aguas del empirismo.

Para ir realmente más allá del idealismo y el empirismo, para ir más allá de la testaruda dicotomía entre la razón y los sentidos, necesitamos dar una explicación convincente de las categorías teóricas que a menudo se invocan en la teorización de la corporalidad, como lo que se entiende por lo conceptual y lo corpóreo, lo ideal y lo material, y sus relaciones.

La aparente ausencia de explicaciones convincentes de estas categorías ha llevado a algunos críticos, como Terry Eagleton, a ver en las perspectivas contemporáneas de la corporalidad no más que “el retorno en un registro más sofisticado del viejo organicismo” promovido por los empiristas del siglo xvii y una muestra del “culto posmoderno al placer” y el amor contemporáneo por lo concreto (Eagleton, 1998, pp. 157-158). Lo que Eagleton teme es que las perspectivas contemporáneas de la corporalidad sigan atrapadas en el sujeto sensorial y, por tanto, en una curiosa forma de subjetivismo radical con posibilidades poco claras de recuperar el contacto con la cultura y la historia (Eagleton, 1996).

Con base en los trabajos de Vygotsky (1987), Leont'ev (1974, 1978, 2009b) y en el materialismo dialéctico hegeliano (Ilyenkov, 1977), en este capítulo articulo la idea de la cognición sensual o sensible, una perspectiva teórica histórico-cultural en la que mente, cuerpo y mundo se conciben como entidades entrelazadas. La cognición sensual o sensible subraya la idea de que nuestro pensamiento, nuestros sentimientos, nuestros actos y, de hecho, todas nuestras relaciones con el mundo (oír, percibir, oler, sentir, etc.), son entrelazamientos históricos de nuestro cuerpo y la cultura material e ideacional. En consecuencia, nuestros sentidos cambian junto con los cambios en nuestra cultura material e ideacional (saber, espiritualidad, etc.).

A la luz de lo dicho en los capítulos anteriores, la relevancia de la corporalidad en la teoría de la objetivación es fácil de adivinar. Los procesos de objetivación que ocurren en la actividad de enseñanza-aprendizaje son encuentros sensibles y críticos con el saber. En estos encuentros, para dotar de significado a lo que se encuentra —es decir, el saber—, los profesores y los estudiantes participan con el cuerpo y los sentidos. La corporalidad aparece, por tanto, en la teoría de la objetivación como una forma de tacto que surge en un encuentro. Pero en lugar de suponer que lo que se toca está simplemente ahí, y que el que toca también está simplemente ahí, de modo que el toque es una especie de contacto entre dos entidades ya

dadas, el *toque* (*the touch*) al que nos referimos aquí es algo que produce y transforma al que toca y al tocado. El objeto tocado produce al sujeto que lo siente y, en un movimiento dialéctico, el sujeto que lo siente produce el objeto tocado. El tacto, el tercer elemento que está en relación con el sujeto y el objeto, es, como se puede intuir de la forma conceptual general de la teoría de la objetivación (véase la figura 9 del capítulo 3), una actividad humana práctica, concreta y material. La corporalidad en la teoría de la objetivación es, pues, un esfuerzo por superar la primacía del sujeto; es también un esfuerzo por superar la primacía del objeto²⁸.

2. El entrelazamiento de los sentidos y la cultura

Al leer la obra de Feuerbach, Marx notó que su filósofo compatriota partía de un supuesto dudoso. Feuerbach adoptaba una perspectiva ingenua sobre la materialidad del mundo. Ya he escrito sobre este problema en el capítulo 2 (sección 3.7), cuando mencioné el caso del cerezo, que, a los ojos de Feuerbach, aparece ante nosotros en todo su esplendor, con una certeza sensual o sensible. Ludwig Feuerbach era un hegeliano convertido al empirismo. En *Philosophy of the Future* (*La Filosofía del futuro*), Feuerbach sostenía que

Lo real en su realidad o tomado como real es lo real como objeto de los sentidos; es lo sensual o sensible. La verdad, la realidad y la sensación son idénticas. ... Solo por medio de los sentidos, y no por medio del pensamiento por sí mismo, se da un objeto en un sentido verdadero. (1966, p. 51)

Las *Tesis sobre Feuerbach* son un conjunto de once proposiciones (o tesis) que Marx escribió en un cuaderno. No se trata de un producto acabado, sino apuntes de ideas apenas esbozadas. Aquí nos interesa la primera tesis. La primera frase de la primera tesis dice lo siguiente:

28 En *Empiricism and Subjectivity* (*Empirismo y subjetividad*), Deleuze (1991) explora los tipos de subjetividad moderna que surgieron de la corriente empirista de los siglos XVII y XVIII, una corriente que, con Hume, conduce al problema de la secularización del conocimiento.

El principal defecto de todo el materialismo anterior —incluido el de Feuerbach— es que las cosas [*Gegenstand*], la realidad, la sensibilidad se conciben solo bajo la forma de objeto, o de contemplación. (Marx, 1998, p. 572)

En esta frase, Marx critica a Feuerbach por suponer que el objeto de la sensación es meramente dado, ya que podría prestarse sin problemas al sujeto sensible. ¿Qué es lo que falta aquí? El problema es que, al destacar el objeto, no se tiene en cuenta al sujeto. Veamos la frase completa:

El principal defecto de todo el materialismo anterior —incluido el de Feuerbach— es que las cosas [*Gegenstand*], la realidad, la sensibilidad se conciben solo bajo la forma de objeto, o de contemplación, pero no como actividad humana sensual o sensible, de praxis, no subjetiva. (Marx, 1998, p. 572; traducción ligeramente modificada)

El materialismo de Feuerbach separa el sujeto y el objeto. Los objetos culturales, como los objetos de producción, por ejemplo, aparecen como objetos en sí mismos. Este tipo de materialismo no capta la distinción entre *Objekt* y *Gegenstand* que mencioné en el capítulo 4; es decir, la distinción entre objetos de la cultura y objetos desde un punto de vista subjetivo (como objetos de consumo u objetos de deleite estético). Esta era la dudosa suposición de Feuerbach a los ojos de Marx²⁹.

A la frase anterior le sigue la siguiente, en la que la crítica se dirige ahora al idealismo. En efecto, para solucionar el problema, el idealismo hizo hincapié en el sujeto como agente activo: “De ahí que el lado *activo*, en contradicción con el materialismo, fuera planteado por el idealismo” (Marx, 1998, p. 572). Sin embargo, argumenta Marx, el movimiento de fijación erró su objetivo, porque lo que hizo el idealismo fue considerar al individuo y su activación o actividad de manera abstracta. He aquí la frase completa:

De ahí que el lado activo, a diferencia del materialismo, fuera expuesto por el idealismo, pero solo de forma abstracta, ya que, por supuesto,

29 Podemos ver la distinción de Marx en la frase original: “Der Hauptmangel alles bisherigen Materialismus (den Feuerbachschen mit eingerechnet) ist, daß der *Gegenstand*, die Wirklichkeit, Sinnlichkeit nur unter der Form des *Objekts* oder der *Anschauung* gefaßt wird” (Marx, 1845; Archivos marxistas en internet; énfasis añadido). Marx separa cuidadosamente *Gegenstand* y *Objekt*.

el idealismo no conoce la actividad real, sensual o sensible como tal.
(Marx, 1998, p. 572)

El individuo aparece de forma abstracta, ya que se le considera sin contexto; se considera que el individuo actúa libremente, según sus caprichos y sus poderes naturales. De hecho, este es el modo en que aparece el individuo en muchas explicaciones contemporáneas sobre la corporalidad. La obra de Maxine Sheets-Johnstone es un ejemplo de ello. Para ella, estamos dotados de una especie de animación originaria y de una espontaneidad cinética original

que infunde nuestro ser y define nuestra vitalidad, es nuestro punto de partida para vivir en el mundo y darle sentido. Es el fundamento epistemológico de nuestro aprendizaje para movernos con respecto a los objetos, y, por lo tanto, la base de un repertorio en desarrollo de “yo puedo” (“I cans”) con respecto a la serie de objetos naturales y artificiales que nos rodean como individuos en nuestros mundos particulares. (Sheets-Johnstone, 2011, p. 117)

Gracias a esta animación primaria, el individuo se mueve y, al hacerlo, se convierte en una “consciencia [corpórea] constitutiva del mundo” (p. 128). Los objetos del mundo, como los objetos de consumo, para seguir con nuestro ejemplo, se postulan como meramente subjetivos, no históricos, e independientes de la producción cultural que los subsume.

Como vemos, el idealismo comete el mismo error que el materialismo de Feuerbach: también separa el sujeto y el objeto. Mientras que el idealismo pone el acento en el sujeto, el materialismo de Feuerbach lo hace en el objeto. Para Marx, las cosas, la realidad, la sensibilidad tal y como las concibe el idealismo, el materialismo de Feuerbach y los materialismos anteriores (por ejemplo, el de Demócrito) terminan en un materialismo mutilado

al que debemos oponer un materialismo completo, es decir, un materialismo que restablezca el vínculo roto entre el sujeto y el objeto, un materialismo que requiere aportar el concepto de ... praxis, que combina ambos aspectos. Solo este concepto es capaz de establecer la conexión entre un objeto, un elemento determinado de la realidad natural, y un sujeto activamente comprometido en la obra de transformación del mundo. (Macherey, 2008, p. 40)

La praxis o actividad (*Tätigkeit*, en la terminología alemana de Marx) no es algo abstracto que tenga lugar con individuos abstractos (sujetos epistémicos, sujetos cognitivos, etc.). La actividad en el sentido de la *Tätigkeit* tiene lugar con individuos de carne y hueso en su realidad histórico-cultural práctica y sensual o sensible. En lugar de desarrollarse meramente *in situ*, especulativamente, como algo que ocurre naturalmente, de la nada, la actividad (*Tätigkeit*) es, por el contrario, un proceso histórico. La actividad, tomada en este sentido, sigue, en efecto, “un movimiento no solo natural sino histórico” (Macherey, 2008, pp. 40-41). “En lugar de concebir el mundo como un todo objetivo dado de manera natural”, la actividad humana realiza “la fusión concreta de lo subjetivo y lo objetivo” (p. 41).

En resumen, el concepto de actividad o praxis de Marx es un esfuerzo explícito por superar ambos: (a) el idealismo especulativo que dota a la consciencia de falsos poderes constitutivos y (b) el falso sensualismo materialista concreto de Feuerbach que concibe los sentidos y lo concreto de manera abstracta, como si los sentidos fueran entidades naturales estrictas del orden de la naturaleza y solo de la naturaleza. De este modo, la primera de las *Tesis sobre Feuerbach* logra una inversión de perspectiva al trasladar la concepción de los sentidos y de la realidad del cielo a la tierra. Lo hace, al sustituir la postura especulativa del idealismo y el materialismo por la idea de que el objeto, la realidad y la sensibilidad son entidades que solo pueden entenderse con el telón de fondo de la actividad humana práctica; es decir, de la labor histórica humana. Pasamos aquí de una visión de los sentidos, el cuerpo y el mundo material en la que los sentidos y el cuerpo se conciben como algo natural o meramente entrelazados con el mundo material a una visión según la cual los sentidos, el cuerpo y el mundo material se producen histórica y culturalmente.

Al referirse al materialismo en general, Fischbach (2015) señala que “El material sensible en el que se han basado los materialistas (tanto las cosas sensibles como las facultades humanas, la sensibilidad humana) ha sido tomado como un dato *de facto* y no como el producto sensible de una actividad humana en sí misma sensible” (p. 31). Para explicar el significado que adquieren las facultades sensibles humanas en la aproximación filosófica de Marx, Fischbach continúa:

Las facultades sensibles [humanas], como el oído o la vista, no son dadas idénticas a sí mismas desde toda la eternidad ... son producidas, son el resultado de la actividad humana y son modificadas por ella, participan en esta actividad y son un aspecto de esta. (p. 31)

Los sentidos y su desarrollo histórico, cultural y político están entrelazados con los objetos que producen y a los que atienden, no como objetos trascendentales o como meros objetos de tacto y percepción, sino como objetos de la actividad humana. Al encontrarse con estos objetos histórico-culturales creados por las generaciones anteriores, los seres humanos crean la sensibilidad humana y, al hacerlo, los seres humanos expresan y confirman lo que Marx (1988) llama las facultades esenciales humanas.

Solo por medio de la riqueza objetivamente desplegada del ser esencial del hombre [*sic*] se cultiva o se hace realidad la riqueza de la *sensibilidad humana* subjetiva (el oído musical, el ojo para la belleza de las formas, en suma, los *sentidos* capaces de gratificaciones humanas, los sentidos que se confirman como potencias esenciales del *hombre*). Pues no solo los cinco sentidos, sino también los llamados sentidos mentales —los sentidos prácticos (voluntad, amor, etc.), en una palabra, el sentido *humano*, la humanidad de los sentidos— llegan a ser en virtud de su objeto, en virtud de la *naturaleza humanizada*. La *formación* de los cinco sentidos es una labor de la naturaleza humanizada. La *formación* de los cinco sentidos es un trabajo de toda la historia del mundo hasta el presente. (pp. 108-109, énfasis en el original)

La actividad histórico-cultural que tiene que ver con la naturaleza, los objetos humanos y la realidad, es por tanto el vínculo entre lo subjetivo y lo objetivo, entre el sujeto y el objeto, y el terreno en el que se forman los sentidos humanos.

A partir de estas ideas, en la siguiente sección abordo el sentido de la percepción.

3. Percepción

Hace muchos años, en un artículo muy famoso, Lettvin, Maturana, McCulloch y Pitts (1959) identificaron algunas operaciones de imagen en el sistema visual de la rana. Dotada de estas operaciones básicas (que incluyen la curvatura y el movimiento) la rana puede, dentro de ciertos límites, hacer distinciones perceptivas. Así, mientras que parece incapaz de ver presas inmóviles y, por tanto, se muere de hambre en una jaula llena de insectos muertos (Roth, 1986), la rana es capaz de distinguir presas en movimiento de diferentes tamaños (Anderson, 1993) y colores (Hatle y Salazar, 2001).

Con un sistema visual considerablemente más complejo, los humanos pueden discernir una panoplia mayor y más extraordinaria de diferencias y similitudes. Si los seres humanos no tuvieran esta capacidad de discernimiento, el saber, el conocimiento y la formación de conceptos (como los conocemos actualmente) serían sencillamente imposibles. El mundo que tenemos ante nosotros se reduciría a una miríada de hechos únicos e inconmensurables: todo sería diferente de todo lo demás y las semejanzas entre las cosas serían imposibles de imaginar. No seríamos capaces de notar *las semejanzas* entre cosas diferentes y tampoco las diferencias entre cosas semejantes. Pero ¿cómo aprendemos a hacer distinciones? ¿Cómo aprendemos a distinguir lo similar de lo diferente?

Las operaciones básicas del sistema visual de la rana están incorporadas genéticamente. Constituyen lo que Lettvin et al. (1959) llaman, al utilizar un término inspirado en Kant, el *sintético fisiológico a priori*, es decir, el sustrato fisiológico que permite a la rana ver el mundo de la manera en que lo hace. ¿Y los humanos?

Las investigaciones sobre la percepción sugieren que los bebés empiezan a notar los parecidos y las diferencias en los primeros años posnatales. Aunque al nacer las pupilas aún no están completamente dilatadas (lo que limita la capacidad de fijación y discriminación de objetos), la sensibilidad visual se desarrolla gradualmente a lo largo de los primeros años. Entre los 5 y 6 meses, los bebés son conscientes de su entorno y coordinan los movimientos de los ojos y las manos. Hacia los 5 y 7 años, las funciones básicas asociadas a las áreas sensoriales corticales del niño completan su desarrollo. Las capacidades básicas de procesamiento sensorial del niño coinciden con las del adulto (Atkinson, 2000; Farroni y Menon, 2008). A esta edad, podemos asumir en principio que el niño puede ver el mundo como lo hace el adulto.

De hecho, esto no es exactamente así. Lo que *a priori* podría llamarse la *síntesis fisiológica* del ser humano resulta ser muy sensible al contexto social y al desarrollo de otros órganos sensoriales que llegan a afectar a la forma de ver el mundo. El desarrollo de la visión incluye, en efecto, varias áreas corticales y subcorticales. Como resultado, al igual que toda experiencia sensorial, la experiencia visual “puede influir en la forma en que el cerebro se cablea después del nacimiento” (Farroni y Menon, 2008, p. 5). Al final, lo que vemos no es el resultado de entradas directas, sino de estímulos ya filtrados por significados e información sobre los objetos y los acontecimientos del mundo, significados transmitidos por el lenguaje y otros

sistemas semióticos culturales. Por lo tanto, a diferencia de la percepción de la rana, en lugar de ser un acto puramente biológico, la percepción humana es un proceso social de principio a fin. La percepción humana es, como dice Wartofsky (1984), “un artefacto cultural moldeado por nuestras propias prácticas históricamente cambiantes” (p. 865).

Los llamados niños salvajes o asilvestrados (niños que, por alguna razón, han vivido fuera de la sociedad) nos proporcionan otro ejemplo que ilustra la conformación histórico-cultural de los sentidos. Uno de estos niños fue encontrado en los bosques de Aveyron, entre Montpellier y Toulouse en Francia, en 1800. El niño pequeño es descrito por Humphrey de la siguiente manera:

[él] trotaba y gruñía como las bestias del campo ... era aparentemente incapaz de prestar atención o incluso de percepciones elementales ... y pasaba su tiempo apáticamente meciéndose hacia adelante y hacia atrás como los animales del zoológico. (Humphrey en Itard, 1962, p. vi)

El llamado niño salvaje de Aveyron —o Víctor, como se le llamó más tarde— fue puesto bajo el cuidado del Dr. Jean-Marc-Gaspard Itard, quien diseñó una serie de ejercicios para enseñar a Víctor a hablar y ponerse al día con el desarrollo de sus facultades intelectuales. Así, el niño empezó a distinguir progresivamente entre el sonido de una campana y el de un tambor, pasó a discernir entre los tonos de un instrumento de viento y, más tarde, distinguió entre las vocales. Itard (1962) comenta:

No sin dificultad y con mucho retraso conseguí por fin darle una idea clara de las vocales. La primera que distinguió claramente fue la O, después la A. Las otras tres presentaron mayor dificultad y durante mucho tiempo las confundió. (p. 58)

El entrenamiento de los sentidos de la vista y el tacto siguió al entrenamiento del sentido del oído. Aunque desde el punto de vista del desarrollo, Víctor no pudo ponerse al día completamente, el ejemplo muestra claramente que, sin la vida en sociedad, el conjunto biológico bruto de reacciones de orientación-ajuste con el que nacemos permanece sin desarrollar. A medida que vivimos en sociedad, interactuamos con los demás y participamos en formas de entrenamiento más o menos especializadas, las reacciones biológicas de orientación-ajuste sufren una transformación cultural y se convierten en complejas formas de percepción históricamente constituidas (por ejemplo, formas de ver, tocar, oír y saborear) que

conducen a características específicas del desarrollo humano y a las formas concomitantes de reflexión cultural (Radford, 2014a).

La reflexión, tal como se entiende aquí, no puede considerarse un acto pasivo de recepción de impresiones sensoriales, como sostienen los empiristas de los siglos xvii y xviii. La reflexión implica ambos: (a) algo que trasciende al organismo como tal (algo que, para diferenciarlo del propio sujeto, podemos llamar “objetivo”, es decir, el objeto —*Objekt*— de reflexión) y (b) el objeto reflejado (*Gegenstand*), algo que es subjetivo (en el sentido de que la reflexión depende del organismo concreto que refleja el entorno). En este relato, la reflexión es una categoría relacional entre el sujeto y el objeto que los mantiene enlazados entre sí. La reflexión de la evolución filogenética da lugar a una serie de relaciones sensoriales o sensibles entre el organismo y el mundo (sensaciones térmicas y de otro tipo, movimiento, etc.). En el caso de los humanos, el entrelazamiento de sujeto y objeto, mente y mundo, adquiere una dimensión específica en virtud de su capacidad históricamente evolucionada de interactuar con el mundo y con los miembros de la especie.

La comprensión de los modos en que percibimos cosas concretas y las generalizamos al hacer la experiencia del mundo es, por supuesto, un tema importante de la investigación educativa. Que hay muchas formas de percibir, algunas definitivamente incompatibles con otras, lo atestiguan en gran medida los resultados de las investigaciones realizadas en diferentes campos, como la historia, la sociología, la antropología (Dzobo, 1980; Kawagley, 1990) y las matemáticas (por ejemplo, Bowers y Lepi, 1975; Crump, 1990; Harris, 1991; Lancy, 1983; Lizcano, 2009; Owens, 2001; Pumuge, 1975). La cuestión es que, a pesar de lo que afirman la epistemología piagetiana y otras epistemologías racionales y sus teorías asociadas sobre el desarrollo humano, hay innumerables maneras de abstraer y generalizar los hechos, siempre individuales y contingentes, que nos dan intuitivamente los sentidos y que están filtrados por la cultura. En el transcurso de nuestro desarrollo ontogenético, los sentidos y nuestra comprensión se moldean de determinadas maneras históricamente formadas a medida que participamos en prácticas socioculturales.

El ejemplo de clase que sigue se centra en la transformación ontogenética de la percepción de los estudiantes. Explora dicha transformación como resultado de la participación en algo que parece faltar en las ranas, es decir, la actividad simbólica, artefactual y colectiva de niveles variados de sentido.

4. Un ejemplo de aula

El siguiente ejemplo procede de un estudio longitudinal realizado en una clase de segundo grado (estudiantes de 7 a 8 años). Me centraré en dos pasajes de una actividad de generalización en torno a una secuencia figuraral que ya he mencionado en capítulos anteriores. Lo que quiero discutir es la manera en que la percepción de los estudiantes se transforma en una forma cultural teórica de percepción necesaria para abordar preguntas de generalización.

4.1. Intención y percepción

Al principio de una actividad de cinco días, los estudiantes y la profesora exploraron juntos algunas secuencias. La figura 22 muestra una de las secuencias utilizadas en la actividad matemática del aula.



Figura 22. Los cuatro primeros términos de una secuencia investigada en una clase de segundo grado

En el primer problema, los estudiantes debían continuar la secuencia hasta el término 6. En el siguiente problema debían discutir si el dibujo del término 8 realizado por Monique —una estudiante imaginaria de segundo grado— era o no correcto (véase la figura 23). Se invitó a los estudiantes a debatir juntos y a dar una respuesta y una razón que justificara su respuesta.



Figura 23. El término dibujado por Monique

Como se mencionó en el capítulo 4, al abordar los problemas 1 y 2, algunos estudiantes se centraron en la relación numérica entre los términos

consecutivos, al observar que había dos cuadrados más entre un término y el siguiente. No aprovecharon las pistas espaciales sugeridas por la disposición de los cuadrados en cada término. La figura 24 muestra dos ejemplos. En la imagen de la izquierda, un estudiante (James) dibuja el término 6. En la imagen del centro, se presentan los términos de James —término 5 (arriba) y 6 (abajo)—. En la imagen de la derecha, se presenta el término 8 según otra estudiante (Sandra).

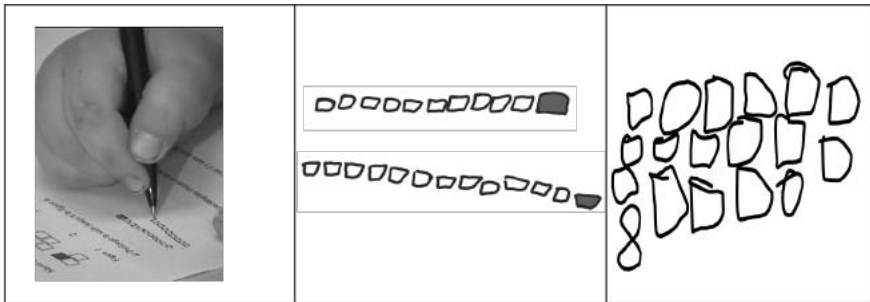


Figura 24. Dos ejemplos de términos propuestos por estudiantes

Como se muestra en la parte central de la figura 24, los términos 5 y 6 de la secuencia se dibujaron como si tuvieran una sola fila cada uno. En otros casos, los términos se dibujaron como si tuvieran más de dos filas (véase la imagen derecha de la figura 24). ¿Por qué? Al contrario de lo que ha afirmado la psicología empírica, la imagen de un objeto en la consciencia no es el simple mapeo del objeto. Lo que se capta de un objeto en un acto de percepción no es el objeto en su totalidad. Esto es cierto incluso en el caso de los objetos “simples”, ya que nos presentan muchos atributos (color, forma, peso, olor, etc.). Como señaló Levinas (1989), el carácter esencial de la percepción es ser inadecuada. Por eso no basta con que los estudiantes tengan los términos ante sus ojos. En lugar de ser completa, la percepción humana es selectiva o, como decía Husserl, intencional. Al hablar de la percepción, Husserl (1931) dice:

Me vuelvo hacia el objeto, hacia el papel, por ejemplo. ... Alrededor del papel hay libros, lápices, tinteros, etc. ... pero mientras yo estaba volteado hacia el papel no hubo ningún giro [intencional] en su dirección, ni ninguna percepción de ellos, ni siquiera en un sentido secundario. (p. 117)

Para percibir los libros, tiene que surgir un acto intencional (una forma de intuirlo). Del mismo modo, para percibir los términos como divididos en dos filas, tiene que surgir un acto intencional específico, pues “‘intuir’ [un objeto] ya incluye el estado de estar vuelto hacia él” (p. 117). El problema para los estudiantes, entonces, es atender a los términos de una determinada manera intencional. Tienen que ir más allá de la postura intencional centrada en la numerosidad, que hace que los términos aparezcan de una determinada manera en la consciencia, a otra diferente, basada en las filas.

Parece que aquí entramos en un círculo vicioso. Para percibir un rasgo O' de un objeto O , se requiere un determinado acto intencional I' —un acto intencional que pondrá a disposición el objeto intencional bajo la forma de su rasgo O' —. El objeto intencional requiere ya un “*giro de pensamiento*” distintivo (p. 122, énfasis en el original). Pero la cuestión es, y Husserl (1970) lo repite una y otra vez, que el acto intencional o modo de intuir el objeto y el objeto percibido no constituyen dos aspectos distintos de la percepción: son juntos la unidad básica de la percepción. Por decirlo de otro modo, la intención y el objeto co-emergen en el proceso perceptual de objetivación.

La pregunta, sin embargo, sigue siendo: ¿cómo pasan los estudiantes de una percepción “mundana” o cotidiana de los términos a una percepción diferente, por ejemplo, “teórica”? La pregunta puede responderse de dos maneras diferentes. Dado que no es solo cuestión de fijarse más en los términos para que se revele la estructura teórica, se puede argumentar que el problema o situación matemática, si está bien diseñado, debería promover por sí mismo en el estudiante el tipo de intención científica requerida. En otras palabras, la intención y la estructura matemática deberían derivar de la manera en que se torna y se lanza el estudiante en el problema matemático, con las matemáticas. Si se adopta una fuerte epistemología racionalista, esta forma de razonar supone que la mente del estudiante está de alguna manera equipada con las intuiciones científicas necesarias para elaborar intenciones de forma científica. La segunda respuesta se basa en la idea del desarrollo: los estudiantes aún no son lo suficientemente maduros para percibir la estructura científica.

Desde la perspectiva teórica histórico-cultural que defiendo aquí, ninguna de estas respuestas es satisfactoria. La postura racionalista, en la que se apoya la primera respuesta, la hace poco convincente. Ya he mencionado que las investigaciones recientes en antropología e historia arrojan serias dudas sobre la idea de una única línea “natural” de desarrollo conceptual

y cuestionan la idea de que la razón humana se mueve por la lógica de la razón ilustrada de base científica que encontramos en los escritos de Kant y los racionalistas del siglo XVII que le precedieron (Radford, 2008c). La segunda respuesta, que es la adoptada por los pedagogos piagetianos, su-pedita la instrucción al desarrollo. Vygotsky (1987) articuló una crítica sustancial a tal visión y argumentó que la relación, de hecho, es a la inversa: el desarrollo sigue las huellas de la instrucción.

4.2. La domesticación del ojo

A los ojos de los expertos, percibir los términos divididos en dos filas puede parecer un esfuerzo trivial. Y, como se argumentó en un capítulo anterior, seguramente lo es. Pero solo lo es en la medida en que los ojos de los matemáticos han sido educados culturalmente para organizar la percepción de las cosas de formas racionales particulares. Los ojos de los matemáticos han sufrido un largo proceso de domesticación. La forma de percepción de los ojos del matemático aparece como parte de un saber cultural que han llegado a habitar. Que la percepción de los matemáticos no es el resultado de un proceso “natural” de evolución queda demostrado no solo por los resultados de la psicología intercultural (Geurts, 2002; Segall, Campbell y Herskovits, 1966), sino también por las respuestas de nuestros jóvenes estudiantes, lo que se confirma con nuestra investigación actual en entornos preescolares. La domesticación del ojo es un largo proceso en el que llegamos a ver y reconocer las cosas según criterios culturales “eficaces”. Es el proceso que convierte al ojo (y a otros sentidos humanos) en un órgano intelectual sofisticado, un “teórico” como decía Marx (1988, p. 107). Por supuesto, no estoy diciendo que los estudiantes no ven dos filas (como argumenté en el capítulo 4). Seguramente las ven. Pero no consideraron importante reconocer que los términos estaban divididos en dos filas. Las pistas geométricas quedaron relegadas a un segundo plano de atención para ceder espacio a las cuestiones numéricas. La capacidad de percibir ciertas cosas de determinadas maneras, la capacidad de intuir las y atender a ellas de ciertas maneras y no de otras, pertenece a esas sensibilidades que los estudiantes desarrollan a medida que se involucran en procesos de objetivación.

Volvamos a los estudiantes. Los estudiantes trabajaron en pequeños grupos de dos o tres. Cuando la profesora vino a ver por primera vez el trabajo de James, Sandra y Carla, los estudiantes habían trabajado juntos

durante unos 31 minutos y 50 segundos. Habían terminado de dibujar los términos 5 y 6, habían respondido a la pregunta sobre el término 8 de Monique (que consideraban que sí era el término 8 de la secuencia), e intentaban (sin éxito) encontrar la cantidad de cuadrados del término 12. Al notar que los estudiantes trataban las secuencias añadiendo dos rectángulos cada vez, la profesora emprendió acciones de colaboración para crear las condiciones de posibilidad para que los estudiantes percibieran una estructura general detrás de la secuencia.

- 1 Profesora: Solo nos fijaremos en los cuadrados que están en la parte inferior (*mientras dice esto, la profesora hace tres gestos consecutivos de deslizamiento, cada uno de los cuales va de la fila inferior del término 1 a la fila inferior del término 4; la imagen 1 de la figura 25 muestra el comienzo del primer gesto de deslizamiento*). Solo los que están en la parte inferior. No los que están en la parte superior. En el término 1 (*Ella señala con sus dos dedos índices la fila inferior de término 1*), ¿cuántos [cuadrados] hay?
- 2 Estudiantes: ¡1!
- 3 Profesora: (*Señala con un gesto deíctico la fila inferior del término 2*)
¿Término 2?
- 4 Estudiantes: ¡2! (*James señala la fila inferior del término 2; véase la imagen 2*).
- 5 Profesora: (*Señala con un gesto deíctico la fila inferior del término 3*)
¿Término 3?
- 6 Estudiantes: ¡3!
- 7 Profesora: (*Señala con un gesto deíctico la fila inferior del término 4*)
¿Término 4?
- 8 Estudiantes: ¡4!



Figura 25. La profesora sugiere una manera perceptual de ver los términos de la secuencia

- 9 Profesora: *(Hace una breve pausa y rompe la cuenta rítmica de los términos anteriores, como si iniciara un nuevo tema en el proceso de conteo, aleja la mano del término 4 y señala con un gesto deíctico el hipotético lugar donde se esperaría encontrar el término 8; véase la figura 26) ¿Cuántos cuadrados tendría el término 8 en la parte inferior?*
- 10 Sandra: *(Vacilante, tras una pausa relativamente larga) ¿4?*



Figura 26. La profesora señala el espacio vacío en el que se esperaría encontrar el término 8

En la línea 1, la profesora hace tres gestos de deslizamiento para subrayar el hecho de que van a contar la fila inferior de los cuatro términos dados. La dimensión gestual de la labor conjunta de la profesora y los estudiantes nos recuerda la experiencia táctil de los estudiantes que relata Zaporozhets (2002b) en un experimento centrado en el proceso ontogénico de la transformación cultural de los sentidos. En ese estudio, niños de preescolar de 3 a 5 años estaban aprendiendo a discriminar entre triángulos y cuadriláteros. Los estudiantes seguían el contorno de las formas geométricas con los dedos. Al principio, los preescolares incurrían en un número considerable de errores. A continuación, se les invitó a trazar sistemáticamente con un dedo el contorno de la figura, prestando atención a los cambios de dirección de los movimientos en los ángulos, y acompañando la exploración táctil con el recuento de los lados (1, 2, 3...). El investigador señala que, en esta etapa, la percepción se realizaba por medio de la experiencia táctil, mientras que el ojo desempeñaba un papel auxiliar. “Más tarde”, dice Zaporozhets (2002b), “el ojo desarrolló la capacidad de resolver este tipo de tareas perceptivas de forma independiente, al trazar consecutivamente el contorno de una figura, como antes lo hacía una mano que tocaba” (p. 31). Durante este proceso, el ojo sufre un cambio transformador: “inicialmente, los movimientos del ojo tienen una naturaleza extremadamente extensa, trazando consecutivamente todo el contorno de la figura percibida y simulando sus especificidades en todos los detalles” (p. 32). En una etapa posterior, los movimientos del ojo “comienzan a disminuir gradualmente y a centrarse en los atributos individuales más informativos del objeto” (p. 32). En términos de los conceptos tratados en el capítulo 5, apareció una contracción semiótica.

En nuestro ejemplo, la dimensión táctil se realiza en cambio con gestos por medio de los cuales la profesora sugiere una forma cultural de percibir los términos de la secuencia, en la que se hace énfasis en las ideas matemáticas de las variables y la relación entre ellas. En el pasaje anterior, volvemos a encontrarnos con los dos tipos de gestos deícticos de los que hablamos en el capítulo anterior.

En efecto, en primer lugar, están los gestos deícticos que la profesora y los estudiantes realizan para señalar algo en el ámbito de la visión y la percepción. Es el caso de los gestos que señalan términos 1, 2, 3 y 4 (por ejemplo, los gestos de las imágenes 1 y 2 de la figura 25). Son los gestos denominados *deícticos oculares* que realizan una *demonstratio ad oculos*: muestran el objeto visible señalado. En segundo lugar, también podemos distinguir

los gestos deícticos que la profesora realiza para señalar algo que no está en el ámbito de la visión y la percepción. Es el caso de los gestos que señalan el término 8 (véase la figura 26). Dado que el objeto que se señala está ausente, en el capítulo anterior llamamos a estos gestos deícticos *am phantasma*. Los deícticos *am phantasma* son cruciales en la constitución de un nuevo reflejo psíquico: la imaginación. Volveré a esta idea durante la discusión del siguiente episodio.

Como vemos en el fragmento anterior, la profesora no gesticula en silencio. Los gestos se coordinan con enunciados verbales. Por eso puede ser más útil considerar el discurso de la profesora como un discurso *multimodal*, es decir, como una expresión corporal que recurre a varios canales sensoriales y a diferentes registros semióticos (Arzarello, 2006).

En este caso, la profesora y los estudiantes procedieron a una coordinación del ojo, los diferentes tipos de gestos, los términos de la secuencia y el discurso por medio de una serie de acciones organizadas que orientan la percepción de los estudiantes y la comprensión emergente de las ideas matemáticas previstas. En la terminología introducida en el capítulo 5, estos recursos semióticos son medios semióticos de objetivación. Se organizan en lo que hemos denominado *nodos semióticos*, es decir, segmentos de la actividad del aula en los que se produce una compleja coordinación de diversos registros sensoriales y semióticos en un proceso de objetivación.

La investigación de los medios semióticos de objetivación y sus correspondientes nodos semióticos en la actividad del aula es un punto crucial para comprender los procesos de aprendizaje de los estudiantes. El concepto de nodo semiótico se basa, en efecto, en la idea de que la comprensión de la acción multimodal no consiste en hacer un inventario de los signos y canales sensoriales que actúan en un determinado contexto. Desde un punto de vista metodológico, el problema consiste en comprender cómo los diversos canales sensoriales y signos semióticos (lingüísticos, símbolos escritos, artefactos, diagramas, etc.) se relacionan, coordinan y subsumen en un nuevo pensamiento o unidad psíquica (Radford, 2012a). Tal problema metodológico solo tiene sentido en el marco de una concepción de la mente que supere la visión dualista de los procesos internos-externos. En nuestro caso, el problema metodológico tiene sentido con el trasfondo de una concepción de la mente humana como sensual o sensible de principio a fin (Radford, 2014a).

Sin embargo, como indica la línea 10, el paso del término 4 al término 8 no fue exitoso. Todavía no se ha producido la constatación de la forma algebraica en que se pueden percibir las secuencias. Por ello, la profesora

decidió reiniciar el proceso, con algunas modificaciones importantes, como veremos.

Como se ha mencionado, el término 8 de la secuencia no se dibujó materialmente. En el fragmento anterior, la profesora finge que el término 8 está en el espacio vacío de la hoja, en algún lugar a la derecha del término 4. Señala el espacio vacío, al igual que señaló los otros términos, para ayudar a los estudiantes a imaginar el término en cuestión. En el segundo intento, la profesora no va del término 4 al término 8; esta vez va término a término hasta el término 8:

- 11 Profesora: Lo haremos de nuevo...
- 12 Profesora: *(Señala el término 1 con un gesto déictico de dos dedos)* ¿Término 1, tiene cuántos?
- 13 Carla: *(Señala con el bolígrafo la fila inferior) 1 (sin hablar, la profesora señala el término 2 con un gesto déictico de dos dedos; Carla señala con su bolígrafo la fila inferior del término 2), 2 (de nuevo, sin hablar, la profesora señala el término 3 con un gesto déictico de dos dedos —véase la imagen 1 de la figura 27—; Carla señala con su bolígrafo la fila inferior del término 3), 3 (igual que en el caso anterior), 4 (ahora, la profesora se mueve hacia el lugar hipotético donde se espera que esté el término 5, hace dos gestos: el primero apunta al término 5 imaginado —véase la imagen de la figura 27—; el segundo a la fila inferior imaginada del término 5; véase la imagen 3 de la figura 27), 5.*
- 14 Profesora: ¡Ahora es el término 8! *(la profesora vuelve al término 1. Señala de nuevo con un gesto déictico de dos dedos la fila inferior del término 1)* El Término 1, ¿cuántos [cuadrados] tiene en la parte inferior?
- 15 Estudiantes: 1.
- 16 Profesora: *(Señala con un gesto déictico de dos dedos la fila inferior del término 2)* ¿Término 2?
- 17 Estudiantes: ¡2!
- 18 Profesora: *(Señala con un gesto déictico de dos dedos la fila inferior del término 3)* ¿Término 3?

- 19 Estudiantes: ¡3!
- 20 Profesora: (*Señala con un gesto deíctico de dos dedos la fila inferior del término 4*) ¿Término 4?
- 21 Estudiantes: ¡4!
- 22 Profesora: (*Señala con un gesto deíctico de dos dedos el lugar donde estaría la fila inferior del término 5*) ¿Término 5?
- 23 Estudiantes: ¡5!
- 24 Profesora: (*Señala como en el caso anterior*) ¿Término 6?
- 25 Estudiantes: ¡6!
- 26 Profesora: (*Señala como en el caso anterior*) ¿Término 7?
- 27 Estudiantes: ¡7!
- 28 Profesora: (*Señala como en el caso anterior*) ¿Término 8?
- 29 Estudiantes: ¡8!
- 30 Sandra: ¡Habría 8 en la parte inferior!
- 31 Profesora: ¡Excelente! Vamos a ver si ella [Monique] tiene 8 [cuadrados] en la parte inferior [de su término].
- 32 Sandra: (*Cuenta los cuadrados del término de Monique*) ¡1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8! ¡Sí, ella tiene 8!
- 33 Profesora: Muy bien. Ahora vamos a comprobar la parte superior (*hace dos veces un gesto lento para indicar las filas superiores de los términos*). Vamos a mirar la parte de arriba.

En el segundo episodio, la profesora perfecciona sus gestos. Los deícticos *am phantasma* se han vuelto más prominentes (véanse las imágenes 2 y 3 de la figura 27). La profesora y los estudiantes contaron juntos los cuadrados de la fila inferior del término de Monique y se dieron cuenta de que el número era efectivamente 8. En este momento, la relación funcional entre las variables empezó a hacerse evidente para los estudiantes. La relación empezó a hacerse notar. La profesora pasó entonces a contar conjuntamente los cuadrados de la fila superior.

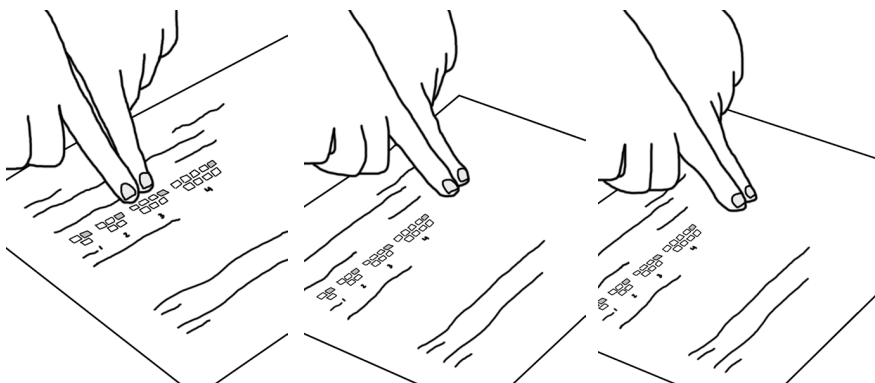


Figura 27. La profesora y los estudiantes exploran la fila inferior de los términos

La profesora repitió el mismo conjunto de gestos rítmicos de señalamiento mientras los estudiantes respondían a cada una de sus preguntas. El recuento se realizó rápidamente (otro caso de contracción semiótica). Cuando llegaron a la parte superior del término 8 y se dieron cuenta de que había 9 cuadrados, la profesora invitó a los estudiantes a verificar el dibujo de Monique (el lector habrá observado que hay 8 cuadrados en el término de Monique; véase la figura 23).

La profesora señaló uno tras otro los cuadrados de la fila superior del término de Monique (véase la figura 28a) mientras Sandra contaba de forma rítmica y los demás estudiantes la seguían de cerca. Sincronizando su conteo con los gestos de la profesora, Sandra decía “1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8... [sorpresa profunda].

Los estudiantes se quedaron perplejos al ver que, en contra de lo que creían, el término 8 de Monique no encajaba en la secuencia. Aquí, la situación se volvió tensa. La figura 28b muestra la sorpresa de Sandra. Sandra se quedó quieta y miró a la profesora. Ella y la profesora permanecieron en silencio durante 2,5 segundos; es decir, durante un lapso 21 veces mayor que el tiempo medio transcurrido entre las palabras pronunciadas que precedieron al momento de sorpresa³⁰.

30 Estos resultados proceden de un análisis que hemos realizado con el *software* dedicado al análisis de voz Praat v. 5.104, desarrollado por P. Boersma y Weenink (véase www.praat.org).



Figura 28. La profesora y Sandra exploran el término de Monique

5. La poética de la objetivación

La interacción anterior se produjo en un proceso de objetivación. Este proceso consistió en las diversas perspectivas aportadas por los estudiantes y la profesora y se configuró con base en la forma en que los participantes cambiaron, revisaron y refinaron progresivamente sus posturas teóricas respecto al problema matemático en cuestión. Los procesos de objetivación son, en efecto, relacionales y dinámicos. Cambian a medida que cambia el foco de atención (Salinas y Miranda, 2018).

Ahora bien, aunque los profesores no pueden inyectar el objeto de saber en la consciencia de los estudiantes, lo que sí pueden hacer es crear las condiciones de posibilidad para que los estudiantes transformen el objeto de saber en un objeto de consciencia. En el episodio de la clase que estoy comentando aquí, la profesora creó las condiciones de posibilidad para que los estudiantes percibieran una estructura general detrás de la secuencia. Y, como muestra el ejemplo, la profesora lo hizo al movilizar recursos semióticos clave. El desplazamiento de la atención de las cuestiones estrictamente numéricas a una visión más amplia de la secuencia basada en pistas geométrico-espaciales fue posible gracias a un intenso recurso a los gestos de señalamiento, las palabras y el ritmo. Mientras que los gestos permitían a la profesora señalar la fila inferior de los términos y las palabras calificar el número del término, el ritmo cumplía la función cognitiva crucial de crear un orden y una expectativa espaciotemporal (You, 1994) que resultó importante en la síntesis sobre la que se apoyó la generalización. La revelación de la estructura matemática y el momento poético de objetivación concomitante resultaron del complejo vínculo de esos medios semióticos

de objetivación (gestos, palabras, ritmo) que acompañaron y orientaron la actividad perceptiva, auditiva, lingüística e imaginativa de los estudiantes.

En el episodio anterior vemos que la actividad ha permitido que ocurra una experiencia estética; hay un *momento poético* que ocurre con el encuentro de los estudiantes con la estructura matemática emergente. La experiencia estética y el momento poético han sido lamentablemente pasados por alto por los enfoques racionalistas que los reducen a un mero “conflicto cognitivo”. El pensamiento es mucho más que las cavilaciones cognitivas de la mente. Sandra se sorprendió profundamente al ver que lo que antes parecía tan obvio (es decir, que el término de Monique era ciertamente el término 8 de la secuencia) resultó no serlo. Esta experiencia estética es la apertura hacia una nueva forma de ver. La mirada sostenida de la profesora a los ojos de Sandra en la larga pausa silenciosa que siguió al descubrimiento de Sandra es una forma crucial de comunicación en la que dos consciencias se encuentran frente al significado matemático cultural. Tomar consciencia de estos momentos poéticos puede capacitarnos a nosotros, profesores y educadores matemáticos, para ofrecer a los estudiantes un espacio para disfrutar de estas preciosas instancias.

6. Contar lo que no se ve

El episodio anterior tuvo lugar hacia el final de la clase de matemáticas. Al día siguiente, la profesora de segundo grado comenzó la clase de matemáticas con una discusión general. Dibujó los términos de la secuencia en la pizarra y discutió con la clase un método de conteo que, aunque era similar al utilizado en el grupo de Sandra al final del día anterior, era diferente en la forma de contar los objetos. Un mes antes, durante el diseño de las actividades con la profesora (habrá más información sobre el codiseño de actividades en el próximo capítulo), decidimos que sería importante fomentar varias formas de percibir la estructura matemática que hay detrás de la secuencia. Con esta idea en mente, la profesora recurrió a un método ideado por otro grupo de estudiantes. El método consistía en concebir los términos como divididos en dos filas, y contar por separado el cuadrado oscuro. Como dijo uno de los estudiantes de ese grupo al tratar de encontrar la cantidad de cuadrados en el término 6, “Hacemos $6 + 6$ es igual 12, más uno”.

Al igual que el día anterior, la profesora ilustró el método mediante un complejo uso de gestos, palabras y ritmo.

Profesora: (*Señala el número del término 1*) Término 1 (*señala la línea inferior*); uno en la parte inferior (*señala la parte superior*); uno en la parte superior (*señala el cuadrado oscuro*); más uno.

Acompañada por los estudiantes, contó de la misma manera rítmica los demás términos hasta el término 5. Ellos cuentan rítmicamente y dicen (imagen 1) “Término 5”, (imagen 2) “5 abajo”, (imagen 3) “5 arriba”, (imagen 4) “más 1”.

Profesora: (*Señala el número del término 5*; véase la imagen 1 de la figura 29) Término 5 (*señala la línea inferior*; véase la imagen 2); 5 abajo (*señala la parte superior*; véase la imagen 3); 5 arriba (*señala el cuadrado oscuro*; véase la imagen 4); más 1.



Figura 29. La profesora y los estudiantes cuentan rítmicamente

Los estudiantes pudieron ahora abordar las preguntas posteriores de la actividad. Entre estas preguntas, los estudiantes tenían que averiguar la cantidad de cuadrados en términos que no eran accesibles desde el punto de vista perceptivo, como el término 12 y el término 25. Sigue abajo un extracto del diálogo del grupo de Sandra mientras discuten sin la profesora.

Sandra: (*Se refiere al término 12*) 12 más 12, más 1.

Carla: (*Usa una calculadora*) 12 más 12... más 1 es igual a...

James: (*Interrumpe*) 25.

Sandra: ¡Sí!

Carla: (*Mira la calculadora*) ¡25!

Luego, unos minutos más tarde, al tratar con el término 25, Carla dice rápidamente: “ $25 + 25 + 1$ es igual a 51”.

Este ejemplo muestra, al igual que el comentado en el capítulo anterior, una contracción semiótica. Vemos cómo se elige entre lo que cuenta como relevante e irrelevante, lo que da lugar a una vinculación más refinada de los recursos semióticos. También muestra cómo los estudiantes llegan a habitar un concepto matemático.

7. Síntesis

En este capítulo, he presentado una visión general de la corporalidad en la teoría de la objetivación y el concepto resultante de cognición sensual o sensible. La perspectiva esbozada aquí difiere de las perspectivas empiristas de la corporalidad que consideran los sentidos como entidades ya dadas y suponen que los objetos del tacto, la percepción, etc., son dados al cuerpo y a los sentidos en su inmediatez. Estas perspectivas empiristas prolongan la tradición epistemológica occidental en la que los sentidos y los objetos de sensación aparecen como entidades ahistóricas y aculturales.

La cognición sensual o sensible destaca la idea de que nuestro pensamiento, nuestros sentimientos, nuestras acciones y, de hecho, todas nuestras relaciones con el mundo (oír, percibir, oler, sentir, etc.), son entrelazamientos de nuestro cuerpo y la cultura material e ideacional (de Freitas

y Sinclair, 2013, 2014; Malafouris, 2004; Malafouris y Renfrew, 2010). Sin embargo, entiende los entrelazamientos como históricos y culturales. Destaca la importancia de las mediaciones históricas y culturales en nuestro trato con el mundo. En consecuencia, en lugar de ser cosas independientes de nuestro entorno histórico y cultural, nuestros sentidos, los objetos que sienten nuestros sentidos y su relación cambian histórica y culturalmente. Cambian con los cambios en nuestra cultura material e ideacional (saber, espiritualidad, etc.). La cognición sensual o sensible postula una relación dialéctica entre los objetos sentidos y los sujetos que los sienten, algo que se logra en la actividad práctica, material y sensible (Radford, en prensa).

Este concepto de corporalidad arroja luz sobre el aprendizaje al permitirnos especificar mejor la naturaleza del encuentro que está en la base del concepto de objetivación. La objetivación, he sugerido, es un encuentro material y corpóreo con los sistemas culturales de pensamiento y acción. La naturaleza corpórea de este encuentro no es un encuentro entre un cuerpo sensible determinado y un objeto determinado. El objeto percibido no se ofrece al cuerpo sensible en su inmediatez, como algo que simplemente está ahí, sino como algo en devenir, en transformación, desde la potencialidad hasta algo tangible cuya tangibilidad es moldeada por el cuerpo o los cuerpos sensibles que lo sienten y palpan por medio de la actividad concreta. Al sentir el objeto, este se transforma en objeto de consciencia y pensamiento, con lo que se transforma así no solo la consciencia, sino el cuerpo que lo siente y sus sentidos. He analizado con cierto detalle el caso de la percepción.

En el ejemplo tratado en este capítulo, los objetos del tacto, la percepción, etc., son objetos algebraicos ideacionales (por ejemplo, variables, covariaciones y fórmulas). Estos objetos forman parte de una realidad histórico-cultural elaborada, de modo que lo que encuentran los cuerpos y los sentidos de los estudiantes no es pura materia, pura materia concreta o ideal, sino materia ya transformada por la actividad humana concreta. En el encuentro con estos objetos, la percepción de los estudiantes se transforma (también los gestos, pero aquí me he centrado en la percepción).

La generalización de secuencias numérico-geométricas como la tratada en este capítulo requeriría que los estudiantes percibieran los términos de la secuencia de una forma determinada. Atender a algo de una manera determinada e “intuirlo” de una forma específica, por utilizar los conceptos de Husserl, requiere un acto intencional específico. El objeto, tal como aparece en la consciencia, y la intención de percibirlo son consubstanciales.

El problema era entonces dar cuenta de aquello que les permitiera a los estudiantes pasar de una percepción inicial de los términos dados de la secuencia a una más sofisticada. Vimos que dicha transformación era crucial para asegurar la mayor fluidez de los estudiantes en una forma compleja de razonamiento matemático vital para su camino hacia el álgebra. Esta transformación, sugerí, forma parte de la domesticación del ojo, o —si se prefiere— de la educación del ojo; es decir, de su conversión en un órgano histórico-cultural de percepción.

Adquirir soltura en formas complejas de razonamiento matemático no consiste, por supuesto, en una mera transmisión del saber. Una mirada superficial al pasaje anterior podría llevar a pensar que la profesora se limitaba a “transmitir” un método de generalización. Un análisis detallado del video muestra que no es así. Por ejemplo, la sofisticada forma de generalización a la que llegaron los estudiantes durante la actividad requirió la aparición de ciertas sensibilidades, como la de percibir los términos de determinadas maneras que facilitan los cálculos necesarios para responder a las preguntas sobre los términos 12, 25, 100, u otros términos más allá del ámbito sensorial perceptivo.

El momento poético de la revelación de la estructura general que subyace a la secuencia comentada en este capítulo fue el resultado de una labor conjunta entre estudiantes y profesor. Este momento —el evento de la cosa en la consciencia— fue mucho más que una negociación de significados y un intercambio de puntos de vista. Fue más bien una fusión heteroglósica bakhtiniana de voces, gestos de señalamiento, percepciones y perspectivas. El momento poético en el centro del proceso de objetivación fue posible gracias a la transformación de los cambios de atención del profesor y los estudiantes, articulados en torno a una compleja configuración de recursos semióticos, en particular, gestos, lenguaje y ritmo.

Tomar consciencia de cómo se pueden movilizar estos recursos puede ser un elemento importante en nuestra comprensión de los fenómenos que acompañan al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Esta toma de consciencia podría llevar, en particular, a revisar la relación profesor-estudiante formada en el acto de conocer (Ligozat Schubauer-Leoni, 2010; Radford, 2014b). Es posible que la generalización realizada por los estudiantes no sea tan sofisticada como una generalización simbólica como $2x + 1$, que podría esperarse de los estudiantes de mayor edad. Sin embargo, aunque la generalización de nuestros jóvenes estudiantes no se expresa por medio de signos alfanuméricos, es, quiero argumentar,

algebraica a su manera (Radford, 2011a, 2012a). La “fórmula” por medio de la cual se expresa dicha generalización no está compuesta por letras y otros signos (por ejemplo, “+”). Se compone de acciones. Es mejor verla como una *fórmula corpórea* que, en lugar de expresarse mediante letras, se expresa mediante acciones que se despliegan en el espacio y el tiempo. La transformación de la fórmula corpórea de los estudiantes en fórmulas más sofisticadas, puramente alfanuméricas, requiere un refinamiento suplementario del ojo (Radford, 2018c).

Agradecimiento

Esta es una versión revisada y ampliada de Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics*, 30(2), 2-7. Agradezco a la revista la autorización para usar y ampliar las ideas allí presentadas.

Capítulo 7

Diseño de tareas

En este capítulo, examinamos con más detalle uno de los aspectos metodológicos de la teoría de la objetivación —el componente Φ asociado a la actividad de enseñanza-aprendizaje—. El componente Φ se trató brevemente en el capítulo 5. Aquí, nos proponemos analizar este componente desde la perspectiva del diseño de tareas³¹. Recordemos que, en la terminología introducida anteriormente, a toda actividad de enseñanza-aprendizaje está asociada una tarea que está constituida por una serie de problemas que los estudiantes son invitados a abordar (véase la figura 16 del capítulo 5). Dos preguntas importantes que se plantean en este contexto son las siguientes:

P1: ¿Qué pautas deben tenerse en cuenta para elegir los problemas matemáticos que los estudiantes deberán resolver?

P2: ¿En qué orden se presentan los problemas a los estudiantes?

Sin embargo, como no podemos pensar en la dimensión matemática sin pensar también en la dimensión social, tenemos que plantear otra pregunta:

P3: ¿Qué formas de colaboración humana pueden ayudar a los estudiantes a afrontar estos problemas?

31 En trabajos anteriores hemos utilizado la expresión *configuración de la actividad* porque la expresión *diseño de la tarea* (*task design*) suena como si el problema en cuestión fuera de naturaleza técnica. Sin embargo, para ajustarnos a una terminología que se ha generalizado en la Educación Matemática (véase, por ejemplo, Watson y Ohtani, 2015), utilizamos la expresión *diseño de tareas* a lo largo de este capítulo.

Este capítulo está organizado en dos partes. En la primera parte, analizamos estas tres preguntas; en la segunda parte, presentamos un ejemplo de diseño de tarea.

1. Las bases del diseño de tareas

El diseño de tareas que hemos llevado a cabo durante más de veinte años se ha caracterizado por la colaboración de los profesores que participan en nuestros proyectos de investigación (por ejemplo, Radford, 2000, 2018c; Radford y Demers, 2004; Radford, Demers y Miranda, 2009). Las actividades han sido codiseñadas por estudiantes de pregrado y posgrado, profesores e investigadores. Hemos identificado los siguientes tres elementos para llevar a cabo nuestro trabajo:

1. consideraciones generales,
2. consideraciones relativas a los problemas matemáticos y
3. consideraciones sobre las formas de colaboración humana previstas.

A continuación, expongo las ideas generales detrás de estos tres elementos.

1.1. Consideraciones generales

Las consideraciones generales incluyen (a) tener en cuenta lo que los estudiantes ya saben, y (b) integrar, en la medida de lo posible, el uso de artefactos concretos, tecnológicos, etc. La idea de tener en cuenta lo que los estudiantes ya saben es aprovechar los saberes con los que los estudiantes ya están familiarizados. Al recurrir a saberes matemáticos conocidos, los estudiantes estarán, en principio, en condiciones de “sumergirse” en la actividad. De lo contrario, es muy probable que algunos estudiantes abandonen y que la actividad matemática del aula no alcance las metas y el objeto definidos por el proyecto pedagógico del profesor (véase la figura 16).

1.2. Consideraciones relativas a los problemas matemáticos

Las consideraciones relativas a los problemas matemáticos incluyen problemas que (a) sean interesantes desde el punto de vista de los estudiantes; (b) ofrezcan a los estudiantes oportunidades para lanzarse al encuentro

con el saber matemático en niveles profundos de conceptualización; (c) se organicen según una unidad conceptual y contextual (más adelante se habla de ello); y (d) tengan una complejidad conceptual creciente (más adelante se habla de ello). Describo estos puntos a continuación.

Tareas interesantes

Las tareas deben suscitar, en la medida de lo posible, el interés de los estudiantes. Intentamos concebir problemas matemáticos en un contexto lúdico o narrativo en el que las acciones de los individuos motiven la reflexión matemática.

Niveles de conceptualización

Para promover un encuentro progresivo con el saber histórico-cultural, diseñamos tareas que incluyen tres niveles de conceptualización.

Primer nivel. Este primer nivel se asocia a una experiencia sensual concreta; es decir, a una experimentación y reflexión por medio del uso de materiales concretos (por ejemplo, las fichas de bingo mencionadas en capítulos anteriores, que se utilizaron para modelar y resolver el problema del ahorro de dinero en el problema de la alcancía).

Segundo nivel. El segundo nivel de conceptualización implica una reflexión teórica basada en el uso de objetos concretos que podría abrir posibles vínculos emergentes con el significado de los objetos matemáticos. Por ejemplo, en el problema de la alcancía, este nivel se manifiesta en la forma en que Alberto relaciona la expresión “por dos” con las dos filas de fichas de bingo rojas dispuestas delante de cada uno de los vasos.

Tercer nivel. El tercer nivel de conceptualización aparece con la manipulación de símbolos matemáticos con los que los estudiantes elevan la experiencia previa (por ejemplo, la experiencia concreta y sensual) a otro nivel de consciencia.

Cabe señalar que estos niveles de conceptualización no implican un orden estricto. Por el contrario, pueden superponerse o incluso aparecer simultáneamente durante la actividad de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes y del profesor.

Unidad conceptual y contextual

Los problemas y las preguntas se formulan de forma que estén interrelacionados. Sugerimos elegir lo que denominamos una unidad conceptual y contextual, como en el problema de la alcancía. Esto puede hacerse mediante una historia narrativa (por ejemplo, “Para su cumpleaños, Marc recibe una alcancía con un dólar. Ahorra dos dólares cada semana. Al final de la primera semana tiene tres dólares, al final de la segunda tiene cinco dólares, y así sucesivamente”)³². En este contexto, se formulan los problemas de la tarea. Esta unidad conceptual y contextual es “contextual” en el sentido de que ofrece un contexto para dotar de sentido a los problemas. Es “conceptual” porque permite interrelacionar la dimensión conceptual de los problemas. Una de sus ventajas es poner en juego, en un mismo contexto, varios objetos matemáticos para que los estudiantes establezcan una relación clara entre estos objetos y sus interconexiones (véase el capítulo 3 sobre el concepto de objeto) y evitar así una imagen fragmentada de las matemáticas.

Complejidad conceptual creciente

Los problemas se organizan según una complejidad conceptual creciente: los problemas conceptuales más complejos aparecen más tarde que los menos complejos. La idea es que, recurriendo a una unidad conceptual y contextual y a una organización de los problemas según una complejidad conceptual creciente, los estudiantes puedan navegar de manera significativa por niveles de conceptualización cada vez más sofisticados. El resultado esperado es que estos dos elementos, tomados conjuntamente, puedan facilitar un encuentro significativo y coherente de los estudiantes con formas de pensamiento y acción histórica y culturalmente constituidas. La figura 30 ofrece una imagen visual del diseño de tareas desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. La línea que une los problemas los conecta en términos de un contexto unificador (la unidad conceptual y contextual) y lo hace ofreciendo una creciente complejidad conceptual.

32 Jerome Bruner ha sido uno de los pioneros en destacar la importancia de las narrativas en la cognición humana (véase, por ejemplo, su libro *Acts of Meaning [Actos de significado]*, 1990), en el que hace una crucial observación acerca del fundamento que ofrecen las narrativas para organizar nuestra experiencia del mundo.

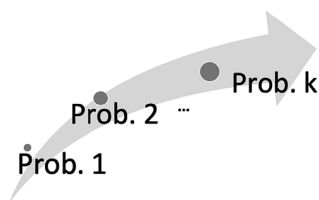


Figura 30. Diseño de los problemas

1.3. Consideraciones sobre las formas de colaboración humana

Con la tarea y la organización social que el profesor propone, buscamos provocar el encuentro con el Otro; es decir, con otras voces y otras consciencias. En particular, fomentamos formas colectivas de producción de saberes y modos de colaboración humana de carácter no alienante. La organización social de la tarea consiste en fomentar formas y medios de interacción que promuevan posiciones críticas, la solidaridad, la responsabilidad y el cuidado del otro (este punto es discutido con detalle en el capítulo 10, el capítulo sobre la ética). Desde la perspectiva de la teoría de la objetivación, la tarea, por medio de su densidad epistemológica (mostrada en la curva de complejidad conceptual creciente), debe contribuir a la creación de un espacio de reflexión, intercambio y debate en el que todas las personas implicadas, estudiantes y profesores, trabajen en lo que llamamos en el capítulo 2 la producción de una obra común, una obra en la que el profesor y los estudiantes unifican sus esfuerzos y habilidades y capitalizan sus múltiples diferencias y perspectivas.

En la siguiente sección se analiza un ejemplo de diseño de tareas.

2. El movimiento de Tina, John y el perro

A continuación, se presenta un ejemplo de diseño de tareas asociado a la producción, el uso y la interpretación de gráficos para una clase de octavo grado (estudiantes de 13 a 14 años). El ejemplo forma parte de una serie de lecciones para estudiantes de grado 7 a grado 12 desarrolladas en un proyecto de investigación financiado por el Ministerio de Educación de Ontario (Radford, Demers y Miranda, 2009). Uno de los objetivos de este proyecto era proporcionar directrices a los profesores sobre cómo diseñar tareas que requieran niveles profundos de conceptualización matemática.

El plan de estudios de Ontario para octavo grado señala las competencias que los estudiantes deben desarrollar al final del curso escolar. Una de estas habilidades incluidas en este documento oficial establece que

Al final del año los estudiantes deben utilizar una tabla de valores, una representación gráfica y una ecuación algebraica para resolver problemas sobre relaciones [entre variables]. (Ministère de l'éducation de l'Ontario, 2005, p. 90)

2.1. El objeto de la actividad

Al tener en cuenta las estipulaciones del plan oficial de estudios, procedimos en primer lugar a definir el objeto de la actividad. En la terminología que utilizamos en el capítulo 5, el objeto de la actividad se definió como sigue: crear las condiciones didácticas que permitan a los estudiantes encontrar formas histórico-culturales de pensar matemáticamente sobre el movimiento de objetos. El movimiento de objetos presenta, en efecto, un contexto interesante para la representación por medio de gráficos y tablas³³.

2.2. La meta de la actividad

Como se ha mencionado, para que la actividad se mueva en la dirección de su objeto, debe establecerse una meta. En nuestro ejemplo, la meta era conseguir que los estudiantes resolvieran problemas que requirieran la interpretación, la producción y el uso de gráficos y tablas.

2.3. La tarea de la actividad

La tarea debe corresponder a la meta y al objeto de la actividad. En gran medida, el problema metodológico es precisamente este: ¿cómo configurar la tarea? Para diseñar la tarea, tomamos en cuenta que el estudio matemático contemporáneo del movimiento implica una forma de pensar muy

33 Curiosamente, el objeto de la actividad de enseñanza-aprendizaje que acabamos de enunciar no forma parte del plan de estudios de matemáticas. Infortunadamente, los planes de estudio de todo el mundo se han vuelto tan técnicos y precarios en la forma de presentar las matemáticas que resulta difícil para los profesores y los educadores matemáticos plantear perspectivas significativas para la enseñanza y el aprendizaje. Tenemos que reinventar contextos que hagan significativa la experiencia de aprender matemáticas.

particular que moviliza una serie de objetos matemáticos como el espacio, la distancia, el tiempo, la velocidad, la aceleración, los gráficos cartesianos, las ecuaciones, etc. En este orden de ideas, la tarea debe permitir al estudiante encontrarse con esa forma matemática contemporánea de pensar el movimiento, que es muy diferente, por ejemplo, de la forma de pensar de Aristóteles sobre el movimiento (véase Bostock, 1980; Sachs, 2015).

En general, una tarea consiste en una serie de problemas que, a su vez, conducen a preguntas o acciones. Las preguntas típicas comienzan con “¿Qué...?”, “¿Dónde...?”, “Cuál”. Por ejemplo: “¿Cuál es la distancia entre el individuo A y el individuo B cuando han caminado durante 10 segundos? ¿Dónde está el individuo A a 10 segundos?”.

Una acción para realizar es, por ejemplo, “Calcular la rapidez media de A de 0 a 2 segundos” o “Dibujar un gráfico que represente la distancia entre A y B de 0 a 4 segundos”.

En el ejemplo que queremos comentar, nuestra intención era que los problemas de la tarea llevaran a los estudiantes a realizar ciertas acciones clave en relación con la investigación del movimiento desde un punto de vista matemático. Estas acciones clave podrían servir para:

- hacer conexiones entre la información presentada en los gráficos y la presentada en una tabla de valores;
- comparar la información de los gráficos;
- completar una tabla de valores;
- recoger datos;
- dar sentido a los gráficos por medio de los movimientos del cuerpo;
- medir el tiempo y la distancia entre objetos en movimiento; y
- calcular el valor de la rapidez (media) de un objeto³⁴.

La tarea que codiseñamos con los profesores suele durar varios días. En este caso, la tarea constaba de cuatro problemas. Dicho codiseño tuvo en cuenta las formas de colaboración humana que queremos fomentar en la actividad, que mencionamos antes. En este sentido, la clase se dividió en pequeños grupos (véase la figura 17 del capítulo 5). En el transcurso de la actividad, el profesor trató de fomentar el debate y la apertura a otras

34 La actividad de enseñanza-aprendizaje aquí comentada sirvió de base para otra actividad centrada en la producción e investigación de ecuaciones que no tratamos aquí por falta de espacio (véase Radford, Demers y Miranda, 2009, pp. 146-151).

ideas mediante el desarrollo de posicionamientos críticos, el sentido de la responsabilidad y la solidaridad, y el cuidado de los otros.

La unidad conceptual y contextual nos llevó a organizar los problemas de tal manera que cada uno de ellos incluyera varias preguntas y acciones interrelacionadas con otros problemas. Esta unidad conceptual y contextual se corresponde con el movimiento de tres personajes: Tina, John y un perro que caminan en una línea recta del mismo lado de una fuente. John se aleja o se acerca a la fuente en diferentes intervalos de tiempo, Tina y el perro se alejan de la misma fuente en diferentes momentos.

Cabe destacar que no todos los personajes aparecen en el primer problema de la tarea. Por ejemplo, el perro aparece en el segundo problema. En el segundo problema, John desaparece y vuelve a aparecer en el cuarto problema. La aparición y desaparición de los personajes no es ingenua. Cada aparición plantea una serie de retos matemáticos conceptuales y procedimentales adicionales que buscan:

1. reconsiderar algunos objetos matemáticos previamente encontrados para llevarlos a niveles de conceptualización más profundos que antes y
2. provocar el encuentro con nuevos objetos matemáticos.

Podemos reescribir la figura 16 como se presenta en la figura 31. La figura 31 presenta un mapa del diseño de las tareas. La línea curva que se muestra en la figura 30 es la que organiza la secuencia ordenada de los cuatro problemas en la fila inferior de la figura 31.

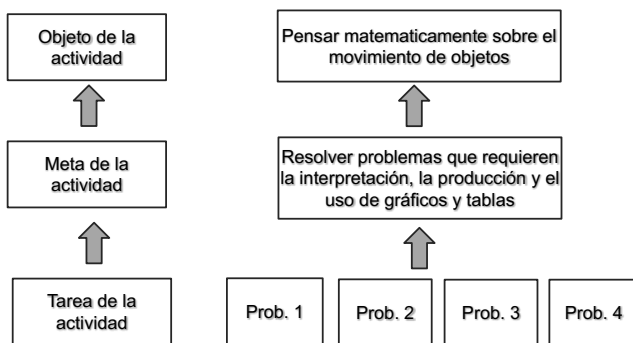


Figura 31. La estructura general del componente Φ

En las siguientes cuatro subsecciones, presentamos cada uno de los cuatro problemas de la tarea.

2.4. Problema 1: interpretación y réplica de un gráfico

El problema 1 comienza con la descripción verbal de las posiciones de Tina y John en relación con una fuente (que es el punto de referencia). Los tres personajes se mueven sobre un mismo segmento de recta, a la derecha de la fuente. En el problema se muestran dos gráficos, cada uno de los cuales representa el movimiento de Tina y John, respectivamente (véase la figura 32; en el apéndice de este capítulo se puede encontrar una descripción completa de la tarea).

1. Tina está a 1 metro de una fuente. Comienza a caminar en línea recta. Su movimiento está representado por el gráfico de la izquierda.
2. John está a 4 metros de una fuente. Comienza a caminar en línea recta. Su movimiento está representado por el gráfico de la derecha.

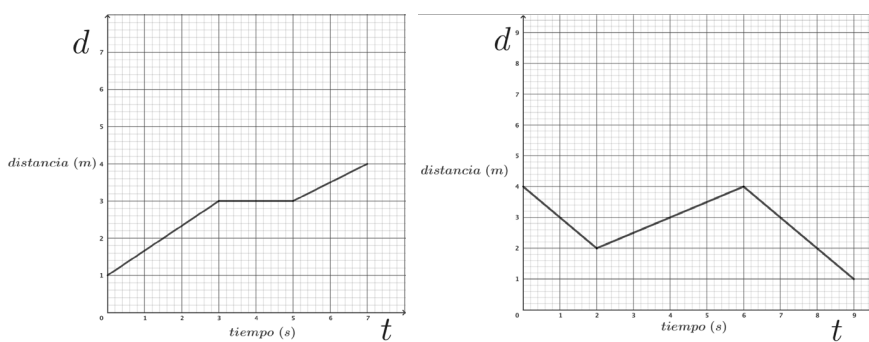


Figura 32. Gráficos de tiempo-distancia de Tina y John

En este problema, se invita a los estudiantes a discutir en pequeños grupos la interpretación de los gráficos y proporcionar su descripción precisa.

Primera acción

El problema comienza con una acción (primera acción) que deben realizar los estudiantes. Se les pide a los estudiantes que interpreten la información presentada en los gráficos. Para ello, los estudiantes tienen que reconocer las diferentes características de los dos movimientos (por ejemplo, alejarse de la fuente, acercarse a la fuente, no moverse, así como consideraciones sobre las variables tiempo y distancia y su relación).

Segunda acción

La segunda acción pide a los estudiantes que proporcionen una explicación matemática precisa de los gráficos. El texto de la hoja de actividades de los estudiantes para esta acción es: “Proporcione una explicación precisa (utilizando terminología matemática) del recorrido de Tina y del recorrido de John”.

Como ejemplo de lo que se puede esperar de los estudiantes (una respuesta que estaba prevista en nuestro análisis *a priori*), un grupo produjo el siguiente texto sobre el movimiento de Tina.

Debes empezar a 1 metro [de la fuente], tardar 2 segundos en caminar hasta [el punto a] 3 metros [de la fuente], esperar 2 segundos y luego caminar hasta [el punto a] 4 metros [de la fuente] en 2 segundos. En total, debes haber caminado durante 7 segundos.

Como podemos ver, los puntos importantes del recorrido se indicaron en función de la distancia a la fuente, aunque, como esperábamos, la fuente permanece implícita. Además, de acuerdo con investigaciones anteriores (por ejemplo, Radford, Demers, Guzmán y Cerulli, 2004), los estudiantes no cuentan el tiempo transcurrido desde el inicio del recorrido. En cambio, mencionan el tiempo transcurrido para cada parte del recorrido. Como resultado, aunque correcto desde un punto de vista pragmático, la variable tiempo no se conceptualiza todavía en términos cartesianos y, en consecuencia, la interpretación no es (todavía) una interpretación cartesiana del movimiento.

Tercera acción

A estas dos acciones les sigue una tercera. Consiste en pedir a cada pequeño grupo que replique los movimientos de Tina y John. En cada pequeño grupo, se equipa a los estudiantes con un cronómetro, cinta adhesiva y una cinta métrica, y se les pide que identifiquen a un estudiante para que replique el recorrido de Tina y a otro para que se encargue de replicar el recorrido de John. En cada pequeño grupo, se invita a los estudiantes a trabajar juntos.

En general, para reproducir los recorridos, esperamos que los estudiantes organicen el espacio en el que se van a realizar los recorridos: necesitan, por ejemplo, marcar o indicar puntos importantes en el espacio. La figura 33 muestra a uno de los pequeños grupos tomando medidas y

reproduciendo el recorrido de Tina. Los tres estudiantes (Richard, Kent y José; de izquierda a derecha en la imagen de la izquierda) colocaron etiquetas que indican los puntos clave del recorrido de Tina (1 metro, 3 metros y 4 metros). El estudiante elegido para caminar tenía que alcanzar estos puntos clave en valores específicos de tiempo (0 segundos, 3 segundos, 7 segundos). En la imagen de la derecha de la figura 33, vemos a José caminando, mientras Richard mide el tiempo y Kent, situado a 3 metros del punto de partida de José, observa su movimiento. Una vez que los estudiantes están preparados, salen al pasillo para reunirse con el profesor e intentar reproducir los gráficos cartesianos de Tina y John.

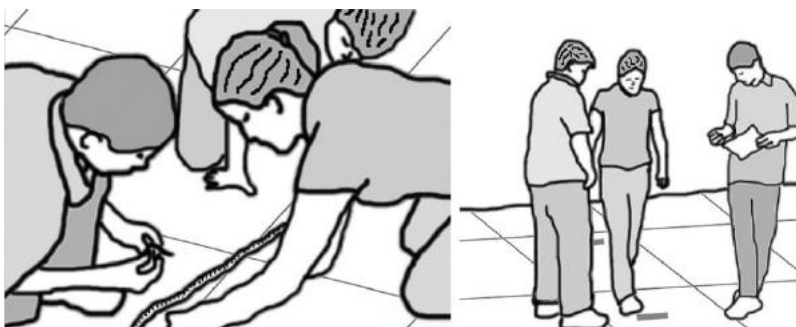


Figura 33. Los estudiantes miden distancias y practican el recorrido de Tina

Para reproducir los gráficos, el profesor dispone de un sensor de movimiento (llamado Calculator Based Ranger o CBR) conectado directamente a una calculadora gráfica (véase la figura 34).



Figura 34. Calculator Based Ranger o CBR® y calculadora gráfica

El sistema CBR-calculadora utiliza ultrasonidos para medir la posición de personas u objetos a intervalos cortos de tiempo (t_1, t_2, t_3 , etc.) y registra la distancia (d_1, d_2, d_3 , etc.) de personas u objetos en movimiento. Así, el sensor de movimiento registra una secuencia de pares (t_i, d_i) que envía a la calculadora gráfica. Con los datos, la calculadora gráfica produce gráficos cartesianos como tiempo-distancia, tiempo-rapidez y tiempo-aceleración.

En el pasillo, antes de la llegada de los estudiantes, el profesor elige un lugar como posición de la fuente y, en una línea frente a la posición de la fuente, coloca etiquetas que indican las distancias a la fuente (1 m, 2 m, 3 m y 4 m). A continuación, el profesor da la señal de salida. Cuando el profesor activa el sistema CBR-calculadora, el estudiante elegido por los compañeros para ser Tina comienza a caminar (lo mismo se repite para el recorrido de John). Para evitar que los estudiantes recurran a procedimientos de ensayo-error, el profesor menciona una condición que debe respetarse al principio de la clase: en el pasillo, cada grupo solo tendrá dos intentos para reproducir el recorrido de Tina (lo mismo para el recorrido de John).

Después de reproducir el recorrido, la calculadora muestra el gráfico. A continuación, para que quede constancia, los estudiantes hacen una copia aproximada de este gráfico en el correspondiente gráfico cartesiano del problema en su hoja de la tarea (véase la hoja de la tarea en el apéndice de este capítulo). En función de la similitud entre el gráfico producido por la calculadora y el gráfico dado en el problema, el profesor y los estudiantes califican el esfuerzo del equipo (los detalles de esta escala se muestran en el apéndice de este capítulo).

Si los gráficos mostrados por el CBR no coinciden con los mostrados en el problema (véase la figura 32), el profesor invita a los estudiantes a seguir pensando y discutiendo cómo reproducir los gráficos.

Hasta ahora, hemos descrito el problema 1 de la tarea. Recordemos que este problema se enmarca en una unidad conceptual y contextual y está constituido por tres acciones específicas.

1. En la primera acción, se pide a los estudiantes que interpreten los gráficos cartesianos.
2. En la segunda acción, se les pide a los estudiantes que den una explicación matemática de los movimientos de Tina y John.
3. En la tercera y última acción, se pide a los estudiantes que reproduzcan los movimientos delante del profesor.

La figura 35 resume los elementos que constituyen el problema 1.

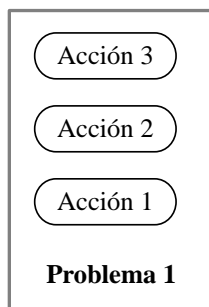


Figura 35. Problema 1 constituido por tres acciones

Una vez que todos los pequeños grupos han tenido la oportunidad de reproducir los recorridos, el profesor puede dirigir un debate general y comparar las interpretaciones, las explicaciones y los resultados.

2.5. Problema 2: Tina y el perro

Como todos los problemas de la tarea, el problema 2 se enmarca en la misma unidad conceptual y contextual. Un nuevo personaje —un perro— se introduce como parte de esta unidad.

Primera acción

A partir de la información del gráfico cartesiano de Tina, la primera acción de este problema les pide a los estudiantes que calculen la rapidez (media) de Tina durante los tres primeros segundos. Los estudiantes deben tener en cuenta el concepto de rapidez y establecer relaciones cuantitativas entre la distancia y el tiempo.

Primera pregunta

A la primera acción, le sigue la primera pregunta: ¿cuándo camina Tina más rápido? Con esta pregunta, se les pide a los estudiantes que hagan comparaciones entre la rapidez asociada a cada uno de los tres segmentos mostrados en el gráfico cartesiano de Tina (véase la figura 32).

A partir de esta pregunta, el problema 2 convoca el uso de otros objetos matemáticos estrechamente relacionados con el movimiento, como

la rapidez, y permite que los estudiantes tomen consciencia de otros atributos que lo caracterizan, lo que de esta manera lleva a los estudiantes a pensar en el movimiento por medio de su representación gráfica a niveles de complejidad superiores a los requeridos por el problema 1.

Segunda pregunta

Una vez realizada la primera acción y respondida la primera pregunta, los estudiantes abordan la segunda. La pregunta es: “¿Cuándo está Tina a 3 metros de la fuente?”. Los estudiantes tienen que utilizar argumentos matemáticos para responder a esta pregunta. La razón de ser de esta pregunta es intentar que los estudiantes sean conscientes, en un nivel de consciencia más profundo, de la relación entre las variables matemáticas básicas implicadas: la distancia y el tiempo. En concreto, se pretende que los estudiantes reconozcan que, entre $t = 3$ y $t = 5$, Tina estará siempre a 3 metros de la fuente (véase la imagen izquierda de la figura 32). En este caso, hay un número infinito de soluciones. Además, se nombran en función del origen del movimiento en cuestión (por ejemplo, a $t = 3$ segundos, 3,01 segundos, 3,9 segundos, etc. a diferencia del tiempo pensado como tiempo transcurrido desde un punto *ad hoc*, como en el ejemplo citado anteriormente en el que el tiempo aparece como un número que expresa el tiempo transcurrido en una parte del recorrido). La forma en que el tiempo aparece aquí en la respuesta a la pregunta permite al profesor discutir el tiempo con los estudiantes como una variable cartesiana. Como vemos, la tarea pretende ofrecer a los estudiantes la oportunidad de avanzar en la curva de complejidad conceptual creciente.

En este momento del desarrollo de la historia o la narrativa del problema, aparece el perro. La inclusión del perro nos permite plantear preguntas aún más interesantes y complejas. Aparece en un breve texto que narra las características de su movimiento. El texto es el siguiente.

Un perro sale de la fuente en dirección a Tina al mismo tiempo que esta empieza a caminar. El perro corre a una rapidez de 0,75 m/s.

Segunda acción

En este punto, se invita a los estudiantes a abordar la segunda acción del problema 2. En esta acción se pide a los estudiantes que rellenen una tabla de valores (véase la figura 36).

Tiempo t (s)	Distancia (m)
0	
1	
2	
3	
3,5	

Figura 36. Tabla de valores

El propósito de esta acción es que los estudiantes calculen la distancia entre el perro y la fuente al tener en cuenta la rapidez del perro. Se puede observar que, mientras que, en las preguntas anteriores, los estudiantes tienen que calcular la rapidez a partir de la información de los gráficos cartesianos, en esta pregunta, los estudiantes tienen que realizar la acción contraria: encontrar la distancia con la ayuda de la rapidez.

Cabe mencionar que, como se muestra en la tabla, la mayoría de los números de la variable tiempo son enteros. La razón por la que elegimos un número decimal en los valores de la columna del tiempo fue para animar a los estudiantes a (a) notar que en gráficos como los que aquí se tratan se pueden incluir también números decimales, (b) reflexionar matemáticamente en un nivel superior de complejidad conceptual creciente, y (c) realizar acciones más complejas que las realizadas en las preguntas anteriores.

El análisis *a priori* sugiere que los estudiantes pueden elegir inicialmente sumas iterativas para determinar los valores de la columna de la distancia. Dicha estrategia debe refinarse para calcular el valor de la distancia cuando la variable tiempo incluye valores decimales. Para ello, se requieren operaciones aritméticas como la multiplicación o la división. En resumen, los cálculos con 3,5 segundos hacen avanzar a los estudiantes en la curva de complejidad conceptual creciente, pues las formas de reflexión, acción y expresión que utilizan los estudiantes para llevar a cabo esta acción son más sofisticadas y profundas que las utilizadas en las sumas iteradas. Una vez encontrado el valor de la distancia correspondiente al valor de los 3,5 segundos, las formas de reflexión, acción y expresión pueden ampliarse para calcular distancias asociadas a otros valores de tiempo (por ejemplo, 4,5, 5,5, 6,5, 7,5, etc.).

En resumen, el problema 2 incluye un nuevo personaje en movimiento que nos permitió incorporar nuevas acciones que implican formas más profundas de reflexión y acción. Recordemos que este problema comenzó con una acción. La primera acción pedía a los estudiantes que observaran el gráfico cartesiano de Tina y averiguaran la rapidez (media) de Tina durante los tres primeros segundos de su movimiento. La primera pregunta pedía a los estudiantes que averiguaran “cuándo” Tina camina más rápido. Aquí, la respuesta se basa en el uso de las variables implicadas y puede llevar, con la participación del profesor, a notar que la solución puede expresarse como un intervalo de tiempo.

La segunda pregunta también es un “cuándo”. Se pregunta cuándo Tina está a 3 metros de la fuente. De nuevo, el análisis *a priori* sugería que los estudiantes no considerarían necesariamente la variable tiempo como una variable continua y que los resultados podrían sugerir una o tres soluciones de t ; por ejemplo, $t = 3, 4, 5$; o $t = 3$. Observamos estas respuestas en nuestra clase de octavo grado. Un ejemplo de respuesta “ $t = 3$ ” es el siguiente: “Cuando ella [Tina] empieza a caminar está a 1 metro de la fuente, luego camina otros 3 por lo que está a 3 metros de la fuente en 3 segundos”. El estudiante nos hace un recorrido por el movimiento de Tina y nos dice dónde estaba Tina al principio de su recorrido. A continuación, la respuesta sigue una especie de explicación imprecisa que culmina con el dato correcto de que Tina estaba a 3 metros de la fuente en 3 segundos. Pero la respuesta se detiene ahí. Tal vez sea necesaria una visión más sintética del gráfico y de las variables. Incluimos esta respuesta porque pensamos que respuestas como esta son valiosas para que el profesor trabaje junto con los estudiantes en la elaboración de narrativas que hagan que los estudiantes tomen consciencia de la infinidad de soluciones a esta pregunta y de cómo se describen matemáticamente.

El problema 2 termina con una segunda acción: completar una tabla de valores cuya información está relacionada con el movimiento del perro, y que requiere que los estudiantes tengan en cuenta los números decimales.

Los distintos elementos del problema 2 (y esto es válido para los problemas que siguen) reflejan uno de los aspectos clave de la configuración de la tarea de la actividad de enseñanza-aprendizaje. Buscan provocar, con la participación del profesor, la emergencia o transición entre tres importantes niveles de conceptualización: la experiencia sensual concreta, las interpretaciones cualitativas y las interpretaciones cuantitativas asociadas al uso de símbolos. En conjunto, estos niveles de conceptualización buscan

que los estudiantes tomen consciencia, por medio de niveles de generalidad cada vez más profundos y sofisticados, de los objetos matemáticos involucrados en el problema.

La figura 37 resume los elementos del problema 2.

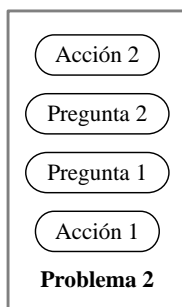


Figura 37. Problema 2 constituido por dos acciones y dos preguntas

En este problema y en los siguientes, dependiendo de cómo se desarrolle la actividad de enseñanza-aprendizaje, el profesor decide si realiza o no una discusión general sobre el problema para animar a los estudiantes a comparar diferentes soluciones, interpretaciones, explicaciones y resultados.

2.6. Problema 3: la distancia entre Tina y el perro

Con cada acción y pregunta de este problema, buscamos que los estudiantes reflexionen sobre la distancia entre Tina y el perro a medida que pasa el tiempo. ¿Cómo varía la distancia entre Tina y el perro a lo largo del tiempo?

Primera acción

La primera acción del problema 3 requería que los estudiantes realizaran el gráfico cartesiano que representa la distancia entre el perro y la fuente. Esta acción se puede realizar con facilidad, pues los estudiantes han completado antes la tabla de valores, como se ve en la figura 36. Nótese que la tabla de valores es un *input* para hacer una nueva acción.

Segunda acción

Una vez que los estudiantes hacen el gráfico, les pedimos que calculen la distancia entre Tina y el perro en $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 3,5$ y $t = 4$

segundos. Esta petición es la segunda acción del problema 3. Requiere que los estudiantes observen cómo disminuye esta distancia. Aquí los estudiantes tienen que pensar en generar una tabla tiempo-distancia para Tina o leer los valores de la distancia del gráfico de Tina. Hay, por supuesto, una complejidad conceptual añadida a esta acción, ya que los estudiantes tienen que coordinar diferentes objetos matemáticos.

Tercera acción

A continuación, les pedimos a los estudiantes que realicen el gráfico cartesiano que representa la distancia entre Tina y el perro entre 0 y 4 segundos. Esta es la tercera acción. Queremos que los estudiantes visualicen cómo disminuye la distancia entre estos dos personajes en movimiento. Los *inputs* para ejecutar esta acción se han considerado antes, pues los estudiantes ya han elaborado el gráfico del movimiento del perro, han rellenado la tabla de valores de la figura 36 y han calculado la distancia entre Tina y el perro. De este modo, animamos a los estudiantes a utilizar estos tres *inputs* de forma coordinada.

Cabe destacar la forma en que se organiza la curva de la complejidad conceptual creciente de los problemas (véase la figura 30). Observemos que, en esta tarea, para resolver problemas más complejos, es necesario articular las soluciones de los problemas anteriores. En este sentido, las diferentes soluciones de los problemas anteriores son los insumos necesarios para proporcionar las soluciones de los problemas más complejos. Sin embargo, no esperamos que el reconocimiento de los insumos por parte de los estudiantes surja de inmediato; el profesor desempeña aquí otro papel indispensable, ya que, por medio de las preguntas que realice, creará las condiciones para que los estudiantes alcancen niveles profundos de consciencia matemática.

Por un lado, por medio de la articulación de las soluciones de los problemas, esperamos que los estudiantes vean las interrelaciones entre los diversos objetos matemáticos que intervienen en la reflexión matemática elemental del movimiento. Esperamos (¡y deseamos!) que los estudiantes lleguen a concebir los objetos matemáticos como conectados entre sí.

Por otro lado, buscamos que los estudiantes sean progresivamente conscientes de los objetos matemáticos en niveles de generalidad cada vez más sofisticados y profundos. Esto se expresa por medio de las conexiones que los estudiantes pueden establecer entre los distintos componentes de los objetos matemáticos implicados (por ejemplo, el gráfico cartesiano, el origen matemático $(0, 0)$, el tiempo, la distancia, la rapidez, etc.).

Primera pregunta

Después de hacer el gráfico que describe la distancia entre Tina y el perro, hacemos a los estudiantes la primera pregunta: “¿Cuál es la distancia entre Tina y el perro a 1,5 segundos?”. La pregunta también les pide a los estudiantes que digan cómo han encontrado la respuesta. La idea es que los estudiantes utilicen lo que acaban de producir. Un gráfico debe servir para hacer algo o permitir hacer preguntas.

Segunda pregunta

La segunda pregunta del problema 3 consistía tanto en determinar el tiempo t en el que el perro alcanza a Tina, como en calcular a qué distancia se encuentran de la fuente. Con esta pregunta, queríamos que los estudiantes interpretaran el punto $(t, 0)$ del gráfico y que articularan la información que se presenta por separado en los gráficos relativos a la distancia entre Tina y la fuente y la distancia entre el perro y la fuente. Sin la información de estos dos gráficos, no es posible determinar la distancia entre cada personaje en movimiento y la fuente. La razón es que el gráfico que representa la distancia entre Tina y el perro no incluye explícitamente la fuente.

Resumamos lo que hemos dicho sobre el problema 3. Este problema tiene tres acciones estrechamente relacionadas. Se configuró de tal manera que la ejecución de algunas acciones de los problemas anteriores sirvió como insumo para resolver las dos preguntas de este problema.

1. La primera acción del problema 3 les pide a los estudiantes que dibujen el gráfico cartesiano del movimiento del perro.
2. La segunda acción requiere que los estudiantes calculen la distancia entre Tina y el perro en determinados valores de t .
3. En la tercera y última acción, se les pide a los estudiantes que elaboren el gráfico cartesiano que muestre la distancia entre Tina y el perro para t entre 0 y 4 segundos.

La primera de las dos preguntas de este problema pide encontrar la distancia entre Tina y el perro después de 1,5 segundos. La segunda pregunta consta de dos partes: ¿cuándo alcanza el perro a Tina? y ¿a qué distancia de la fuente están Tina y el perro? La figura 38 resume los elementos del problema 3.

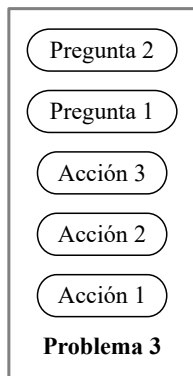


Figura 38. Problema 3 constituido por tres acciones y dos preguntas

2.7. Problema 4: un final feliz

La acción y las preguntas del problema 4 involucran a John, uno de los personajes móviles que aparece en el problema 1.

Primera acción

La primera acción requiere que los estudiantes calculen la rapidez de John entre 0 y 2 segundos. Esta acción busca poner de nuevo en la escena uno de los objetos matemáticos que habían aparecido antes en el problema 2. Sin embargo, a diferencia del problema 2, en el problema 4, la distancia de John disminuye entre 0 y 2 segundos. Con esta modificación, los estudiantes son capaces de ver las similitudes y diferencias entre rapidez y distancia de cada uno de los tres personajes en movimiento, aunque en este momento no asocien un valor negativo a la rapidez (es decir, los cálculos no conducen todavía al concepto vectorial de velocidad, que requeriría elementos de matemáticas de noveno grado en el plan de estudios de Ontario).

Primera pregunta

La primera pregunta pide que se determine cuándo John está a 3 metros de la fuente. Hay tres respuestas a esta pregunta. Como dijo uno de los grupos pequeños, “John está a 3 metros de la fuente a 1, 4 y 7 segundos. Esto se debe a que [John] se aleja y vuelve [de la fuente]. Al consultar el gráfico, se puede ver que ha estado a 3 metros [de la fuente] 3 veces”.

Segunda pregunta

La segunda pregunta consiste en determinar cuándo está John más lejos de la fuente.

Tercera pregunta

La tercera y última pregunta es: “Si John empieza a caminar al mismo tiempo que Tina y el perro, ¿está John lejos de ellos cuando el perro alcanza a Tina?”.

El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes coordinen la información mostrada en los gráficos anteriores de la tarea. Esta parte de la tarea se ha llamado “final feliz” porque la tarea se ha construido de tal manera que los tres personajes en movimiento se encuentran al mismo tiempo. Los tres personajes de la historia se encuentran, efectivamente, después de caminar durante 4 segundos. Sin embargo, tal y como se plantea la pregunta, este encuentro puede no ser evidente para los estudiantes. La figura 39 presenta la respuesta de un pequeño grupo. La traducción al español es: “John está en el mismo punto que Tina y el perro porque Tina y el perro están a 3 m [de la fuente] después de 4 s; y después de 4 s John está a 3 m de la fuente”.

Sean se retrouve à la même place que Tina et le chien car la Tina et le chien sont rendue à 3m après 4s et après 4s Jean est à la même 3m de la fontaine aussi.

Figura 39. Respuesta de un pequeño grupo a la última pregunta

La figura 40 resume los elementos del problema 4.

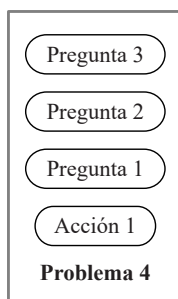


Figura 40. Problema 4 constituido por una acción y tres preguntas

La figura 41 resume la curva de complejidad conceptual creciente de las diferentes acciones y preguntas que componen los problemas 1, 2 y 4 de la tarea de la actividad (omitimos el problema 3 para simplificar la curva). Los cuatro problemas están asociados a la producción, el uso y la interpretación de gráficos.

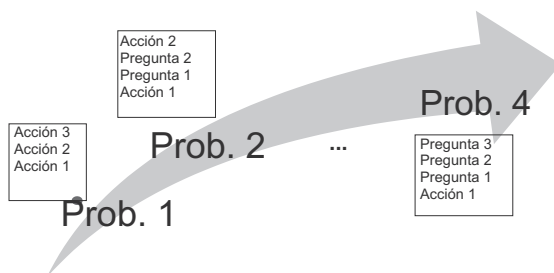


Figura 41. Curva de complejidad conceptual creciente de los problemas

3. Síntesis

En este capítulo, hemos presentado uno de los aspectos metodológicos de la teoría de la objetivación asociado al diseño de la tarea de la actividad que el profesor presenta a los estudiantes —el componente Φ —. La principal cuestión metodológica gira en torno a la elección de los problemas, la secuencia de su presentación y la organización social del aula. La organización de la tarea se rige por una unidad conceptual y contextual que busca crear niveles profundos de conceptualización mediante una curva de complejidad conceptual creciente. A partir del ejemplo descrito y su síntesis en la figura 41, intentamos destacar los siguientes aspectos.

En primer lugar, la unidad conceptual y contextual está asociada a una historia que narra el movimiento de tres personajes en movimiento: Tina, John y un perro. Las acciones, las preguntas y sus diferentes interrelaciones reúnen una serie de objetos matemáticos cuyas conexiones particulares se espera que sean encontradas por los estudiantes por medio de su labor conjunta con el profesor. Se espera que el diseño de la tarea les ayude a los estudiantes a tomar consciencia de las matemáticas como un “todo coherente” compuesto por componentes individuales y sus conexiones.

En segundo lugar, la organización de los problemas sigue una curva de complejidad conceptual creciente; en particular, algunos de los primeros

problemas se utilizan como insumo para resolver problemas de mayor complejidad conceptual más adelante.

La unidad conceptual y contextual, así como la curva de complejidad conceptual creciente, configuran una actividad de enseñanza-aprendizaje que debería facilitar el encuentro de los estudiantes con el saber histórico-cultural.

Agradecimiento

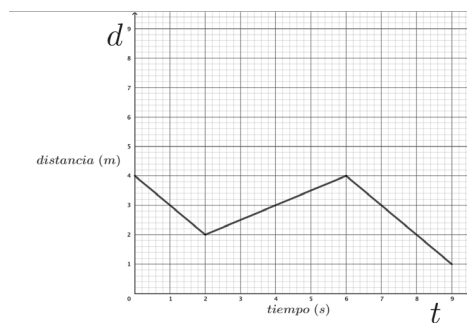
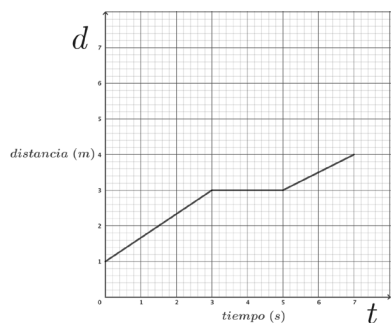
Este capítulo fue escrito en colaboración con Óscar Leonardo Pantano Mogollón e Isaías Miranda Viramontes.

4. Apéndice

El Concurso de la caminata

4.1. Problema 1

1. Tina está a 1 metro de una fuente. Comienza a caminar en línea recta. El primer gráfico de abajo representa su recorrido.
2. John está a 4 metros de la fuente. Comienza a caminar en la misma línea recta que Tina. El segundo gráfico de abajo representa su recorrido.



Tu grupo reproducirá los recorridos de Tina y John en un pasillo de la escuela en presencia del profesor. Tu grupo solo puede hacer dos intentos por recorrido. Los puntos por ganar se explican a continuación.

Puntos por ganar

Primer intento: un máximo de 12 puntos (4 puntos por una réplica exacta del primer segmento + 4 puntos por una réplica exacta del segundo segmento + 4 puntos por una réplica exacta del tercer segmento).

Segundo intento: un máximo de 9 puntos (3 + 3 + 3).

Antes de replicar los recorridos de Tina y John en el pasillo, por favor:

1. Interpreta los gráficos de Tina y John.
2. Proporciona una explicación precisa del recorrido.

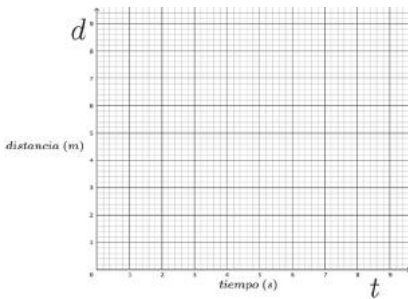
Explicación precisa (con terminología matemática) del recorrido de Tina:

Explicación precisa (con terminología matemática) del recorrido de John:

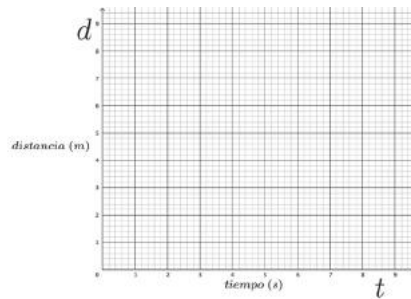
Practica los recorridos de Tina y John en la clase con tu grupo.

Ve con el profesor al pasillo para replicar los recorridos de Tina y John.

Repite el recorrido de Tina. Después de cada intento, mira el gráfico producida por la calculadora y haz un dibujo de la réplica del recorrido de Tina de tu grupo:



Primer intento



Segundo intento

Puntos obtenidos por tu grupo:

(Rellena con tu grupo después de discutir/acordar con el profesor)

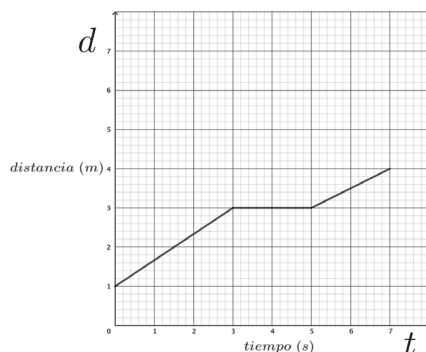
El recorrido de Tina: _____

El recorrido de John: _____

Total: _____

4.2. Problema 2. Tina y el perro

En el problema 1, Tina salió a 1 metro de la fuente y caminó en línea recta. Este es el gráfico del recorrido de Tina.



1. Calcula la rapidez media de Tina durante los primeros 3 segundos de su recorrido. Muestra tus cálculos.
2. ¿Cuándo camina Tina más rápido? Explica.
3. ¿Cuándo está Tina a 3 metros de la fuente? Justifica tu respuesta.

El perro

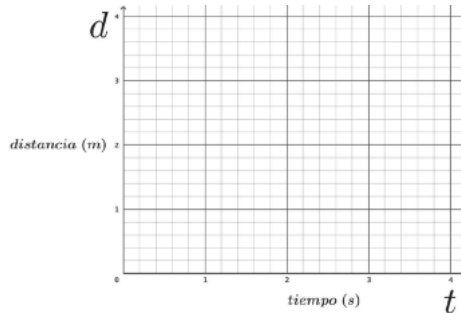
Un perro sale de la fuente en dirección a Tina al mismo tiempo que ella empieza a caminar. El perro corre a una rapidez de 0,75 m/s.

Rellena la siguiente tabla, que indica la distancia que separa al perro de la fuente.

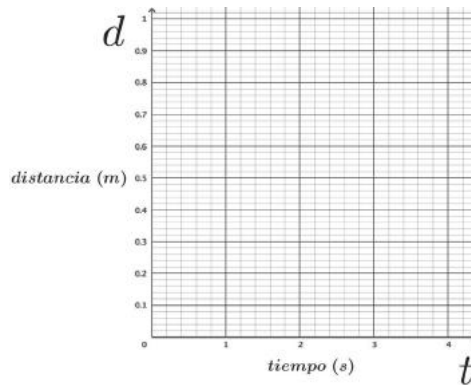
Tiempo t (s)	Distancia (m)
0	
1	
2	
3	
3,5	

4.3. Problema 3

1. Haz un gráfico que represente la distancia entre el perro y la fuente en relación con el tiempo. Pon un título adecuado a tu gráfico.



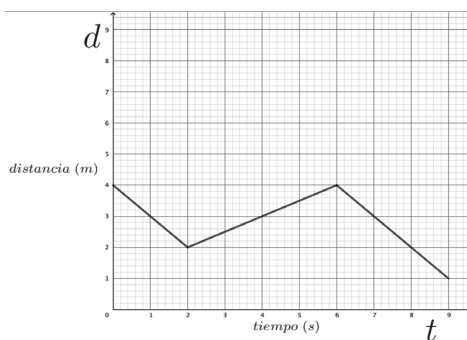
2. Calcula la distancia entre Tina y el perro cuando $t = 1$, cuando $t = 2$, cuando $t = 3$, cuando $t = 3,5$ y cuando $t = 4$. Explica tus cálculos.
3. Haz un gráfico que muestre la distancia que separa a Tina y al perro entre 0 y 4 segundos, y dale un título adecuado al gráfico.



4. ¿Cuál es la distancia entre Tina y el perro a 1,5 segundos? ¿Cómo has encontrado la respuesta?
5. ¿Cuándo alcanza el perro a Tina? ¿A qué distancia de la fuente están Tina y el perro? Justifica tu respuesta.

4.4. Problema 4. Algunas preguntas sobre John y un final feliz

En la actividad anterior, John estaba a 4 metros de la fuente y caminaba en la misma línea recta que Tina y el perro. Este es el gráfico del recorrido de John.



1. Calcula la rapidez media de John entre 0 y 2 segundos.
2. ¿Cuándo está John a 3 metros de la fuente? Explica.
3. ¿Cuándo está John más lejos de la fuente?
4. Si John empieza a caminar al mismo tiempo que Tina y el perro, ¿está John lejos de ellos cuando el perro alcanza a Tina? Explica tu respuesta.

Capítulo 8

La naturaleza cultural del pensamiento matemático

Todas las culturas tienen una teoría de que ciertas “cosas” ocurren realmente, son “realmente ciertas”, que “han sido” o “son”, aunque, por supuesto, los marcos en los que se realizan estas afirmaciones pueden variar de una cultura a otra. La verdad de una cultura puede ser la fantasía de otra.

Turner (1988, p. 41)

Este capítulo aborda la cuestión de la naturaleza cultural del pensamiento matemático. La cuestión no es fácil de abordar, ya que depende de lo que entendamos por *cultura*. A menudo, la cultura se toma como una especie de paraguas que engloba todo tipo de procesos, incluido el pensamiento. He aquí un ejemplo. Hace unos años, participé en la conferencia anual del Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática (PME). En uno de los informes de investigación, un ponente hacía alusión a la naturaleza cultural de los objetos matemáticos. Durante el período de preguntas y respuestas, un miembro del público argumentó que no era necesario insistir en la cuestión de la cultura, ya que obviamente todo es cultural. Al reducir la cultura a un paraguas abstracto, el problema de esta postura es que resulta imposible advertir las diversas maneras en las que las culturas afectan y moldean las ideas y los procesos de pensamiento; es

igualmente imposible comprender la naturaleza cultural de las matemáticas. El especialista vygotskiano Carl Ratner ha mostrado los límites de esta postura, que reduce la cultura a un mero conjunto de “actividades compartidas, o actividades históricamente acumuladas” (Ratner, 2015, p. 57). Este punto de vista “permite que prácticamente cualquier cosa se califique como cultura, se estudie como tal y se utilice como tal” (p. 57). Esta visión abstracta de la cultura tampoco tiene en cuenta que las culturas son lugares heterogéneos de conflicto y, por tanto, son portadoras de contradicciones políticas y económicas de procesos sociales.

Mi intención en este capítulo es aclarar lo que significa la naturaleza cultural del pensamiento matemático desde la teoría de la objetivación. En la primera parte, presento una visión general de los conceptos de cultura y explicaciones que se han dado acerca de las diferencias culturales. Como veremos, las diferencias culturales se explicaron primero mediante argumentos basados en una visión evolutiva de las personas y de la raza, que utilizaba al europeo como estándar. En la segunda parte del capítulo, presento el concepto dialéctico-materialista de cultura de la teoría de la objetivación. Por medio del prisma de este concepto de cultura, examino el pensamiento matemático griego para explorar las contradicciones sociales que lo sustentan. El capítulo termina con una invitación a los lectores a volver la vista a nuestras formas contemporáneas de pensamiento matemático y a reflexionar sobre la manera en que estas formas de pensamiento refractan y afirman las políticas e ideologías de nuestras actuales formas capitalistas de producción de la vida.

1. Introducción

En el capítulo 2, señalé que las teorías socioculturales afirman que los seres humanos están fundamentalmente relacionados con la cultura a la que pertenecen. Estar fundamentalmente relacionado con una cultura no significa serlo de forma contingente o accidental. La afirmación que hacen las teorías socioculturales significa que los modos en que los individuos piensan, como sienten y expresan sus sentimientos, lo que hacen, imaginan, esperan o sueñan están profundamente entrelazados con la cultura o culturas en las que viven. Una de las consecuencias es que los individuos se ven profundamente afectados por sus culturas tanto en lo que llegan a conocer como en sus formas de ser.

La naturaleza de este “efecto” de la cultura sobre los individuos es una cuestión muy controvertida. Pone en primer plano “las cuestiones de la libertad y el determinismo, la agencia humana y la resistencia, el cambio y la identidad, lo dado y lo creado” (Eagleton, 2000, p. 8). En los enfoques individualistas, el individuo se concibe como una entidad hecha por sí misma. El individuo es imaginado como si sus proyectos de vida, de sentido, de saber y de intencionalidad surgieran de sí mismo. El individuo es el único autor de la vida que vive. Esta es la concepción teórica del “yo” que emanó de la modernidad temprana y recibió una formulación clara durante el movimiento de la Ilustración europea del siglo XVIII. En esta concepción, lo social y lo cultural son meros subproductos de las acciones de los individuos. Las dimensiones socioculturales se ven sobre todo en términos contractuales (es decir, como obligaciones negociadas entre personas). Si bien esta concepción da la primacía a los individuos, otros enfoques dan la primacía a lo cultural. En estos enfoques, el individuo es considerado como un producto de su cultura, moldeado por procesos sociales de naturaleza económica o por formas simbólicas culturales. En este capítulo, me alejo de estos dos enfoques. Exploro uno en el que los individuos crean culturas y las culturas crean individuos. Sugiero que la relación entre los individuos y la cultura es dialéctica en un sentido sobre-determinado que se explicará más adelante. En esta relación dialéctica, por medio de nuestra inmersión en las prácticas sociales, afectamos a la cultura. A su vez, la cultura nos afecta: afecta tanto a nuestras formas de conocer y pensar como a nuestras formas de llegar a ser. En este capítulo, me centro en la cuestión epistemológica: la cuestión de la cultura y nuestras formas de conocer y pensar. En el siguiente capítulo, me centraré en la cuestión ontológica: la cuestión de la cultura y nuestras formas de llegar a ser. Ambas cuestiones están interrelacionadas. Las divido para simplificar el análisis.

Como educador matemático, mi interés no reside en el pensamiento en general, sino en el pensamiento matemático. Intento comprender lo que podría llamarse la naturaleza cultural del pensamiento matemático. Es necesario decir algo sobre mi metodología. Vivimos inmersos en culturas, hasta el punto de que gran parte de la dimensión cultural de nuestras vidas pasa inadvertida. Quizás no sea exagerado decir que nos encontramos un poco en la misma situación que un pez que vive en su acuario. Así que, metodológicamente hablando, tal vez sea mucho mejor abordar el fenómeno investigado recurriendo a culturas en las que no estamos inmersos. Voltearnos hacia culturas en las que no vivimos nos ofrece la posibilidad

del fenómeno de *dépaysement* (*extrañamiento*, véase Guillemette, 2017), es decir, de sentirnos fuera de casa, de lo familiar, de lo que damos por sentado. Y este extrañamiento puede permitirnos percibir mejor el papel de la cultura en la forma en que se llega a pensar matemáticamente.

En la primera parte de este capítulo, hago una breve incursión en la antropología y examino el concepto de cultura. En el curso de esta incursión, veremos que, al principio, los antropólogos se enfrentaron al problema de las diferencias culturales en general y de las diferencias de pensamiento en particular. Una vez que superaron las explicaciones racistas, los antropólogos acabaron enfrentándose a tener que elegir entre dos opciones principales: una que considera que el origen de la mente y la estructura de la sociedad reposa en la satisfacción de las necesidades económicas, y otra que considera más bien que dicho origen se encuentra en una matriz simbólica. Yo tomo un camino diferente. Basándome en el trabajo de Eagleton (2000, 2016), Fay (1996), Godelier (2010), Williams (2005), y Resnick y Wolff (1982, 2011), en la segunda parte del capítulo, esbozo una concepción dialéctico-materialista de la cultura. En esta perspectiva, las culturas se entienden como lugares políglotas de conflicto, resistencia y creación de significados que se integran en procesos sociales impulsados por cuestiones ideológicas, económicas y políticas. En la última parte del capítulo, acudo a este concepto de cultura para investigar la naturaleza del pensamiento matemático. Para salir de nuestra familiaridad cotidiana, realizo esta investigación en la antigua Grecia. Al concebir el pensamiento como la contraparte ideacional de las prácticas sociales, mi intención es ofrecer una explicación sobre la relación entre las diversas formas de pensamiento matemático griego en el período clásico y las especificidades de la cultura en cuestión. En la última parte del capítulo, invito a los lectores a volver los ojos a nuestras formas contemporáneas de pensamiento matemático y a reflexionar sobre la manera en que estas formas de pensamiento refractan y afirman las políticas e ideologías de las actuales formas capitalistas de producción de la vida³⁵.

35 Por ideología no quiero decir una “falsa consciencia” o una versión disfrazada de la realidad. Siguiendo a Vygotsky, por *ideología* entiendo aquellos elementos y normas de origen social “que se han endurecido en forma de estatutos legales, preceptos morales, gustos artísticos, etc. Estas normas están impregnadas de la estructura de clase de la sociedad que las generó y sirven como organización de producción de la clase” (Vygotsky, 1997b, p. 211).

2. La concepción relativista de la cultura de Boas

Siempre se ha reconocido que las personas de otros entornos tienden a pensar de forma diferente sobre el mundo. Los antiguos griegos, por ejemplo, se referían a los pueblos que no hablaban griego como *bárbaros* (de βάρβαρος, *bárbaros*), al reconocer que tenían otras lenguas, costumbres y hábitos. A los ojos de los griegos, los persas, los egipcios y los fenicios eran bárbaros. Cuando, a finales de la Edad Media, los conquistadores, misioneros, diplomáticos, comerciantes y otros europeos se embarcaron en sus empresas colonizadoras, se dieron cuenta de que los pueblos que conocían y subyugaban no pensaban igual que ellos. ¿Cómo se entendían las diferencias culturales? Para los griegos, era una cuestión de civilización frente a salvajismo (de ahí la connotación peyorativa de βάρβαρος). En la Europa moderna, y hasta el siglo XIX, las diferencias culturales se entendían de acuerdo con algo que se salía del paradigma griego de pensamiento: una visión humanista-evolucionista de las personas y las razas. Fueron los trabajos de Franz Boas, a finales del siglo XIX, los que abrieron nuevas vías, no racistas, al estudio de las diferencias culturales y los que ayudaron a mover la discusión hacia nuevos terrenos.

Franz Boas se formó en física, matemáticas y geografía. Abandonó su Alemania natal en el año 1883 y se embarcó en una expedición a la isla de Baffin, en Canadá, donde realizó investigaciones entre las comunidades indígenas para estudiar su organización social, económica y espacial. En sus estudios de campo sobre la percepción y el lenguaje, Boas se dio cuenta de que los colores, por ejemplo, no eran percibidos de forma invariable por los distintos grupos culturales. Con asombro, observó que los inuit tenían una rica gama de conceptos que les permitían distinguir los tonos del blanco. “Aquí”, escribió, “encontramos una palabra que expresa ‘nieve en el suelo’; otra, ‘nieve que cae’; una tercera, ‘nieve a la deriva’; una cuarta, ‘un montón de nieve’” (Boas, 1944, p. 211). Concluyó que el ojo que ve es un órgano cultural. A Boas no le habría sorprendido mucho saber que los antiguos griegos y babilonios no percibían y conceptualizaban las formas de la misma manera. En efecto, al tratar las formas, los griegos euclidianos veían superficies o regiones, mientras que los escribas babilónicos veían lados³⁶.

36 Por ejemplo, en la proposición 34, de los *Elementos*, Euclides no habla de un paralelogramo como las líneas que delimitan la forma, sino de un “área paralelogramo”. Las diferentes concepciones griega y babilónica de las formas son explicadas por Jens

En el curso de sus investigaciones, Boas se convirtió en uno de los más contundentes opositores a la idea de las diferencias biológicas entre “civilizados” y “primitivos”. Como señala Cuche (2004), “Toda la obra de Boas es un intento de pensar la diferencia. ... Para él, no hay ninguna diferencia de ‘naturaleza’ (biológica) entre primitivos y civilizados, solo diferencias de cultura, adquiridas, y por tanto no innatas” (p. 19). Stocking resume el argumento de Boas contra la raza y el primitivismo de la siguiente manera:

el propósito general del argumento de Boas fue mostrar que el comportamiento de todos los hombres, independientemente de su raza o etapa cultural, estaba determinado por una serie tradicional de patrones de comportamiento habitual transmitidos por medio de lo que ahora llamaríamos el proceso de enculturación. ... Boas había comenzado a mostrar que la mente del primitivo de piel oscura compartía con la del europeo de piel blanca los poderes de abstracción, inhibición y elección. Terminó argumentando que el pensamiento, la acción y la elección, ya sean primitivos o civilizados, estaban determinados en gran medida por la serie particular de tradición y costumbre “que ha estado controlando todas nuestras acciones desde el momento de nuestro nacimiento”. (Stocking, 1966, pp. 877-878)

A su regreso de la isla de Baffin, Boas trató de encontrar un trabajo en Estados Unidos, pero la oferta de trabajo no se materializó. Regresó a Alemania durante unos meses y después volvió a Canadá para embarcarse esta vez en un viaje de campo a la costa de la Columbia Británica para estudiar varias comunidades³⁷.

Su libro *The Mind of Primitive Man* (*La mentalidad del hombre primitivo*) es el resultado de lo que aprendió en sus viajes de campo. En él, Boas

Høyrup en su espléndido libro, *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin* (*Longitudes, anchuras y superficies: Un retrato del álgebra de la antigua Babilonia y sus parientes*) (Høyrup, 2002).

37 La gente de Nawiti lo tomó primero por un misionero y luego por un agente del gobierno. Para disipar malentendidos, durante una fiesta Nawiti, después de que el jefe terminara su discurso, Boas se levantó y dijo “Mi país está muy lejos del suyo; mucho más lejos incluso que el de la Reina. ... Mi gente vive muy lejos y quisiera saber lo que hace la gente de tierras lejanas, y por eso me puse en camino” (Boas, citado en Lévy Zumwalt, 2019, p. 165).

introduce una concepción relativista de la cultura que da una nueva orientación a los estudios antropológicos. La cultura, dice,

puede definirse como la totalidad de las reacciones y actividades mentales y físicas que caracterizan el comportamiento de los individuos que componen un grupo social de forma colectiva e individual en relación con su entorno natural, con otros grupos, con los miembros del propio grupo y de cada individuo consigo mismo. También incluye los productos de estas actividades y su papel en la vida de los grupos. (Boas, 1944, p. 159)

La concepción relativista de la cultura que surgió de la obra de Boas llevó a reformular la cuestión de las diferencias culturales y de la relación entre cultura y mente. Llevó a entender la racionalidad como localmente situada o —para usar la jerga antropológica de la época— que el pensamiento y el comportamiento están culturalmente determinados.

Pero ¿qué es lo que hace que los inuit vean el mundo como lo hacen y que vean matices de blanco donde nosotros no los vemos? ¿Qué es lo que llevó a los griegos a ver superficies donde los babilonios veían lados? ¿Qué es lo que al final llevó a los griegos a una forma de pensamiento matemático y a los babilonios a otra diferente? En definitiva, ¿cómo se puede explicar que el pensamiento y el comportamiento estén determinados culturalmente? La cuestión de la “determinación” llevó a los antropólogos a lo que llaman el “venerable conflicto”.

3. El venerable conflicto antropológico

El conflicto se basa en dos grandes explicaciones alternativas de la mente y la cultura: una basada en una visión utilitaria de la acción humana (la “explicación utilitaria”) y la otra basada en la premisa de un orden simbólico (“el relato o explicación cultural”). La primera hace hincapié en las necesidades prácticas de los individuos, mientras que la segunda hace hincapié en un orden simbólico convencional por medio del cual los individuos de una cultura dan sentido a su mundo. Como explica el antropólogo estadounidense Marshall Sahlins (1976),

Las alternativas en este venerable conflicto entre el utilitarismo y un relato cultural pueden formularse a grandes rasgos de la siguiente

manera: si el orden cultural debe concebirse como la codificación de la acción pragmática real del hombre [*sic*]; o si, por el contrario, la acción humana en el mundo debe entenderse como mediada por un diseño [o configuración] cultural, que da orden a la vez a la experiencia práctica, a la práctica de las costumbres y a la relación entre estas dos. (p. 55)

El venerable conflicto antropológico tiene como raíz nada más y nada menos que la cuestión de la naturaleza humana. ¿Esta naturaleza es primordialmente económica o simbólica? ¿Cómo debemos entender nuestra especie? ¿Como *homo economicus* u *homo symbolicus*? Si usted piensa que nuestros impulsos básicos están dirigidos a satisfacer nuestras necesidades de supervivencia y a producir cosas para sobrevivir, y que las instituciones sociales y sus significados derivan de esos impulsos, estaría de acuerdo con la tesis del *homo economicus*. Si, por el contrario, usted piensa que nuestros impulsos de supervivencia se satisfacen de manera ya configurada por un orden simbólico, entonces estaría de acuerdo con la tesis del *homo symbolicus*.

Tomemos el ejemplo del parentesco de los tallensi en la Costa de Marfil francesa y los territorios del norte de la Costa de Oro. Siguiendo la tesis del *homo symbolicus*, Meyer Fortes vio en esta organización de parentesco africana “un sistema de valores, un conjunto de normas de conducta y un esquema de relaciones sociales” que organizaban la sociedad en su conjunto, incluida su esfera económica (Fortes, 1949, p. 339). Siguiendo la tesis del *homo economicus*, Peter Maurice Worsley vio en el parentesco una entidad simbólica derivada que surge de necesidades económicas, “de las necesidades de la agricultura, la herencia de la propiedad, etc.”, de modo que “lejos de ser básico, [el parentesco] es secundario” (1956, p. 62).

En oposición a las razones pragmáticas invocadas por las teorías utilitarias, Sahlins (1976) afirma que el principio organizador de la sociedad es “lo simbólico o significativo” (p. viii). Sahlins admite que los individuos deben vivir en un mundo material y que tienen que ajustarse a las limitaciones materiales que encuentran en su entorno, pero su punto es que los individuos lo hacen “según un esquema simbólico definido” y que es este esquema el que define la utilidad (p. viii). Para Sahlins, el pecado del enfoque utilitario es reducir la cultura a un sistema instrumental. Los enfoques utilitarios no han “sido capaces de aprovechar plenamente el descubrimiento antropológico de que la creación de significado es la cualidad distintiva y constitutiva de los hombres [*sic*” (p. 102).

Así, volviendo a nuestro ejemplo matemático, sería inútil buscar las particularidades del pensamiento matemático de la antigua Grecia en las formas griegas de producción económica, su división social del trabajo, la apropiación y distribución del excedente económico, la estructura política del Estado y las formas de exclusión social. Todos estos aspectos de la sociedad griega antigua, incluidos los que pertenecen al ámbito de las ideas (como el pensamiento matemático griego), son resultados de la mediación que un orden simbólico ya ha operado. Este orden simbólico incluye la búsqueda de la verdad, la distinción teórica entre el ser y el no ser, el principio del tercero excluido, el estándar griego de perfección, el poder del *logos* y la aversión por el trabajo manual y la pasión concomitante por la abstracción. Del mismo modo, sería inútil buscar las particularidades del pensamiento matemático babilónico en las estructuras económicas, sociales y políticas de la ciudad y las necesidades administrativas del templo y los ejércitos militares. Las particularidades del pensamiento, matemático y de otro tipo, se explicarían más bien por la propia cultura: “no simplemente al mediar la relación humana con el mundo mediante una lógica social de significación, sino al constituir mediante un esquema [cultural] los términos subjetivos y objetivos relevantes de la relación” (p. x).

La tesis del *homo economicus* parece presentarnos una visión muy limitada de la especie. Pero también lo hace la del *homo symbolicus*. En la concepción simbólica de la cultura, la sociedad se ve como una especie de artefacto artístico. Hace de la acción y de la propia existencia cotidiana un acontecimiento estético. Eagleton, R. Williams y otros han visto en esta concepción de la cultura una reacción al atrincherado utilitarismo que llegó con la industrialización a finales del siglo XIX y principios del XX. Eagleton (2016) señala que, en esta época,

Un orden industrial impulsado por la rivalidad y la codicia ha cortado los vínculos tradicionales entre los individuos, encerrando a cada uno de ellos en su propio espacio solitario. La estructura misma de la sociedad está, por tanto, en peligro. Las relaciones humanas se han convertido en contractuales en lugar de orgánicas. (p. 114)

Situar el significado en primer plano y colocarlo como origen de la acción humana aparece como un arma para contrarrestar la desaparición de los vínculos y las relaciones que se desvanecían con la marcha hacia la industrialización y su énfasis en la “utilidad como fuente de valor” (Williams, 1953, p. 250). Ciertamente, el concepto estético semiótico de

la cultura articulado por la antropología simbólica supera las limitaciones del concepto utilitario de la cultura que deriva el significado de la esfera económica. También supera la concepción utilitaria del ser humano como agente racional que busca la autosatisfacción. Sin embargo, el concepto de cultura en la antropología simbólica, tal y como se elabora en la obra de Sahlins y otros, elimina del foco de atención las cuestiones de política, poder, marginación y las contradicciones inherentes a la sociedad. En lugar de ello, se presenta una visión pacífica y purificada de la sociedad. La cultura puede verse ahora con seguridad como “un patrón de significados históricamente transmitido y plasmado en símbolos, un sistema de concepciones heredadas expresadas en formas simbólicas por medio de las cuales los hombres [*sic*] se comunican, perpetúan y desarrollan sus saberes sobre la vida y sus actitudes hacia ella” (Geertz, 1973, p. 89). En definitiva, la antropología simbólica nos presenta un concepto higienizado de la sociedad a la cual se le ha pasado ya el paño desinfectante³⁸.

4. Una visión dialéctico-materialista de la cultura

En esta sección, exploro un concepto de cultura que toma en cuenta tanto la dimensión económica de la sociedad como el papel fundamental del significado en la acción humana. Es un concepto en el que la cultura no es un mero reflejo de las estructuras económicas ni el efecto de un esquema semiótico. Busco explorar la cultura como una entidad dinámica que es el producto de varios procesos sociales complejos. Desde este punto de vista, la cultura “incorpora cuestiones de poder y la construcción dialéctica del significado”; se convierte en una entidad histórica en la que “se constituyen posiciones múltiples y contradictorias” (Simon y Dippo, 1986, p. 198).

38 El ordenamiento teórico de lo económico como derivado de lo simbólico en el relato antropológico de la sociedad es particularmente intrigante en los trabajos de Marshall Sahlins, quien fue un ardiente opositor a la guerra de EE. UU. en Vietnam y a las crecientes colaboraciones entre la Academia Nacional de Ciencias (NAS) y el ejército de EE. UU. —un descontento que le llevó a renunciar a la NAS en 2013 tras más de veinte años de pertenencia—. Probablemente, consideraba que el problema era principalmente simbólico y no económico.

4.1. El problema de la determinación

En antropología, el problema de la determinación aparece como resultado de considerar que la sociedad está dividida, a grandes rasgos, en dos esferas, una económica y otra ideacional o conceptual; y, luego, considerar que la primera determina la segunda.

La idea se remonta a Marx, quien la introdujo en su *Contribution to the Critique of Political Economy* (*Contribución a la crítica de la economía política*) (Marx, 1904). La esfera o base económica incluye las relaciones de propiedad y las formas intelectuales y materiales de producción, mientras que la ideacional incluye los sistemas de ideas jurídicos, artísticos, políticos, científicos, matemáticos, etc. Dice Marx:

La conclusión general a la que llegué y que, una vez alcanzada, siguió siendo el hilo conductor de mis estudios, puede resumirse brevemente como sigue. En la producción social que los hombres llevan a cabo, entran en relaciones definidas que son indispensables e independientes de su voluntad; estas relaciones de producción corresponden a una etapa definida de desarrollo de sus poderes materiales de producción. La suma de estas relaciones de producción constituye la estructura económica de la sociedad, el verdadero fundamento sobre el que se levantan las superestructuras jurídicas y políticas y a la que corresponden formas definidas de consciencia social. El modo de producción en la vida material *determina* el carácter general de los procesos sociales, políticos y espirituales de la vida. (1904, p. 11, énfasis añadido)

Una tradición marxista entendió el término *determinación* en un sentido positivista causal y condujo al materialismo vulgar. La estructura económica (la llamada “infraestructura”) se entendía como algo unitario de lo que lo ideacional (la “superestructura”) era su mero reflejo, su mera refracción. El resultado fue una visión simplista de la sociedad y una idea muy empobrecida de la cultura.

Raymond Williams (1953, 2005), Maurice Godelier (2010), Terry Eagleton (2000, 2016) y otros han hecho hincapié en la necesidad de repensar la infraestructura y su relación con la superestructura. Para empezar, hay que disipar la idea de base o infraestructura como algo unitario. “Yo diría —Raymond Williams (2005) afirma en su famoso libro *Culture and Materialism* (*Cultura y materialismo*)— que la base [o infraestructura] es el concepto más importante que hay que examinar si queremos entender

las realidades de los procesos culturales” (p. 33). Sin embargo, para tener éxito, tenemos que alejarnos de las concepciones estáticas y unitarias de la base y recuperar el énfasis de Marx en las actividades implicadas en la infraestructura y las contradicciones a las que conducen dichas actividades. Infortunadamente, “la base se ha llegado a considerar prácticamente como un objeto o, en casos menos crudos, se ha considerado de forma esencialmente uniforme y normalmente estática” (p. 33).

Habría que reconsiderar la base como un sitio de actividades y relaciones interactivas entre individuos reales y concretos. Habría que pensar en la base como un sitio de actividades productivas y relacionales en las que los individuos interactúan entre sí; actividades que entran en conflicto entre sí y que, en medio de esos conflictos, aparecen contradicciones que mantienen la infraestructura y la superestructura siempre en movimiento. Tenemos, pues, que tener en cuenta que, “cuando hablamos de ‘la base’, estamos hablando de un proceso y no de un estado” (p. 34).

¿Cómo debemos entender entonces la relación entre infraestructura y superestructura? Nos enfrentamos aquí al mismo problema con el que se encontraron Vygotsky, Leont’ev y otros psicólogos de la escuela rusa de la teoría de la actividad cuando, al tratar la naturaleza de la mente humana, intentaron explicar la relación entre la actividad práctica y la mental. ¿Es la actividad mental una copia de la actividad práctica externa? (para una discusión sobre esta cuestión, véase El’konin, 1995). Ya abordé este problema en el capítulo 4, cuando traté el controvertido concepto de internalización. Al centrarme aquí en la cuestión de la infraestructura y la superestructura de la sociedad, quiero sugerir que una respuesta puede elaborarse mediante una concepción dialéctica de la sociedad y un concepto de “determinación” más amplio que el causal del materialismo vulgar. La respuesta tiene que basarse en un concepto procesal de la sociedad, un concepto *agéntico*³⁹ de los individuos (que Marx pone incansablemente en primer plano, por ejemplo, en sus *Tesis sobre Feuerbach*) y una visión de la cultura en la que la infraestructura y la superestructura no se piensen espacialmente, sino en términos de las interacciones y los efectos mutuos dentro de un todo dialéctico, un sistema. Dentro de esta concepción, “la

39 Usamos el adjetivo *agéntico* del sustantivo *agencia* (*agency*) explicado en el capítulo 4, un término cuya etimología viene del latín *agens*, “haciendo”, y de *agentia*, “efectividad”, de manera que *agéntico* hace referencia a la capacidad del individuo de iniciar una acción.

vida social en su totalidad [es] una compleja red de relaciones en la que todos los factores están interconectados” (Dupré, 1983, p. 88).

En efecto, una cultura no se compone de piezas aisladas. Es un todo en movimiento cuyos componentes están interconectados por un conjunto dinámico de relaciones sociales que actúan simultáneamente. Su simultaneidad no implica, sin embargo, que estas relaciones operen siempre de la misma manera en los procesos de producción material y espiritual de la vida social e individual. Las relaciones crean tensiones y conflictos que son siempre contextuales, lo que mantiene la cultura en perpetuo movimiento. Esta es precisamente la concepción dialéctico-materialista de la cultura que no da la primacía ni a la materialidad ni al mundo de las ideas, sino que los concibe como dos caras de la misma moneda, como partes de un mismo proceso. Lo ideal (*the ideal*, Ilyenkov, 1977) o *l'idéal* (Godelier, 2010), es decir, la idealidad que producen el pensamiento y la acción, “no se opone a lo material, porque pensar es poner la materia en movimiento” (Godelier, 2010, p. 199). Es poner en movimiento el cerebro, el gesto kinestésico, la percepción, el lenguaje, la tactilidad y la cultura material. Por lo tanto, lo ideal (y toda la superestructura en general) es mucho más que algo mental: lo ideal es una realidad procesal que es sensible y no sensible al mismo tiempo.

4.2. Sobredeterminación

Para superar el concepto de determinación en su sentido positivista causal, Resnick y Wolff (1982, 2011) se basan en la obra de Althusser (2005) y proponen el concepto de *sobredeterminación* (*overdetermination*). El punto de partida es una visión dinámica de la sociedad en la que ocurren diferentes procesos (procesos que son, por ejemplo, de naturaleza económica, política, artística, legal, ética, científica o matemática). Mientras ocurren, estos procesos se influyen y alteran mutuamente. El concepto de sobredeterminación específica

que cada proceso social es un lugar único constituido por la interacción de todos los demás procesos sociales en una formación social. Ningún proceso puede reducirse a los efectos de un único proceso o subconjunto parcial de procesos. Cada proceso social singularmente determinado participa en la sobredeterminación de todos los demás procesos sociales. Un proceso social sobredeterminado no es una transparencia a

partir de la cual cada uno de los procesos sociales constituyentes pueda ser simplemente identificado y “leído”. (Amariglio, Resnick y Wolff, 1988, p. 488)

La sobredeterminación de los procesos sociales descarta cualquier noción de que un aspecto social, como el económico pueda ser causalmente determinante de otros aspectos sociales (Resnick y Wolff, 1982). En este contexto, los procesos sociales son el resultado de procesos de transformación que tienen diferentes referencias analíticas (políticas, simbólicas, económicas), pero que reúnen estos aspectos con diferentes matices e intensidades. Al caminar por estos senderos, terminamos aquí con un concepto de cultura en el que el arte, la música, la literatura y la historia son el resultado combinado de los diversos procesos de la sociedad. Esta visión de la sociedad permite ver los procesos culturales como dispersos en la sociedad y diferenciados entre los grupos sociales.

Desde este punto de vista, lejos de ser monolíticas y homogéneas, las culturas aparecen siendo

intrínsecamente políglotas, conflictivas, cambiantes y abiertas. Las culturas implican procesos constantes de reinscripción y de transformación en los que sus diversos y a menudo opuestos repertorios se reafirman, transmutan, exportan, desafían, resisten y redefinen. Estos procesos son inevitables porque son inherentes a lo que significa para los seres activos aprender y aplicar los significados culturales, y a la naturaleza ideacional de la propia cultura. (Fay, 1996, p. 61)

Esta concepción de la cultura se basa en el efecto dialéctico que los distintos procesos sociales tienen entre sí. La superestructura (o esfera ideacional) no es un espejo o reflejo de la infraestructura, ya que ambas siguen afectándose (y, en consecuencia, transformándose) mutuamente, así como el conjunto social al que pertenecen⁴⁰.

La visión dialéctico-materialista de la cultura aquí esbozada no descarta el mundo simbólico; este mundo simbólico se reposiciona. Se considera que está siempre presente en la forma de cada relación social y en la puesta en práctica de los procesos sociales, por muy simples que sean. “No puede haber una actividad distintivamente humana sin signos y valores”

40 La metáfora del espejo es completamente inadecuada para tratar nuestro problema: supone que el espejo y el objeto son dos cosas distintas.

(Eagleton, 2016, p. 11). Toda acción humana contiene o está subsumida en una dimensión simbólica que la trasciende. Lo mismo ocurre con los objetos. Un objeto (un amuleto, por ejemplo, o un coche de lujo) no puede reducirse a la materialidad que lo compone. Alrededor del objeto hay un halo simbólico que le confiere un significado cultural específico. Esta dimensión simbólica abarca no solo los objetos concretos, sino también todos los procesos de pensamiento. Por medio de la dimensión simbólica, se actúa no solo sobre la naturaleza visible, como se hace con las herramientas, sino también sobre un “poder invisible” (Godelier, 2010, p. 197) que impulsa (en un sentido amplio y a menudo sutil) la reproducción de la vida y la satisfacción de las necesidades.

Y a la inversa, cada relación social y la puesta en marcha de todos los procesos sociales (económicos, políticos, artísticos, etc.) crean y recrean cotidianamente, en su sobredeterminación, lo simbólico. Al pensar de manera dialéctico-materialista la cultura, nos cruzamos en este punto con el camino de la antropología simbólica, aunque los caminos llevan rumbos diferentes. En la aproximación dialéctico-materialista de la cultura, lo simbólico no está en el centro de los procesos sociales; tampoco es lo que los organiza. No hay centro, sino movimiento. En lugar de ser el centro, lo simbólico se enreda con lo político y lo económico, y es este enredo lo que hace que la cultura sea lo que es.

Ahora estamos preparados para volver a nuestra cuestión de la cultura y el pensamiento. La exploraré por medio de las lentes de la concepción dialéctico-materialista de la cultura. Por las razones explicadas en la introducción de este capítulo, me centraré en el pensamiento matemático de la antigua Grecia.

5. El pensamiento matemático griego

Como todos los sistemas de pensamiento, el pensamiento matemático se origina en la confluencia de diversos procesos sociales que, en su interacción, se producen y modifican mutuamente. En consecuencia, el pensamiento en general, y el pensamiento matemático en particular, incorpora y refracta los diversos procesos de la sociedad y expresa sus tensiones y contradicciones intrínsecas. Desde esta perspectiva, no debería sorprender que, en contra de las opiniones habituales, el pensamiento matemático griego no fuera algo unitario. Además del pensamiento teórico o teoremático,

ejemplificado por los *Elementos* de Euclides, había, en efecto, otros tipos de pensamiento matemático. Estaban asociados a diferentes prácticas sociales y respondían de manera diferente a los diversos aspectos y procesos de la sociedad griega. Solo pueden identificarse y comprenderse en el contexto de la sociedad griega en general.

5.1. El pensamiento matemático del geómetra agrimensor

Asper (2009) ha puesto en evidencia una tradición matemática de geómetras que se ocupaban de los problemas de medición del terreno. Para entender su actividad y cómo se llevaba a cabo, hay que tener en cuenta que la tierra (privada o comunal) era una piedra angular de la identidad griega. Idealmente, un ciudadano griego debía poseer tierras. Saber cuánta tierra comprar o alquilar (Jameson, 1978) o cuánta tierra dar como garantía de un préstamo formaban parte de procesos económicos cuya conducción requería saberes especializados. Los saberes de aquellos que practicaban la geometría de la agrimensura eran una respuesta a esas necesidades. Estos practicantes también se ocupaban de otros cálculos geométricos necesarios en las construcciones de obra, como determinar el número de ladrillos necesarios para un determinado muro.

Mientras que la tradición euclidiana parece haber surgido a finales del siglo v a. C. (Asper, 2009), la tradición de los geómetras agrimensores parece remontarse a un movimiento migratorio procedente del Cercano Oriente en el siglo ix. Este movimiento migratorio incluía a artesanos (por ejemplo, orfebres, talladores de gemas, herreros de bronce y talladores de marfil) que viajaron a las ciudades griegas “y transmitieron sus habilidades a los griegos” (Burkert, 1995, p. 21). Los geómetras agrimensores podrían haber sido entonces parte de los trabajadores manuales; es decir, aquellos “profesionales especializados, pagados por sus servicios” (Asper, 2009, p. 123). Con toda probabilidad, no tenían la condición de ciudadanos, un estatus que, como afirmaba Aristóteles, debía estar reservado a “una clase particular de hombres, a la que no puede pertenecer nadie que se dedique constantemente al comercio o al trabajo manual” (Saunders, en Aristóteles, 1992, p. 183).

En la reconstrucción de Asper, la actividad de los geómetras agrimensores no se organizaba principalmente por medio de textos escritos, sino más bien mediante una práctica oral con una especie de estructura gremial y una educación de tipo entrenamiento. Algunos geómetras fueron

identificados como los “*harpēdonaptai* (‘estiradores de cuerda’), obviamente topógrafos que operaban con cuerdas para medir” (Asper, 2009, p. 113). En papiros de fecha posterior, se pueden encontrar rastros de esta tradición de practicantes. Asper da dos ejemplos, el primero es el siguiente:

En cuanto a las piedras y las cosas necesarias para construir una casa, medirás el volumen según las reglas del geómetra de la siguiente manera: la piedra tiene 5 pies por todas partes. ¡Hazlo 5×5 ! Esto es 25, que es el área de la superficie. Hazlo 5 veces respecto a la altura. Son 125. La piedra tendrá tantos pies y se llama cubo. (Asper, 2009, p. 110)⁴¹

El pensamiento matemático de los geómetras agrimensores era, por tanto, no teórico. Tal y como exigía su práctica, su pensamiento matemático era de carácter práctico, basado en procedimientos, sin necesidad de pruebas o explicaciones, muy parecido a lo que encontramos en las tablillas babilónicas.

5.2. Pensamiento aritmético basado en el uso de pedazos de piedra

El pensamiento teoremático y el pensamiento de los geómetras agrimensores no eran los únicos tipos de pensamiento matemático griego. Había procesos sociales griegos que requerían cálculos numéricos en los negocios y las finanzas, lo que dio lugar a una tradición matemática basada en el uso de pedazos de piedra o guijarros⁴². Esta tradición griega de cálculos

41 El papiro contiene 38 problemas en los que se exponen métodos para resolver problemas mediante lo que el escriba denomina “las reglas (*hoi logoi*) del geómetra” (Asper, 2009, p. 110; véase también Fowler, 1999, p. 253). Basándose en consideraciones terminológicas, Asper sugiere que la tradición teoremática surgió de la tradición de los practicantes. “En primer lugar, parte de la terminología de Euclides delata un origen práctico, por ejemplo, el término para ‘dibujar una línea recta’ (*teinō*, literalmente ‘estirar’), se remonta casi con seguridad a las mencionadas prácticas topográficas de los ‘estiradores de cuerda’. Del mismo modo, las expresiones para entidades geométricas como los ángulos, ciertas figuras o la perpendicular se remontan a las tradiciones artesanales” (Asper, 2009, p. 122).

42 El uso de pedazos de piedras o guijarros (*psēphoi*) para el cálculo con números en la cultura griega es muy antiguo. Se menciona en *las Historias* de Heródoto (2004) (libro II, 36). Los pitagóricos parecen haber inspirado el uso de guijarros antes de la época griega clásica en el contexto de la especulación filosófica (Lefèvre, 1981). Aristóteles (1984) se refiere a Eurito, quien utilizaba guijarros para asignar números a

numéricos prácticos no ha atraído mucha atención⁴³. Sin embargo, su investigación es muy importante para comprender el pensamiento matemático griego como un todo dialéctico. Para entender esta tradición —es decir, para comprender quiénes eran sus practicantes y los procesos sociales que integraban los problemas en los que trabajaban—, tenemos ahora que recurrir a uno de los ejes principales de la sociedad griega: el esclavo.

Los esclavos en Grecia eran fundamentales para la configuración

1. de la ideología y
2. la estructura económica de la sociedad griega.

Desde el punto de vista ideológico, los esclavos constituyen un rasgo definitorio del concepto de ciudadano. De hecho, en gran medida, el ciudadano se define en términos opuestos al esclavo, al perfilar, en una negación de este, los límites de la personalidad del primero. Así, en el modelo de ciudadano ateniense, el ciudadano posee tierras de cultivo y esclavos; el esclavo no. El ciudadano participa en las tareas administrativas, religiosas, políticas y militares de la *polis*; el esclavo no. El ciudadano posee juicio y razón; el esclavo (según el ciudadano), no. De hecho, el esclavo aparece como algo instrumental. Aristóteles, al concebir al esclavo como una herramienta, escribe: “un esclavo es una especie de propiedad viva” (*Política* de Aristóteles, 1984, 1253 b23, pp. 63-64), —una herramienta viva—⁴⁴. La esclavitud era una condición para la existencia y el ejercicio de la libertad

las cosas: “Eurito decidía cuál era el número [de las cosas] (por ejemplo, del hombre, o del caballo), al imitar las figuras de los seres vivos con guijarros, como algunas personas llevan los números a las formas del triángulo y del cuadrado” (p. 1726, 1092b23-1092b25). El uso filosófico especulativo pitagórico de los guijarros condujo a una serie de investigaciones numéricas que Robbins denomina “aritmología” (Robbins, 1920, 1921) en la que encontramos varias clasificaciones de los números (por ejemplo, números pares e impares, números poligonales, números amistosos y primos). Estas clasificaciones fueron todavía discutidas al final de la antigüedad helénica por los neoplatónicos (por ejemplo, Nicomachus de Geresá, 1924, y Theon de Smirna [véanse, por ejemplo, Lawlor y Lawlor, 1979; Tarán, 1969]); algunas todavía aparecían en el currículo de la Edad Media (véase *De Institutione Arithmetica* de Boethius – traducción *al inglés* en Masi, 1983). La aritmología se abrió paso en los *Elementos* de Euclides (véase el libro 2), aunque desprovista de su origen místico y especulativo. En efecto, en los *Elementos* de Euclides, una parte de la aritmología griega se reformula deductivamente.

43 Asper (2009) y Netz (2002) son dos excepciones notables.

44 Cuando Demóstenes entabla una disputa judicial contra sus tutores, presenta una

del ciudadano griego. Como dijo Jameson (1978, p. 122), en Grecia no pudo haber existido “verdadera libertad sin verdadera esclavitud”.

En cuanto a la economía, los esclavos sin habilidades especiales realizaban tareas domésticas o cuidaban las tierras del amo; otros trabajaban en las minas de plata o en las empresas de su dueño. Los esclavos cualificados, en cambio, trabajaban en estrecha colaboración con sus amos en talleres o comercios, o trabajaban por cuenta ajena aportando un salario a su amo. Los esclavos cualificados también podían dirigir una empresa para su dueño (Jameson, 1978, p. 123). En ocasiones, los esclavos cualificados recibían un salario de su dueño y podían ahorrar dinero para comprar su libertad (Zelnick-Abramovitz, 2009).

Cabe señalar que el trabajo de los esclavos no era solo una cuestión de ingresos económicos. También proporcionaba al amo el tiempo necesario para participar en las funciones sociales de la *polis* (por ejemplo, funciones rituales, políticas y militares) y en actividades sociales como banquetes y simposios que formaban parte de los valores fundamentales griegos y de lo que significaba vivir una “vida buena”.

Ahora podemos dirigirnos a los practicantes de la tradición del cálculo numérico práctico. ¿Dónde vamos a encontrarlos? A menudo, muy a menudo, entre los esclavos hábiles. Fue en el ámbito económico en el que algunos de estos esclavos se destacaron. Más concretamente, muchos de ellos se destacaron en el ámbito bancario.

Sin duda, en gran medida, la Grecia clásica era una sociedad principalmente agrícola (Jameson, 1997). La unidad básica de la sociedad y la economía ateniense era el *oikos*, el “hogar”, que comprendía la familia, los bienes de la familia, los esclavos y la casa. Al principio, las actividades económicas del *oikos* estaban dirigidas a su propio consumo. Pero, en el siglo IV a. C., aumentó la venta en efectivo de los excedentes del *oikos* en los mercados locales. Al mismo tiempo, las nuevas empresas marítimas junto con la producción de artículos de consumo en talleres comerciales hicieron que se extendiera la acuñación de moneda y que aumentara la circulación de monedas procedentes de distintos lugares (Finley, 1973)⁴⁵.

lista de los bienes de su padre. La lista incluye esclavos que hacen cuchillos por un valor total de 19000 dracmas (véase Demóstenes, 2004, p. 20).

45 Como dice Bresson, “desde el final del período Arcaico hasta el final del Clásico, Atenas fue ... la ciudad estado que más monedas acuñó. Atenas tenía la ventaja de disponer de los yacimientos de plata de Laurion. Estas minas habían estado en

En este contexto, “por primera vez, los mercados basados en el dinero dieron a los negocios empresariales una posición económica central” (Roberts, 2011, p. 51) y los bancos llegaron a desempeñar un papel importante. Ciertamente, el origen de la banca fue modesto. Se encuentra en un nuevo actor: el *cambista* (*money changer* o el cambiador de dinero), que realizaba sus negocios en la trapeza. *Trapeza* significa “mesa” y se refiere a la mesa donde se cambiaba la moneda.

Dado que el nuevo mercado de precios, orientado a la obtención de beneficios, funcionaba por medio de estas monedas, el intercambio monetario mediante la propia trapeza implicaba numerosas transacciones discretas y fugaces, que en sí mismas encarnaban el nuevo sistema económico. (Cohen, 1997, p. 7)

La rápida evolución de este nuevo aspecto de la economía griega dio lugar a una serie de actividades financieras y a su consolidación en lo que puede denominarse más propiamente actividades bancarias. Incluían

prestar directamente y por medio de la intermediación, proteger las garantías, aceptar depósitos, negociar daños y perjuicios por la falta de protección de los depósitos, invertir en bienes inmuebles, hacer provisiones para la continuidad de los negocios bancarios, ejecutar órdenes de compra, salvaguardar documentos, etc. (Cohen, 1997, p. 21)

Entre los banqueros más conocidos están Phormiōn y Pasiōn (a los que volveré más adelante), y Píladés, Cittus, Heracleides, Xouthos y Dēmomelēs (véanse Cohen, 1997; Demóstenes, 2004).

Naturalmente, al igual que en las prácticas de agrimensura comentadas anteriormente, las actividades bancarias requerían unos saberes cada vez más especializados. Era una *technē*, un saber práctico. Por ello, el banquero era considerado profesionalmente como un artesano, alguien que ejercía un oficio o una artesanía, como hacían los escultores⁴⁶.

funcionamiento en el período micénico. ... La fecha en que comenzó esta acuñación sigue siendo incierta: después del 540 ANE [antes de nuestra era] como mínimo, o quizás después del 530 ANE, es lo más probable” (Bresson, 2016, p. 277).

46 Los documentos financieros de la época clásica muestran el uso de préstamos con intereses. Los banqueros los dividían en dos: uno relativo a los préstamos marítimos y otro a los préstamos terrestres. Estos últimos solían tener un tipo de interés del 10% al 12%. En los primeros, el interés era más elevado, ya que presentaban mucho

Una estela de la colección *Inscriptiones Graecae* (IG, I² 324) (Meritt, 1946) recoge los préstamos, el tiempo del préstamo y el beneficio de los intereses. En la figura 42, se muestra un extracto. La primera columna indica el número de la línea, la segunda el capital, la tercera el número de días transcurridos desde el préstamo y la cuarta columna, la cantidad correspondiente a los intereses. La “T” significa talento; la escritura 1095/5 significa 1095 dracmas y 5 óbolos, etc. Un talento equivalía a 6000 dracmas; un dracma equivalía a 6 óbolos.⁴⁷

I.G., I ² , 324		Interest on Stone	
	<i>Principal</i>	<i>Days</i>	
line 103	766T 1095/5	1464	37T 2338/2½
line 85	1T 1748	17	4/2½
line 86	521	17	0/1¾
line 87	80	17	0/½
line 88	3418/1	17	1/5½

Figura 42. Algunas líneas de la estela identificada como IG, I² 324 (de Lang, 1964, p. 146)

Ahora bien, para llevar a cabo las actividades bancarias, los banqueros necesitaban personal cualificado. Sin embargo, no podían encontrarlo entre los ciudadanos por la sencilla razón de que los ciudadanos (que eran, por definición, hombres libres) no se contrataban; los ciudadanos griegos no debían trabajar para otros ciudadanos; debían dedicarse a las actividades sociales y culturales de la *polis*⁴⁸. Así que los banqueros recurrieron a los

más riesgo: “El tipo de interés [para los préstamos marítimos] era de un porcentaje de 22,5 para un viaje durante la temporada de buen tiempo, y de un porcentaje de 30 para un viaje más largo. Estos eran los tipos de interés habituales en la época. Para los viajes de ida (*heteroplous*), el tipo de interés era más bajo (10-12%)” (Bresson, 2016, p. 283).

47 Cohen (1977, p. 69) menciona que, según los registros de 329 a. C., los artesanos y los trabajadores cualificados ganaban alrededor de 2 o $2 \frac{1}{5}$ de dracma por día.

48 Cohen nos recuerda que “el empleo [de un ciudadano] por parte de un amo por períodos breves, un día o dos, podría haber sido aceptable para algunos ciudadanos [pobres], pero el servicio prolongado era intolerable: en palabras de Aristóteles, ‘la naturaleza del hombre libre impide que viva bajo el control de otro’ [Retórica de Aristóteles, 1367a33]” (Cohen, 1997, pp. 70-71). Véase también Jameson (1974, p. 124).

esclavos de su propio *oikos*. El propietario del banco enseñaba a los esclavos asignados a su banco la *technē* necesaria en las actividades bancarias. Este fue el caso del banquero Pasiōn y su esclavo no griego Phormiōn. Cuenta Demóstenes que Apolodoro, en medio de un juicio, recuerda al jurado que su padre Pasiōn, “que adquirió [a Phormiōn,] era banquero, y ... le enseñó [a Phormiōn] a leer y escribir y lo adiestró en el negocio y lo puso al mando de vastas sumas de dinero” (Demóstenes, 2011, p. 261)⁴⁹.

Así es como algunos esclavos cualificados se convirtieron en funcionarios bancarios y, finalmente, en propietarios de bancos. Es posible que la *polis* también empleara a personas con la técnica financiera adecuada para llevar el control de los intereses, los reembolsos y otras transacciones relacionadas con la administración de la ciudad⁵⁰.

No sabemos exactamente cómo se realizaban los cálculos. Las estelas y otros documentos históricos solo mencionan los resultados (como en IG, I² 324; véase la figura 42). Lo que sí sabemos es que, para calcular, se utilizaban trozos de piedras o guijarros.

Los trozos de piedra —y no los símbolos escritos o hablados— eran el medio para la manipulación de los números en el mundo griego ... los trozos de piedra no eran una ayuda para la manipulación de los números, entendidos a su vez principalmente en otros términos. Eran el medio de manipulación numérica *par excellence*, exactamente del mismo modo que, para nosotros, los números arábigos son el medio numérico *par*

49 En una introducción al *Discurso de Demóstenes* 36, MacDowell, señala que “Pasión [o Pasiōn] había sido un esclavo que trabajaba en un banco del Pireo, propiedad de Antístenes y Arcestratus. Con el tiempo, se le concedió la libertad, se hizo cargo del banco, se convirtió en un hombre rico y, a cambio de los beneficios que le hizo a Atenas, se le concedió la ciudadanía ateniense. A su vez, era dueño de un esclavo llamado Phormiōn [o Phormiōn] que era cajero o gerente en el banco, se le dio su libertad como recompensa por sus buenos servicios, y más tarde (en el 361/0 [a. C.]) se convirtió en ciudadano ateniense” (MacDowell, en Demóstenes, 2004, p. 150). Con el tiempo, Phormiōn se convirtió en banquero y en uno de los hombres más ricos de Atenas. También acabó casándose con la mujer de su antiguo amo.

50 Algunas de esas transacciones están implícitas en la estela llamada *AIUK 3* (Cambridge) n.º 3. Esta estela muestra los gastos e ingresos del santuario de Apolo en la isla de Delos. Los ingresos incluían el dinero de las rentas y los intereses de los préstamos a las ciudades y a los particulares (a una razón del 10%). Para la inscripción, véase <https://www.atticinscriptions.com/inscription/AIUK3/3>. Para una imagen de la estela, véase <https://www.youtube.com/watch?v=BPpX-piKdPs&feature=youtu.be>.

excellence. Nosotros imaginamos los números como una entidad vista en la página; los griegos los imaginaban como una entidad agarrada entre el pulgar y el dedo. (Netz, 2002, p. 329)

Lang (1957, 1964) sugiere que los cálculos se realizaban en un ábaco y ofrece una reconstrucción de algunos cálculos basada en el ábaco. Los historiadores han sugerido que, originalmente, el ábaco ($\alpha\beta\alpha\xi$) era una superficie plana (losa) cubierta de arena en la que se dibujaban líneas y figuras (Gow, 2010; Netz, 2002)⁵¹.

Para resumir las discusiones sobre la tradición numérica práctica griega, los registros históricos muestran que había una serie de calculadores dedicados a la banca, así como a las actividades administrativas burocráticas que se requerían en la esfera económica de la *polis*. Entre estos calculistas, se encontraban algunos esclavos de los banqueros y quizás también algunos esclavos de la *polis* administrativa, así como algunos hombres libres (por ejemplo, esclavos liberados y extranjeros). Los banqueros solían elegir a los esclavos más hábiles y les transmitían los saberes necesarios en las distintas actividades bancarias. Como la tradición numérica práctica se realizaba con pedazos de piedra, no se encuentran registros de sus algoritmos. La *technē* necesaria que sustentaba esta práctica no era formal. El pensamiento matemático de los calculistas no era teórico. Al igual que el de los geómetras agrimensores, esta forma de pensamiento no se basaba en definiciones y pruebas. Era concreto, se desplegaba en acciones concretas y se organizaba en ábacos improvisados o refinados (en mármol y quizás también en madera), al basarse en gran medida en la percepción, el movimiento kinestésico de los pedazos de piedra y la oralidad.

Ha llegado el momento de hablar de la tradición más conocida de las matemáticas griegas: la tradición teoremática y su peculiar forma de pensamiento matemático.

5.3. Pensamiento matemático teoremático

Una de las razones por las que esta tradición es más conocida es porque recurrió a textos escritos. Ha llegado hasta nosotros por medio de varios

51 Varias de las losas comentadas en Lang (1957, 1968) —incluida una mesa de mármol de Salamina que mide 1,50 m de longitud, 0,75 m de anchura y 0,07 m de grosor— se han sugerido como ejemplos más elaborados del ábaco.

papiros antiguos. Por supuesto, el hecho de que esta tradición recurra a lo escrito, a diferencia de las demás tradiciones matemáticas griegas, no puede darse por sentado. Es, como veremos, ya un síntoma de su lugar ideológico, económico y político dentro de la *polis*.

El texto más notable de la tradición teorematizada es los *Elementos* de Euclides. Los *Elementos* de Euclides exhibe una organización detallada y un extraordinario rigor del contenido. Los axiomas se presentan claramente desde el principio y los objetos matemáticos se definen meticulosamente. A partir de los axiomas, las proposiciones se afirman y demuestran deductivamente. Refiriéndose a esta tradición, Netz señala un hecho curioso que llama inevitablemente la atención de los lectores de los *Elementos*: la marginación de lo numérico.

Esta [marginación] es extremadamente notable para un campo que, en todas las demás culturas, se organiza mayoritariamente en torno a los números ... los números concretos no se mencionan prácticamente nunca en los *Elementos* de Euclides, ¡una obra que *contiene tres libros fundamentales sobre aritmética!* ... las matemáticas griegas se centran en la geometría y sus características cualitativas: los ángulos griegos no se miden (dentro de la geometría griega propiamente dicha) por grados, y las líneas griegas no tienen longitudes numéricamente determinadas. (Netz, 2002, p. 346, énfasis en el original)

Los números, para la tradición teorematizada, no son, en efecto, esas entidades relacionadas con la manipulación palpable de pedazos de piedra de los calculadores griegos. Para la tradición teorematizada, los números son cosas abstractas. Parecería que la matemática teorematizada y la matemática de los pedazos de piedra vinieran de dos planetas diferentes. Pero, en un momento, veremos que no es así. En realidad, estas tradiciones estaban profundamente relacionadas.

Otro hecho que llama la atención del lector de los *Elementos* de Euclides es que el texto teorematizado se desarrolla con el telón de fondo de una “retórica de la impersonalidad” que pretende “transmitir objetividad” (Asper, 2009, p. 119). No hay pronombres personales, ni destinatarios explícitos.

Salvo exactamente una fórmula que sirve para introducir la afirmación repetida y marca el comienzo de la prueba (“Yo digo que...”), estos textos nunca introducen una voz autoral ni se dirigen al lector. (Asper, 2009, p. 118)

Consideremos un fragmento de la proposición 34, del libro I de los *Elementos* de Euclides y el diagrama que lo acompaña (véase la figura 43). El texto dice lo siguiente “En las áreas paralelogramas los lados y ángulos opuestos son iguales entre sí, y el diámetro biseca las áreas” (Heath, 1908, p. 323). He aquí la primera parte de la prueba.

Sea ACDB un área paralelogramo, y BC su diámetro; yo digo que los lados y ángulos opuestos del paralelogramo ACDB son iguales entre sí, y el diámetro BC lo [s] biseca. Pues, como AB es paralelo a CD, y la recta BC ha caído sobre ellos, los ángulos alternos ABC, BCD son iguales entre sí. (Heath, 1908, pp. 323-324)

Euclides continúa demostrando que “el triángulo ABC es igual al triángulo DCB”.

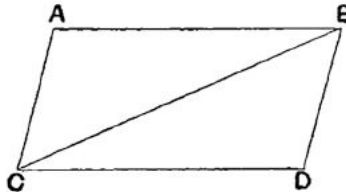


Figura 43. Diagrama que acompaña a la demostración de la proposición 34 (Heath, 1908, p. 324)

No tiene sentido presentar y analizar aquí toda la prueba, ya que mi interés no es hacer una exposición de las matemáticas teoreáticas (para la exposición y el análisis, véase Netz, 1998, 1999). Mi interés es más bien tratar de entender —como hice con las tradiciones de los geómetras aplicados y los calculadores de pedazos de piedras— quiénes eran sus practicantes y la forma de pensar de estos practicantes a la luz de los procesos sociales implicados.

La primera pregunta que hay que hacerse es la siguiente: ¿quiénes eran los practicantes de la tradición teoreática? La respuesta no es complicada. No hace falta indagar mucho para encontrarlos. Se trataba de una élite social homogénea de ciudadanos griegos “libres de presiones económicas” (Asper, 2009, p. 123) —una élite de aquellos hombres que llevaban una “buena vida” ejemplar, ejerciendo aquellas altas facultades alabadas por Aristóteles, Platón y la sociedad aristocrática ateniense—, “especialmente la [facultad] de la razón” (Saunders en Aristóteles, 1992,

p. 183). Los practicantes de la tradición teoremática eran, por tanto, una élite de una élite: una “élite social que solo escribía y leía por placer” (Asper, 2009, p. 108).

El pensamiento matemático teoremático es la antítesis del pensamiento matemático práctico de los geómetras agrimensores y los calculistas con pedazos de piedras. Mientras que los geómetras agrimensores medían campos, calculaban áreas, volúmenes, perímetros y los calculistas llevaban cuentas, hacían cálculos de cambios de moneda y calculaban intereses de préstamos, los teoremáticos no. Mientras que los geómetras agrimensores utilizaban cuerdas y los calculistas utilizaban pedazos de piedra y ábacos para pensar matemáticamente y realizar sus cálculos, los teoremáticos no. Mientras que los geómetras agrimensores y los calculistas eran capaces de seguir adelante sin demostrar ni definir las cosas, los teoremáticos no. Mientras que los objetos matemáticos de los geómetras agrimensores y los calculistas eran concretos, los de los teoremáticos no. Mientras que el pensamiento matemático de los geómetras agrimensores y los calculistas se basaba en la oralidad, el de la tradición teoremática no. Una era una matemática letrada, la otra no.

En resumen, cuando contrastamos los dos grupos, vemos que cada grupo produjo una matemática (concebida aquí como una práctica social) y una forma de pensamiento matemático (concebida aquí como la contrapartida ideacional de dicha práctica). La forma de pensamiento matemático de un grupo es la negación exacta de la forma de pensamiento matemático del otro grupo. El pensamiento matemático de los geómetras agrimensores y calculistas prácticos y el pensamiento matemático de los matemáticos teóricos refractaron y afirmaron las contradicciones centrales de la sociedad griega, las mismas contradicciones que encontramos en la libertad y la esclavitud: una que no puede existir sin la otra. En términos de la concepción materialista dialéctica de la cultura anteriormente esbozada, esas formas de pensamiento son contrapartidas ideológicas de procesos sociales contradictorios que las sobredeterminan.

Ahora bien, la naturaleza de su sobredeterminación hace que cada forma de pensamiento matemático sea algo más que una simple oposición a la otra. Se sobre-producen dialécticamente. Decir que se sobre-producen dialécticamente significa que una es el efecto y a la vez la condición de existencia de la otra.

Su constitución sobredeterminante significa que la matemática de los practicantes de geometría de la agrimensura y de los calculadores forma

parte de la textura de la matemática teorematizada. Las primeras son constitutivas de las fronteras histórico-culturales de las segundas y viceversa. En su refracción de los diversos procesos sociales griegos, ambas están incrustadas en la esencia (por utilizar una palabra griega) de la otra. Por eso, sería un error ver la pasión y la obsesión de los teorematizados por la abstracción como una curiosidad histórica o el comienzo del despliegue de un *espíritu matemático* (*Mathematischer Geist*) que, en su majestuoso vuelo, busca la perfección por medio de una serie de períodos históricos (período helénico, Edad Media, el Renacimiento, el período moderno, etc.), extendiendo su gracia e influencia cada vez más a todos los rincones de la tierra. Hay, en efecto, un profundo sentido social, político y económico en la forma que adoptó el pensamiento matemático teorematizado griego — un sentido que no es ni más ni menos que el sentido político y económico que sustentó y dio forma al pensamiento matemático de los calculadores y de los geómetras agrimensores—. Así, la abstracción en la que se basa la tradición teorematizada debe entenderse en su sentido cultural. La abstracción (en el sentido aristocrático aristotélico) es un dispositivo teórico e ideológico que expresa los profundos conflictos políticos y económicos de la *polis*. Expresa las oposiciones sociales fundamentales entre el esclavo y el amo, la razón y la acción, el poseer o no poseer tierras, el tener o no tener derechos cívicos. La abstracción de la tradición teorematizada es un continuo recordatorio y proclamación de esas divisiones. Proclama, por medio de su propio ejercicio, la división entre lo sensual y lo ideacional, lo práctico y lo racional, y establece los parámetros de la división entre el trabajo intelectual y el manual que aún hoy nos persigue.

Para comprender mejor la sobredeterminación que subyace a los procesos sociales de los que sale el pensamiento matemático griego, permítanme explorar más a fondo el componente ideológico que inspira a sus matemáticos teóricos. Quiero centrarme en la división entre lo sensual y lo ideacional. En un pasaje del famoso diálogo de Platón (1961), el *Fedón*, se pide a Simmias que determine quién, entre toda clase de hombres, es capaz de alcanzar el verdadero saber. ¿No es aquel, le pregunta Sócrates

que persigue la verdad aplicando su pensamiento puro y no adulterado al objeto puro y no adulterado, apartándose lo más posible de sus ojos y oídos y prácticamente de todo el resto de su cuerpo, como un impedimento que con su presencia impide al alma alcanzar la verdad y el pensamiento claro? (65e-66a, p. 48)

Luego continúa: “en efecto, estamos convencidos de que, si queremos tener un saber puro de algo, debemos deshacernos del cuerpo y contemplar las cosas por sí mismas con el alma por sí misma” (66b-67b, p. 49).

Con gran precisión, Platón articula la oposición epistémica entre lo sensual y concreto del trabajo práctico y lo incorpóreo y abstracto del trabajo intelectual. Al hacerlo, Platón y sus compañeros aristócratas crearon un segmento de la cultura griega. Por medio de sus prácticas, los geómetras con cuerdas y los calculadores con piedras crearon también la cultura griega, aunque tal vez todavía tengamos que aprender a apreciarla mejor.

Pero esto es solo la mitad de la historia. De hecho, todavía tenemos que ver que lo que sale de la boca de Platón no es solo la perspicacia de Platón; no es solo la increíble e impresionante capacidad de Platón para expresar ideas con tanta nitidez y profundidad. Lo que sale de la boca de Platón es, en general, el flujo de las tensiones sociales de su propia ciudad y de su propia época histórica. La obra de Platón traduce y expresa, en el plano filosófico cultural, como los *Elementos* de Euclides lo hacen en el matemático, las mismas tensiones sociales. En la formidable vocalización de estas tensiones, la cultura griega crea a Platón.

Por eso, del mismo modo que los esclavos y los trabajadores eran ciertamente necesarios para la vida de la ciudad, como nos dice Aristóteles (1992) en su *Política* (por ejemplo, p. 180, 1277a5, p. 183, 1277b33), los geómetras agrimensores y los calculistas eran definitivamente necesarios para la existencia de las matemáticas teorematías. Si eliminamos las cuerdas, los pedazos de piedras utilizadas en el cálculo, los ábacos, etc., si eliminamos a los geómetras agrimensores y a los calculistas financieros, si eliminamos los procesos sociales, políticos y económicos de los que estos matemáticos formaban parte, eliminaríamos al mismo tiempo el soporte material e ideológico que da sustento y vida a los matemáticos teorematías.

He argumentado en otro lugar (Radford, 2018d) que las ideas de Platón sobre la filosofía en general y las matemáticas en particular surgieron y evolucionaron durante la agitación de la guerra del Peloponeso entre Atenas y Esparta y el régimen oligárquico ateniense de posguerra establecido por Esparta. Los procesos sociales que he mencionado —en particular, la producción de excedentes agrícolas del *oikos* (o hogar), el auge del comercio y la aparición de nuevas clases sociales— condujeron, tras la guerra del Peloponeso, a una reestructuración social en la que se vieron sacudidos los antiguos valores de la élite aristocrática. El concepto de lo “bueno”, relacionado con la hombría y el abolengo, que se había

elaborado progresivamente desde la época de Homero, se vio desafiado por el nuevo contexto cultural configurado por la llegada de “extranjeros sin raíces; pensadores escépticos, nominalistas, subjetivistas y relativistas ... [que] no tenían axiomas, ni certezas epistémicas, ni ejes de valor fijos, ni piedades ancestrales” (Levi, 1974, p. 61). “Podemos estar seguros”, afirma Beavers (s.f.) en su biografía de Platón, de que la guerra del Peloponeso, “el establecimiento de un gobierno por parte de Esparta (tras el caos de la derrota final de Atenas en el 404), y los acontecimientos que siguieron, afectaron dramáticamente la dirección del pensamiento [de Platón]”. Afectaron a Platón y a toda la élite aristocrática.

Platón creció en una familia aristocrática. Su “linaje paterno se remontaba a los primeros reyes de Atenas” (Levi, 1974, p. 58). Debido a su ascendencia aristocrática, estaba destinado a convertirse en un miembro de la clase dirigente de Atenas. Sin embargo, su camino se vio interrumpido por la guerra del Peloponeso y el posterior curso de los acontecimientos, que llevaron a la decadencia del imperio ateniense y a la pérdida de poder político de la aristocracia ateniense. Platón viajó durante varios años y, tras su regreso a Atenas, hacia el año 387 a. C., fundó la Academia con el objetivo de “instruir a una nueva generación para que se convirtiera en los legisladores y los estadistas aristocráticos de un mundo futuro” (p. 60). En este contexto histórico-político y en la perspectiva aristocrática que se oponía al relativismo epistemológico —encarnado en particular en la enseñanza de los sofistas— y que despreciaba el cambio social y político, el trabajo práctico, el comercio y todas las actividades mundanas, Platón llegó a formular su filosofía de las formas permanentes y la consiguiente idea de la verdad como algo inmutable, perfecto y atemporal. En los diálogos de Platón, al igual que en los *Elementos* de Euclides, los objetos de la cognición verdadera son objetos intemporales e inmutables, que no nacen ni desaparecen (Burkert, 1985).

La teoría de las formas de Platón y los objetos matemáticos de Euclides son un movimiento aristocrático nostálgico y reaccionario por medio del cual la verdad pasó a ser concebida como algo accesible no por medio del trabajo práctico con artefactos sino por medio del *logos*, la actividad discursiva razonada de los ciudadanos cultos cuyo objetivo era ascender a niveles superiores de saber y mostrar a los demás un ejemplo de la genuina “buena vida” ateniense.

6. Síntesis

En este capítulo, he tratado la cuestión de la cultura y la mente. Me he centrado en el aspecto epistemológico de esta cuestión, más concretamente en la naturaleza cultural del pensamiento matemático. Aunque se reconoce que el pensamiento matemático no ha sido siempre el mismo, que ha cambiado a lo largo del tiempo y que no es necesariamente igual de una cultura a otra, el problema de la explicación de su naturaleza cultural sigue siendo un problema aún no suficientemente estudiado. En la primera parte del capítulo, vimos que el problema de las diferencias culturales se explicaba primero con argumentos basados en una visión evolucionista de los pueblos y las razas que utilizaba al europeo como punto de referencia. En su capítulo, “The Dark-Skinned Savage: The Image of Primitive Man in Evolutionary Anthropology” (“El salvaje de piel oscura: la imagen del hombre primitivo en la antropología evolutiva”), Stocking (1982) señala que, en los albores del siglo xx,

La evolución darwiniana, la etnología evolutiva y la raza poligenista ... interactuaron para apoyar una jerarquía raciocultural en la que los hombres civilizados, los productos más altos de la evolución social, eran hombres blancos de cerebro grande, y solo los hombres blancos de cerebro grande, los productos más altos de la evolución orgánica, eran plenamente civilizados. (p. 122)

Boas y otros contrarrestaron este punto de vista al hacer hincapié en la importancia de la cultura, que consideraban un conjunto de reacciones y actividades mentales y físicas que caracterizan la forma de pensar y actuar de las personas. La cultura pasó a ser entonces no la expresión de la civilización (Elias, 2000) ni el resultado de la evolución, sino un rasgo de hábitos y valores alimentados por una comunidad. La cuestión se centró en lo que hace que esos hábitos y valores lleguen a ser lo que son. En este punto, nos encontramos con los antropólogos enfrentados a su “conflicto venerable”, el conflicto que los llevó a elegir entre la opción utilitaria que ve a nuestra especie principalmente como *homo economicus* y la opción simbólica que ve a nuestra especie principalmente como *homo symbolicus*. Al basarme en Eagleton, Godelier, Williams y Resnick y Wolff, esboqué un concepto de cultura desde un punto de vista dialéctico-materialista cuya primera característica es ver la sociedad como un todo dinámico en el que se dan diferentes procesos (procesos de, por ejemplo, naturaleza económica,

política, artística, jurídica, ética, científica y matemática) y que se afectan y modifican mutuamente. Cada proceso social es una sobredeterminación de la totalidad de los procesos sociales. La cultura aparece aquí como un lugar de confluencia, algo “inherentemente políglota, conflictivo, cambiante y abierto” (Fay, 1996, p. 61).

Al recurrir a este concepto de cultura, en el que ni lo económico ni lo simbólico se toman como base principal, volví al problema de la naturaleza cultural del pensamiento matemático. Me centré en el pensamiento matemático de la antigua Grecia como estudio de casos. Para explorar su naturaleza cultural, y de acuerdo con el concepto dialéctico-materialista de la cultura esbozado, el problema era identificar los procesos sociales en el origen del pensamiento matemático griego. Estos procesos incluyen un enfoque en la tierra como elemento tanto económico como ideológico de la identidad griega antigua; las necesidades de administración derivadas de la organización de la *polis*; los procesos económicos y financieros de naturaleza bancaria enredados con el eje axiológico de esclavo-amo; y una presencia histórica de la aristocracia cuestionada a raíz de la guerra del Peloponeso. La sobredeterminación de estos procesos dio lugar a un reconocimiento social mutuo de una autonomía política recién concebida de campesinos, mercaderes, banqueros comerciales y aristócratas que aglutina un nuevo (y siempre tenso) orden simbólico y jurídico,

dentro de una esfera emergente que legitima la diferencia (y por tanto el conflicto, el diálogo, la demagogia, la reflexión, el compromiso) y que, así, plantea la justicia pública (en tercera persona) como construida en lugar de dada, y necesariamente “comprometida” en lugar de absoluta. (Nafissi, 2004, p. 404)

Con el trasfondo de estos procesos sociales, distinguimos tres formas de pensamiento matemático: en primer lugar, una forma relacionada con las prácticas de medición y topografía; en segundo lugar, una relacionada con las prácticas de cálculo numérico en asuntos comerciales y financieros; y, en tercer lugar, una relacionada con una práctica teoremática o teórica.

Sin embargo, no se trata de hacer una lista de formas de pensamiento matemático. Se trataba de comprender su sobredeterminación. En este contexto, me esforcé por mostrar que una forma de pensamiento no puede entenderse sin comprender las otras formas de pensamiento, y que tal comprensión solo puede lograrse al investigar las dimensiones económicas,

políticas e ideológicas de los procesos sociales que tales formas de pensamiento incorporan y refractan.

Desde este punto de vista, uno de los rasgos distintivos del pensamiento matemático de la Grecia antigua es que, en su conjunto, fue producido por prácticas sociales antagónicas entre sí, lo que llevó, en el plano ideacional, a que las formas de pensamiento matemático refractaran su antagonismo y contradicción. Vimos, en particular, que el pensamiento matemático teórico es la negación exacta de las otras formas concretas de pensamiento griego. Platón nos ofrece, por medio de su obra, una ventana inestimable para ver la constitución dialéctica de la cultura y el sujeto: Platón formula con incomparable brillantez una visión de la *polis*, y nos hace ver lo que es un buen ateniense y lo que debe ser vivir una buena vida. Pero al mismo tiempo, Platón es una encarnación de las tensiones y contradicciones atenienses. Sin intentar disminuir su brillantez, Platón es un producto de esas tensiones. Y exactamente lo mismo puede decirse de Euclides.

Si ahora nos dirigimos a nosotros mismos y a nuestras culturas, ¿qué podríamos decir? ¿Cuáles son nuestras formas contemporáneas de pensamiento matemático? ¿Y cómo refractan, integran y afirman los procesos sociales implicados en el mundo en que vivimos? ¿Cómo intentan nuestras prácticas pedagógicas alimentar esas formas de pensamiento matemático?

El creciente rostro multicultural de las escuelas en el mundo globalizado contemporáneo no puede permanecer en silencio ante estas cuestiones. De hecho, ha habido un número impresionante de investigaciones e iniciativas que tratan de abordar la cuestión del multiculturalismo o el multilingüismo. En particular, ha habido una tendencia a ser “inclusivo” y a apreciar las diferencias culturales. Aunque evidentemente loable, debemos, sin embargo, permanecer atentos, ya que detrás de este gesto puede descansar tal vez el perverso énfasis capitalista en el consumismo y la visión concomitante del individuo como alguien reducido a un consumidor. Desde este punto de vista, “el culto a la inclusividad” podría ayudar a “enmascarar ... las diferencias materiales” (Eagleton, 2016, p. 36) y sus causas sociales y económicas. En efecto,

Nada es más generosamente inclusivo que la mercancía, que, en su desdén por las distinciones de rango, clase, raza y género, se acomoda a cualquiera, siempre que tenga los medios para comprarla ... Todos deben ser incluidos, excepto aquellos cuya política podría socavar el propio marco en el que se produce dicha inclusión. (pp. 32-33)

Por lo tanto, la inclusión debe considerarse como algo más que un noble gesto de apertura. Para que sea efectiva, requiere la creación de una nueva consciencia social que, por medio de un movimiento activista y crítico, se esfuerce por desvelar, y cambiar, las causas políticas y económicas que producen la exclusión y la desigualdad en primer lugar.

En este sentido, la inclusión debería ser un elemento central en nuestra comprensión del pensamiento matemático. El problema que tenemos ante nosotros no es, creo, determinar si nuestras formas de pensamiento matemático son culturales o no. El problema es comprender su naturaleza cultural. Para ello, tenemos que desentrañar las maneras en que las dimensiones políticas, económicas e ideológicas de la sociedad están inevitablemente enredadas en el pensamiento matemático. Para ello, tendríamos que explorar los problemas sociales que el pensamiento matemático contemporáneo (dentro y fuera de la escuela) pretende abordar.

Capítulo 9

Procesos de subjetivación

Como se expuso en el capítulo 2, en la teoría de la objetivación, el aprendizaje se conceptualiza en términos de dos ejes: (a) el saber y el conocimiento y (b) el Ser y el devenir. El eje (a) se investiga por medio de los procesos de objetivación, mientras que el eje (b) se investiga por medio de los procesos de subjetivación. En el capítulo 4, nos ocupamos de los procesos de objetivación. En este capítulo, nos ocuparemos de los procesos de subjetivación. De hecho, ya hemos hablado un poco de los procesos de subjetivación, pues van de la mano con los procesos de objetivación. Los distinguimos por una cuestión de conveniencia metodológica. Sin embargo, hasta ahora, los procesos de subjetivación se han considerado solo tangencialmente. En este capítulo, los examinamos con más detalle, al centrarnos en dos constructos teóricos sobre los que esos procesos se apoyan: los constructos de Ser y devenir.

1. La cuestión del sujeto

En gran medida, y aunque de forma más bien implícita, las concepciones del estudiante en la Educación Matemática se han basado en un concepto moderno del sujeto o del individuo articulado por los filósofos en los siglos xvii y xviii. Así, el sujeto, tal y como lo imaginaba Immanuel Kant, uno de los filósofos más importantes del Siglo de las Luces, era visto como alguien

que, en su devenir, daba un paso de la inmadurez a la madurez, a semejanza del paso histórico que daban las sociedades europeas de su tiempo, que pasaban de un período de inmadurez a un período de madurez, de la oscuridad a la luz. En ese contexto, Kant (2010) imaginaba al individuo pasando de la dependencia de los demás en materia de pensamiento y comprensión a la capacidad de utilizar “el propio entendimiento sin la guía de otro” (p. 54).

Para pasar de la inmadurez a la madurez, Kant sostenía que “lo único que se necesita es *la libertad*” (p. 55, énfasis en el original), la libertad de razonar. En este contexto, la educación fue considerada por primera vez como el espacio en el que debían alimentarse las capacidades naturales de las personas y ejercerse la libertad: “la educación debe permitir que las capacidades naturales de las personas encuentren la razón autónoma y se vuelvan personalmente libres” (Jackson, 2007, p. 340). En cuanto a la práctica pedagógica, Kant (2010) aconsejaba que la educación debía implicar “*orientación* más que instrucción” (p. 340, énfasis en el original).

Si usted cree que Kant y sus ideas son reliquias del pasado, me temo que se equivoca. La contemporaneidad del concepto ilustrado de Kant sobre el sujeto y la pedagogía resultante aparece claramente en el siguiente ejemplo contemporáneo de una clase de matemáticas. En una clase de primer grado, se le pide a Melissa que resuelva problemas de resta. El profesor observa que el método de Melissa es diferente al que él tiene en mente. El profesor tiene miedo de influir a Melissa. Después de haber dado varios problemas a la estudiante, el profesor decide detener la interacción con ella. El profesor “pensó que, si persistía, podría simplemente entrenarla para que se comportara como él deseaba, en lugar de animarla a expresar su concepto de número de forma novedosa” (Cobb, 1988, p. 94). Como vemos, la cuestión no es enseñar a Melissa a restar números, sino asegurarse de que Melissa encuentre la libertad de pensar por sí misma. No se trata de instruir sino de guiar, y debemos dejar de guiar si nuestros actos corren el riesgo de contravenir la libertad de razonamiento del estudiante.

Pero ¿cómo llegaron los filósofos ilustrados a concebir al sujeto o al individuo como lo hicieron? Los filósofos ilustrados trataron de construir su idea del sujeto moderno en la superación del miedo, la tradición y las jerarquías feudales. Encontraron, en el concepto de libertad, el rasgo más fundamental del sujeto (Adorno, 2006). La idea de sujeto que imaginaron es la de alguien que no está para seguir lo que otros dicen o hacen, sino que tiene que pensar y razonar por sí mismo, como en nuestro ejemplo contemporáneo de Melissa.

Ahora bien, los filósofos de entonces no “encontraron” de casualidad la idea de libertad. Su concepto moderno del sujeto es el resultado de un largo proceso histórico y económico. El emergente capitalismo artesanal que surgió a finales de la Edad Media y en el Renacimiento, primero en Italia y luego en los Países Bajos, Francia y otras partes de Europa (Beaud, 2004), condujo a nuevas sensibilidades culturales y a una nueva comprensión del yo (Taylor, 1989). Dichas sensibilidades rompieron con la tradición y resaltaron el individualismo y el protagonismo de la razón (Horkheimer y Adorno, 2002). Se manifestaron en las distintas esferas de la actividad humana. En las artes, por ejemplo, aparecieron en la invención de la pintura en perspectiva, en la que el mundo se representa por medio de las leyes del cálculo matemático y el sujeto se convierte en el origen de lo que se ve, con lo que se encapsula así “la relación simbólica entre arte y visión del mundo” (Wood, 1991, p. 21). Las nuevas sensibilidades aparecieron también en la invención de un nuevo género pictórico: el retrato (Todorov, 2000), que permitía a los individuos del Renacimiento expresar y reconocer su experiencia cultural del mundo al tiempo que afirmaba el sentido emergente del yo moderno.

El concepto moderno de sujeto, transpuesto a la educación por medio de la influencia de Rousseau, Pestalozzi, Piaget y otros, dio lugar a un concepto humanista y sustancialista del niño. El niño aparece como una entidad dada; es decir, alguien ya dotado de sus propias capacidades intelectuales que, para desarrollarlas, solo necesita un entorno social estimulante (Martin, 2004). Una mirada rápida al panorama educativo del siglo xx muestra, en efecto, que, en este concepto de niño, se basó la escuela centrada en el niño del siglo xx, todo el movimiento pedagógico conocido como “progresismo” y el constructivismo (Cremin, 1961; Darling y Nordenbo, 2002; Rohrs y Lenhart, 1995). Así, en su libro de 1928, *The Child-Centered School (La escuela centrada en el niño*, reeditado en 1969), Rugg y Shumaker (1969) sostenían que la escuela debía construirse en torno a la libertad, los intereses y la “capacidad individual de autoexpresión creativa” del niño (p. 57). La escuela debería ofrecer al niño “la capacidad de gobernarse a sí mismo” (p. 56) y los medios para desarrollar al máximo su “amplia gama de capacidades potenciales” (p. 116). Esta visión romántica del niño sigue estando en el centro de muchas concepciones curriculares. Por poner un ejemplo, un documento clave del Ministerio de Educación de Ontario (2014) afirma que “todos los niños y estudiantes serán inspirados [por la escuela] para alcanzar su máximo potencial” (p. 3). Como vemos, se considera que el niño es como una planta que necesita luz, agua y otros

estímulos ambientales para crecer. Desde este punto de vista, la escuela y los profesores acaban siendo considerados como fertilizantes.

En este capítulo, para seguir explorando el aprendizaje, me dirijo al niño, al estudiante y al profesor. Pero lo hago desde una perspectiva diferente. Siguiendo las ideas articuladas en el capítulo 6, me alejo de considerar al niño y al profesor como entidades dadas. Me baso en una filosofía dialéctico-materialista en la que el individuo se conceptualiza como una entidad en flujo, en perpetuo devenir, una entidad que, por medio de la actividad práctica, se inscribe continuamente en el mundo social y, al hacerlo, se produce y coproduce continuamente dentro de los límites y las posibilidades de su cultura, tal y como vimos que hacía Platón en el capítulo anterior. Me interesa entender cómo, por medio de las ideas matemáticas y en su relación con los demás, los estudiantes y sus profesores se coproducen a sí mismos y, al mismo tiempo, son producidos por su contexto histórico-cultural. Para entender el movimiento dialéctico entre los profesores, los estudiantes y su contexto cultural, necesito empezar con una breve discusión de una estructura simbólica que, en cada cultura, define el espacio agéntico de los individuos y les proporciona un sentido definido de la persona.

2. Sistemas semióticos de significación cultural

En sintonía con los resultados que obtuvimos en el capítulo anterior, el punto de partida es que los seres humanos están inmersos en sus contextos sociales, culturales e históricos, y profundamente entrelazados con ellos. Las culturas, en efecto, proporcionan a sus individuos la materia prima de lo que son. Por ejemplo, el propio tejido de la subjetividad humana y el sentido del yo en la antigua Grecia estaban entrelazados con la participación de los individuos y su posicionamiento en las actividades económicas, sociales y culturales de la *polis*, como la agricultura, la ganadería, el comercio, los actos religiosos y las campañas militares. Estas actividades económicas, sociales y culturales, de las que surgía la subjetividad y el sentido del yo, daban un significado a la vida de los individuos. En este contexto, los individuos de la antigua Grecia aprendieron a vivir y a morir (véase, por ejemplo, Vernant, 1993).

Lo mismo hacemos nosotros en nuestro propio contexto histórico-cultural. Y como nuestro contexto histórico-cultural es diferente al de los griegos antiguos, nos encontramos ante un abanico *agéntico*: un abanico de posibilidades de derechos y obligaciones diferente al de ellos. Nos

encontramos ante un mundo con aparatos políticos, económicos y jurídicos diferentes y, en consecuencia, con un espacio agéntico diferente. El alcance o tamaño del espacio agéntico que da forma al yo y a la agencia humana se ve a la vez facilitado y limitado por una superestructura simbólica⁵². Siguiendo las ideas del capítulo anterior, esta superestructura simbólica surge en la codeterminación de los diversos procesos sociales, está siempre en movimiento, y encapsula de maneras tensionales y conflictivas los rasgos distintivos de la cultura —por ejemplo, su tematización de la producción de significados, las concepciones sobre la relación entre la mente y la realidad, y la comprensión de la realidad misma—.

En la teoría de la objetivación, la superestructura simbólica se denomina *sistemas semióticos de significación cultural* (sssc). Son sistemas dinámicos que se originan en la actividad práctica y sensual de los individuos. Comprenden ideas interrelacionadas sobre:

1. la naturaleza del mundo (por ejemplo, la naturaleza de los objetos matemáticos y su forma de existir),
2. la verdad (por ejemplo, cómo es y puede establecerse la verdad) y
3. la naturaleza de los individuos.

Los sssc están llenos de tensiones, al igual que las actividades de las que emanan. Tienen una función normativa (implícita, explícita o ambas) y son necesariamente portadores de concepciones políticas y éticas; por ejemplo, cómo nos mostramos a los demás y cómo se espera que nos comportemos socialmente y seamos reconocidos por los demás.

Para entender la operatividad de los sssc y cómo el sentido del yo del individuo está incrustado en una red de relaciones históricas, políticas, legales y económicas, mencionemos un ejemplo de Atenas, en la antigua Grecia. Mi ejemplo trata de dos mercaderes de grano, los extranjeros Artemón y Apolodoro, que pidieron dinero prestado al ateniense Androcles. Al seguir un esquema general de empresa marítima, con el dinero prestado, los mercaderes debían comprar mercancías en Atenas, transportarlas

52 Ratner (2000) hace una importante distinción entre las concepciones individualista y cultural de la agencia. En la primera, se considera que los individuos construyen su propio significado de las cosas y las elecciones: la agencia individualista “explica los hechos sobre los fenómenos sociales en términos de hechos sobre los individuos” (p. 413). En la segunda, “la agencia siempre opera dentro y por medio de una estructura social” (p. 421).

por mar (el mar Negro) hasta el Ponto, venderlas allí con un beneficio, utilizar las ganancias para comprar granos, transportar los granos de vuelta a Atenas y venderlos allí con otro beneficio. A partir de estas transacciones, los mercaderes debían devolver el préstamo y los intereses y seguir obteniendo algún beneficio para ellos. Como era habitual, el préstamo requería la firma de un contrato legal entre el prestamista y los mercaderes y algunos testigos. Esta transacción salió muy mal y el préstamo no se devolvió. Uno de los mercaderes murió, por lo que Androcles llevó a los tribunales al hermano mayor de los mercaderes, Lácrito, que había redactado el contrato entre el prestamista y los mercaderes y estaba a cargo de los bienes de Apolodoro.

Hay varios puntos aquí que definen el espacio agéntico y el consiguiente sentido del yo. En primer lugar, existe un entramado económico de transacciones marítimas que se ha puesto en marcha durante el período clásico ateniense en el que entran en juego los prestamistas y los comerciantes. En segundo lugar, existe un sistema legal ateniense de contratos que sirve para regular las acciones y obligaciones de los individuos. Los contratos tienen una estructura definida, en la que hay que especificar los individuos, los lugares, los fines y los límites de la transacción, el importe del préstamo, su interés, la seguridad del préstamo, el tiempo de devolución y los testigos. En tercer lugar, hay una institución social —el tribunal— que el sistema jurídico pone en marcha y en la que los individuos pueden alegar su caso, dado el incumplimiento del contrato. El sistema jurídico reconoce derechos y obligaciones en virtud del principio de la propiedad privada, sin el cual Androcles no podría hacer valer sus derechos. Como afirma en su alegato: “Yo, hombres del jurado, presté dinero a Artemón, hermano de este hombre Lácrito, de acuerdo con las leyes mercantiles para un viaje al Ponto y de vuelta a Atenas” (Demosthenes, 2004, p. 134). La naturaleza del mundo (la primera dimensión de los sssc antes mencionada) está configurada por una dimensión económica en la que las cosas se hacen de determinadas maneras, y por personas situadas en el marco de una red diferencial de posiciones sociales (prestamistas, comerciantes, jurados, etc.). Es esta dimensión la que permite a Androcles posicionarse como lo hace en el discurso de apertura al jurado: “Yo, hombres del jurado, presté dinero a Artemón, hermano de este hombre Lácrito, de acuerdo con las leyes mercantiles para un viaje al Ponto y de vuelta a Atenas”. Además, en lo que respecta a los individuos (la tercera dimensión del sssc), existe una expectativa social sobre cómo deben comportarse los individuos frente a

los demás. Al argumentar su caso, Androcles comienza a decir al jurado que Lácrito y sus hermanos no son atenienses; son de Faselis y, en consecuencia, no son dignos de confianza: “Son los hombres más terribles para pedir dinero prestado en el puerto, y luego, tras conseguirlo y redactar un acuerdo marítimo, se olvidan inmediatamente de los acuerdos escritos y de las leyes y de la necesidad de devolver lo recibido” (p. 133). Como vemos, Androcles dice al jurado que ha actuado de acuerdo con las reglas de las leyes marítimas, pero los mercaderes no lo hicieron. Cumplir las normas —someterse a ellas— nos equipara a los demás y es, de hecho, una parte importante de la construcción del yo. En un capítulo dedicado a los niños de jardín de infancia, analizo con detalle el papel de las normas y algunas dificultades que tienen los niños para ajustarse a ellas y actuar en el espacio social que las normas crean y organizan (véase Radford, 2020d).

Pero Androcles todavía tiene que convencer al jurado de que su acusación es cierta. ¿Cómo va a demostrarlo? Aquí entramos en la segunda dimensión de los sssc. Por supuesto, no basta con decir la verdad. La verdad siempre está “incrustada en estructuras de autoridad y asentimiento” (Fernández-Armesto, 1998, p. 67; véase también Shapin, 1995; Detienne, 1996). Para decir la verdad, se requiere entrar en una estructura retórica que Foucault denominó *régimen de verdad de la sociedad*⁵³. Androcles tiene, por lo tanto, que recurrir a la configuración retórica cultural-histórica de la verdad de que dispone, que, en su caso, incluye un procedimiento formal reconocido por el sistema jurídico ateniense: el recurso a los testigos. Así, para alegar su caso, y para probarlo, Androcles recurre a varios individuos para demostrar que lo que hizo el mercader fue todo un error. Por ejemplo, en lugar de comprar granos con el dinero obtenido de la venta de las mercancías compradas en Atenas y el beneficio obtenido de la venta, los mercaderes, al estar en el extranjero, prestaron dinero y compraron solo algunas cosas. Recurre a Hipias:

Hipias, hijo de Atenipo de Halicarnaso, atestigua que ... cuando el barco navegaba por la costa hacia Teodosia desde Panticapaeum, Apolodoro

53 Foucault señaló que “cada sociedad tiene su régimen de verdad, su ‘política general’ de la verdad: es decir, los tipos de discurso que acepta y hace funcionar como verdaderos; los mecanismos e instancias que permiten distinguir los enunciados verdaderos y los falsos, los medios por los que se sanciona cada uno; las técnicas y los procedimientos a los que se concede valor en la adquisición de la verdad; el estatus de los encargados de decir lo que cuenta como verdadero” (Foucault, 1980, p. 131).

[uno de los mercaderes] puso a bordo del barco uno o dos sacos de lana, once o doce jarras de pescado salado y algunas pieles de cabra —dos o tres fardos—, pero nada más. (Demosthenes, 2004, p. 143)

No es necesario seguir examinando el caso de Androcles. Se trata de subrayar el hecho de que los sssc operan por medio de una compleja red de relaciones políticas, jurídicas y económicas. Los sssc configuran nuestro sentido del yo, al ofrecernos a cada uno de nosotros un espectro de posiciones socialmente reconocidas y al permitirnos posicionarnos (con los consiguientes derechos, prerrogativas, expectativas y obligaciones) y, al mismo tiempo, ser posicionados por los demás. Pero el punto más importante quizás sea no ver el yo como algo ya existente, ya dado, que se mueve dentro de un espacio agéntico más o menos amplio. El yo y su espacio se construyen y reconstruyen constantemente a partir de las ideas portadas por los sssc (ideas que también se construyen y reconstruyen todo el tiempo).

3. Ser, devenir y subjetividad

En esta sección, veremos el sentido de los conceptos claves de Ser, devenir y subjetividad que se usan en la teoría de la objetivación. Es preciso tener en mente que se trata de conceptos pensados desde el materialismo dialéctico, lo que significa, en particular, que hay que pensarlos como entidades en movimiento. El devenir, por ejemplo, es un “llegar a...” que nunca llega, pues siempre sigue en movimiento.

3.1. Subjetividad

De acuerdo con las ideas expuestas en el capítulo anterior, en el que tratamos el concepto de cultura en la teoría de la objetivación, la relación entre la “materia prima” cultural portada y ofrecida por los sssc y los individuos concretos no debe verse en un sentido causal o mecánico. Por un lado, como humanos, estamos inevitablemente afectados por nuestro contexto histórico-cultural concreto. Esto forma parte de nuestra composición ontológica; forma parte de lo que significa ser humano. Este es el punto que el filósofo del siglo xvii Baruch Spinoza (1989) hizo en su *Ética*, un libro que tuvo una importante influencia en Vygotsky y Marx (Clot, 2015; Fischbach, 2014; Toassa, 2014). Sin embargo, los individuos no se ven simplemente afectados por su entorno. Se ven afectados de manera reflexiva. Lo que la

reflexividad significa aquí es que, además de verse afectados por su contexto histórico-cultural concreto, los individuos reaccionan agénticamente a dicho contexto. Lo hacen mediante el ejercicio del libre albedrío. Es precisamente en el ámbito del ejercicio del libre albedrío en el que Vygotsky encontró el rasgo más distintivo de los humanos dentro del amplio espectro de los seres vivos naturales (del Río y Álvarez, 1995; véase también Tappan, 1998). Las prácticas discursivas y no discursivas y las tecnologías que sustentan y dan forma a nuestro mundo no nos impiden pensar y actuar de forma diferente. Siempre hay posibilidades de interrumpir el tren cotidiano de nuestras acciones y pensamientos. Como dice Scott (1990), en esta interrupción, “los valores definitivos que rigen el pensamiento y la acción cotidiana pierden su poder y autoridad” (p. 4). Esta interrupción tiene sentido precisamente por nuestra naturaleza agéntica histórica-cultural (es decir, por nuestro poder de sobrepasar las posibilidades culturales e históricas en las que nos basamos cuando re-actuamos y re-presentamos el mundo).

El alcance de nuestra naturaleza agéntica se ha entendido de diferentes maneras. Para los que se adhieren a la idea de que somos los únicos autores de nosotros mismos (es decir, que somos sujetos que se hacen a sí mismos), las posibilidades y limitaciones culturales no son motivo de preocupación. En efecto, dado que se considera que el sujeto está dotado de una posición privilegiada que lo convierte en el *locus* del sentido y la intencionalidad, en la fuente del saber y del ser —concepción teórica articulada por las corrientes racionalistas y empiristas de la Ilustración antes comentadas—, el alcance de nuestra naturaleza agéntica recae en nosotros y solo en nosotros. Existe, sin embargo, una concepción diferente del ser que considera que, independientemente de lo que hagamos y deseemos, nuestra naturaleza agéntica queda confinada al “efecto de las posiciones de sujeto articuladas en el discurso” (Atkins, 2005, p. 252). Desde este punto de vista, estamos encerrados en el universo discursivo de nuestro mundo. Nealon (1998) ha argumentado convincentemente que esta posición teórica se basa en una idea del yo como carencia; en un sentido muy primario, el yo carece de totalidad o plenitud⁵⁴.

54 Hace unos años, un colega y yo estábamos de visita en una universidad de Dinamarca con motivo de la defensa de una tesis. Por la noche, al volver de la universidad, hicimos una parada en el bar del hotel. Inspirados por la tesis defendida ese día, la conversación giró en torno a la cuestión de la agencia humana. Para contrarrestar mi argumento contra la idea derrotista de que estamos ineludiblemente atados a las

Históricamente, los pensadores feministas, multiculturalistas y dialéctico-materialistas, así como los estudiosos de campos afines, han contrarrestado estas dos concepciones del yo y la agencia (la individualista y la derrotista) ofreciendo un concepto del yo como exceso. En la teoría feminista, el sujeto se concibe como poseedor del poder de “reflexionar sobre el discurso social y desafiar sus determinaciones” (Alcoff, 1988, p. 417). Al seguir un hilo hegeliano, para Butler (1999), la subversión del sujeto es posible porque todos los actos de significación no solo restringen las acciones del sujeto, sino que, al mismo tiempo, en su promulgación, siempre se sitúan dentro de la posibilidad de una variación en los “dominios alternativos de la inteligibilidad cultural” (p. 185). Los pensadores dialéctico-materialistas (por ejemplo, Fischbach, 2014; Macherey, 2008; Mikhailov, 1980; Sève, 2008) se han basado en la tercera de las *Tesis sobre Feuerbach* de Marx (1998), en la que el sujeto aparece como uno que, mientras es producido por sus circunstancias, tiene, a la inversa, el poder de transformar esas circunstancias. Al seguir a Marx, lo que los dialéctico-materialistas añaden a la concepción agéntica del yo es que la subversión se realiza en la *praxis*, con los otros (Fernández Mouján, 2016; Freire, 1998; Guilherme, 2017). La subversión y la emancipación aparecen, por tanto, no como proyectos individuales sino colectivos (Radford, 2012b, 2013b).

El concepto de yo que se deriva de esta visión y que está en el centro de la teoría de la objetivación es una entidad en exceso que surge de la sobre-determinación de los procesos sociales: “una propiedad emergente de una experiencia historizada” (Alcoff, 1988, p. 431); es decir, una entidad en flujo, inalcanzable e irrealizable, un proyecto de vida que se inscribe cotidianamente con otros en la sociedad y la cultura por medio de prácticas concretas.

Así, lo que surge de los efectos del afecto y de la dimensión agéntica —es decir, el sujeto— lleva la huella de su cultura. Al mismo tiempo, emerge siempre como algo diferente —diferente de los demás y de sí mismo—: el sujeto resultante es la diferencia de lo idéntico (Lévinas, 1978, p. 22); es decir, un “yo” que no es sustantivo sino verbo; un verbo que no significa un acontecimiento (p. 67); un “yo” cuya fórmula es “yo ≠ yo”.

prácticas discursivas y no discursivas y a los mecanismos de vigilancia de nuestro sistema (el sistema capitalista), mi colega me explicó que mi argumento era, en efecto, una producción del mismo sistema del que intentaba escapar; mi argumento era producido por una especie de “válvula de seguridad” incorporada al sistema, y que incluso había un nombre técnico para mi argumento: fantasía.

Esta fórmula capta la concepción del individuo como, por un lado, una entidad agéntica viva y concreta, dinámica y siempre en flujo, en transformación, y, por otro lado, una entidad cuya dimensión agéntica solo puede entenderse con el telón de fondo de la cultura y la historia. Para referirme al individuo en este sentido, utilizaré el término *subjetividad*. Para precisar un poco más su sentido, primero tengo que recurrir a dos términos relacionados: Ser y devenir.

3.2. Ser y llegar a ser

El *ser*, como lo entiendo aquí, es una categoría ontológica, no metafísica. Es una capacidad generativa general, cultural, dinámica (es decir, siempre cambiante) constituida por las concepciones culturales de vivir en el mundo: formas de conceptualizarse y de ser conceptualizado; formas de posicionarse y de ser posicionado. En el ejemplo anterior de la Atenas clásica, el Ser incluye las formas en que los esclavos, las mujeres, los comerciantes, los trabajadores manuales, los ciudadanos, etc., se conceptualizaban a sí mismos y eran conceptualizados por los demás. Esas formas de conceptualizarse a sí mismo y de ser conceptualizado por los demás se materializan continuamente en los actos, las acciones y las actividades de los individuos. Lo que se materializa, sin embargo, no coincide con la capacidad que lo engendra, ya que esta capacidad es una capacidad cultural, general, latente. El Ser solo puede mostrarse por medio de sus materializaciones en el mundo concreto, en el que puede ser reconocido como lo que es. Ser comerciante en la Atenas clásica, por ejemplo, se materializa en los hechos de Artemón y Apolodoro, al igual que ser prestamista se materializa en los hechos de Androcles. La materialización del ser, siempre en desarrollo, está relacionada con el Ser, pero no coincide con él. Los hechos de Apolodoro no coinciden con el “mercader” (del mismo modo que la idea de triángulo no coincide con ninguna de sus materializaciones). La materialización del Ser es lo que se denomina *devenir* (un devenir o llegar a ser siempre inconcluso).

Ahora podemos volver al concepto de subjetividad. Una *subjetividad* es un sujeto único sensible, cultural, concreto: Androcles, Artemon, Apolodoro, un estudiante (como Melissa en el ejemplo de la introducción de este capítulo) o un profesor. La singularidad de la subjetividad resulta del hecho de estar continuamente afectada reflexivamente por el Ser por medio de sus materializaciones concretas. Esta afección reflexiva hace imposible que la subjetividad pueda ser quitada o sustituida (Lévinas, 1978). La

subjetividad está siempre en construcción, es una entidad continuamente comprometida en un proceso de devenir (en inglés: to *become*, es decir, *be-come*, *viniedo a ser*): un proyecto de vida inacabado e interminable.

Estos procesos en los que el Ser se muestra siempre en movimiento y siempre diferente es lo que denominamos *procesos de subjetivación*. Se definen como aquellos procesos por los que los profesores y los estudiantes se posicionan a sí mismos, a la vez que son posicionados por los demás en el siempre controvertido telón de fondo de la cultura y la historia.

Bernstein (2003) ha demostrado que el posicionamiento crea “relaciones específicas dentro de los sujetos” (p. 10), mientras que Harré (2012) y, más recientemente, Herbel-Eisenmann, Wagner, Johnson, Suh y Figueras (2015) han llamado la atención sobre el hecho de que el posicionamiento implica una dimensión ética. El posicionamiento, sugiere Harré (2012), implica un curso de acciones discursivas en las que “se asignan, atribuyen o apropian derechos y deberes y se resisten, rechazan o repudian otros derechos y deberes” (p. 196).

Para investigar los procesos de subjetivación y su idea clave de coposicionalidad, recurrimos al constructo de “voz” —entendido como mucho más que un mecanismo discursivo: la voz es algo ligado a la actividad que aporta la noción posmoderna de diferencia y la primacía de lo político— (Giroux, 1986, 2005). Encontrar la propia voz o tener una voz es “pasar del silencio a la palabra”, “un gesto de desafío que cura, que hace posible una nueva vida y un nuevo crecimiento” (bell hooks, 2015, p. 29), algo que “asume una primacía en la charla, el discurso, la escritura y la acción” (p. 33). Al investigar los procesos de subjetivación en el aula, nos ocupamos por tanto de la cuestión de la coposicionalidad de profesores y estudiantes por medio de las relaciones y acciones sociales constitutivas, dinámicas y entrelazadas, consideradas mediante el prisma de las posturas críticas y éticas que esas relaciones y acciones encarnan.

En la siguiente sección, analizo un ejemplo de clase.

4. Resolución de ecuaciones en un aula de tercer grado

El siguiente ejemplo proviene de una clase de tercer grado (8-9 años) que seguimos como parte de un estudio de investigación longitudinal de cinco años sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en niños pequeños (Radford, 2010, 2018c). En los días anteriores a nuestro ejemplo,

los estudiantes y la profesora trabajaron en problemas de palabras que los estudiantes tenían que traducir a una ecuación y luego resolver, al utilizar un sistema semiótico muy simple: un sistema semiótico con tres signos concretos: sobres de papel, tarjetas de cartón y el signo igual (=).

Los problemas ponían en escena a dos individuos, cada uno con un número de tarjetas y sobres. El enunciado del problema especificaba las cantidades correspondientes y el hecho de que cada uno de los sobres contenía un mismo número desconocido de cartas en su interior. El enunciado del problema establecía que ambos individuos tenían un número igual de tarjetas⁵⁵.

En términos educativos generales, los problemas que los profesores dan a sus estudiantes para resolver no son neutros ni cognitiva ni culturalmente hablando. Están incrustados en la primera y segunda dimensión del sssc que opera a nivel de la escuela y que, por medio de la práctica de lo que cuenta como problema, naturaliza la forma en que se plantean y resuelven los problemas. Inevitablemente, los problemas muestran de forma ostensible algunos aspectos de la naturaleza del mundo (por ejemplo, cómo se matematiza un problema); proporcionan también una base para ilustrar cómo, por medio de su resolución, se puede establecer la verdad. Esto se aplica evidentemente a lo que sucedió en nuestra clase de tercer grado. El sistema semiótico concreto visual de cartas y sobres mencionado, los problemas y sus soluciones ya transmiten la racionalidad instrumental y sistemática que, históricamente hablando (Radford, 2006), fue un rasgo destacado de la constitución del pensamiento algebraico en el Renacimiento y en los inicios de la época moderna (Viète, 1983; Descartes, 1886).

El trabajo alrededor de las ecuaciones en tercer grado fue continuado en cuarto grado, con la introducción del sistema semiótico alfanumérico estándar. En la figura 44, izquierda, se muestra a la profesora y a un grupo de tres estudiantes discutiendo la ecuación que, en simbología alfanumérica, corresponde a $2x = x + 5$ (hay dos sobres de un lado de la ecuación y un sobre y cinco cartas en el otro lado de la ecuación). La figura 44, a la derecha, muestra a un estudiante durante una discusión general resolviendo la ecuación que, en simbología alfanumérica, corresponde a $3x + 1 = x + 5$ (un sobre es tapado por el brazo del estudiante). En este sistema semiótico concreto y visual, las “operaciones” de los “sobres” y las “tarjetas”, como

55 Hace unos años se experimentó con este tipo de problemas en clases de estudiantes mayores; véase Radford y Grenier (1996). Para un estudio más reciente, véase Janßen y Radford (2015).

la suma, la resta y la división, permanecen ostensiblemente mostradas mediante la yuxtaposición, eliminación o agrupación de signos.



Figura 44. Izquierda: la profesora y estudiantes discuten; derecha: una estudiante resuelve el problema

Por supuesto, la clase de problemas verbales que pueden “expresarse” con un sistema semiótico de este tipo es bastante limitada, pero es lo suficientemente rica como para que los estudiantes se encuentren con las ideas básicas que subyacen a las simplificaciones de las ecuaciones lineales para aislar la incógnita y encontrar la solución.

Las ideas básicas de la resolución de ecuaciones mediante el álgebra se basan en dos reglas: “al-gabr” y “al-muquabala”, que son explicadas por Mohammed Ben Musa Al-Khwarizmi en su tratado del siglo IX *Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wāl-muqābala* (*El libro compendioso sobre el cálculo por reparación y comparación*; edición crítica en Hughes, 1986). El término *al-gabr* significa completar, llenar, restaurar añadiendo algo (una parte que falta a un todo). En una ecuación, digamos $A = B$, se restituye a A una determinada combinación de números (diríamos una determinada expresión algebraica) añadiéndole la cantidad de números que le faltan. De manera que, si A es $10 - 2x$, la expresión $2x$ se añade a A (y a B), para completarle al 10 aquello que le hace falta. La otra regla —la de *al-muquabala*, que significa confrontar, poner en oposición— permite operar números constantes e incógnitas entre ellos, para agruparlos en una misma expresión; es decir, para utilizar una expresión moderna, para ponerlos en un mismo lado de la igualdad (Radford, 1995). En la figura 44, derecha, vemos a una estudiante quitando una carta del lado izquierdo de la ecuación (hará lo mismo en el lado derecho de la ecuación). Se trata de una aplicación de

la regla *al-muquabala*. Con nuestro sencillo sistema semiótico de tarjetas y sobres, los estudiantes no pueden familiarizarse con la regla de *al-gabr*. El sistema es demasiado simple. Tuvimos que esperar hasta el cuarto grado para que los estudiantes empezaran a utilizar la regla *al-gabr*. Por supuesto, estas reglas no fueron introducidas en el aula con sus propios nombres y significados históricos. Si las menciono aquí es solo para recordar el espesor epistemológico-histórico-cultural, de las ideas algebraicas que invitamos a los estudiantes a encontrar. Si menciono esas reglas aquí es también para ayudarnos a disipar la idea de que el saber matemático del aula es ahistórico y acultural. El saber, como argumenté en el capítulo 3, es una entidad histórica-cultural que se revela a la consciencia de los estudiantes por medio de la actividad de enseñanza-aprendizaje en el aula. La forma operativa en la que se revela el saber en la escuela está enredada en las suposiciones que hacemos sobre cómo se relaciona el saber con el mundo y las estructuras retóricas de la verdad que ponemos a disposición de los estudiantes. Y estas son precisamente dos de las dimensiones de los sssc.

Detengámonos ahora en el entorno del aula. De acuerdo con las ideas que expuse en los capítulos 4, 5 y 7, la actividad de enseñanza-aprendizaje se considera un sistema colectivo en movimiento. Esta concepción de la actividad de enseñanza-aprendizaje nos permite distinguir “momentos” importantes de la actividad. Estos momentos proporcionan un marco dinámico general para entender y estudiar las formas en que se desarrolla la actividad. Estos momentos se distinguen en función del tipo de interacción social que apoya la circulación de ideas en la clase. En el ejemplo que quiero comentar aquí, la interacción se dividió en tres momentos.

Momento 1

En este momento, los estudiantes trabajaron en pequeños grupos para producir un texto matemático que incluía una historia de su invención, la traducción de la historia a una ecuación algebraica y la solución de la ecuación (véase figura 45, imágenes superiores). Cada grupo tenía un equipo “correspondiente” con el que podían intercambiar posteriormente los textos (véase el momento 3).

Momento 2

En este momento, el grupo tenía que enviar un texto a su equipo correspondiente y viceversa. Cada grupo trabajaba de forma independiente, leía

y evaluaba la producción del otro equipo (véase la figura 45, imagen 3). La evaluación de la producción del otro equipo se basaba en

1. la claridad del texto matemático del otro grupo (¿entendemos la historia, su traducción en una ecuación y la solución propuesta?)
2. la corrección del texto (¿es cierto lo que dice el texto?); y
3. la capacidad de persuasión del texto (¿es todo matemáticamente sólido y convincente?).

Momento 3

En este momento, cada grupo se reunió con sus compañeros correspondientes. En esta reunión, cada grupo presentó sus comentarios al otro grupo y se produjo un debate entre los equipos (véase la figura 45, imagen 4; para una discusión más metodológica, véase Radford y Demers, 2004).

Nos limitaremos aquí a destacar los pasajes relativos al momento 3, especialmente en lo que se refiere a los procesos de subjetivación.

El equipo de Carl y Sandra —denominado *equipo A* en lo que sigue— produjo el siguiente texto.

Para Navidad, Calin recibió tres cajas de Webkinz y Samantha una caja. Él [Calin] ya tiene 4 Webkinz. Y Samantha ya tiene 28 Webkinz. Ahora los dos tienen la misma cantidad [de Webkinz]⁵⁶.

En la figura 45, las imágenes superiores muestran al grupo A y al equipo correspondiente (equipo B) trabajando de forma independiente para producir un texto matemático. La imagen inferior izquierda muestra al equipo B examinando críticamente el texto del otro equipo. El otro equipo hace lo mismo. La imagen inferior derecha muestra que los miembros de los dos equipos correspondientes se reúnen para discutir sus textos; de izquierda a derecha, Sara, Sandra, Carl, Elisa y Christine.

El equipo formado por Christine, Elisa y Sara —llamado *equipo B*— produjo el siguiente texto.

Martine tiene 10 pegatinas en su colección. Recibe un sobre de pegatinas por su cumpleaños. Cassidy tiene 6 pegatinas en su colección. Y (recibe) 2 sobres de pegatinas por Navidad. ¿Cuántas pegatinas hay en cada sobre?

56 Los Webkinz son pequeños animales de peluche.



Figura 45. Trabajo de los equipos

La traducción a ecuaciones y las soluciones de las ecuaciones se muestran en la figura 46. En la fila superior, aparece la ecuación y solución del equipo B y, en la fila inferior, la ecuación y solución del equipo A.

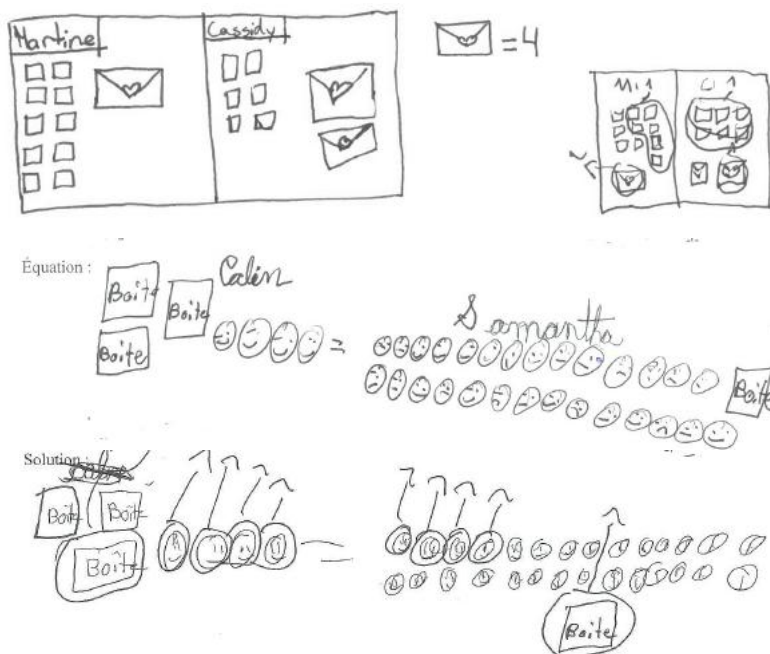


Figura 46. Ecuación y solución de los dos equipos

Una vez concluidos los momentos 1 y 2, la profesora invitó a los grupos a reunirse; ella recordó a los grupos los puntos en los que debían centrarse en el texto (es decir, claridad, corrección, persuasión). Después de organizar los grupos, se marchó a ver a otros equipos.

El equipo A comienza el debate.

- 1 Carl: Um, lo que nos gustó fue que su historia era clara, no había errores, podíamos leerla bien. Eso es lo que nos gustó de su historia.
- 2 Sandra: (*Señala indexicalmente el planteamiento de la solución del otro equipo*) Es bueno, como hacerlo [así]...
- 3 Christine: ¿Es eso lo que te gustó de la ecuación?
- 4 Sandra: Y aquí, aquí (*señala la solución de la ecuación*) lo que nos ha gustado es que ponen el sobre igual a 4.

El equipo B continúa la discusión y da la razón de sus juicios.

- 5 Elisa: Nos ha gustado mucho su historia, porque me encantan los Webkinz, pero lo único es que... no han pedido... era...
- 6 Carl: (*Interrumpe*) No, [ahora]... tú dices lo que te gustó.
- 7 Elisa: Oh, vale. Lo que me gusta... de su historia es que... puedo ver que es muy clara, no hay manchas; incluso se puede ver todo... Vi que, incluso escribieron las palabras para [decir] qué (*señala los dibujos*). Han mostrado las cajas [de Webkinz], como aquí... (*señala las palabras cajas en la ecuación del grupo de Carl*)... y lo que me ha gustado de su solución es que, he visto que ustedes, han rodeado bien [los objetos removidos en las simplificación de la ecuación]... no han manchado en la parte superior, sí (*se ríen*).

Podemos ver en este breve pasaje cómo los dos grupos comienzan su discusión. Leen, interpretan y emiten un primer juicio sobre el texto matemático del otro grupo. Los estudiantes comienzan destacando los elementos que les parecen bien hechos. Este planteamiento, que puede parecer poco interesante, permite, sin embargo, que los estudiantes se adentren en la práctica matemática y comiencen a posicionarse en ella. En ausencia de la profesora, se organizan ellos mismos. En la línea 5, Elisa comienza un comentario sobre las insuficiencias del texto del otro grupo; en la línea 6, Carl le recuerda que todavía no es el momento de hacer críticas. Ciertamente, el lenguaje matemático es todavía frágil; el uso fluido de los términos técnicos en el discurso matemático todavía se les escapa a los estudiantes. Así, en la línea 7, Elisa dice: “He visto que han rodeado bien...”; la frase queda inconclusa. Pero el otro grupo entiende que ella se refiere a los objetos eliminados en la simplificación de la ecuación (es decir, la aplicación de la regla *al-muquabala*; véase la imagen inferior derecha de la figura 46). Esto forma parte del proceso de subjetivación por medio del cual los estudiantes se encuentran con otras voces, llegan a hacerse un espacio y adoptan una perspectiva en el mundo social. Igualmente importante en el desarrollo del proceso colectivo de subjetivación es el hecho de que los estudiantes llegan a demostrar empatía por los demás: se esfuerzan por comprender el texto de los otros.

A continuación, los grupos pasan a debatir sobre lo que creen que podría mejorarse en el texto del otro grupo.

- 8 Carl: En su ecuación, no han puesto el signo de igualdad (véase imagen superior de la figura 46).
- 9 Sandra: ¡Y tienes que poner eso!
- 10 Carl: Siempre tienes que poner eso. Esto es lo que deberías haber hecho (*señala su propia página y se la muestra*).
- 11 Christine: ¡Fue idea de Elisa y Sara!
- 12 Carl: (*Se refiere a la simplificación de la ecuación*) No han hecho una por una. También (*se refiere a la solución de la ecuación*) 4 ¿qué? ¿No sabemos 4 qué? Escribieron 4; deberían haber escrito “tarjetas”.
- 13 Elisa: ... no tarjetas, “pegatinas”; son “pegatinas”.

Como acabamos de ver, los estudiantes del equipo A señalan los siguientes tres elementos:

1. La ausencia del signo igual en la ecuación del equipo B (líneas 8, 9 y 10).
2. El procedimiento para simplificar la ecuación (la regla *al-muqabala*): en lugar de eliminar los objetos de cada lado de la ecuación uno por uno, los estudiantes eliminaron 6 objetos al mismo tiempo en cada lado de la ecuación (línea 12).
3. Falta de retorno al problema original para identificar la naturaleza de la solución (“4” frente a “4 pegatinas”) (líneas 12 y 13).

Los estudiantes del equipo B aceptaron 1 y 3, pero no aceptaron 2. La disputa de los equipos se refería a las estructuras retóricas de la verdad.

A continuación, fue el turno del equipo B para hacer su crítica. La crítica del equipo B se centró en la falta de preguntas en el texto del equipo A. La crítica dio lugar a un intenso debate. A continuación, se presenta un breve extracto.

- 14 Elisa: No has dicho “cuántos... [Webkinz]” como “¿cuántos hay en cada caja?”
- 15 Sandra: ¡Se supone que no debes decir cuántos... en cada caja!
- 16 Carl: (*De acuerdo con su compañera de equipo*) ¡No se supone que lo hagas!
- 17 Sandra: (*Explica más*) ¡Porque se supone que tienes que averiguar cuántos hay en cada caja!
- 18 Elisa: (*De acuerdo con sus compañeros de equipo*) Sí, tienes que preguntar como, dejar [ver]... como [nosotros] escribimos “... ¿Cuántas pegatinas hay en cada sobre?” ¡Eso es lo que hay que buscar!

Elisa tiene dificultades para articular su crítica. La conversación no parece versar sobre el mismo objeto del discurso. Carl y Sandra creen que Elisa les pide que mencionen la respuesta en la historia que han compuesto. Los equipos no consiguen llegar a un acuerdo. Deciden continuar la discusión sobre otros puntos. La discusión gira en torno a la solución de la

ecuación. El equipo B se queja de que los objetos se han dibujado demasiado pequeños, pero los estudiantes acaban acordando que el tamaño de los objetos dibujados no importa. El tamaño puede ignorarse. Forma parte de la abstracción del pensamiento matemático. También discutieron el tipo de números utilizados en el texto del equipo A. El equipo B sugirió que uno se tarda demasiado en resolver una ecuación con un número grande como el 28. Los estudiantes del equipo B consideraron que, si el equipo A hubiera utilizado 100, habría tardado unos 10 minutos en resolver la ecuación. El equipo A sugirió utilizar círculos para los números grandes, con lo que creó una nueva notación simbólica. La discusión no llegó a más, pero la idea quedó sobre la mesa. Y, de hecho, este es el camino que esta clase explorará el próximo año con otro profesor.

Los pasajes anteriores muestran los procesos de objetivación y subjetivación. Muestran, en efecto, el encuentro de los estudiantes con las formas culturales en las que se formulan los problemas de álgebra, se traducen en una ecuación y se resuelven, y muestran al mismo tiempo cómo los estudiantes se posicionan y son posicionados por los demás. Hubo varios puntos que quedaron sin resolver (por ejemplo, la cuestión de la eliminación de varios elementos al mismo tiempo en la simplificación de la ecuación y si una pregunta tiene que estar incluida en el texto) y, para ir más allá, fue necesaria la intervención explícita de la profesora⁵⁷.

Cuando los estudiantes estaban terminando la discusión sobre los números grandes, la profesora llegó a ver al grupo.

- 19 Profesora: ¿Qué cosas has notado que podrían haberse mejorado en el otro grupo? Bien. Empezaremos por aquí (*señala a Sandra*).
- 20 Sandra: Hemos visto que no han puesto el signo de igualdad.
- 21 Profesora: ¡Ah! Entonces, falta el signo de igualdad.

57 Digo “la *intervención* explícita de la profesora”; no la “*presencia* explícita de la profesora”, porque la profesora ha estado presente en todo momento. Su presencia se manifiesta tanto en la organización social del aula como en la tarea matemática en la que participan los estudiantes.

- 22 Sandra: Y luego, aquí, no los quitaron uno a uno, simplemente cogieron un grupo y lo quitaron [a la ecuación] (*se refiere a la regla al-muquabala*).
- 23 Profesora: Vale. Estoy de acuerdo con [la observación sobre] el signo de igualdad [que falta], porque es una ecuación, ¿no? Entonces, ¿eso sería una cosa por mejorar la próxima vez? Añadir un signo igual.
- 24 Christine: Sí...
- 25 Profesora: La idea de que rodearon todas las 6 [las pegatinas] y luego simplemente sacaron todas esas pegatinas a la vez, no tengo ningún problema con eso.

A continuación, los estudiantes comunicaron a la profesora la crítica del equipo B sobre la pregunta que faltaba en el texto del equipo A, porque, como dijo Christine, sin una pregunta, “¡no sabes lo que [debes] hacer!”.

- 26 Profesora: (*Se dirige a los estudiantes del equipo A*) ¿Qué queremos saber?
- 27 Carl: ... cuántos [Webkinz] hay en la caja.
- 28 Profesora: Queremos saber cuántos hay en la caja. ¿Creen que en una situación como esta, para alguien que lee esto [el texto], y quiere... y luego quiere encontrar la solución... creen que es importante añadir la pregunta? (véase la imagen superior de la figura 47)
- 29 Sandra: Sí, lo creo...
- 30 Carl: Yo digo que no, porque en una historia; en las aventuras, no decimos como... ¡cuál es la solución! (véase imagen inferior de la figura 47)
- 31 Profesora: Creo que, en una historia como esta, es importante tener una pregunta, si se quiere saber cuántos Webkinz hay en cada caja.

Al final, no hubo consenso. Carl veía el texto matemático un poco como un texto literario, en el que se encuentra una situación; luego se desarrolla la situación o “aventura”, como él mismo la llama, que correspondería a la simplificación de la ecuación; después sigue el final, que consiste en nombrar la solución.

En cierto sentido, la intervención de la profesora podría considerarse un fracaso en la institucionalización del saber. Visto desde este ángulo, en los pasajes anteriores, la profesora habría perdido la oportunidad de indicar a los estudiantes cómo se plantea un problema y, en particular, el papel de la pregunta. Visto de cerca, la profesora se ha posicionado en el debate (véanse las líneas 21, 23 y 25 anteriores). Pero intenta hacerlo sin imponer su autoridad. La cuestión no es deshacerse de la autoridad, sino ejercerla responsablemente; es decir, tener en cuenta las voces, los gestos y las perspectivas de los demás.

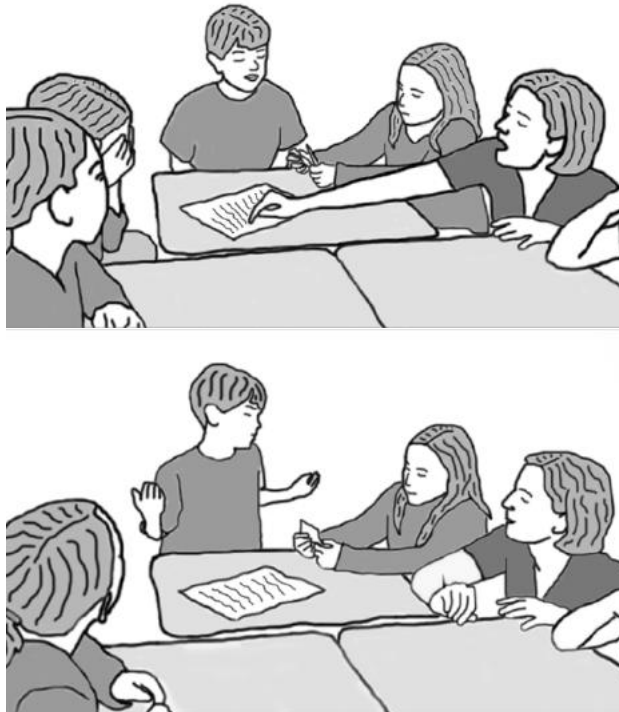


Figura 47. La profesora ofrece una interpretación diferente y Carl la refuta

En la teoría de la objetivación, el profesor se considera la personificación en el aula de una racionalidad cultural; pero su objetivo no es imponer esta racionalidad —lo que sería el caso de una pedagogía de la reproducción—. En la teoría de la objetivación, el objetivo del profesor es más bien *ofrecer* a los estudiantes otra forma de ver el problema (una forma histórica y culturalmente constituida de pensar los problemas matemáticos) para que los estudiantes lo consideren desde su perspectiva emergente.

Un proceso de objetivación no consiste en imponer una forma de ver el mundo y someter al estudiante a ella. La objetivación consiste en un encuentro siempre inacabado y crítico con el saber. Y esta es precisamente la oferta que la profesora hace a los estudiantes en la línea 28: “¿Creen que...?” La profesora entra en una situación dialógica que la hace necesariamente vulnerable. Puede ser refutada. Pero ser refutada no es algo que deba evitarse. Al contrario: ser refutada forma parte del coposicionamiento colectivo de voces y subjetividades, las de los estudiantes, pero también la voz y subjetividad de la profesora. En esta línea de pensamiento, en la que el profesor no desempeña el papel de patriarca del saber, el profesor no está por encima de los estudiantes. Está con los estudiantes; trabaja con los estudiantes. Este es el significado del concepto de labor conjunta en la teoría de la objetivación.

De hecho, como se ha visto, la profesora es refutada en la línea 30. Así, en la línea 31, toma posición, pero, de nuevo, en armonía con el proyecto ético de enseñanza-aprendizaje, sin imponer su autoridad. El proyecto educativo gira en torno a la creación de condiciones que permitan a los estudiantes y a los profesores participar en la actividad del aula a partir de formas no alienantes de interacción y colaboración humana, y por medio de las cuales profesores y estudiantes se expresan y posicionan en el espacio público y, al hacerlo, se coproducen cotidianamente. Desde este punto de vista, en la línea 31, la profesora ya puede marcharse; puede ir a hablar con otros equipos. Ya ha alcanzado su objetivo didáctico. Por supuesto, la discusión continuará y se revelarán nuevas contradicciones durante la discusión general en el aula y en los días y años siguientes.

5. Síntesis

Comencé este capítulo poniendo en tela de juicio un concepto de estudiante que ha tenido una importante influencia en la comprensión reciente de la

enseñanza y el aprendizaje, un concepto que se encuentra en el corazón de la educación centrada en el niño. Intenté mostrar que este concepto de estudiante es una transposición, al ámbito educativo, de una noción político-social más general que fue articulada por los filósofos de la Ilustración y que llegó hasta nosotros por medio de la influencia de Rousseau, Pestalozzi, Piaget y otros. En esa línea de pensamiento, el estudiante se conceptualiza de forma humanista y sustancialista: el estudiante se percibe como una entidad dada, es decir, una entidad ya dotada de sus propias capacidades intelectuales. Para desarrollar estas capacidades al máximo, el estudiante simplemente necesita un entorno social alentador. En contraste con esta visión, que reduce lo social y lo cultural a un mero cúmulo de estímulos, y siguiendo las ideas del capítulo anterior, sugerí una visión de los estudiantes según la cual el estudiante está siempre implicado en procesos de convertirse, en procesos de devenir. Y lo mismo ocurre con los profesores. Desde este punto de vista, el devenir de los individuos en general, y de los profesores y estudiantes en particular, está entrelazado con sus contextos sociales, culturales e históricos. En la cultura —y más concretamente, en los sssc— los individuos encuentran la materia prima de su subjetividad. Los sssc son una superestructura simbólica dinámica que ofrece concepciones culturales sobre la naturaleza del mundo y la naturaleza de los individuos. Esta superestructura simbólica da forma al espacio agéntico de los individuos que es fundamental para el consiguiente sentido del yo.

Para ilustrar estas ideas, analicé un ejemplo de la antigua Atenas que nos dio la oportunidad de ver a Androcles como un ser que se produce a sí mismo por medio de sus actos y, al mismo tiempo, es producido por su contexto histórico-cultural. Así, para posicionarse en las prácticas sociales atenienses, Androcles recurre al espacio agéntico de que dispone; también recurre al régimen de verdad de su sociedad. Luego, para formalizar esas ideas y comprenderlas mejor teóricamente, introduje los conceptos de Ser, devenir y subjetividad. Con el trasfondo de la categoría histórico-cultural del Ser, la subjetividad es considerada una entidad en perpetuo devenir: es el producto siempre parcial e inalcanzable de los procesos colectivos de subjetivación. No es un sujeto epistemológico, ni uno cognitivo. Una subjetividad es, desde este punto de vista, el sujeto concreto que respira, transpira, sueña, sufre y anhela y espera con otros.

En la segunda parte de este capítulo, he intentado mostrar, por medio de extractos de un ejemplo de clase de tercer grado, algunos elementos

de los procesos de subjetivación en los que se embarcaron una profesora y sus estudiantes al realizar una actividad de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. El ejemplo muestra también un proceso de objetivación. La simultaneidad de estos procesos se debe a que están entrelazados. La razón de su entrelazamiento se encuentra en la propia naturaleza del aprendizaje de las matemáticas, tal y como se definió en el capítulo 2: en un proceso de subjetivación —al intentar posicionarse en una práctica matemática— los estudiantes recurren al saber matemático. Y precisamente aquí entran en juego los procesos de objetivación. Recíprocamente, al participar en un proceso de objetivación —al tratar de encontrarse con el saber cultural— los estudiantes son llevados a posicionarse frente al saber, y este posicionamiento es parte de los procesos de subjetivación. Este entrelazamiento de los procesos de objetivación y subjetivación no es más que una expresión práctica del hecho de que el aprendizaje consiste inevitablemente en conocer y llegar a ser.

El ejemplo de la clase muestra, en particular, la forma en que los estudiantes se encontraron con algunos aspectos del saber algebraico, como lograr plantear un problema, traducirlo en una ecuación y resolver la ecuación algebraicamente. Entablaron intensas discusiones por medio de las cuales se encontraron con un saber histórico-cultural que la escuela, como institución social, coloca en una posición privilegiada. Lejos de ser neutral, la posición privilegiada de dicho saber es una respuesta a las necesidades de la sociedad que se definen por medio de un proceso complejo que es ideológico, político y económico. Mi intención aquí no es entrar en la política del currículo (para discusiones sobre este tema, véanse, por ejemplo, Baldino y Cabral, 1998; Pais y Valero, 2012; Popkewitz, 2004, 2009; Valero, 2004; Valero y Knijnik, 2015). Sin embargo, no puedo dejar de mencionar que el conjunto de saberes que cualquier escuela aporta al ámbito de la enseñanza y el aprendizaje incorpora tensiones e intereses de diversos grupos sociales. En el caso de la lección que he analizado aquí, las matemáticas aparecen como una necesidad: se espera que las matemáticas equipen a los estudiantes con una poderosa herramienta conceptual para entrar en el mercado laboral y los armen con las habilidades racionales, instrumentales, abstractas y orientadas al cálculo para participar en las actividades económicas consumistas requeridas por el mercado neoliberal. Por lo tanto, lo que los estudiantes están aprendiendo no es solo matemáticas. Lo que están aprendiendo es a pensar de acuerdo con una forma definida

de racionalidad cultural cuyas políticas y excesos tendrán que ser abordados, estudiados y denunciados (Radford, 2018c, 2020e).

Si volvemos a los ejemplos del aula, estos muestran que el encuentro de los saberes culturales se llevó a cabo mediante una compleja organización de la interacción. Dicha organización pretende que los estudiantes encuentren otras voces, adopten una postura crítica en los debates y se posicionen así en la práctica matemática del aula.

Naturalmente, el aprendizaje es un proceso inacabable. Siempre existirá la posibilidad de ir más allá, tanto en el saber como en el llegar a ser. En nuestro ejemplo, la incógnita algebraica estaba representada por el número de objetos de un recipiente (un sobre). El número de objetos en cada sobre debe ser siempre el mismo (de lo contrario, la lección acabaría tratando varias incógnitas al mismo tiempo). Sin embargo, este punto no fue objeto de tematización teórica durante la discusión. El profesor tendrá que volver a tratar este punto más adelante para que los estudiantes tomen conciencia de este elemento esencial en el tratamiento de las ecuaciones. Asimismo, el profesor y los estudiantes deberán volver a tratar la cuestión de la responsabilidad. Hemos visto que, cuando el equipo A presenta su crítica sobre la falta de un signo igual en la ecuación del equipo B, Christine, en la línea 11, intenta eximirse de la responsabilidad ante la crítica; dice: “¡Fue idea de Elisa y Sara!”. Los estudiantes tienen que darse cuenta de que no pertenecen a un equipo solo cuando las cosas van bien.

En cualquier caso, los ejemplos de aula muestran una compleja organización didáctica que buscaba ofrecer condiciones de posibilidad para que los estudiantes y la profesora produjeran colectivamente el saber y se comprometieran con formas humanas de colaboración más allá de las formas egocéntricas del aprendizaje individualista y transmisivo. Dentro de esta compleja organización didáctica, se forjó un espacio agéntico en el que los estudiantes y la profesora se coposicionaron en el curso de un proceso de subjetivación. En este proceso, la profesora y los estudiantes aceptaron salir de su propio nicho seguro para ir hacia lo imprevisible. El filósofo hegeliano John Russon ve un elemento artístico en este acto en el que nos lanzamos más allá de los límites de nuestra comodidad cotidiana. Artístico, porque este acto es un acto de “construcción de un hogar”; es decir, por medio de este acto forjamos nuestro lugar en el mundo: “Solamente tomando riesgos —al exponernos más allá de los cómodos términos de la vida familiar y [entrar] en una realidad ajena, desconocida y

atrayente— *crecemos* y llegamos a habitar un hogar más profundo, más rico y más sustancial” (Russon, 2017, p. 39, énfasis en el original).

Agradecimiento

Parte de este capítulo se basa en Radford, L. (2018). Semiosis y subjetivación: La constitución en el aula de los sujetos matemáticos. En N. Presmeg, L. Radford, M. Roth y G. Kadunz (Eds.), *Signos de significación. Semiotics in mathematics education research* (pp. 21-35). Cham, Suiza: Springer. Utilizado con el permiso del titular de los derechos de autor.

Capítulo 10

Ética

Lo que nos hace únicos no son nuestras cualidades personales (las formas en que podemos elevarnos por encima de las definiciones de otras personas sobre nosotros), sino precisamente las cualidades de nuestras sujeciones. ... Es fuera del yo donde tenemos que buscar las condiciones de la agencia, la responsabilidad y la subjetividad ética.

Nealon (1997, pp. 145-146)

Los primeros capítulos de este libro ofrecieron una visión general de la teoría de la objetivación y su lugar en el panorama de las teorías socioculturales contemporáneas. A medida que pasamos de un capítulo a otro, los conceptos introducidos al principio —conceptos que aparecieron primero de manera general— fueron analizados y presentados con más detalle. En la terminología del materialismo dialéctico, nuestro viaje ha sido un ascenso de lo abstracto a lo concreto. En el curso de este ascenso, los diversos conceptos fueron adquiriendo progresivamente determinaciones específicas que mostraban, a medida que avanzábamos, un contenido más definido, así como las interconexiones y los significados entrelazados de los conceptos. En este último capítulo, hablo de algo que siempre ha estado ahí, desde el principio del capítulo 1, pero que fue surgiendo poco a poco en los capítulos anteriores y que sale a la luz al final: la cuestión de la ética.

En la primera sección de este capítulo, sostengo que cualquier enfoque o modelo de enseñanza-aprendizaje se apoya en una cierta ética. En otras palabras, la ética es un elemento omnipresente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. A modo de ejemplo, hablo de la ética que sustenta la enseñanza por transmisión de saberes y el constructivismo. A continuación, para preparar el terreno para la discusión de la ética en la teoría de la objetivación, exploro someramente tres sistemas éticos: los de Kant, Hobbes y Lévinas. Intento mostrar que estos sistemas fundamentales del pensamiento ético occidental no tienen en cuenta las relaciones constitutivas de mediación cultural-histórica-política que impregnan nuestras relaciones con los demás. Sostengo que una ética orientada hacia un sentido pluralista de la colectividad, la inclusión y el bien común no puede concebirse como un mero encuentro del Yo y el Otro. Debería considerarse más bien como una fuerza liberadora que puede ayudarnos a enfrentarnos a las fuentes y estructuras históricas, políticas y económicas de la opresión, la violencia y la desigualdad. Esta ética —concebida como una ética de la liberación— debería estar en el centro de la educación. Sin embargo, la concepción de la escuela contemporánea como un apéndice de la economía política reduce el alcance de la ética a procesos de naturaleza instrumental y utilitaria. Estamos inmersos en una “ideología fatalista que, adoptando un enfoque despótico de la educación, la reduce a un mero entrenamiento en el empleo de la destreza técnica o del saber científico” (Freire, 2004, p. 102). Lamentablemente, nuestros planteamientos de enseñanza-aprendizaje se orientan hacia la práctica de la alienación y no hacia la práctica de la liberación. El resto del capítulo es un esbozo de la ética de la teoría de la objetivación, lo que llamamos una ética comunitaria que, al resaltar el trabajo colectivo conjunto de profesores y estudiantes, busca ofrecer puntos de referencia hacia la renovación e imaginación de nuevas formas de relacionarse con los demás y trabajar con los demás.

1. La ineludible presencia de la ética en el aula de matemáticas

Al ver de cerca las actividades de enseñanza-aprendizaje en el aula, nos damos cuenta de que, independientemente de los modelos pedagógicos que las sustentan, dichas actividades se basan en dos ejes interrelacionados:

1. el eje de las formas de producción de saber, y
2. el eje de las formas de colaboración humana⁵⁸

El primer eje se refiere a cómo se produce y circula el saber en el aula. Incluye los supuestos sobre la naturaleza del saber y cómo se validan y refutan las verdades sobre el saber (por ejemplo, las formas de indagación y comprobación). También incluye cuestiones sobre quién produce el saber.

El segundo eje incluye los tipos de interacción con los demás, los modos en que nos relacionamos con los demás, y pone en primer plano las cuestiones de responsabilidad, poder y autonomía⁵⁹.

Esta composición básica de las actividades de enseñanza y aprendizaje nos ayuda a entender por qué cualquier modelo pedagógico y cualquier enfoque de la enseñanza y el aprendizaje se apoya en una determinada ética.

En primer lugar, el aprendizaje, al implicar la interacción entre personas (primer eje), ya sea de forma sincrónica o diacrónica, en formatos presenciales o virtuales (digitales), se basa inevitablemente en relaciones con los demás (relaciones de poder y sujeción; relaciones de solidaridad y emancipación, etc.).

En segundo lugar, pero no menos importante, el aprendizaje siempre implica puntos de vista conflictivos sobre lo que cuenta e importa en el aprendizaje; implica por consiguiente la legitimación de formas particulares de conocimiento y saber.

La *ética*, entendida como aquello que enmarca y orienta nuestras relaciones con los demás, está presente en estos dos puntos. Tal vez lo sorprendente de la afirmación que estoy haciendo no es que la ética esté omnipresente en la enseñanza y el aprendizaje, sino el hecho de que, salvo algunas excepciones (por ejemplo, Atweh, 2014; Atweh y Brady, 2009; Boylan, 2016; Dubbs, 2020; Ernest, 2009; Maheux y Proulx, 2017; Maheux y Roth, 2014; Roth, 2013; Silva D'Ambrosio y Espasandin Lopes,

58 Utilizo el término *forma* (*Gestalt*) en su sentido de materialismo dialéctico: igual que hay formas de propiedad y formas de sociedad, hay formas de interacción humana y formas de indagación de la realidad. Las *formas* son las propias expresiones del trasfondo social, cultural e histórico que las enmarcan; son las que se materializan en las relaciones entre los sujetos y se evidencian en la inmediatez y la banalidad de la vida cotidiana.

59 Los elementos de estos ejes están relacionados con lo que en el capítulo 9 se denominó *sistemas semióticos de significación cultural* (sssc).

2015; Walshaw, 2013), no hayamos podido advertir antes esa presencia —o al menos no con la importancia que merece—. Las raíces de ese olvido u omisión están arraigadas, sugiero, en la antigua concepción de la educación como un acto técnico (más crudamente visible en el caso de la educación matemática), una concepción que reduce la educación a una cuestión de saber —adquisición del *saber*— que eclipsa al mismo tiempo la dimensión del Ser. Pero una vez superada esta visión restrictiva de la educación (matemática, científica, artística, etc.), la ética no solo aparece como un elemento siempre presente en la enseñanza y el aprendizaje, sino que se convierte en algo esencial para tener en cuenta. Por un lado, el carácter ético de la interacción en el aula y la legitimación del saber están asociados dialécticamente a la forma en que profesores y estudiantes entienden su compromiso y sus responsabilidades en el aula de matemáticas y se ven a sí mismos como practicantes de la matemática escolar.

Analicemos el modelo de transmisión de saberes (la educación bancaria de la que hablaba Freire) y tratemos de encontrar la ética que la sustenta. El profesor elige algunos problemas y muestra a los estudiantes cómo resolverlos. A continuación, los estudiantes repiten los procedimientos de resolución de problemas mostrados por el profesor. La elección de los problemas, la demostración de cómo resolverlos, la imitación del procedimiento de resolución de problemas del profesor y, finalmente, el debate en el aula forman parte de las formas de producción y circulación del saber en el aula. ¿Cuáles son las formas de colaboración humana de este modelo pedagógico? Esas formas se configuran en torno al reconocimiento del profesor como autoridad y al sometimiento de los estudiantes a la autoridad del profesor. Lo que encontramos en este modelo pedagógico es la ética de la obediencia, la sumisión del estudiante al profesor, y el poder y la autoridad del profesor sobre el estudiante. Esta ética viene a modular las relaciones sociales que vemos en las aulas de enseñanza de transmisión de saberes.

Si ahora dirigimos nuestra mirada al constructivismo, lo que encontramos es la ética de la autonomía del estudiante, de su libertad, de su derecho a construir su propio saber. Es esta ética la que modula las relaciones sociales entre la estudiante de primer grado, Melissa, y su profesor, de quienes hablamos en el capítulo 9. El lector recordará que el profesor se abstuvo de hacer preguntas a Melissa sobre cómo restar números. No quería influir en Melissa con sus propias ideas. Al dejar de preguntar, el

profesor sigue la ética constructivista que orienta su relación con la estudiante y enmarca su comprensión de la situación que se desarrolla⁶⁰.

Lo que está en juego en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva ética es la cuestión de la naturaleza de las relaciones humanas y sus conductas. Por supuesto, este es un problema que ha mantenido ocupados a los filósofos desde Aristóteles. Una de las cuestiones que los filósofos han discutido ampliamente, y en particular recientemente (Bauman, 1993; Critchney, 1999; MacIntyre, 2007), es si las relaciones y la conducta humanas pueden/deben enmarcarse en términos de principios generales sobre nuestros deberes y obligaciones; es decir, si la ética puede entenderse como *deontología*. En el marco del posmodernismo y su escepticismo sobre las grandes narrativas, la ética ha pasado a considerarse más contextual y subjetiva.

Antes de ofrecer una visión general de la ética, tal y como se concibe en la teoría de la objetivación, en los siguientes apartados comento tres enfoques éticos, con el fin de entender mejor las concepciones éticas que hemos heredado y comprender la manera en que plantean su problemática. Trataré brevemente la ética en Kant, Hobbes y Lévinas.

2. Kant

Kant fue capaz de formular una deontología de la acción humana. Pero, para ello, tuvo que hacer suposiciones que tuvieron un alto precio. En efecto, en primer lugar, tuvo que suponer que los individuos están dotados por naturaleza de la misma razón (la misma en cualquier parte del mundo); en segundo lugar, que la razón de los individuos es de naturaleza legislativa; es decir, que se mueve en un mundo de leyes que pueden definir el orden social. Por ello, Kant no necesita basar su ética en algo externo al sujeto, como la voluntad de Dios o las revelaciones de Dios. A partir de esos supuestos, Kant puede formular su famoso *imperativo categórico*. El imperativo categórico no es un principio instrumental, es decir, algo que podamos utilizar para alcanzar un fin. Por el contrario, es un principio que se enuncia

60 En una visita a Chile hace unos años, me contaron la historia de un profesor constructivista que deseaba desesperadamente ayudar a un estudiante ofreciéndole pistas sobre cómo resolver un problema matemático. Pero a pesar de su urgente deseo de hacerlo, se contuvo con muchas dificultades y mucho orgullo. Él actuó éticamente.

en primera persona. Se refiere a una acción independiente de la finalidad que pueda tener la acción concreta. El imperativo categórico responde a la pregunta “¿Qué debo hacer?” y plantea la acción concreta de un sujeto en términos de las posibles acciones que podría realizar cualquier individuo. Kant enuncia el imperativo categórico de la siguiente manera: “*actúa solo de acuerdo con aquella máxima por la que puedas al mismo tiempo querer que se convierta en una ley universal*” (Kant, 2006, p. 31, énfasis en el original). Como explica Arendt,

La cuestión es muy sencilla. En palabras de Kant: puedo querer decir una mentira particular, pero “no puedo de ninguna manera querer que la mentira sea la ley universal. Porque con tal ley toda promesa carecería de sentido”. O bien: “puedo querer robar, pero no puedo querer que el robo sea una ley universal; porque, con una ley así, no habría propiedad”. (Arendt, 1992, p. 17)

El imperativo categórico es un singular hecho universal; encierra el individualismo de su tiempo. MacIntyre (1966) dice: “El individualista del siglo XVIII ve el bien como la expresión de sus sentimientos o el mandato de su razón individual porque escribe como desde fuera del marco social. La sociedad le parece un agregado de individuos” (p. 209). El imperativo categórico es un intento “por parte del individuo de suministrar su propia moral y, al mismo tiempo, reclamar para ella una auténtica universalidad” (p. 208). De hecho, el imperativo categórico hace que la alteridad aparezca como un reflejo del yo en un espejo por medio del cual el yo puede ver cómo la acción del otro podría afectarle a él mismo. Uno de sus problemas es que posiciona la acción del sujeto de tal manera que lo exime de cualquier cuestionamiento sobre las posibles formas de violencia que dicha acción puede producir en la marginación de los grupos sociales y su opresión.

La formulación de la moral en términos de leyes universales le permite a Kant intentar resolver dos problemas a la vez: el problema del poder y el de la libertad. Con respecto al poder, ¿qué poder tengo para enunciar el imperativo categórico? ¿Cómo no imponer mi visión del mundo a los demás por medio de este imperativo? La autoridad de mi imperativo solo puede justificarse si se parte de la base de que no procede de mi propia elección, sino de la forma en que ese imperativo conviene a cada individuo, ya que cada individuo comparte conmigo la misma razón.

En cuanto a la libertad, ¿hasta qué punto podemos pretender ser libres si nuestras acciones están sujetas a imperativos categóricos? Para Kant, la

libertad y la emancipación del individuo residen precisamente en el uso de aquello que lo hace salir de las tinieblas del feudalismo: su uso de la razón; no de cualquier razón, sino de la razón que Kant consideraba universal, y que dignifica al individuo y lo eleva del mundo oscurantista y de los caprichos de la infancia a la cultura (véase el capítulo 9). Es el uso de esta razón que abarca el imperativo categórico el que hace que la voluntad individual sea libre de toda inclinación y buena en sí misma. “Sitúa a los individuos como agentes que actúan libremente y están limitados por valores universales y globales” (Popkewitz, 2009, p. 252). Así, la sujeción a la ley moral aparece en Kant como la afirmación de la racionalidad, de nuestra libertad y autonomía. Como señala Nodari (2010), en Kant:

Para que la voluntad sea autónoma, la fuerza de la autonomía no debe provenir de una fuente externa ajena al propio sujeto, sino solo de la propia razón. En otras palabras, la autonomía de la voluntad significa solo la capacidad del ser humano de darse a sí mismo la ley moral como valor universal. Solo una voluntad legisladora universal, es decir, una voluntad autónoma, es capaz, al mismo tiempo, de darse a sí misma la ley, y también de entenderse a sí misma, y de reconocerse como obediente a la ley, porque solo el ser racional es capaz de autolegislarse; es decir, capaz de ser autónomo. (pp. 61-62)

Al suponer una razón universal, razonable en sí misma, Kant puede resolver el problema de la tensión entre el individuo y el mundo social y la tensión de la acción humana en ese mundo. Sin embargo, el peso teórico de la suposición de Kant es tan grande que termina por hundir su proyecto ético. Los antropólogos han mostrado infatigablemente la invalidez de una supuesta razón universal. Sin embargo, este supuesto imposible de Kant le permite (en apariencia) resolver el problema de la ética contractual de Thomas Hobbes articulada un siglo antes: una ética que, contraria a la de Kant, gira en torno a las aspiraciones e inclinaciones de los individuos.

3. Hobbes

En Hobbes, de hecho, la ética gira en torno a la gama de motivos humanos fundamentales. En *Rudimentos filosóficos sobre el gobierno y la sociedad*, esos motivos humanos fundamentales se reducen en última instancia al deseo de los individuos de dominar y “por el deseo de preservarse a sí mismos y

por el miedo mutuo” (Hobbes, 1841, p. 70). La ética en Hobbes aparece como un acuerdo o contrato que sanciona el comportamiento entre los sujetos para evitar la agresión entre ellos. Hobbes dice:

las disposiciones de los hombres [*sic*] son naturalmente tales, que a menos que sean restringidas por medio del temor de algún poder coercitivo, cada hombre desconfiará y se temerá entre sí ... así por necesidad se verá forzado a hacer uso de la fuerza que tiene, para la preservación de sí mismo. (pp. xiv-xv)

Continúa diciendo que

el estado de los hombres [*sic*] sin sociedad civil, cuyo estado podemos llamar propiamente estado de naturaleza, no es otra cosa que una mera guerra de todos contra todos; y en esa guerra todos los hombres tienen igual derecho a todas las cosas ... todos los hombres, tan pronto como llegan a comprender esta odiosa condición, desean, incluso la propia naturaleza les obliga, liberarse de esta miseria. (p. xvii)

Con Hobbes, llegamos a una concepción de la sociedad civil como una sociedad formada por individuos monádicos formalmente vinculados por contratos que garantizan contrarrestar las disposiciones naturales de ataques y agresiones de unos contra otros. En su comentario a la ética de Hobbes, MacIntyre (1966) señala que los acuerdos o pactos que buscan garantizar la seguridad entre los individuos conducen a un contrato social que viene a regular las fuerzas y poderes de cada uno: “Para dar a los pactos el respaldo de una espada tiene que haber un contrato inicial por el que los hombres transfieren su poder a un poder común que se convierte en soberano entre ellos” (p. 133). Estos “contratos”, que impregnan todas las esferas de la vida social, no son necesariamente explícitos. Sin embargo, llevan el sello de las expectativas de cada uno para mantener el orden social, y tratan de dejar espacio para cumplir, en la medida de lo posible, las aspiraciones personales y salvaguardar la seguridad de los demás. Desde el punto de vista histórico, es Brousseau (1978, 1988) en el ámbito de la Educación Matemática, me parece, el primero en haber notado la presencia ubicua de esos contratos en las aulas de matemáticas. Aparecen como contratos didácticos, como los llama Brousseau acertadamente. Reflejan una concepción subyacente del aula como un conjunto contractual de individuos hobbesianos.

4. La ética de Lévinas

En esta sección, vamos a dar un vistazo a uno de los sistemas éticos más poderosos contemporáneos que, como veremos, parte de premisas completamente diferentes de las de Kant y Hobbes.

4.1. La ética como responsabilidad

Lévinas⁶¹ parte del reconocimiento de que todos los sistemas éticos occidentales se configuran en torno a la idea del yo. En esos sistemas el yo es tanto una consciencia constituida como una entidad constituyente que, ya establecida, entra en relación con los demás. Desde este punto de vista, la ética es un término que conecta dos polos —el yo y el Otro— de forma más o menos conveniente (como en Kant y Hobbes). Y lo que es más importante, el tejido mismo del término de conexión es el saber. Por ejemplo, sin recurrir al saber, el imperativo categórico de Kant no puede ser enunciado. Lo mismo ocurre con el término contractual que vincula el yo y el Otro en el sistema de Hobbes. Lévinas toma un camino diferente.

En primer lugar, retira al yo del lugar privilegiado con el que ha sido dotado tradicionalmente y desde el que se ha concebido como consciencia constitutiva y principio de la relación ética. En la aproximación ética de Lévinas, no es a partir del yo y de sus actos que aparece la ética. Despojado de su imperialismo, el yo aparece concebido como el resultado de una relación ética.

En segundo lugar, el tejido mismo de la relación ética no es el saber; es una presencia, la presencia del Otro que no llega a la existencia por medio de las cogitaciones de la mente. La presencia del Otro llega a nosotros de manera sensible: por medio de la proximidad del cuerpo, por medio del tacto —el contacto físico de piel con piel o el contacto a distancia con los ojos—.

Para entender la ética de Lévinas hay que tener en cuenta que, para él, la experiencia original del ser es el encuentro humano y la idea de que el ser humano encuentra el mayor sentido de la vida en sus relaciones con otros seres humanos (Nodari, 2010). Más que una amenaza, más que

61 En general, utilizaré Lévinas (con “é”). Sin embargo, también utilizaré Levinas (con “e”, dependiendo de la ortografía de la fuente citada).

oponerse a nosotros, el Otro es nuestra liberación. El Otro es la única posibilidad que tenemos de superar nuestras tendencias narcisistas y nuestro nicho solipsista. Como la ética de Lévinas parte de un ego descentrado, su ética no es de reciprocidad. Es una ética asimétrica en la que vivimos en la constante negativa de asimilar al Otro. “Lo que cuenta aquí”, dice Lévinas (1978), “es el rechazo a amansar o domesticar [al Otro] mediante un tema” (p. 158); es decir, mediante la imposición de mis propias categorías conceptuales y percepciones. La ética que propone Lévinas es una ética de la generosidad en la que el Otro, con su simple presencia, nos ofrece el extraordinario don de poder dar. Ser es *ser-para*: un ente volcado hacia el Otro en una relación heterogénea que, en el ámbito social de la vida cotidiana, se manifiesta como una apertura. En este contexto, “la presencia del Otro es el sentido mismo de nuestra existencia” (Noradi, 2010, p. 172).

Lévinas no entiende nuestra subjetividad como algo que emana del yo. La subjetividad es exterioridad. Para él, la subjetividad se basa en la hospitalidad, en la acogida, en la recepción del Otro. “La verdad, ahora, ya no es la adaptación del objeto a la consciencia del yo pensante, sino que es la recepción del otro” (p. 177). Al encontrar y recibir al Otro, nos quitamos la armadura y aparecemos en una “desnudez” que nos expone hasta derramarnos (Lévinas, 1978, p. 116). Nos exponemos y aparecemos en nuestra vulnerabilidad. En el encuentro con el Otro lo abrazamos con responsabilidad desinteresada.

Para Lévinas, la ética no es una ética de la responsabilidad. La ética se entiende como responsabilidad. En su libro *Éthique et infini (Ética e infinito)*, Lévinas (1982) señala que la responsabilidad es “la estructura esencial, primaria y fundamental de la subjetividad ... Es en la ética, entendida como responsabilidad, donde se anuda el nodo mismo de lo subjetivo” (p. 91). Continúa diciendo que “la responsabilidad no es, de hecho, un simple atributo de la subjetividad, como si esta ya existiera en sí misma, antes de la relación ética. La subjetividad no es para sí misma; es, una vez más, inicialmente para el otro” (pp. 92-93).

4.2. La carne

La ética de Lévinas se basa en la idea de la carne (*la chair, the flesh*), pero en oposición a otros sistemas filosóficos en los que la carne y la corporalidad permanecen tematizadas dentro de los límites de la cognición y la consciencia, Lévinas ofrece una aproximación en la que la carne y la

corporalidad del individuo en general son partes activas de nuestro encuentro con el Otro.

Lévinas procede a un original análisis fenomenológico del cuerpo. El cuerpo no es ni el origen ni el resultado de la consciencia, por lo que se aparta tanto del empirismo como del idealismo. En *Autrement qu'être (De otro modo que ser)* (Lévinas, 1978), insiste en que “una idea no es una simple sublimación de lo sensible” (p. 102). El cuerpo aparece como un cuerpo-sensibilidad planteado, por así decirlo, en una posición límite. En efecto, la materialidad del cuerpo impulsa al yo hacia una exterioridad radical, el Otro. Pues en la afección carnal el yo llega a experimentar al Otro. La experiencia afectiva a-teórica del yo con el Otro, su exposición, es al mismo tiempo la revelación de su vulnerabilidad, que ocurre por medio de la sensibilidad.

Ahora bien, en contra de la fenomenología clásica, Lévinas sostiene que la sensibilidad no es intuición o receptividad: es contacto, el contacto entre el yo y el Otro. “La sensibilidad no es una caja vacía en la que se alojan las percepciones; su sentido original está más bien entretejido en una subjetividad sensiblemente vivida. Esta sensibilidad corporal es la posibilidad de la no indiferencia”, la posibilidad de la ética, el sentir “del dolor, la enfermedad y la fatiga por el otro” (Farías Gutiérrez, en prensa).

Levinas (2006) sostiene que

Es porque la subjetividad es sensibilidad —una exposición a los otros, una vulnerabilidad y una responsabilidad en la proximidad de los otros (el-uno-para-el-otro)— ... y porque la materia es el lugar mismo del para-el-otro ... que un sujeto es de carne y hueso, que tiene hambre y come, [que es] entrañas en una piel y, por lo tanto, capaz de dar el pan de su boca, o de dar su piel. (p. 77)

Como vemos, en el análisis ético de Lévinas, y en contra de todas las descripciones fenomenológicas estándar del cuerpo, somos humanos de carne y hueso como resultado de nuestra subjetividad sensible, porque somos portadores antes que nada de una disposición a la alteridad. De ahí que sean nuestra vulnerabilidad y responsabilidad —esos rasgos éticos anteriores a la consciencia y la cognición— los que nos hacen capaces de dar el pan de nuestra boca o de dar nuestra piel. Como señala Novotný (2016):

Tener un cuerpo, ser un cuerpo, estar en algún lugar, todo esto solo es posible como consecuencia de la vulnerabilidad, que ciertamente

concierno a los cuerpos físicos y a sus necesidades biológicas, pero que no proviene de la vida misma, ni del *conatus essendi* [la voluntad de persistir en el ser], sino del acontecimiento de la exposición al otro ... [es decir,] de la relación ética. (p. 127)

En Lévinas, “el sujeto ético es un sujeto sensible y no un ego consciente” (Critchney, 1999, p. 188). La insistencia de Lévinas en la imposibilidad de aprehender conceptualmente al Otro, en que nuestra experiencia del Otro es “el exceso de Ser sobre el pensamiento que quiere contenerlo” (Farías Gutierrez, en prensa), en que la experiencia carnal del Otro no es una experiencia cognitiva, conduce a una interesante visión del lenguaje de la ética: a una especie de paradoja.

La paradoja aquí es que lo que este lenguaje ético busca tematizar es por definición intemmatizable, es una concepción del sujeto constituida en una relación con la alteridad irreductible a la ontología, es decir, irreductible a la tematización o conceptualidad. (Critchney, 1999, p. 184)

En este lenguaje ético, hay que intentar decir lo que no se puede decir. Para Lévinas, este lenguaje se mueve dentro de una esfera de significación que es del orden de lo sensible —una que no se vuelve hacia el mundo de las idealidades— es decir, del saber. Es un orden que se describe en términos de proximidad, en el que la proximidad es la significación de lo sensible que “no pertenece al movimiento de la cognición” (Levinas, 2006, p. 61). Este nuevo reino de la significación es el que le llevó a distinguir entre *lo dicho* y *el decir* (*le Dit* y *le Dire*).

4.3. Lo dicho y el decir

La distinción entre lo dicho y el decir es el esfuerzo de Lévinas por explorar un ámbito semiótico en el que la significación va más allá de los recintos de la cognición. Para ello, busca un “lenguaje” que no permanezca encerrado en sí mismo, vagando implacablemente dentro de sus propios límites, nombrando, fijando y cosificando las cosas, como hace el lenguaje de la cognición. El lenguaje de la cognición es lo dicho. “Lo dicho representa el movimiento en el que solo hay sentido cuando se apoya en el sistema lingüístico o en el juego ontológico que lo expresa” (Cozza Sayão, 2011, p. 117). El lenguaje de lo dicho

Puede ... concebirse como un sistema de sustantivos que identifican entidades, y luego como un sistema de signos ... que designan sustancias, eventos y relaciones por medio de sustantivos u otras partes del discurso derivadas de los sustantivos, que designan identidades —en suma, *que designan*—. (Levinas, 2006, p. 40, énfasis en el original)

Ahora, Lévinas busca algo muy diferente: un lenguaje ético, un lenguaje en el que el sentimiento y la vida pasen a primer plano, ya no subyugados y atados al acto de entender. Quiere desvelar un ámbito de significación más fundamental que actúa sutilmente en nuestro compromiso con los demás. Como dice Cozza Sayão,

Lévinas especula sobre la posibilidad de otro contexto de *significación*. Un contexto de significación alternativo a la vida humana en el que ... es posible pensar la significación como una *aproximación* al mundo y a las personas, como una apertura inmediata. La idea es pensar más allá de las reglas de la tradición griega. (Cozza Sayão, 2011, p. 109, énfasis en el original)

El decir es la respuesta de Lévinas a este enigma. La expresividad del decir y cómo se expresa (es decir, su materialidad semiótica) no puede encontrarse en la palabra lingüística, en el diagrama, en el signo, sino en otra parte. El decir funciona de una manera diferente a la de lo dicho —aunque, como veremos, no es completamente independiente de lo dicho—.

Para explicar las diferencias entre lo dicho y el decir, Lévinas recurre a dos términos: *tematización* y *exposición*. En la tematización, nos situamos en un sistema conceptual. Decimos cosas, las tematizamos según unas categorías conceptuales. Nos movemos aquí dentro del mundo de la cognición.

Sin embargo, señala Levinas (2006), hay también otro lenguaje que no nombra y renombra, y refiere las cosas (entes) a otras cosas de manera incansable; hay también un lenguaje que expone la “resonancia silenciosa” de los seres y las cosas (p. 40). Este es el lenguaje del decir, en el que significamos para el Otro; significamos nuestra proximidad, acercamiento, exposición. Esta exposición tiene un sentido radicalmente diferente al de la tematización. “El *uno* se expone al *otro* como una piel se expone a lo que la hiere” (Lévinas, 1978, p. 83, énfasis en el original). En esta exposición, “la existencia espiritual humana puede afirmarse como sensibilidad y vulnerabilidad de la carne” (Cozza Sayão, 2011, p. 116).

La exposición significada en el decir es una comunicación entre el uno y el otro, pero no debe verse como un intercambio de ideas. La comunicación en el decir es una comunicación sensible entre los seres, una manifestación de solidaridad en la presencia de los seres: “El decir es comunicación, sin duda, pero como condición de toda comunicación, como exposición. La comunicación no es reducible al fenómeno de la verdad y a la manifestación de la verdad” (Levinas, 2006, p. 48). Por lo tanto,

Lo que se produce en el Decir es un acercamiento: me acerco al Otro. Un acercamiento y exposición al Otro ... en un lenguaje que no tematiza, que no hace ruido, que no tiene tiempo para la elucubración teórica, pues la relación que allí se da es solo de sensibilidad ética. (Farrías Gutiérrez, en prensa)

En definitiva, “Decir es acercarse al prójimo” (Levinas, 2006, p. 48), en un lenguaje (el lenguaje del decir, el lenguaje de la ética) que precede y supera siempre al lenguaje de lo dicho (el lenguaje de lo conceptual).

La idea de que las significaciones del decir ocurren antes y más allá de las significaciones lógico-temáticas de lo dicho no equivale a negar una relación entre ambas. Lo que se expresa en lo dicho recibe, retoma y hace eco de lo que se quiere manifestar en el decir, pero este último no es simplemente sustituido por el primero. Levinas (2006) habla de *absorción*.

Al absorber al decir, lo dicho no se convierte en su dueño, aunque por un abuso del lenguaje lo traduce ante nosotros y lo traiciona. El desentrañamiento de la trama del Decir no pertenece al lenguaje como dicho, no pertenece a la última palabra. El Decir significa sin detenerse en lo Dicho. (p. 190)

En las palabras de lo dicho reverberan las significaciones del decir. Las cosas, sus seres (esencias) no son simples traducciones en el decir. El decir no agota el Ser; lo que podemos expresar en el lenguaje de lo dicho es solo una de las modalidades del Ser. La razón es que hay un reino del Ser que el lenguaje y la cognición no son capaces de captar y significar plenamente.

Refiriéndose a las palabras que pronunciamos en el lenguaje de lo dicho, Cozza Sayão (2011) señala que

Siempre hay algo que va más allá y trasciende las palabras, dejando fuera lo que se balbucea. Es como si todo lo que se dice sobre el amor fuera todavía insuficiente y demasiado pequeño para soportarlo. Por

eso la poesía apenas se atreve a tocarlo, por eso el arte nunca pretende representarlo. (p. 118)

En el lenguaje de lo dicho hay una inscripción, un signo o un sonido que, al aparecer, al resonar, trata de fijar la “esencia” o el Ser de las cosas. En el lenguaje del decir no hay inscripción que se vea ni sonido que se oiga; lo que hay es la vibración o resonancia del Ser.

En lo dicho, la esencia que resuena está a punto de convertirse en nombre. “En la cópula *es* centellea o brilla una ambigüedad entre la esencia y la relación nominalizada” (Levinas, 2006, pp. 41-42). El lenguaje de lo dicho es siempre inadecuado frente al Ser. En cuanto pronunciamos una palabra, en cuanto hacemos un gesto para señalar algo, la esencia que la palabra o el gesto (¡o ambos!) debían revelar se escapa, como el agua entre los dedos.

5. La tarea indispensable de la Educación (Matemática)

Como hemos visto en el apartado anterior, Lévinas intenta repensar la ética desde una perspectiva que va en contra de la legendaria posición egocéntrica y logocéntrica de la relación sujeto-objeto del pensamiento occidental. Se dirige con ojos penetrantes y acusadores a lo que ha sido el centro de esta tradición intelectual desde la antigüedad: el saber y la razón. En este sentido, Lévinas se suma a la línea de pensadores posmodernos desencantados “con el reino de la razón” (Min, 1998, p. 577). Se distingue de estos pensadores desencantados por el esfuerzo que realiza para descentrar al sujeto y (siguiendo los pasos de Buber, 1958) por el énfasis que pone en la relación sujeto-sujeto. Su obra es ciertamente audaz y atrevida. Surge como un grito que sale de los subsuelos más profundos de nuestros hábitos de pensamiento adquiridos para reivindicar el valor de la dignidad humana.

La protesta de Levinas es, sin duda, una de las más radicales contra la destrucción de la dignidad humana jamás montada por un filósofo. Su protesta se basa en una crítica rigurosa de las raíces mismas de dicha destrucción, el logocentrismo o la prioridad de la razón, la lógica, la idea, el concepto y las categorías de inmanencia que impregnan la tradición filosófica occidental. (Min, 1998, p. 572)

Lévinas se esfuerza por extraer del olvido una dimensión que va más allá del Ser tal y como lo conceptualiza la ontología occidental. Se esfuerza por mostrar la existencia de un reino donde el Ser significa otra cosa: lo que significa el Ser en un lenguaje que no hace ruido es nuestra relación central con el Otro. En el nuevo reino de la significación, el lenguaje no opera de la manera técnica y epistemológica que encontramos en la obra de Platón y Aristóteles, Étienne Bonnot de Condillac en el siglo XVIII o Edmund Husserl en el siglo XX. Lévinas revela un sustrato de significación que actúa, tácitamente, en nuestro encuentro y proximidad del Otro. En esta proximidad, nuestras categorías y mecanismos epistemológicos conceptuales quedan en suspenso y nos encontramos con el Otro como es. “El Otro es apreciado precisamente *como* Otro, en su alteridad radical y singularidad irreductible, solo cuando el pensamiento renuncia a su arrogancia totalitaria y aprende a pensar en el Otro en sus propios términos ... ‘más allá de la esencia’” (Min, 1998, pp. 573-574, énfasis en el original).

Sin embargo, el Otro que encontramos en su presencia angélica ha sido despojado de su naturaleza social, política y cultural constitutiva. Es un Otro que, con su presencia, nos cubre con la luz de su epifanía. Nos encontramos con el Otro de forma no mediada; nos encontramos con el Otro directamente, un encuentro sublime de dos almas. El conjunto de las relaciones constitutivas histórico-culturales mediadoras se desvanece en el aire y acabamos encontrando al Otro como una abstracción histórica. “El Otro de Levinas es ‘concreto’ solo en el sentido fenomenológico de la inmediatez vivida del encuentro cara a cara” (p. 580).

Levinas encuentra un correctivo a este egocentrismo en la subjetividad heterocéntrica, el ego cuestionado y desafiado por la pretensión irreductiblemente trascendente del Otro. El centro ético se ha desplazado del ego al Otro. Sin embargo, la metafísica ética de Levinas sigue siendo una filosofía del sujeto esencialmente cartesiana, aunque con un contenido ético diferente. Sigue siendo una filosofía del sujeto como individuo, sin mediación socio-histórica intrínseca. ... El subjetivismo individualista de la filosofía moderna solo se niega de forma abstracta. ... La metafísica de Levinas sigue infectada por un subjetivismo que no logra superar completamente. (p. 584)

Un verdadero encuentro con el Otro, diría yo, no puede lograrse sin tener en cuenta nuestras condiciones terrenales. Nuestro encuentro con el Otro debe producirse en el corazón mismo de esas condiciones, en

nuestros contextos mundanos y cotidianos, en la vida concreta y material en la que, por desgracia, la gente oprime, margina, discrimina y controla al Otro. La ética no debe ser un mero encuentro entre el yo y el Otro, sino una fuerza liberadora que nos ayude a enfrentarnos a las fuentes y estructuras históricas, políticas y económicas de la opresión, la violencia y la desigualdad. Por eso prefiero pensar en la ética como liberación.

En una ética de este tipo tenemos que poner en primer plano un sentido pluralista de la colectividad y discutir juntos lo que podría ser un bien común. Una ética de la liberación “implica *denunciar* cómo estamos viviendo y *anunciar* cómo podríamos vivir” (Freire, 2004, p. 105, énfasis en el original). Debe reconocer las estructuras políticas, económicas y sociales que enmarcan nuestra vida. Debe ayudarnos a imaginar y poner en práctica las acciones colectivas necesarias para transformar estas estructuras.

Es aquí donde la educación tiene un lugar en la sociedad. En efecto, la educación no puede seguir reduciéndose a la reproducción de la sociedad en beneficio de algunos grupos o clases y a la reproducción de la desigualdad (Bourdieu y Passeron, 1990). Ahora bien, si ha de producirse un cambio social profundo, la educación tiene que formar parte de la ecuación. La educación es un pivote vital en la emergencia de nuevas formas de alteridad y nuevas concepciones de la sociedad. La educación debe formar parte de lo que Marx y Engels llamaron la “reordenación del mundo empírico” para que los individuos puedan hacer la experiencia de la dimensión realmente humana de nuestra existencia.

Si el hombre [*sic*] extrae todo su saber, sensación, etc., del mundo de los sentidos y de la experiencia adquirida en él, el mundo empírico debe estar configurado de manera que en él el hombre experimente y se acostumbre a lo que es realmente humano y que tome consciencia de sí mismo como hombre. ... Si el hombre está formado por su entorno, su entorno debe hacerse humano. Si el hombre es social por naturaleza, solo desarrollará su verdadera naturaleza en sociedad, y el poder de su naturaleza debe medirse no por el poder de los individuos separados sino por el poder de la sociedad. (Marx y Engels, 1956, p. 176)⁶²

62 El significado de lo que es realmente humano, por supuesto, no es algo determinado de antemano. Es algo que siempre se disputa, que se pone en tela de juicio.

El sociólogo Michel Freitag (2002) se quejaba de que hoy en día ya no existe un movimiento social que produzca una inteligibilidad de la existencia colectiva:

ningún [movimiento social] desarrolla una nueva concepción de todo el orden [social]. Ningún [movimiento] produce una nueva inteligibilidad general de la sociedad y de la historia, de la existencia colectiva, de sus fines y de sus limitaciones. En una palabra, ya no hay política. La política, como reflexividad del vivir juntos (esta vez en torno al planeta, y esta vez de cómo saber vivir con las técnicas), y la política como responsabilidad colectiva para los fines de la vida social, necesita ser reinventada. (pp. 243-244)

Precisamente en la escuela es donde deben comenzar las bases de estos movimientos políticos sociales. La educación debe ser el lugar para imaginar nuevas posibilidades y nuevos futuros más dignos (D'Ambrosio, 2004, 2006). Y la ética debe formar parte de este proyecto educativo emancipador.

Desde este punto de vista, la justificación social de la escuela ya no se basa en la preparación del niño para entrar en el mundo laboral. Si es cierto que la escuela no puede desvincularse de la esfera económica de la sociedad, es aún más cierto que la escuela no puede ni debe limitarse a la dimensión económica de la sociedad, como ocurre en la actualidad (Radford, 2018d, 2020e). Así, en la visión que defiendo aquí, la razón por la que los padres envían a sus hijos a la escuela cada mañana ya no es porque en la escuela sus hijos encontrarán los saberes que requieren para encontrar un trabajo. La justificación —la verdadera y profunda razón de ser— de que los niños crucen el umbral de la escuela cada mañana debería ser porque es en la escuela donde los niños pueden experimentar algo que no pueden en la sociedad contemporánea capitalista: es en la escuela donde los niños podrían tener la experiencia de la democracia, de la vida colectiva, de la solidaridad y de la inclusividad.

Sin embargo, las condiciones para el surgimiento de nuevas formas de alteridad y nuevas concepciones de la sociedad y de la escuela no pueden aparecer de la nada. Tenemos que explorar nuevos caminos hacia la renovación y la imaginación de nuevas formas de relacionarse con los demás y de trabajar con ellos. En la teoría de la objetivación, intentamos hacerlo mediante la práctica de lo que denominamos una *ética comunitaria*.

6. Hacia una ética comunitaria

Como se mencionó en el capítulo 2, la teoría de la objetivación pretende ofrecer una perspectiva en la que el aprendizaje aparece como un esfuerzo colectivo: el saber es producido colectivamente por profesores y estudiantes en lo que hemos denominado *labor conjunta*. En la labor conjunta, el aula de matemáticas no es testigo de dos procesos paralelos (la enseñanza por un lado y el aprendizaje por otro), sino de un único proceso: el proceso de enseñanza-aprendizaje. La labor conjunta no significa que los profesores y los estudiantes hacen lo mismo. Hay una división de la labor. Pero esta división de la labor no impide que profesores y estudiantes trabajen juntos, mano a mano.

Ahora bien, no toda la actividad interactiva en el aula puede considerarse un caso de labor conjunta. Sucede casi sistemáticamente que, cuando en seminarios hablo de labor conjunta y muestro sus fases (véase la figura 17 del capítulo 5), me dicen que eso es lo que la gente lleva haciendo desde hace más de dos décadas (véase Radford, 2020f). El malentendido es que la interacción en el aula se considera *ipso facto* una labor conjunta, y eso no es cierto. En la labor conjunta, los profesores y los estudiantes interactúan entre sí, pero lo hacen en un fuerte sentido social. La interacción en la labor conjunta no significa simplemente una serie de acciones llevadas a cabo por un estudiante; tampoco significa una coordinación de acciones por parte de un grupo de estudiantes (independientemente de lo compleja que pueda ser dicha coordinación). La labor conjunta es mucho más que una mera interacción, mucho más que la resolución de problemas en grupo. Las raíces etimológico-conceptuales de labor conjunta, como he mencionado en capítulos anteriores⁶³, se encuentran en el término alemán de actividad, *Tätigkeit*, que lleva consigo un significado ontológico específico: la idea fundamental de que “la naturaleza humana se constituye social e históricamente” (Freire, 2004, p. 105). Por medio de las interacciones que se producen en la *Tätigkeit* los individuos producen cosas para satisfacer sus necesidades. Sin embargo, esta “producción no debe considerarse simplemente como la reproducción de la existencia física de los individuos” (Marx, 1998, p. 37). No significa simplemente reunirse para conseguir algo. Reunirse para conseguir algo es lo que el capitalismo ha

63 Véase también Radford (2020b, 2020f).

hecho mejor que nadie históricamente hablando. La sincronía perfecta con las que cada departamento en una fábrica o una empresa funciona es la prueba más evidente. Pero esta sincronía no es puesta en obra en nombre de un beneficio societal común. La sincronía de obreros y trabajadores es para producir más capital. Por el contrario, las *inter-acciones* de los individuos en la labor conjunta (*Tätigkeit*) incluyen, de manera decisiva, modos de producción social, cultural e histórica por medio de los cuales los individuos producen colectivamente y su producción (al contrario de la producción capitalista) no es alienante.

La alienación no consiste en que la labor de los individuos se convierta en un objeto, ni en que la vida de los individuos se cristalice en el objeto (Fischbach, 2012). De hecho, la naturaleza de toda labor es producir algo y que los individuos se expresen y se reconozcan subjetivamente en el producto de la actividad. La alienación consiste en cambio en el hecho preciso de que el objeto producido en las sociedades actuales ya no es la expresión de los individuos. Lo que es alienante aquí es, por tanto, la pérdida de la expresividad de la vida en el objeto, la pérdida de la autoexpresión en el objeto. En lugar de expresión, logro y autorrealización, tenemos un producto que se convierte en una cosa. En la enseñanza directa, los estudiantes no se reconocen en las ideas matemáticas que se producen en el aula. Los estudiantes son impotentes. Son ajenos al proceso de producción y al producto resultante. Pero, como argumenté en Radford (2014b), el problema no se supera dando el poder a los estudiantes. Esta estrategia crea otro tipo de alienación —para un análisis detallado de la alienación en las aulas de matemáticas, véase Radford (2012b, 2013b, 2016b) y Radford y Roth (2017)—.

¿Cómo sería la producción no alienante? La producción no alienante no sería producir cuando no encontramos realización en lo que hacemos, ni sería producir cuando hemos perdido el control de nuestras vidas. En una nota marginal, Marx escribe:

Supongamos que hubiéramos producido como seres humanos. En ese caso ... en la expresión individual de mi propia vida habría provocado la expresión inmediata de tu vida, y ... habría *confirmado* y *realizado* directamente mi auténtica naturaleza, mi naturaleza *humana, comunitaria*. Nuestras producciones serían otros tantos espejos en los que brillarían nuestras naturalezas. (Citado en Sayers, 2011, p. 99, énfasis en el original; véase también Marx, 1968, p. 33)

La producción no alienante se basa, como vemos, en un proceso de labor que no es solo un gasto de energía, sino al mismo tiempo una profunda relación con el otro: el yo y el otro se afirman doblemente en su producción.

Una idea similar es elaborada por Leont'ev en el siguiente pasaje que trata de la labor (labor colectiva no alienante):

La labor es un proceso ... que se realiza ... en condiciones de actividad conjunta de las personas, en condiciones de un colectivo humano, y de forma social, es decir, colectivamente expresada. Por medio de este proceso, las personas entran en comunicación entre sí. No se trata tanto de una comunicación principalmente verbal, por supuesto, sino de una comunicación en el sentido de la participación en una acción conjunta, en el sentido de la participación en el proceso de labor, ante todo. (Leont'ev, 2005, p. 60)

En la actividad conjunta o labor conjunta, la comunicación, como señala Leont'ev, no es solo hablar ni es solo nombrar cosas. Detrás del acto comunicativo hay algo verdaderamente social, una postura de compromiso que los participantes adoptan para trabajar juntos en la consecución de algo común.

En resumen, en la labor conjunta (*Tätigkeit*), las personas producen de forma colectiva y no alienante. Es decir, se expresan en lo que producen y encuentran al mismo tiempo la realización humana en lo que producen y en el proceso de su producción.

Ahora bien, ni Marx ni Leont'ev lo dicen, pero la postura de compromiso subyacente requerida en la labor/aprendizaje no alienante es inevitablemente de carácter ético.

En la teoría de la objetivación, la ética que nos interesa no es de naturaleza hobbesiana ni kantiana. La ética que nos interesa es una relación de responsabilidad sensible al contexto, fluida, personal y cultural entre uno mismo y los demás (Giroux, 2005). Es una ética volcada hacia la constitución reflexiva y crítica de lo que Marx (1988) llamó “poderes humanos” (p. 108), como la voluntad, el amor, la cooperación y la solidaridad, es decir, capacidades que afirman la naturaleza social, cultural e histórica de los individuos y donde nuestras relaciones con los demás como seres sensibles se convierten en la condición ontológica de nuestra existencia. Esta ética se basa en el reconocimiento de que nuestro origen histórico, cultural y material incorpora y refracta visiones y concepciones dinámicas y antagónicas del mundo y de lo que puede significar una vida buena. Es

la vitalidad de las contradicciones (Bruce, 2013) lo que da sustancia a la vida humana social, siempre cambiante, siempre desafiada, y lo que hace que el significado sea un evento polifónico, que siempre está surgiendo y evolucionando “en el contexto de la lucha” (Juzwik, 2004, p. 540).

Volvamos al ejemplo con el que empecé este libro: el ejemplo de la alcancía. Lo que vemos en ese ejemplo (pero también en todos los demás ejemplos tratados en otros capítulos) es que la profesora no está enseñando en el sentido transmisivo. Tampoco se limita a observar cómo los estudiantes producen sus propios saberes. La profesora trabaja con los estudiantes y para ellos; *y* recíprocamente. En la figura 3 (capítulo 1), vemos, en efecto, que en lugar de decir cómo ver los términos de la secuencia, la profesora invita a los estudiantes a encontrar una nueva forma de percibir los términos: una forma que se apoya en la identificación de las variables matemáticas y su relación.

29 Profesora: *(Intenta hacer notar a los estudiantes la estructura covariorcional) ¿Qué observan en la semana 5 (muestra el vaso correspondiente a la semana 5; véase imagen 1 de la figura 48) y (señala las fichas de bingo rojas) el número de fichas de bingo? (realiza las mismas acciones) ¿La cuarta semana y el número de fichas de bingo? (véase la imagen 2 de la figura 48)*

Al comprometerse con los estudiantes de esta manera, la profesora asume su responsabilidad. Al hacerlo, se expone a sí misma. Aparece en la escena social, ocupando un espacio con su cuerpo y sus acciones. Se posiciona y se convierte en una presencia. Y al hacerse presente, se hace vulnerable. Asume el riesgo de que las cosas salgan mal. Por ejemplo, los estudiantes pueden frustrarse. Pero decide seguir adelante. Habría sido mucho más fácil decirles a los estudiantes lo que tienen que hacer. Pero entonces, la profesora y los estudiantes se habrían adentrado en el camino de la alienación. La profesora habría impuesto a los estudiantes un régimen de verdad, una forma de hacer matemáticas. Su invitación abre un espacio para que los estudiantes se involucren en el encuentro con una forma cultural-histórica de pensar en las secuencias. Ahora bien, esta invitación es más bien una incitación a mirar esta forma de pensamiento matemático, a encontrarla, a examinarla, a discutirla. La invitación de la profesora

se mueve al mismo tiempo en otro nivel. Su invitación es más que una simple llamada cognitiva; es una llamada ética al Otro.

En efecto, al tomar los vasos de las semanas 5 y 4, la profesora intenta llamar la atención de los estudiantes y convidarlos a participar en la discusión. Pero hay algo más en la llamada ética de la profesora que es importante señalar: la relación ética que aparece por medio de su llamada es una relación que depende fundamentalmente del cuerpo. Es una relación ética encarnada que se manifiesta al tomar los vasos de plástico, en la postura de la profesora, en la tonalidad de las palabras pronunciadas, en los gestos que señalan los objetos materiales y en el ritmo que da coherencia a las diversas facetas de la expresión encarnada.

Los estudiantes pueden decidir ignorar la llamada de la profesora y preguntarle directamente cómo resolver el problema, sin más, o esconderse tras el muro del “no entiendo”. Sin embargo, los estudiantes decidieron responder a la llamada de la profesora. Decidieron comprometerse respondiendo a su invitación. Al igual que la profesora, los estudiantes no estaban seguros de que las cosas fueran a salir bien. Sin embargo, decidieron unirse a ella y también arriesgarse. Decidieron *confiar* en la profesora:

- 30 Albert: Siempre es dos veces...
- 31 Profesora: (*Repite*) Siempre es dos veces.
- 32 Krysta: Es el doble de lo que... (véase la imagen 3 de la figura 48) ¡No! (*observa intensamente los artefactos durante un rato*) ¡Estoy confundida!
- 33 Albert: ¡Sí! Es el doble, ¡mira! (*cuenta las fichas rojas*) $1+1, 2; 2+2, 4; 3 + 3, 6; 4 + 4$ (véase la imagen 4 de la figura 48).

Cuando Krysta, en la línea 32, dice “Es el doble de lo que...”, ofrece a los demás una nueva posibilidad de ver el significado matemático de las fichas de bingo. Sin embargo, la idea no está del todo clara; le falta coherencia. Krysta lo reconoce diciendo tras una pausa: “¡Estoy confundida!”. Pero le permite a Albert percibir algo que hasta ahora se le había escapado. En la línea 33, dice “¡Sí!” Hay una relación multiplicativa en las variables que empiezan a aparecer en su horizonte conceptual. La responsabilidad, la exposición, la vulnerabilidad y la confianza que se encuentran en este

pasaje forman parte de la dimensión ética del trabajo conjunto, una dimensión extremadamente emocional.

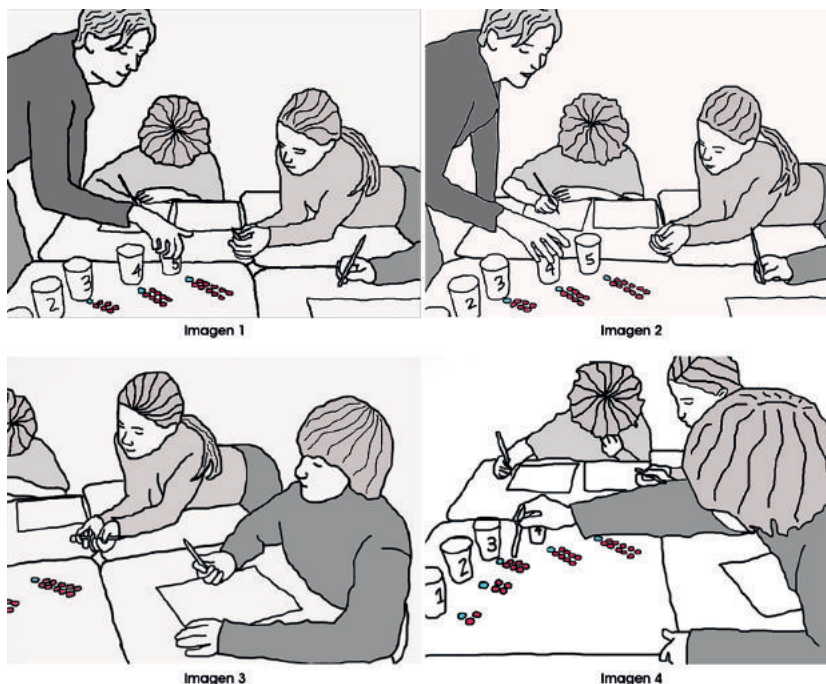


Figura 48. Desarrollo de la relación ética entre la profesora y los estudiantes

A partir del trabajo conjunto de la profesora y los estudiantes, el álgebra se materializa en un proceso dinámico, sensible, rítmico, concreto, lingüístico, simbólico y corporal. Lo que la profesora y los estudiantes están haciendo es producir una obra común (*oeuvre commune*): la materialización del saber matemático que, al nacer, invade el aula, como la música invadiría una sala de conciertos. La ética aparece aquí en la forma en que la profesora y los estudiantes se comprometen en su esfuerzo conjunto, en cómo se comprometen, responden, se cuidan y se relacionan entre sí. Esta ética orienta la colaboración y la indagación matemática entre profesores y estudiantes. Hace de la actividad de enseñanza-aprendizaje una experiencia sensible e intelectual, crítica y poética. Por medio de esta ética se hace posible una comprensión profunda de las matemáticas y, al mismo tiempo, se convierte esta comprensión en una aventura colectiva, social y culturalmente enriquecedora tanto para los estudiantes como para la profesora.

Esta ética, que en la teoría de la objetivación denominamos *ética comunitaria*, se centra en tres elementos: (a) la responsabilidad, (b) el compromiso y (c) el cuidado de los otros. Estos tres elementos orientan la labor conjunta y vienen a configurar la estructura esencial de la subjetividad.

La responsabilidad

La responsabilidad aparece aquí como un compromiso incondicional hacia los demás. Realiza una unión, un vínculo, una conexión y un lazo entre el yo y los demás. La responsabilidad se expresa en la capacidad de respuesta que hacemos a la llamada del Otro, una llamada que no procede necesariamente de una formulación lingüística o semiótica, como muestra Lévinas, sino de la mera presencia de lo que nosotros mismos no somos. La responsabilidad es la respuesta a lo que el filósofo noruego Kund Løgstrup (1997) llama la *demanda ética*.

El compromiso

El compromiso es tanto una promesa como la realización de hacer todo lo posible para trabajar codo con codo con los demás en el curso de nuestra labor conjunta (por ejemplo, tratar de entender, tratar de contribuir a la obra común).

El cuidado del Otro

El cuidado del Otro, lejos de ser un acto de condescendencia, o un acto patriarcal, o simplemente de cuidado de alguien, es una “implicación relacional” (Edwards, 2009, p. 234); como tal, no necesita justificación. Es una forma de estar con el Otro y de ser-para-Otro. El cuidado del Otro requiere la constitución de esas sensibilidades o capacidades humanas a las que se refiere Marx (1988), en particular la sensibilidad de la atención y el reconocimiento del Otro y sus necesidades materiales y espirituales. Aunque el cuidado del Otro abre la posibilidad de vernos a nosotros mismos en el Otro; de reconocer nuestra vulnerabilidad en la vulnerabilidad del Otro, la importancia del cuidado del Otro es ir más allá de nosotros mismos, ser arrastrados poderosamente al mundo y posicionarnos allí, con-el-Otro.

Pero, por supuesto, estos elementos de la ética comunitaria no son producto de la evolución natural. Son elementos de la forma de alteridad

que se ha producido históricamente. Si los elementos de la ética comunitaria fueran cosa de la evolución natural, no estaríamos viviendo en el mundo en el que estamos.

En un trabajo reciente con estudiantes de 9 a 10 años de educación primaria en una escuela pública de Bogotá (Colombia), observamos que en sus formas de colaboración humana y de producción de saber en el aula, los estudiantes recurren a lo que se puede denominar una “ética cerrada”, en la que la relación con la alteridad es alienante: es una ética de superior/inferior, potente/impotente, conocedor/ignorante, autoridad/vasallo. Los estudiantes conceptualizan a la profesora como la poseedora del saber y del poder. Además, los estudiantes se conceptualizan a sí mismos como sumisos a la profesora y a sus saberes, incluso cuando la profesora intenta conceptualizarse a sí misma de forma diferente y, para fomentar la interacción de los estudiantes, organiza la clase en pequeños grupos. Los estudiantes configuran pequeños grupos cerrados y erigen barreras agresivas entre ellos y los demás: una cultura de pandillas (Radford y Lasprilla Herrera, 2020).

Como señala bell hooks, a menudo “los estudiantes no están dispuestos a reconocer que sus mentes han sido colonizadas, que algunos han estado aprendiendo a ser opresores [y] a dominar”, mientras que otros han estado aprendiendo a “aceptar pasivamente la dominación de otros” (bell hooks, 2015, pp. 177-178). Como sugiere la investigación doctoral llevada a cabo por Lasprilla Herrera, los estudiantes encuentran terriblemente amenazante el paso a una ética de la solidaridad (Lasprilla Herrera, Radford y León, en prensa).

No creo que la ética pueda aprenderse formalmente. Podemos hablar de ella, pero una ética emancipadora no puede aparecer como una imposición, lo que frustraría su propio propósito. Solo puede aparecer por medio de su práctica diaria, en nuestros actos y hechos “para apoyar la transformación real de las condiciones de vida de todos los individuos” (Rubinstein, 1983, p. 402). La ética puede aparecer como una invitación a poner en tela de juicio nuestros hábitos de pensamiento y conducta —lo que en el capítulo 9 se llamó, siguiendo a Scott, la *Cuestión de la ética*—, “una interrupción en la que los valores definitivos que rigen el pensamiento y la acción cotidiana pierden su poder y autoridad” (1990, p. 4), una interrupción que nos exige “estar atentos a las exclusiones y a los aspectos olvidados en la historia de un pueblo, escuchar lo que suele ser ahogado por los valores predominantes, repensar lo que normalmente se da por sentado” (Scott, 1990, p. 7).

Una ética liberadora emancipadora requeriría que trabajáramos en la creación de las condiciones de posibilidad para que dicha ética surja. Esta tarea implica cambios no solo en los estudiantes sino también en los educadores:

Ya no es el educador el que deposita todo su saber en el estudiante, y este el que recibe pasivamente del primero un saber que le es dado, sino que, en una posición crítica, el estudiante toma la palabra y el educador permite la relación dialógica como lugar de liberación de ambos [profesor y estudiante], dado que en la circulación de la propia palabra el sujeto se desalienta, haciendo del encuentro con el otro una posibilidad de creación social y no un momento persecutorio de la lucha de todos contra todos. (Fernández Mouján, 2016, p. 103)

7. Síntesis

En la primera sección de este capítulo sugerí que todas las actividades de enseñanza-aprendizaje tienen una composición básica: se basan en dos ejes entrelazados: (a) el eje de las formas de colaboración humana y (b) el eje de las formas de producción del saber.

A continuación, argumenté que ambos ejes incluyen un componente ético. En el primero, la ética aparece relacionada con las formas en que los participantes en el aula (el profesor incluido) se relacionan con los demás. En el segundo, la ética aparece relacionada con la forma en que se legitima el saber. La ética aparece en cuanto se destacan, se prefieren, etc., algunos procedimientos de indagación, comprobación, resolución de problemas, en detrimento de otros procedimientos. He mostrado cómo la enseñanza por transmisión de saberes y el constructivismo recurren a dos éticas diferentes. Luego, hice una incursión en tres de los sistemas éticos más importantes de la tradición intelectual occidental: el de Kant, el de Hobbes y el de Lévinas. El interés era mostrar que detrás de estos sistemas éticos se encuentra una concepción del individuo y su relación con la sociedad. En mi breve análisis se hizo evidente que los sistemas de Kant y Hobbes funcionan en torno a una visión de lo social como un conglomerado o un conjunto de individuos.

La ética de Kant hace hincapié en una concepción de “razón” considerada como una facultad universal humana (una razón legislativa tal como

la entendía el movimiento cultural europeo del siglo XVIII: la Ilustración). También subraya el valor que se daba a la autonomía y a la libertad como rasgos principales de lo que significa ser humano. Al basarse en estas ideas, Kant formuló lo que llamó el imperativo categórico, en el que el Otro es simplemente asimilado al yo.

Hobbes, en cambio, con un talante más pragmático, articuló una ética como contrato, un contrato que intenta equilibrar la multitud de intereses del individuo y que refleja perfectamente el individualismo de su tiempo.

Lévinas irrumpe en la escena ética con un proyecto diferente, que se erige sobre las cenizas de algunos de los mayores desastres culturales y políticos de la primera mitad del siglo XX: las guerras mundiales y el Holocausto. Su proyecto ético se construye contra dos de los valores máspreciados del pensamiento occidental: el saber y la razón. Pero no el saber y la razón en sí mismos, sino el saber y la razón como armas en la domesticación, la manipulación, la aniquilación y el borrado del Otro. Lévinas nos ofrece una ética sanadora desde la que podríamos recuperar lo que hemos perdido: la dignidad humana. Su ética es una invitación a pensar de otro modo, a renovar nuestro acercamiento al Otro, a abrazar al Otro tal como es, incondicionalmente, por lo que es: una presencia (o un *rostro*, como dice Lévinas una y otra vez) a la que debemos nuestra propia existencia.

La ética de Lévinas es rica, sublime y magnífica. Nos ofrece la posibilidad de descubrir un nuevo reino de la significación, un reino sin palabras, antes y más allá del *logos* o del discurso, un lenguaje sin más signos que los que necesitamos para vivir para-el-otro.

Pero, al seguir los pasos de la misma tradición intelectual que trató de superar, el Otro en el sistema ético de Lévinas sigue siendo una entidad abstracta, privada de todas las mediaciones culturales-históricas-políticas que actúan en la vida cada minuto, cada segundo, silenciosamente, afectando —la mayoría de las veces, sin que nos demos cuenta— a las formas de relacionarnos con los demás. Impulsada por las actuales formas de producción capitalista, nuestra vida contemporánea es tal que la actividad humana se ha basado en el avance material en detrimento de una auténtica dimensión social. Al deplorar el triste estado de las sociedades contemporáneas, Mézáros señala que, para cumplir con las exigencias capitalistas,

los objetivos legítimamente factibles de la actividad humana *deben* ser conceptualizados en términos de avance material por medio de la agencia de las ciencias naturales, permaneciendo ciegos a la *dimensión social*

de la existencia humana en otros términos que no sean esencialmente funcionales/operativos y manipulativos. Pues una visión alternativa exigiría abandonar el “punto de vista de la economía política”, equivalente al punto de vista del capital, que debe ver incluso en el trabajo vivo nada más que un “factor material de producción”. (Mészáros, 2010, p. 29, énfasis en el original)

La falta de atención al conjunto de las relaciones constitutivas culturales e históricas mediadoras que impregnan nuestras vidas en la ética de Lévinas hace del encuentro con el Otro una abstracción histórica y política.

Abogué entonces por un proyecto ético que reconociera las estructuras políticas, económicas y sociales que enmarcan nuestra vida y que nos ayudara a imaginar y poner en práctica las acciones colectivas necesarias para transformar esas estructuras. Defendí que ese proyecto ético debería estar en el centro de la educación en general, y de la Educación Matemática en particular.

En el resto del capítulo, hice un esbozo de la ética de la teoría de la objetivación: la ética comunitaria. La ética comunitaria es un intento de explorar nuevos caminos hacia la renovación y la imaginación de nuevas formas de relacionarse con los demás y trabajar con ellos. Está en sintonía con los principios generales de la teoría de la objetivación y su comprensión del aprendizaje como un esfuerzo colectivo. También está en sintonía con el proyecto educativo en el que se inserta la teoría, un proyecto educativo que mencioné en el capítulo 1 y que vale la pena recordar en estas observaciones finales:

La teoría de la objetivación plantea el objetivo de la Educación Matemática como un esfuerzo político, societal, histórico y cultural dirigido a la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionen críticamente en los discursos y prácticas matemáticas histórica y culturalmente constituidas, y que ponderen nuevas posibilidades de acción y pensamiento.

La ética comunitaria desempeña un papel fundamental en el concepto central de la teoría, a saber, la labor conjunta, la labor conjunta de profesores y estudiantes. La ética comunitaria es tan relevante, al punto de que, si no se le tiene en cuenta, la labor conjunta no tiene sentido.

La ética comunitaria se basa en un concepto dialéctico-materialista del yo que aparece a lo largo del libro y que articulé explícitamente en el

capítulo 9, concepto que reconoce la naturaleza histórico-cultural de lo humano. La ética comunitaria reconoce igualmente la naturaleza política de la educación y su papel crucial en la transformación de la sociedad (Freire, 1970, 2016; Vygotsky, 1929,1997b). La ética comunitaria se inspira en la ética de Lévinas, pero no en la ética de Lévinas como tal. Se inspira en la ética de Lévinas una vez que hemos hecho con ella lo que Marx hizo con la dialéctica de Hegel; es decir, una vez que la hemos invertido para que acabe despojada de su idealismo omnipresente y se sitúe ahora en el mundo terrenal de los seres concretos entrelazados en los procesos políticos, económicos y culturales de la sociedad. Desde este punto de vista, la labor conjunta y, con ella, la enseñanza y el aprendizaje, o más bien la enseñanza-aprendizaje (*obuchenie*, para usar la palabra de Vygotsky) aparecen como mucho más que una interacción social. Es portadora de múltiples y controvertidos hilos de historia y cultura, de tensiones y conflictos. La labor conjunta se basa en la práctica constante de la ética comunitaria. Como tal, la labor conjunta es portadora de esperanza. No de esperanza en un sentido trascendental, metafísico o romántico, sino de esperanza en el sentido más terrenal y político:

Porque nos encontramos sometidos a innumerables limitaciones —obstáculos difíciles de superar como la influencia dominante de las concepciones fatalistas de la historia o el poder de la ideología neoliberal, cuya ética perversa se fundamenta en las leyes del mercado— nunca ha sido tan necesario como hoy subrayar la práctica educativa con un sentido de esperanza. (Freire, 2004, p. 100)

La esperanza, en este sentido freireano, significa la esperanza de que, juntos, podemos hacer del mundo que heredamos y del que somos responsables, un lugar mejor: un mundo digno para los que vengan a vivir como humanos: es decir, en paz y en solidaridad. La Educación Matemática tiene un enorme papel que desempeñar aquí. Si no, ¿qué sentido tendría?

Agradecimiento

Parte de este capítulo se basa en Radford, L. (2021). La ética en la teoría de la objetivación. En L. Radford y M. Silva Acuña (Eds.), *Ética: Entre educación y filosofía* (pp. 107-141). Bogotá: Universidad de los Andes. Utilizado con permiso del titular de los derechos de autor.

Referencias

- Adorno, T. (1998). *Beethoven: The philosophy of music*. Stanford, CA: Stanford University Press.
- Adorno, T. (2006). *History and freedom*. Cambridge, Inglaterra: Polity Press.
- Alcoff, L. (1988). Cultural feminism versus post-structuralism: The identity crisis in feminist theory. *Signs*, 13(3), 405-436.
- Althusser, L. (2005). *For Marx*. Londres, Inglaterra: Verso.
- Amariglio, J., Resnick, S. y Wolff, R. (1988). Class, power, and culture. En C. Nelson y L. Grossberg (Eds.), *Marxism and the interpretation of culture* (pp. 487-501). Londres, Inglaterra: MacMillan Education.
- Anderson, C. W. (1993). The modulation of feeding behavior in response to prey type in the frog *Rana pipiens*. *Journal of Experimental Biology*, 17, 1-12.
- Arendt, H. (1958). The modern concept of history. *The Review of Politics*, 20(4), 570-590.
- Arendt, H. (1992). *Lectures on Kant's political philosophy*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.
- Arievitch, I. (2003). A potential for an integrated view of development and learning: Galperin's contribution to sociocultural psychology. *Mind, Culture and Activity*, 10(4), 278-288.
- Aristotle. (1984). *The complete works. Metaphysics* (Vol. 2, Trad. W. D. Ross). Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Aristotle. (1992). *The politics* (Trad. T. A. Sinclair). Londres, Inglaterra: Penguin Books.
- Artigue, M. (1995). The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics education. En Y. M. Pothier (Ed.), *Proceedings*

- of the 1995 annual meeting of the Canadian mathematics education study group (pp. 7-21). Londres, Canadá: University of Western Ontario.
- Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. En C. Winslow (Ed.), *Nordic research in mathematics education. Proceedings of NORMA08*. Róterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Artinian, A. (2017). Radical currents in Soviet philosophy: Lev Vygotsky and Evald Ilyenkov. *Socialism and Democracy*, 31(2), 95-121.
- Azarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (Número Especial. Semiótica, cultura y pensamiento matemático, Editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), 267-299.
- Azarello, F., Bazzini, L. y Chiappini, C. (1994). *L'algebra come strumento di pensiero, Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Pavia, Italia: Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Progetto Strategico del C.N.R.
- Asper, M. (2009). The two cultures of mathematics in ancient Greece. En E. Robson y J. Stedall (Eds.), *The Oxford handbook of the history of mathematics* (pp. 107-132). Oxford, Inglaterra: Oxford University Press.
- Atkins, K. (2005). *Self and subjectivity*. Oxford, Inglaterra: Blackwell.
- Atkinson, J. (2000). *The developing visual brain*. Oxford, Inglaterra: Oxford University Press.
- Atweh, B. (2014). Mathematics education and democratic participation between the critical and the ethical: A socially response-able approach. En O. Skovsmose y B. Greer (Eds.), *Opening the cage: Critique and politics of mathematics education* (pp. 325-342). Róterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Atweh, B. y Brady, K. (2009). Socially response-able mathematics education: Implications of an ethical approach. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 5(3), 267-276.
- Atweh, B. y Cooper, T. (1991). Hegemony in the mathematics curricula: The effect of gender and social class on the organization of mathematics teaching for year 9 students. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 88-95). Assisi, Italia: PME.
- Atweh, B., Forgasz, H. y Nebres, B. (2001). *Sociocultural research on mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Bacon, F. (1906). *Francis Bacon's essays*. Londres, Inglaterra: Dent.
- Bakhtin, M. M. (1981). *The dialogical imagination*. Austin, TX: University of Texas Press.

- Bakhtin, M. M. (1986). *Speech genres and other late essays*. Austin, TX: University of Texas Press.
- Bakhurst, D. (1991). *Consciousness and revolution in Soviet philosophy: From the Bolsheviks to Evald Ilyenkov*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Baldino, R. y Cabral, T. (1998). Lacan and the school's credit system. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 22, pp. 56-63). Stellenbosch, Sudáfrica: PME.
- Bartolini Bussi, M. G. (1991). Social interaction and mathematical knowledge. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th annual conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 1-16). Assisi, Italia: PME.
- Bartolini Bussi, M. G. y Mariotti, M. A. (1999). Semiotic mediation: From history to the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics*, 19(2), 27-35.
- Bartolini Bussi, M. G. y Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 746-783). Nueva York, NY: Routledge, Taylor and Francis.
- Baudrillard, J. (1968). *Le système des objets*. París, Francia: Gallimard.
- Bauman, Z. (1993). *Postmodern ethics*. Oxford, Inglaterra: Blackwell.
- Beaud, M. (2004). *A history of capitalism*. Delhi, India: Aakar Books.
- Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra, perspectives for research and teaching*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.
- bell hooks. (2015). *Thinking feminist, thinking Black*. Londres, Inglaterra: Routledge.
- Bernstein, B. (2003). *Class, codes and control: The structuring of pedagogical discourse* (Vol. IV). Londres, Inglaterra: Routledge.
- Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Cham, Suiza: Springer.
- Biro, D., Sousa, C. y Matsuzawa, T. (2006). Ontogeny and cultural propagation of tool use by wild chimpanzees at Bossou, Guinea: Case studies in nut cracking and leaf folding. En T. Matsuzawa, M. Tomonaga y M. Tanaka (Eds.), *Cognitive development in chimpanzees* (pp. 476-508). Tokio, Japón: Springer-Verlag.
- Bishop, A. (1985). The social psychology of mathematics education. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 1-13). Países Bajos: PME.
- Bishop, A. (1988). *Mathematics education and culture*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

- Bishop, A. y Pompeu, G. (1991). Influences of an ethnomathematical approach on teacher attitudes to mathematics education. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 136-143). Assisi, Italia: PME.
- Blunden, A. (2010). *An interdisciplinary theory of activity*. Chicago, IL: Haymarket Books.
- Boas, F. (1944). *The mind of primitive man*. Nueva York, NY: Macmillan.
- Boero, P., Pedemonte, B. y Robotti, E. (1997). Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: A Vygotskian perspective. En *Proceedings of the 21st international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 81-88). Lahti, Finlandia: PME.
- Boesch, C., Marchesi, P., Marchesi, N., Fruth, B. y Joulian, F. (1994). Is nut cracking in wild chimpanzees a cultural behaviour? *Journal of Human Evolution*, 26, 325-338.
- Borba, M. y Villareal, M. (2006). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*. Nueva York, NY: Springer.
- Bostock, D. (1980). Aristotle's account of time. *Phronesis*, 25(2), 148-169.
- Bourdieu, P. y Passeron, J. C. (1990). *Reproduction in education, society and culture*. Londres, Inglaterra: Sage.
- Bowers, N. y Lepi, P. (1975). Kaugel valley systems of reckoning. *Journal of the Polynesian Society*, 84(3), 309-324.
- Boylan, M. (2016). Ethical dimensions of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 92(3), 395-409.
- Bresson, A. (2016). *The making of the ancient Greek economy: Institutions, markets, and growth in the city-states*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Brousseau, G. (1978). *La Monographie d'un enfant en difficulté: l'enfant Gaël*. Burdeos, Francia: IREM de Bordeaux. Descargado de <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/12/Monographie-d'un-enfant-en-difficulte-l'enfant-Gaël.pdf>.
- Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.
- Brousseau, G. (2003). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. Descargado el 20 de enero de 2007, de http://Dipmat.Math.Unipa.It/~grim/gloss_fr_brousseau.pdf.
- Brown, T. (2010). Truth and the renewal of knowledge: The case of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 75(3), 329-343.

- Bruce, G. (2013). *The vitality of contradiction: Hegel, politics, and the dialectic of liberal-capitalism*. Montréal, QC: McGill-Queen's University Press.
- Bruner, J. (1990). *Acts of meaning*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Bühler, K. (2011). *Theory of language: The representational function of language*. Amsterdam, Países Bajos: John Benjamins.
- Burkert, W. (1985). *Greek religion: Archaic and classical*. Maiden, MA: Blackwell.
- Burkert, W. (1995). *The orientализing revolution: Near Eastern influence on Greek culture in the early archaic age*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Butler, J. (1999). *Gender trouble: Feminism and the subversion of identity*. Londres, Inglaterra: Routledge.
- Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization*. Nueva York, NY: Springer.
- Campbell, S. (2002). Constructivism and the limits of reason: Revisiting the Kantian problematic. *Studies in Philosophy and Education*, 21, 421-445.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa*. Barcelona, España: Editorial Gedisa.
- Cassirer, E. (1980). *The philosophy of symbolic forms: Language* (Vol. 1). New Haven, CT: Yale University Press.
- Chaiklin, S. (2019). The meaning and origin of the activity concept in Soviet psychology University of Western Ontario—with primary focus on A. N. Leontiev's approach. *Theory & Psychology*, 29(1), 3-26.
- Clot, Y. (2015). Vygotski avec Spinoza, au-delà de Freud. *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, 140(2), 205-224.
- Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist*, 23(2), 87-103.
- Cobb, P., Stephen, M., McClain, K. y Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences*, 10(1-2), 113-163.
- Cobb, P. y Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31(3-4), 175-190.
- Cobb, P., Yackel, E. y Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 2-33.
- Cohen, E. (1997). *Athenian economy and society: A banking perspective*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Cozza Sayão, S. (2011). Entre o dizer e o dito: Sobre a precariedade e a finitude de nosso saber em Emmanuel Lévinas. *Conjectura*, 16(1), 98-119.

- Cremin, L. (1961). *The transformation of the school: Progressivism in American education, 1876-1957*. Nueva York, NY: Vintage Books.
- Critchney, S. (1999). *Ethics-politics-subjectivity: Essays on Derrida, Lévinas, and contemporary French thought*. Londres, Inglaterra: Verso.
- Crump, T. (1990). *The anthropology of numbers*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Cuche, D. (2004). *La notion de culture dans les sciences sociales*. París, Francia: La Découverte.
- D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the learning of mathematics*, 5(1), 44-48.
- D'Ambrosio, U. (2004). Una riflessione dell'etnomatemática: Perché insegnare matematica? En G. Arrigo (Ed.), *Atti del Convegno di didattica della matematica* (pp. 29-37). Locarno, Suiza: Centro didattico cantonale.
- D'Ambrosio, U. (2006). *Ethnomathematics*. Róterdam, Países Bajos: Sense.
- Damerow, P. (1996). *Abstraction and representation: Essays on the cultural evolution of thinking*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.
- D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. En L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* (pp. 151-171). University of Urbino Carlo Bo, Italia: Isonomia. Descargado de <http://isonomia.uniurb.it/epistemologica>.
- Daniels, H. (2002). *Vygotsky and pedagogy*. Londres, Inglaterra: Routledge.
- Darling, J. y Nordenbo, S. (2002). Progressivism. En N. Blake, P. Smeyers, R. Smith y P. Standish (Eds.), *The philosophy of education* (pp. 288-308). Oxford, Inglaterra: Blackwell.
- Davydov, V. (1999). A new approach to the interpretation of activity structure and content. En S. Chaiklin, M. Hedegaard y U. Jensen (Eds.), *Activity theory and social practice* (pp. 39-50). Aarhus, Dinamarca: Aarhus University Press.
- de Freitas, E. y Sinclair, N. (2013). New materialist ontologies in mathematics education: The body in/of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 453-470.
- de Freitas, E. y Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Deacon, T. W. (1997). *The symbolic species*. Nueva York, NY: W.W. Norton.
- Dear, P. (1995). *Discipline and experience: The mathematical way in the scientific revolution*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

- Del Río, P. y Álvarez, A. (1995). Directivity: The cultural and educational construction of morality and agency. Some questions arising from the legacy of Vygotsky. *Anthropology & Education Quarterly*, 26(4), 384-409.
- Deleuze, G. (1991). *Empiricism and subjectivity: An essay on Hume's theory of human nature*. Nueva York, NY: Columbia University Press.
- Demosthenes. (2004). *Speeches 27-38* (Trad. D. M. MacDowell). Austin, TX: University of Texas Press.
- Demosthenes. (2011). *Speeches 39-49* (Trad. A. C. Scafuro). Austin, TX: University of Texas Press.
- Derry, J. (2017). An introduction to inferentialism in mathematics education. *Mathematics Education Research Journal*, 29, 403-418.
- Descartes, R. (1886). *La g om trie*. Paris, Francia: A. Hermann, Librairie Scientifique.
- Detienne, M. (1996). *The masters of truth in archaic Greece*. Nueva York, NY: Zone Books.
- Donham, D. L. (1999). *History, power, ideology: Central issues in Marxism and anthropology*. Berkeley, CA: University of California Press.
- Dubbs, C. (2020). Whose ethics? Toward clarifying ethics in mathematics education research. *Journal of Philosophy of Education*, 54(3), 521-540.
- Dupré, L. (1983). *Marx's social critique of culture*. New Haven, CT: Yale University Press.
- Dzobo, N. K. (1980). The indigenous African theory of knowledge and truth. *The Conch*, 7(1-2), 85-102.
- Eagleton, T. (1998). Body work. En S. Regan (Ed.), *The Eagleton reader* (pp. 157-162). Oxford, Inglaterra: Blackwell.
- Eagleton, T. (2000). *The idea of culture*. Oxford, Inglaterra: Blackwell.
- Eagleton, T. (2016). *Culture*. New Haven, CT: Yale University Press.
- Edwards, S. (2009). Three versions of an ethics of care. *Nursing Philosophy*, 10, 231-240.
- Elias, N. (2000). *The civilizing process: Sociogenetic and psychogenetic investigations*. Oxford, Inglaterra: Blackwell.
- El'Konin, D. B. (1995). Problems in the psychology of activity. *Journal of Russian and East European Psychology*, 33(4), 32-34.
- Ellerton, N. (1991). Classroom discourse and mathematics learning. En *Proceedings of the 15th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 17-24). Assisi, Italia: PME.

- Engeström, Y. (1999). Activity theory and individual and social transformation. En Y. Engeström, R. Miettinen y R. L. Punamäki (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 19-38). Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Ernest, P. (1991). Constructivism, the psychology of learning, and the nature of mathematics: Some critical issues. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th international conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 25-32). Assisi, Italia: PME.
- Ernest, P. (2009). What is 'first philosophy' in mathematics education? En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 25-42). Thessaloniki, Grecia: PME.
- Farías Gutiérrez, M. (en prensa). La sensibilidad ética ofrecida a la educación. En L. Radford y M. Silva Acuña (Eds.), *Ética: Entre educación y filosofía*. Bogotá, Colombia: Uniandes.
- Farroni, T. y Menon, E. (2008). Visual perception and early brain development. En R. E. Tremblay, R. G. Barr, R. R. D. Peters y M. Boivin (Eds.), *Encyclopedia on early childhood development* (pp. 1-6). Montreal, QC: Centre of Excellence for Early Childhood Development. Descargado el 5 de mayo 2009, de <http://www.child-encyclopedia.com/documents/Farroni-MenonANGxp.pdf>.
- Fay, B. (1996). *Contemporary philosophy of social science: A multicultural approach*. Oxford, Inglaterra: Blackwell.
- Fedoseyev, P. N., Oizerman, T., Melukhin, E., Ilyenkov, E., Lektorsky, V., et al. (1977). *Philosophy in the USSR -Dialectical materialism*. Moscú, Rusia: Progress.
- Fernandez-Armesto, F. (1998). *Truth: A history and a guide for the perplexed*. Londres, Inglaterra: Black Swan Books.
- Fernández Mouján, I. (2016). *Elogio de Paulo Freire*. Argentina: Noveduc.
- Feuerbach, L. (1966). *Principles of the philosophy of the future*. Indianápolis, IN: Bobbs-Merrill.
- Filloy, E. y Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje aritmético-algebraico. *L'Educazione Matematica*, 5(3), 278-306.
- Finley, M. (1973). *Studies in land and credit in ancient Athens*. Nueva York, NY: Arno Press.
- Fischbach, F. (2012). *Sans objet. Capitalisme, subjectivité, alienation*. París, Francia: Vrin.
- Fischbach, F. (2014). *La production des hommes*. París, Francia: Vrin.
- Fischbach, F. (2015). *Philosophies de Marx*. París, Francia: Vrin.
- Fortes, M. (1949). *The web of kinship among the Tallensi*. Londres, Inglaterra: Oxford University Press.

- Foucault, M. (1980). *Power/knowledge*. Nueva York, NY: Pantheon Books.
- Fowler, D. (1999). *The mathematics of Plato's Academy*. Oxford, Inglaterra: Clarendon Press.
- Freire, P. (1998). *Pedagogy of freedom: Ethics, democracy, and civic courage*. Lanham, MD: Rowman & Littlefield.
- Freire, P. (2004). *Pedagogy of indignation*. Boulder, CO: Paradigm.
- Freire, P. (2016). *Pedagogia da solidariedade*. São Paulo, Brasil: Paz & Terra.
- Freitag, M. (2002). *L'oubli de la société: Pour une théorie critique de la postmodernité*. Québec, Canadá: Les Presses de l'Université Laval.
- Fried, M. (2009). Similarity and equality in Greek mathematics: Semiotics, history of mathematics, and mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 29(1), 2-7.
- Gal'perin, P. (1967). On the notion of internalization. *Soviet Psychology*, 5(3), 28-33.
- Gal'perin, P. (1989). Organization of mental activity and the effectiveness of learning. *Soviet Psychology*, 27(3), 65-82.
- Gal'perin, P. (1992). Stage-by-stage formation as a method of psychological investigation. *Journal of Russian & East European Psychology*, 30(4), 60-80.
- Gardner, H. (1970). Piaget and Lévi-Strauss: The quest for mind. *Social Research*, 37(3), 348-365.
- Geertz, C. (1973). *The interpretation of cultures*. Nueva York, NY: Basic Books.
- Geurts, K. L. (2002). *Culture and the senses*. Berkeley, CA: University of California Press.
- Giroux, H. (1986). Authority, intellectuals, and the politics of practical learning. *Teachers College Record*, 88(1), 22-40.
- Giroux, H. (2005). *Border crossings*. Londres, Inglaterra: Routledge.
- Godelier, M. (2010). *L'idéal et le matériel: Pensée, économie, sociétés*. París, Francia: Champs Essais.
- Godino, J. y Burgos, M. (2020). ¿Cómo enseñar las matemáticas y ciencias experimentales? Resolviendo el dilema entre transmisión e indagación. *Revista Paradigma*, 41, 80-106.
- González Rey, F. (2009). Historical relevance of Vygotsky's work: Its significance for a new approach to the problem of subjectivity in psychology. *Outlines*, 1, 59-73.
- González Rey, F. (2011a). The path to subjectivity. En P. Portes y S. Salas (Eds.), *Vygotsky in 21st century society* (pp. 32-49). Nueva York, NY: Peter Lang.

- González Rey, F. (2011b). A re-examination of defining moments in Vygotsky's work and their implications for his continuing legacy. *Mind, Culture, and Activity*, 18, 257-275.
- Gow, J. (2010). *A short history of Greek mathematics*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Grootenboer, P. y Jorgensen (Zevenbergen), R. (2009). Towards a theory of identity and agency in coming to learn mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 5(3), 255-266.
- Guilherme, M. (2017). Freire's philosophical contribution for a theory of intercultural ethics: A deductive analysis of his work. *Journal of Moral Education*, 46(4), 422-434.
- Guillemette, D. (2017). History of mathematics in secondary school teachers' training: Towards a nonviolent mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 349-365.
- Harré, R. (2012). Positioning theory: Moral dimensions of social-cultural psychology. En J. Valsiner (Ed.), *The Oxford handbook of culture and psychology* (pp. 191-206). Nueva York, NY: Oxford University Press.
- Harré, R. y Gillett, G. (1994). *The discursive mind*. Londres, Inglaterra: Sage.
- Harris, P. (1991). *Mathematics in a cultural context: Aboriginal perspectives on space, time and money*. Greelong, Australia: Deakin University.
- Hatle, J. D. y Salazar, B. A. (2001). Aposematic coloration of gregarious insects can delay predation by ambush predator. *Environmental Entomology*, 30(1), 51-54.
- Heath, L. T. (1908). *The thirteen books of the elements* (Vol. 1, Trad. T. L. Heath). Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Hegel, G. (1991). *The encyclopaedia logic. Part I of the encyclopaedia of philosophical sciences* (Trads. T. F. Geraets, W. A. Suchting y H. S. Harris). Indianápolis, IN: Hackett.
- Hegel, G. (1994). *Concept préliminaire de l'encyclopédie des sciences philosophiques en agrégé* (Trad. B. Bourgeois). París, Francia: Vrin.
- Hegel, G. (2001). *The philosophy of history*. Kitchener, ON: Batoche Books.
- Hegel, G. (2009). *Logic* (Trad. W. Wallace). Pacifica, CA: MIA.
- Heidegger, M. (1977). *The question concerning technology and other essays*. Nueva York, NY: Harper Torchbooks.
- Heidegger, M. (2004). *On the essence of language*. Nueva York, NY: SUNY.
- Henry, M. (1976). *Marx*. París, Francia: Gallimard.
- Herbel-Eisenmann, B. A., Wagner, D., Johnson, K., Suh, H. y Figueras, H. (2015). Positioning in mathematics education: Revelations on an imported theory. *Educational Studies in Mathematics*, 89, 185-204.

- Herodotus. (2004). *The histories* (Trad. G. C. Macaulay). Nueva York, NY: Barnes & Noble.
- Hirata, S., Morimura, N. y Houki, C. (2009). How to crack nuts: Acquisition process in captive chimpanzees (*Pan troglodytes*) observing a model. *Animal Cognition*, 12, 87-101.
- Hobbes, T. (1841). *The English works of Thomas Hobbes of Malmesbury* (Vol. 2, W. Molesworth, Ed.). Londres, Inglaterra: John Bohn.
- Horkheimer, M. y Adorno, T. W. (2002). *Dialectic of enlightenment: Philosophical fragments*. Stanford, CA: Stanford University Press.
- Høyrup, J. (2002). *Lengths, widths, surfaces: A portrait of old Babylonian algebra and its kin*. Nueva York, NY: Springer.
- Høyrup, J. (2008). The tortuous ways toward a new understanding of algebra in the Italian abacus school (14th-16th centuries). En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the joint 32nd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education and the 30th North American chapter* (Vol. 1, pp. 1-15). Morelia, México.
- Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's translation of Al-Khwarizmi's Al-Jabr: A critical edition. *Mediaeval Studies*, 48, 211-263.
- Husserl, E. (1931). *Ideas: General introduction to pure phenomenology* (Trad. W. R. Boyce Gibson, 3rd [1958] ed.). Londres, Inglaterra: George Allen & Unwin.
- Husserl, E. (1970). *Logical investigations*. Londres, Inglaterra: Routledge and K. Paul.
- Ilyenkov, E. V. (1977). *Dialectical logic*. Moscú, Rusia: Progress.
- Inwood, M. (1992). *A Hegel dictionary*. Oxford, Inglaterra: Blackwell.
- Itard, J. M. G. (1962). *The wild boy of Aveyron*. Nueva York, NY: Meredith.
- Jackson, L. (2007). The individualist? The autonomy of reason in Kant's philosophy and educational views. *Studies in Philosophy of Education*, 26, 335-344.
- Jacotot, J. (1828). *Enseignement universel, mathématiques*. Lovaina, Bélgica: G. Guelens.
- Jameson, M. H. (1977). Agriculture and slavery in classical Athens. *The Classical Journal*, 73(2), 122-145.
- Janet, P. (1929). *L'evolution psychologique de la personnalité*. París, Francia: Masson.
- Janßen, T. y Radford, L. (2015). Solving equations: Gestures, (un)allowable hints, and the unsayable matter. En *Proceedings of the 9th congress of the European society for Research in Mathematics Education (CERME)* (pp. 419-425). Praga, Chequia: Charles University.
- Jasim, S. A. y Oates, J. (1986). Early tokens and tablets in Mesopotamia: New information from Tell Abada and Tell Brak. *World Archeology*, 17(3), 348-362.

- Juzwik, M. (2004). Towards an ethics of answerability: Reconsidering dialogism in sociocultural literacy research. *College Composition and Communication*, 55(3), 536-567.
- Kant, I. (2003). *Critique of pure reason* (Trad. N. K. Smith). Nueva York, NY: Palgrave Macmillan.
- Kant, I. (2006). *Groundwork of the metaphysic of morals* (Trad. M. Gregor). Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Kant, I. (2010). *Political writings* (H. Reiss, Ed.). Nueva York, NY: Cambridge University Press.
- Kawagley, O. (1990). Yup'ik ways of knowing. *Canadian Journal of Native Education*, 17, 5-17.
- Kieran, C. (2018). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. Nueva York, NY: Springer.
- Kozulin, A., Gindis, B., Ageyev, V. y Miller, S. (2005). *Vygotsky's educational theory in cultural context*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM*, 48, 721-737.
- LaCroix, L. (2014). Learning to see pipes mathematically: Preapprentices' mathematical activity in pipe trades training. *Educational Studies in Mathematics*, 86, 157-176.
- Lancy, D. F. (1983). *Cross-cultural studies in cognition and mathematics*. Nueva York, NY: Academic Press.
- Lang, M. (1957). Herodotos and the abacus. *Hesperia*, 26(3), 271-288.
- Lang, M. (1964). The abacus and the calendar. *Hesperia*, 33(2), 146-167.
- Lang, M. (1968). Abaci from the Athenian agora. *Hesperia*, 37(2), 241-243.
- Lasprilla Herrera, A., Radford, L. y León, O. (en prensa). Formas de interacción social y aspectos éticos en actividades matemáticas escolares. En L. Radford y M. Silva Acuña (Eds.), *Ética: Entre educación y filosofía*. Bogotá, Colombia: Uniandes.
- Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Lawlor, R. y Lawlor, D. (1979). *Theon of Smirna: Mathematics useful for understanding Plato*. San Diego, CA: Wizards Bookshelf.

- Lea, H. (1990). Spatial concepts in the Kalahari. En T. Booker, P. Cobb y G. Mendicuti (Eds.). *Proceedings of the 14th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 259-266). México D. F.: PME.
- Lefebvre, H. (2009). *Dialectical materialism*. Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.
- Lefèvre, W. (1981). Rechenstein und sprache. En P. Damerow y W. Lefèvre (Eds.), *Rechenstein, experiment, sprache: Historische fallstudien zur entstehung der exakten wissenschaften* (pp. 115-169). Stuttgart, Alemania: Klett-Cotta.
- Leont'ev, A. N. (1974). The problem of activity in psychology. *Soviet Psychology*, 13(2), 4-33.
- Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Leont'ev, A. N. (2005). The genesis of activity. *Journal of Russian and East European Psychology*, 43(4), 58-71.
- Leontiev [o Leont'ev], A. N. (1968). *El hombre y la cultura: Problemas teóricos sobre educación*. México: Editorial Grijalbo.
- Leontyev [o Leont'ev], A. N. (2009a). *Activity and consciousness*. Pacifica, CA: MIA. Descargado el 29 de Agosto 2009 de <http://www.marxists.org/archive/leontev/works/activity-consciousness.pdf>.
- Leontyev, A. N. (2009b). *The development of mind*. Pacifica, CA: MIA.
- Lerman, S. (1992). The function of language in radical constructivism: A Vygotskian perspective. En W. Geeslin y K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 40-47). Durham, NH: PME.
- Lerman, S. (1996a). Guest editorial. *Educational Studies in Mathematics* (Special Issue: *Socio-cultural Approaches to Mathematics Teaching and Learning*), 31(1-2), 1-9.
- Lerman, S. (1996b). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 133-150.
- Lerman, S. (2006). Socio-cultural research in PME. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 347-366). Róterdam, Países Bajos: Sense.
- Lettvin, J. Y., Maturana, H. R., McCulloch, W. S. y Pitts, W. H. (1959). What the frog's eye tells the frog's brain. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 47(11), 1940-1951.
- Levant, A. y Oittinen, V. (2014). *Dialectics of the ideal*. Leiden, Países Bajos: Brill.
- Levi, A. W. (1974). *Philosophy as social expression*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

- Lévinas, E. (1978). *Autrement qu'être ou au-delà de l'essence*. La Haya, Países Bajos: Martinus Nijhoff.
- Lévinas, E. (1989). *The Lévinas reader* (S. Hand, Ed.). Oxford, Inglaterra: Blackwell.
- Lévinas, E. (1982). *Éthique et infini*. París, Francia: Fayard.
- Lévinas, E. (2006). *Otherwise than being or beyond essence*. Pittsburgh, PA: Duquesne University Press.
- Lévi-Strauss, C. (1962). *La pensée sauvage*. París, Francia: Plon.
- Lévy-Bruhl, L. (1922). *La mentalité primitive*. París, Francia: Presses Universitaires de France.
- Lévy-Bruhl, L. (1928). *Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures* (9th ed.). París, Francia: Librairie Félix Alcan.
- Lévy Zumwalt, R. (2019). *Franz Boas*. Lincoln, NE: University of Nebraska Press.
- Ligozat, F. y Schubauer-Leoni, M.-L. (2010). The joint action theory in didactics: Why do we need it in the case of teaching and learning mathematics? En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th conference of European research in mathematics education (CERME 6)* (pp. 1615-1624). Lyon, Francia: Institut National de la Recherche Pédagogique.
- Lizcano, E. (2009). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Madrid, España: Gedisa.
- Locke, J. (1825). *An essay concerning human understanding*. Londres, Inglaterra: Thomas Davison.
- Løgstrup, K. (1997). *The ethical demand*. Notre Dame, IN: University of Notre Dame Press.
- Luria, A. R. (1931). Psychological expedition to Central Asia. *Science*, 74, 383-384.
- Luria, A. R. (1934). The second psychological expedition to Central Asia. *Journal of Genetic Epistemology*, 41, 255-259.
- Luria, A. R. (1979). *The making of mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Macherey, P. (2008). *Marx 1845. Les thèses sur Feuerbach*. París, Francia: Éditions Amsterdam.
- MacIntyre, A. (1966). *A short history of ethics*. Nueva York, NY: Touchstone.
- MacIntyre, A. (2007). *After virtue*. Notre Dame, IN: University of Notre Dame Press.
- Maheux, J.-F. y Proulx, J. (2017). Éthique et activité mathématique. *Éducation et francophonie*, 45(1), 174-194.
- Maheux, J.-F. y Roth, M.-W. (2014). The relationality in/of teacher-student communication. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 503-529.
- Malafouris, L. (2004). The cognitive basis of material engagement: Where brain, body and culture conflate. En E. DeMarrais, C. Gosden y C. Renfrew (Eds.),

- Rethinking materiality: The engagement of mind with the material world* (pp. 53-61). Cambridge, Inglaterra: McDonald Institute Monographs.
- Malafouris, L. y Renfrew, C. (2010). The cognitive life of things: Archaeology, material engagement and the extended mind. En L. Malafouris y C. Renfrew (Eds.), *The cognitive life of things: Recasting the boundaries of the mind* (pp. 1-12). Cambridge, Inglaterra: McDonald Institute Monographs.
- Manitius, K. (1888). *Des Hypsikles Schrift Anaphorikos nach Überlieferung und Inhalt kritisch behandelt*. Dresde, Alemania: Lehmannsche Buchdruckerei.
- Markus, G. (1986). *Language and production: A critique of paradigms*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel.
- Martin, J. (2004). The educational inadequacy of conceptions of self in educational psychology. *Interchange: A Quarterly Review of Education*, 35, 185-208.
- Marx, A. y Burnham, S. (1997). *Musical form in the age of Beethoven*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Marx, K. (1904). *A contribution to the critique of political economy* (Trad. N. Stone). Chicago, IL: Charles H. Kerr.
- Marx, K. (1968). *Oeuvres. Économie II* (M. Rubel, Ed.). París, Francia: Pléiade.
- Marx, K. (1973). *Grundrisse: Introduction to the critique of political economy*. Baltimore, MD: Penguin Books.
- Marx, K. (1988). *Economic and philosophic manuscripts of 1844*. Amherst, NY: Prometheus Books.
- Marx, K. (1998). *The German ideology*. Nueva York, NY: Prometheus Books.
- Marx, K. y Engels, F. (1956). *The holy family or critique of critical critique*. Moscú, Rusia: Foreign Languages Publishing House.
- Masi, M. (1983). *Boethian number theory: A translation of the De institutione arithmetica*. Ámsterdam, Países Bajos: Éditions Rodopi.
- Matsuzawa, T., Biro, D., Humle, T., Inoue-Nakamura, N., Tonooka, R. y Yamakoshi, G. (2001). Emergence of culture in wild chimpanzees: Education by master-apprenticeship. En T. Matsuzawa (Ed.), *Primate origins of human cognition and behavior* (pp. 557-574). Tokio, Japón: Springer.
- Matusov, E. (1998). When solo activity is not privileged: Participation and internalization models of development. *Human Development*, 41, 326-349.
- Maybee, J. (2009). *Picturing Hegel*. Lanham, MD: Lexington Books.
- Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 121-142.
- Meritt, B. D. (1946). Borrowings in the Archidamian war. *The Classical Quarterly*, 40(1-2), 60-64.

- Mészáros, I. (2010). *Social structure and forms of consciousness*. Nueva York, NY: Monthly Review Press.
- Mikhailov, F. T. (1980). *The riddle of the self*. Moscú, Rusia: Progress.
- Min, A. (1998). Toward a dialectic of totality and infinity: Reflections on Emmanuel Lévinas. *The Journal of Religion*, 78(4), 571-592.
- Ministère de l'éducation de l'Ontario. (2005). *Le curriculum de l'Ontario de la 1er à la 8e année. Mathématiques*. Ottawa, ON: Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.
- Miranda, I., Radford, L. y Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 1-26.
- Moretti, V., Panossian, M. L. y Radford, L. (2018). Questões em torno da teoria da objetivação. *Obutchénie*, 2(1), 230-251.
- Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics*, 61, 219-245.
- Morgan, C. (2018). Using social semiotics to explore institutional assumptions about mathematics students and teachers. En N. Presmeg, L. Radford, M. Roth y G. Kadunz (Eds.), *Signs of signification: Semiotics in mathematics education research* (pp. 139-154). Cham, Suiza: Springer.
- Nafissi, M. (2004). Class, embeddedness, and the modernity of ancient Athens. *Comparative Studies in Society and History*, 46(2), 378-410.
- Nealon, J. (1997). The ethics of dialogue: Bakhtin and Lévinas. *College English*, 59(2), 129-148.
- Nealon, J. (1998). *Alterity politics: Ethics and performative subjectivity*. Durham, NC: Duke University Press.
- Netz, R. (1998). Greek mathematical diagrams: Their use and their meaning. *For the Learning of Mathematics*, 18(3), 33-39.
- Netz, R. (1999). *The shaping of deduction in Greek mathematics*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Netz, R. (2002). Counter culture: Towards a history of Greek numeracy. *History of Sciences*, 40(3), 321-352.
- Nicomachus of Geresa. (1924). *Introduction to arithmetic* (Trad. D'ooge; with studies in Greek arithmetic by F. E. Robbins y L. C. Karpinski). Londres, Inglaterra: Macmillan.
- Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 1-24.
- Nodari, P. C. (2010). *Sobre ética*. Caxias do Sul, Rio Grande do Sul: Educus.

- Novotný, K. (2016). Corps et affectivité dans Autrement qu'être ou au-delà de l'essence. En D. Cohen-Lévinas y A. Schnell (Eds.), *Relire Autrement qu'être ou au-delà de l'essence d'Emmanuel Lévinas* (pp. 121-133). París, Francia: Vrin.
- Ontario Ministry of Education. (2014). *Achieving excellence: A renewed vision for education in Ontario*. Ottawa, ON: Queen's Printer for Ontario.
- Otte, M. (1998). Limits of constructivism: Kant, Piaget and Peirce. *Science & Education*, 7, 425-450.
- Owens, K. (2001). Indigenous mathematics: A rich diversity. Mathematics: Shaping Australia. *Proceedings of the 18th biennial conference of the Australian Association of Mathematics Teachers, 151-167*. Descargado el 17 de febrero 2006 de <http://www.aamt.edu.au/ICSIMAN/resources/papers/owens.pdf>.
- Pais, A. (2013). An ideology critique of the use-value of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 15-34.
- Pais, A. y Valero, P. (2012). Researching research: Mathematics education in the political. *Educational Studies in Mathematics*, 80, 9-24.
- Peirce, C. S. (1931-1958). *Collected papers* (CP, Vols. 1-8). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. Nueva York, NY: W. W. Norton.
- Piaget, J. y Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. Nueva York, NY: Columbia University Press.
- Pinar, W. F. y Irwin, R. L. (2005). *Curriculum in a new key: The collected works of Ted T. Aoki*. Mahwah, NJ: Lawrence.
- Plato. (1961). *The collected dialogues of Plato including the letters* (E. Hamilton y H. Cairns, Eds.). Nueva York, NY: Pantheon Books.
- Poovey, M. (1998). *A history of the modern fact: Problems of knowledge in the sciences of wealth and society*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- Popkewitz, T. (2004). The alchemy of the mathematics curriculum: Inscriptions and the fabrication of the child. *American Educational Research Journal*, 41(1), 3-34.
- Popkewitz, T. (2009). Globalization as a system of reason: The historical possibility and the political in pedagogical policy and research. En T. Popkewitz y F. Rizvi (Eds.), *Globalization and the study of education* (pp. 247-267). Hoboken, NJ: Wiley-Blackwell.
- Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. y Kadunz, G. (2016). *Semiotics in mathematics education*. Cham, Suiza: Springer.
- Pumuge, H. M. (1975). The counting system of the Pekai-Alue tribe of the Topopul village in the Ialibu sub-district in the Southern Highlands district, Papua New Guinea. *Science in New Guinea*, 3(1), 19-25.

- Radford, L. (1995). L'émergence et le développement conceptuel de l'algèbre. En F. Lalonde, J. Jaboeuf y Y. Nouazé (Eds.), *Proceedings of the 1st European summer university "history and epistemology in mathematics education"* (pp. 69-83). Montpellier, Francia: IREM de Montpellier.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237-268.
- Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La Matematica e la sua Didattica*, 1, 4-23. (English version retrieved from <http://luisradford.ca>).
- Radford, L. (2005). The semiotics of the schema. Kant, Piaget, and the calculator. En M. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and sign: Grounding mathematics education* (pp. 137-152). Nueva York, NY: Springer.
- Radford, L. (2006). The cultural-epistemological conditions of the emergence of algebraic symbolism. En F. Furinghetti, S. Kaijser y C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the 2004 conference of the international study group on the relations between the history and pedagogy of mathematics & ESU 4* (ed. revisada, pp. 509-524). Uppsala, Suecia.
- Radford, L. (2007). Towards a cultural theory of learning. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-5)* (pp. 1782-1797). Lamaca, Chipre.
- Radford, L. (2008a). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM*, 40(2), 317-327.
- Radford, L. (2008b). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40(1), 83-96.
- Radford, L. (2008c). Culture and cognition: Towards an anthropology of mathematical thinking. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 439-464). Nueva York, NY: Routledge, Taylor and Francis.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.
- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.
- Radford, L. (2012a). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4), 117-133.
- Radford, L. (2012b). Education and the illusions of emancipation. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1), 101-118.

- Radford, L. (2013a). Sensuous cognition. En D. Martinovic, V. Freiman y Z. Karadag (Eds.), *Visual mathematics and cyberlearning* (pp. 141-162). Nueva York, NY: Springer.
- Radford, L. (2013b, noviembre 6-8). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: Hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. En A. Ramírez y Y. Morales (Eds.), *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. Santo Domingo, República Dominicana. Descargado de <http://luisradford.ca>.
- Radford, L. (2014a). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM*, 46, 349-361.
- Radford, L. (2014b). On teachers and students. En P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the joint 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the American Chapter* (Vol. 1, pp. 1-20). Vancouver, BC: PME.
- Radford, L. (2014c). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277.
- Radford, L. (2016a). The epistemic, the cognitive, the human: A commentary on the mathematical working space approach. *ZDM*, 48, 925-933.
- Radford, L. (2016b). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research*, 79, 258-266.
- Radford, L. (2017a). Mathematics education theories: The question of their growth, connectivity, and affinity. *La Matematica e la sua Didattica*, 25(2), 217-228.
- Radford, L. (2017b). On inferentialism. *Mathematics Education Research Journal*, 29, 493-508.
- Radford, L. (2018a). On theories in mathematics education and their conceptual differences. En B. Sirakov, P. de Souza y M. Viana (Eds.), *Proceedings of the international congress of mathematicians* (Vol. 4, pp. 4055-4074). Singapur: World Scientific Publishing.
- Radford, L. (2018b). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA*, 12(2), 61-80.
- Radford, L. (2018c). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). Nueva York, NY: Springer.
- Radford, L. (2018d). A plea for a critical transformative philosophy of mathematics education. En P. Ernest (Ed.), *The philosophy of mathematics education today* (pp. 1-10). Cham, Suiza: Springer.

- Radford, L. (2019). So, you say that doing math is like playing music? The mathematics classroom as a concert hall. *La matematica e la sua didattica*, 27(1), 69–87.
- Radford, L. (2020a). L'ethnomathématique au carrefour de la recolonisation et la décolonisation des savoirs. En G. Maheux, S. Quintriqueo, G. Pellerin y L. Bacon (Eds.), *La décolonisation de la scolarisation des jeunes inuit et des Premières Nations: sens et défis* (pp. 247–276). Montréal, QC: Presses de l'Université du Québec.
- Radford, L. (2020b). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. En M. Flores González, A. Kuzniak, A. Nechache y L. Vivier (Eds.), *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz n°21* (pp. 19–41). Paris, Francia: IREM de Paris.
- Radford, L. (2020c). Davydov's concept of the concept and its dialectical materialist background. *Educational studies in Mathematics*, 106, 327–342.
- Radford, L. (2020d). Play and the production of subjectivities in preschool. En M. Carlsen, I. Erfjord y P. S. Hundeland (Eds.), *Mathematics education in the early years: Results from the POEM4 conference 2018* (pp. 43–60). Cham, Suiza: Springer.
- Radford, L. (2020e). Les finalités éducatives scolaires en mathématiques: Pré-supposés, égarements et quelques pistes pour retrouver la voie. En Y. Lenoir (Ed.), *Les finalités éducatives scolaires: Une étude critique des approches théoriques, philosophiques et idéologiques* (Vol. 2, pp. 353–371). Saint-Lambert, QC: Éditions Coursus Universitaire.
- Radford, L. (2020f). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana de Matemática Educativa, RECME, Número especial de la Teoría de la Objetivación*, 5(2), 15–31.
- Radford, L. (por aparecer). Sensed objects, sensing subjects: Embodiment from a dialectical materialist perspective. En L. Edwards y C. Krause (Eds.), *The body in mathematics*. Leiden, Países Bajos: Brill | Sense.
- Radford, L. (en prensa). Corps, matière et signes dans la constitution du sens en mathématiques. En C. Houdement, C. Hache y C. de Hosson (Eds.), *Sémiotique et apprentissages scientifiques*. Paris, Francia: ISTE Editions.
- Radford, L., Arzarello, F., Edwards, L. y Sabena, C. (2017). The multimodal material mind: Embodiment in mathematics education. En J. Cai (Ed.), *First compendium for research in mathematics education* (pp. 700–721). Reston, VA: NCTM.
- Radford, L. y Barwell, R. (2016). Language in mathematics education research. En A. Gutiérrez, G. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research*

- on the psychology of Mathematics Education: The journey continues* (pp. 275-313).
Róterdam, Países Bajos: Sense.
- Radford, L. y Demers, S. (2004). *Communication et apprentissage: Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques*. Ottawa, ON: Centre franco-ontarien des ressources pédagogiques.
- Radford, L., Demers, S., Guzmán, J. y Cerulli, M. (2003). Calculators, graphs, gestures, and the production meaning. En P. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME27-PMENA25)* (Vol. 4, pp. 55-62). Honolulu, HI: University of Hawaii.
- Radford, L., Demers, S., Guzmán, J. y Cerulli, M. (2004). The sensual and the conceptual: Artefact-mediated kinesthetic actions and semiotic activity. En J. Høines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education (PME28)*. (Vol. 4, pp. 73-80). Bergen University College.
- Radford, L., Demers, S. y Miranda, I. (2009). *Processus d'abstraction en mathématiques*. Ottawa, ON: Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.
- Radford, L. y Grenier, M. (1996). Entre les idées, les choses et les symboles: Une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation*, 22, 253-276.
- Radford, L. y Lasprilla Herrera, A. (2020). De porqué la ética es ineludible de considerar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *La matematica e la sua didattica*, 28(1), 107-128.
- Radford, L. y Roth, W. (2017). Alienation in mathematics education: A problem considered from neo-Vygotskian approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 96(3), 367-380.
- Radford, L. y Sabena, C. (2015). The question of method in a Vygotskian semiotic approach. En A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 157-182). Nueva York, NY: Springer.
- Ratner, C. (2000). Agency and culture. *Journal of the Theory of Social Behaviour*, 30, 413-434.
- Ratner, C. (2015). Classic and revisionist sociocultural theory, and their analyses of expressive language: An empirical and theoretical assessment. *Language and Sociocultural Theory*, 2(1), 51-83.
- Resnick, L. y Wolff, R. (1982). Marxist epistemology: The critique of economic determinism. *Social Text*, 6, 31-72.

- Resnick, S. y Wolff, R. (2011). Persistence du Marxisme traditionnel et pertinence du marxisme surdéterministe. *Actuel Marx*, 50, 136-152.
- Ricard, M.-A. (1999). La dialectique de T. W. Adorno. *Laval Théologique et Philosophique*, 55(2), 267-283.
- Rivera, F. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Robbins, F. E. (1920). Posidonius and the sources of Pythagorean arithmology. *Classical Philology*, 15(4), 309-322.
- Robbins, F. E. (1921). The tradition of Greek arithmology. *Classical Philology*, 16(2), 97-123.
- Roberts, K. (2011). *The origin of business, money, and markets*. Nueva York, NY: Columbia University Press.
- Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking*. Oxford, Inglaterra: Oxford University Press.
- Röhrs, H. y Lenhart, V. (1995). *Progressive education across the continents*. Fráncfort del Meno, Alemania: Peter Lang.
- Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 55-62). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.
- Roth, G. (1986). Neural mechanisms of prey recognition: An example in amphibians. En M. Feder y G. Lauder (Eds.), *Predator-prey relationships: Perspectives and approaches from the study of lower vertebrates* (pp. 42-68). Chicago, IL: The University of Chicago Press.
- Roth, W.-M. (2011). *Passibility: At the limits of the constructivist metaphor*. Nueva York, NY: Springer.
- Roth, W.-M. (2013). Toward a post-constructivist ethics in/of teaching and learning. *Pedagogies*, 8(2), 103-125.
- Roth, W.-M. (2018). Translation and its consequences in qualitative social research: On distinguishing “the social” from “the societal.” *FQS*, 19(1), 1-20.
- Roth, W.-M. (2020). *Adventures of mind and mathematics*. Cham, Suiza: Springer.
- Roth, W.-M. y Radford, L. (2011). *A cultural historical perspective on teaching and learning*. Róterdam, Países Bajos: Sense.
- Rubinstein, S. L. (1983). *Problemas de psicología general* (Trad. J. M. Güell). México, D. F.: Grijalbo.
- Rugg, H. y Shumaker, A. (1969). *The child-centered school*. Nueva York, NY: Arno Press & The New York Times.
- Russon, J. (2017). *Sites of exposure: A philosophy essay on art, politics and the nature of experience*. Bloomington, IN: Indiana University Press.

- Sachs, J. (2015). Aristotle: Motion and its place in nature. En *The Internet Encyclopedia of Philosophy*. Descargado el 9 de abril de 2015 de <http://www.iep.utm.edu/>.
- Sahlins, M. (1976). *Culture and practical reason*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.
- Said, E. (1994). *Culture and imperialism*. Nueva York, NY: Vintage Books.
- Salinas, U. y Miranda, I. (2018). Relating computational Cartesian graphs to a real motion: An analysis of high school students' activity. En N. Presmeg, L. Radford, M.-W. Roth y G. Kadunz (Eds.), *Signs of signification: Semiotics in mathematics education research* (pp. 55-71). Cham, Suiza: Springer.
- Saxe, G. (2012). *Cultural development of mathematical ideas: Papua New Guinea studies*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Sayers, S. (2011). *Marx and alienation: Essays on Hegelian themes*. Hampshire, Inglaterra: Palgrave Macmillan.
- Segall, M. H., Campbell, D. T. y Herskovits, M. J. (1966). *The influence of culture on visual perception*. Indianápolis, IN: Bobbs-Merrill.
- Scheiner, T. (2020). Dealing with opposing theoretical perspectives: Knowledge in structures or knowledge in pieces? *Educational Studies in Mathematics*, 104(1), 127-145.
- Scheiner, T. y Pinto, M. (2019). Emerging perspectives in mathematical cognition: Contextualizing, complementizing, and complexifying. *Educational Studies in Mathematics*, 101(3), 57-372.
- Schmandt-Besserat, D. (1992). *Before writing: From counting to cuneiform*. Austin, TX: University of Texas Press.
- Scott, C. E. (1990). *The question of ethics: Nietzsche, Foucault, Heidegger*. Bloomington/ Indianápolis: Indiana University Press.
- Sève, L. (2008). *Penser avec Marx aujourd'hui* (Vol. 2). París, Francia: La Dispute.
- Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Shapin, S. (1994). *A social history of truth: Civility and science in seventeenth-century England*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.
- Sheets-Johnstone, M. (2011). *The primacy of movement*. Ámsterdam, Países Bajos: John Benjamins.
- Silva D'Ambrosio, B. y Espasandin Lopes, C. (2015). Insubordinação criativa: Um convite à reinvenção do educador matemático. *Bolema*, 29(51), 1-17.

- Simon, R. I. y Dippo, D. (1986). On critical ethnographic work. *Anthropology & Education Quarterly*, 17, 193-203.
- Spinoza, B. (1989). *Ethics including the improvement of the understanding* (Trad. R. Elwes). Búfalo, NY: Prometheus.
- Stetsenko, A. (2017). *The transformative mind: Expanding on Vygotsky's approach to development and education*. Nueva York, NY: Cambridge University Press.
- Stetsenko A. (2020). Critical challenges in cultural-historical activity theory: The urgency of agency. *Kul'turno-istoricheskaya psikhologiya = Cultural-Historical Psychology*, 16(2), 5-18.
- Stetsenko, A. y Arievitich, I. (1997). Constructing and deconstructing the self: Comparing post-Vygotskian and discourse-based versions of social constructivism. *Mind, Culture and Activity*, 4(3), 159-172.
- Stocking Jr., G. W. (1966). Franz Boas and the culture concept in historical perspective. *American Anthropologist, New Series*, 68(4), 867-882.
- Stocking Jr., G. W. (1982). *Race, culture, and evolution: Essays in the history of anthropology*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- Tappan, M. (1998). Sociocultural psychology and caring pedagogy: Exploring Vygotsky's "hidden curriculum". *Educational Psychologist*, 33(1), 23-33.
- Tarán, L. (1969). *Asclepius of Tralles: Commentary to Nichomachus' Introduction to arithmetic* (Vol. 59, part 4). Transactions of the American Philosophical Society.
- Taylor, C. (1989). *Sources of the self*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Tihanov, G. (1998). Vološinov, ideology, and language: The birth of Marxist sociology from the spirit of lebensphilosophie. *The South Atlantic Quarterly*, 97(3-4), 599-621.
- Toassa, G. (2014). Creating a materialistic psychology – sources and influence of Spinoza in Vygotsky's works. *International Journal of Liberal Arts and Social Science*, 2(5), 83-94.
- Todorov, T. (1984). *The conquest of America: The question of the other*. Nueva York, NY: Harper Perennial.
- Todorov, T. (2000). *Éloge de l'individu*. París, Francia: Adam Biro.
- Tulviste, P. (1991). *The cultural-historical development of verbal thinking*. Nueva York, NY: Nova Science.
- Turner, V. (1988). *The anthropology of performance*. Nueva York, NY: PAJ.
- Underhill, J. W. (2009). *Humboldt, worldview and language*. Edimburgo, Escocia: Edinburgh University Press.
- Vadeboncoeur, J. (2017). *Vygotsky and the promise of public education*. Nueva York, NY: Peter Lang.

- Valero, P. (2004). Postmodernism as an attitude of critique to dominant mathematics education research. En P. Walshaw (Ed.), *Mathematics education within the postmodern* (pp. 35-54). Greenwich, CT: Information Age.
- Valero, P. (2009). Mathematics education as a network of social practices. En *Proceedings of the 6th conference of European research in mathematics education (CERME 6)*. Lyon, Francia. Descargado el 10 de diciembre de 2010 de <http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/plenary2-valero.pdf>.
- Valero, P. y Knijnik, G. (2015). Governing the modern, neoliberal child through ICT research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 35(2), 34-39.
- van der Veer, R. y Valsiner, J. (1994). *The Vygotsky reader*. Oxford, Inglaterra: Blackwell.
- Ver Eecke, P. (1959). *Diopante d'Alexandrie. Les six livres arithmetiques et le livre des nombres polygones*. Lieja, Bélgica: Desclée de Brower.
- Veresov, N. (1999). *Undiscovered Vygotsky: Etudes on the pre-history of cultural-historical psychology*. Frankfurt, Alemania: Peter Lang.
- Veresov, N. (2017). The concept of perezhivanie in cultural-historical theory: Content and contexts. En M. Flear, F. González Rey y N. Veresov (Eds.), *Perezhivanie, emotions and subjectivity: Advancing Vygotsky's legacy* (pp. 47-70). Singapur: Springer Nature Singapore.
- Vernant. (1993). *L'homme Grec*. París, Francia: Éditions du seuil.
- Viète, F. (1983). *The analytic art* (Trad. T. R. Witmer). Nueva York, NY: Dover.
- Vivier, L. (2020). Portée et usage du travail mathématique dans le cadre de la théorie des ETM. En M. Flores González, A. Kuzniak, A. Nechache y L. Vivier (Eds.), *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz, n°21* (pp. 57-70). París, Francia: Université Paris Diderot.
- Vološinov, V. N. (1973). *Marxism and the philosophy of language*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Londres, Inglaterra: Falmer Press.
- von Humboldt, W. (1998). *On language: The diversity of human language-structure and its influence on the mental development of mankind*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Vygotsky, L. S. (1929). The problem of the cultural development of the child. *Journal of Genetic Psychology*, 36, 415-434.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotsky, L. S. (1979). Consciousness as a problem in the psychology of behavior. *Soviet Psychology*, 17(4), 3-35.

- Vygotsky, L. S. (1987). *Collected works* (Vol. 1, R. Rieber y A. Carton, Eds.). Nueva York, NY: Plenum Press.
- Vygotsky, L. S. (1993). *Collected works* (Vol. 2, R. Rieber y A. Carton, Eds.). Nueva York, NY: Plenum Press.
- Vygotsky, L. S. (1994). The problem of the environment. En R. van der Veer y J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky reader* (pp. 347-348). Oxford, Inglaterra: Blackwell.
- Vygotsky, L. S. (1997a). *Collected works* (Vol. 4, R. Rieber, Ed.). Nueva York, NY: Plenum Press.
- Vygotsky, L. S. (1997b). *Educational psychology*. Boca Ratón, FL: St. Lucie Press.
- Vygotsky, L. S. (1997c). *Collected works* (Vol. 3, R. Rieber y J. Wollock, Eds.). Problems of the theory and history of psychology. Nueva York, NY: Plenum Press.
- Vygotsky, L. S. (1998). *Collected works* (Vol. 5, R. Rieber, Ed.). Nueva York, NY: Plenum Press.
- Vygotsky, L. S. (1999). *Collected works* (Vol. 6, R. Rieber, Ed.). New York, NY: Plenum Press.
- Vygotsky, L. (2004). Imagination and creativity in childhood. *Journal of Russian and East European Psychology*, 42(1), 7-97.
- Vygotsky, L. S. y Luria, A. (1994). Tool and symbol in child development. En R. V. D. Veer y J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky reader* (pp. 99-174). Oxford, Inglaterra: Blackwell.
- Walkerdine, V. (1997). Redefining the subject in situated cognition theory. In D. Kirshner y J. A. Whitson (Eds.), *Situated cognition* (pp. 57-70). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Walshaw, M. (2013). Post-structuralism and ethical practical action: Issues of identity and power. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(1), 100-118.
- Wartofsky, M. (1979). *Models, representation and the scientific understanding*. Dordrecht, Países Bajos: D. Reidel.
- Wartofsky, M. (1984). The paradox of painting: Pictorial representation and the dimensionality of visual space. *Social Research*, 5(4), 863-883.
- Watson, A y Ohtani, M. (2015). *Task design in mathematics education. An ICM study 22*. Cham, Suiza: Springer.
- Will, R. (2004). *The characteristic symphony in the age of Haydn and Beethoven*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Williams, J. (2016). Alienation in mathematics education: Critique and development of neo-Vygotskian perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 92, 59-73.

- Williams, R. (1953). The idea of culture. *Essays in Criticism*, 3(3), 239-266.
- Williams, R. (2005). *Culture and materialism*. Londres, Inglaterra: Verso.
- Wood, C. (1991). Introduction. En E. Panofsky (Ed.), *Perspective as symbolic form* (pp. 7-24). Nueva York, NY: Zone Books.
- Worsley, P. M. (1956). The kinship system of the Tallensi: A revaluation. *The Journal of the Royal Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*, 86(1), 37-75.
- You, H. (1994). Defining rhythm: Aspects of an anthropology of rhythm. *Culture, Medicine and Psychiatry*, 18, 361-384.
- Zaporozhets, A. V. (2002a). Problems in the psychology of activity. *Journal of Russian and East European Psychology*, 40(4), 47-52.
- Zaporozhets, A. V. (2002b). The development of sensations and perceptions in early and preschool childhood. *Journal of Russian and East European Psychology*, 40(3), 22-34.
- Zavershneva, E. (2010). The way of freedom (On the publication of documents from the family archive of Lev Vygotsky). *Journal of Russian and East European Psychology*, 48(1), 61-90.
- Zelnick-Abramovitz, R. (2009). Freed slaves, their status and state control in Ancient Greece. *European Review of History—Revue européenne d'histoire*, 16(3), 303-318.
- Zevenbergen, R. (1996). Constructivism as a liberal bourgeois discourse. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 95-113.

Índice

A

abstracto/concreto, 1, 51, 58, 59, 60, 63, 67, 139, 191, 218, 232, 235, 249, 253, 268

actividad, 1, 17, 23, 25, 32, 34-41, 43, 45, 46, 51, 62-64, 66-68, 70, 71, 73-75, 78, 81-85, 96-99, 102, 103, 105, 107-115, 118, 121, 123-131, 134, 135, 137-140, 143, 144, 151, 156, 158-160, 163-165, 168, 169, 178, 179, 184, 185, 189, 202, 205-207, 220, 227-229, 236, 239, 248, 250, 271-273, 276, 280

actualidad, 52, 67, 73, 270

agencia, 85, 193, 202, 229, 233, 234, 253

agéntico, 202, 228, 229

Aktivität, 36, 42, 73

alcancia, 3, 4, 6, 9, 15, 17, 18, 25, 29, 38, 41, 43, 44, 55, 64, 98, 99, 106, 107, 112, 113, 120, 123, 129, 130, 165, 166, 274

al-gabr, 238, 239

álgebra, 55, 90, 120, 129, 131, 160, 196, 238, 245

alienación, 254, 272, 274

al-muquabala, 238, 239, 243, 244, 246

alteridad, 38, 258, 263, 264, 268-270, 277, 278

antiguos griegos, 9-11, 195

Arendt, H., 48, 258

Aristóteles, 9, 10, 52, 73, 169, 206, 208, 209, 212, 216, 218, 257, 268

artefactos, 7, 21, 24, 29, 32, 33, 35-38, 43, 62, 64, 65, 68, 72, 73, 78, 80, 81, 96, 105, 106, 108, 122, 151, 164, 220, 275

Arzarello, F., 24, 40, 151

asimilación, 22

Atweh, B., 21, 24, 255

autenticidad, 97

autonomía, 14, 16-18, 20, 27, 221, 255, 256, 259, 280

autoridad, 231, 233, 247, 248, 256, 258, 278

B

Bacon, F., 10

Bakhtin, M., 22, 24, 30, 31

- Bartolini Bussi, M., 22, 24
 Bednarz, N., 55
 Bishop, A., 23, 24
 Blunden, A., 63
 Boas, F., 195-197, 220
 Boero, P., 24
 Brousseau, G., 13, 15-17, 19, 20, 48, 260
 Brown, T., 28
- C**
 Cantoral, R., 22
 carnaval, 31
 carne, 139, 262, 263, 265
 chimpancé, 53, 89, 90, 95
 Cobb, P., 13, 14, 18, 20, 43, 89, 226
 cognición sensual, 40, 41, 133, 135, 158, 159
 complejidad conceptual, 165-167, 176, 177, 180, 184, 185
 compromiso, 44, 221, 256, 277
 concepto, 14, 16, 19, 21, 24-28, 32, 34-38, 40, 41, 44, 47-50, 52, 60, 62, 67, 75, 77-79, 81-87, 89, 93, 95-97, 100-103, 105, 108, 109, 111, 113, 121, 126-128, 130, 131, 133, 138, 139, 151, 158, 159, 166, 175, 182, 192, 194, 200, 202-204, 208, 219, 221, 225-227, 232, 234, 235, 248, 249, 267, 281, 282
 conflicto, 156, 192, 194, 197, 198, 202, 221
 conocimiento, 1, 10, 14, 21, 47-51, 53, 55, 57, 59, 61, 63-69, 71-75, 77, 92, 94, 98, 104, 105, 111, 121, 128-130, 136, 141, 255
 consciencia, 33, 34, 36, 38, 43, 61, 63, 64, 70, 71, 82, 83, 86, 87, 92, 93, 96-103, 105, 107, 108, 112-114, 117, 118, 120-125, 127-131, 138, 139, 146, 155, 156, 159, 160, 165, 176, 178-180, 184, 194, 201, 223, 239, 251, 261-263, 269
 constructivismo, 13, 14, 17-20, 26, 39, 49, 227, 254, 256, 279
 contracción semiótica, 105, 125, 126, 130, 150, 154, 158
 contradicción, 27, 114, 115, 137, 222
 contrato, 17, 230, 260, 280
 contrato didáctico, 17
 crítica, 23, 26, 39, 49, 87, 97, 102, 137, 147, 201, 238, 244, 246, 251, 267, 273, 276, 279
 cuerpo, 36, 39, 41, 43, 64, 96, 103, 116, 123, 127, 133-135, 139, 158, 159, 169, 218, 261, 263, 274, 275
 cuidado del Otro, 277
 cultura, 1, 20, 22-24, 30, 31, 39, 41, 43, 48-52, 54, 60, 64, 66, 71-73, 75, 78, 80, 84, 86-90, 95, 99, 103, 105, 127, 128, 135-137, 143, 158, 159, 191-205, 208, 216, 218, 220-222, 228, 229, 232, 234-236, 249, 259, 278, 282
- D**
 D'Ambrosio, U., 23, 270
 D'Amore, B., 73
 Davydov, V. V., 109, 110, 126
 deícticos, 123, 150, 151
 devenir, 30, 32, 36, 44, 45, 101, 159, 225, 226, 228, 232, 235, 236, 249
deyatel'nost', 36, 44, 73
 Dicho, 25, 46, 169, 266
 diferencia, 31, 38, 44, 49, 50, 55, 57, 59, 68, 72, 78, 85, 93, 130, 137,

- 142, 176, 182, 196, 214, 221,
234, 236
- diferencias culturales, 192, 194, 195,
197, 220, 222
- dignidad humana, 267, 280
- diseño de tareas, 163-167, 169, 171,
173, 175, 177, 179, 181, 183, 185,
187, 189
- E**
- Eagleton, T., 135, 193, 194, 199, 201,
205, 221, 223
- educación matemática, XIII, XIV, XVII,
1, 3, 12, 13, 18-21, 23, 30, 44, 45,
47-49, 133, 225, 256, 281, 282
- Elkonin, D. B., 109
- emancipación, 234, 255, 259
- empatía, 243
- empirismo, 10, 59, 134-136, 263
- encarnación, 9, 32, 222
- Engeström, Y., 36
- enseñanza transmisiva, 107, 113
- Ernest, P., 14, 255
- esclavitud, 209, 216
- esclavos, 208, 209, 212, 213, 218, 235
- espacio agéntico, 16, 229, 230, 232,
249, 251
- esperanza, 47, 282
- estética, 29, 31, 34, 39, 126, 156
- ética, 1, 44, 46, 49, 108, 167, 203, 221,
232, 236, 253-257, 259-271, 273,
275-282
- ética comunitaria, 44, 46, 254, 270,
271, 277, 281, 282
- Euclides, 196, 206-208, 214, 215, 218-
220, 222
- experimento científico, 10
- expresividad, 31, 96, 103, 265, 272
- F**
- fantasía, 191, 234
- Feuerbach, L., 40, 59, 85, 136-139,
202, 234
- filogénesis, 24
- formas de colaboración humana, 44,
67, 163, 164, 167, 169, 255, 256,
278, 279
- formas de producción de saberes, 36,
43, 45, 98, 167
- formas platónicas, 53, 54, 55
- Freire, P., 44, 234, 254, 256, 269,
271, 282
- funciones psicológicas superiores, 81,
85, 86
- G**
- Gal'perin, P. I., 81, 82, 101
- Gegenstand*, 93, 95-97, 101, 113, 122,
130, 137, 143
- generalización de patrones, 55
- gestos, 7, 9, 29, 41, 43, 68, 119, 123,
125, 130, 134, 148, 150-156, 159,
160, 247, 275
- Godino, J., 27
- H**
- Hegel, G., 19, 29, 52, 62, 71, 73, 87,
89, 93-95, 103, 134, 282
- Heidegger, M., 10, 126, 130
- Hobbes, T., 254, 257, 259-261, 279,
280
- homo economicus*, 198, 199, 221
- homo symbolicus*, 198, 199, 221
- I**
- idealismo, 89, 134, 134, 137-139, 263,
282

- ilustración, 19, 87, 193, 233, 280
- Ilyenkov, I., 19, 58, 63, 102, 135, 203
- imaginación, 46, 60, 91, 151, 254, 270, 281
- imitación, 101, 256
- imperativo categórico, 257-259, 261, 280
- inferencialismo, 19
- interacción, 8, 9, 16, 24, 27, 44, 49, 67, 86, 108, 116, 155, 167, 203, 226, 239, 248, 251, 255, 256, 271, 278, 282
- internalización, 34, 77, 79-86
- interpretación, 11, 14, 31, 74, 78, 167, 168, 171, 172, 184, 247
- intersubjetividad, 22, 24, 46, 49
- K**
- Kant, I., 14, 19, 49, 87, 89, 93, 94, 126, 129, 141, 147, 225, 226, 254, 257-259, 261, 279, 280
- Kieran, C., 55
- L**
- labor conjunta, 25, 32, 36-39, 41, 43-46, 64, 65, 99, 100, 105, 112, 113, 117, 118, 121, 122, 125, 150, 160, 184, 248, 271-273, 277, 281, 282
- lenguaje, 9, 11, 17, 21, 23-25, 29-33, 36, 37, 43, 51, 55, 62, 65, 68, 70, 80, 99, 103, 123, 125, 127, 129, 130, 141, 160, 195, 203, 243, 264-268, 280
- Leont'ev, A. N., 19, 35, 37, 97, 98, 109, 135, 202, 273,
- Lerman, S., 23, 24, 26, 49
- Lévinas, E., 234, 235, 254, 257, 261-265, 267, 268, 277, 279-282
- leyes genéticas del desarrollo cultural, 34, 80, 84
- libertad, 127, 193, 209, 212, 216, 226, 227, 256, 258, 259, 280
- M**
- Mariotti, A., 22, 24
- Marx, K., 39, 40, 59, 60, 71, 72, 85, 102, 136-140, 147, 201, 202, 232, 234, 269, 271-273, 277, 282
- materia, 18, 36, 40, 52, 61, 110, 134, 159, 203, 226, 228, 232, 249, 263
- materialismo dialéctico, 1, 19, 25, 44, 58, 59, 62, 85, 102, 103, 114, 127, 135, 232, 253, 255
- mediación, 23, 24, 34, 63, 65, 67, 71, 89, 111, 199, 254, 268
- medios semióticos de objetivación, 105, 122, 123, 130, 151
- método, 9-12, 34, 80-82, 114, 156, 160, 226
- metodología, 3, 12, 15, 17, 193
- Morgan, C., 24
- multiculturalismo, 222
- multilingüismo, 222
- multimodal, 46, 133, 151
- música, 29, 37, 47, 70-72, 75, 122, 204, 276
- N**
- negación, 14, 208, 216, 222
- nodo semiótico, 125, 130, 151
- O**
- objectare*, 95
- Objekt*, 93-97, 101, 112, 122, 130, 137, 143

- Objeto, 40, 43, 50, 58, 64, 70, 74, 82, 93, 95-97, 99, 101, 102, 105, 108-110, 113, 121, 122, 124
- objetivación, 1, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18-41, 43-48, 50-52, 54, 56, 58, 60, 62-64, 66-68, 70, 71, 73-75, 77-80, 82, 84, 86, 87, 88-90, 92-131, 133-136, 138, 140, 142, 144, 146-148, 150-152, 154-156, 158-160, 163, 164, 166-168, 170, 172, 174, 176, 178, 180, 182, 184, 186, 188, 192, 194, 196, 198, 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214, 216, 218, 220, 222, 225, 226, 228-230, 232, 234, 236, 238, 240, 242, 244-246, 248, 250, 252-254, 256-258, 260, 262, 264, 266, 268, 270-274, 276-278, 280, 281, 282
- obra común, 29, 38, 43, 45, 64, 121, 167, 276, 277
- ontogénesis, 24
- ontología, 264, 268
- ontológico, 36, 264, 271
- Otro, 22, 45, 52, 99, 102, 125, 167, 254, 261-266, 268, 269, 275, 277, 280, 281
- P**
- Pais, A., 28, 250
- participación periférica legítima, 78
- pedagogía centrada en el niño, 25, 103, 113
- pensamiento matemático griego, 192, 194, 199, 205-207, 217, 221
- percepción, 29, 41, 46, 65, 81, 91, 92, 99, 123, 129, 140-147, 150, 151, 158-160, 195, 203, 213
- perezhivanie*, 84
- Piaget, J., 10, 11, 14, 15, 19, 49, 78, 79, 88, 227, 249
- Platón, 216, 218-220, 222, 228, 268
- poder, 30, 62, 199, 200, 205, 219, 233, 234, 255, 256, 258, 260, 262, 269, 272, 278, 282
- poético, 155, 156, 160
- polis*, 208, 209, 212-214, 217, 221, 222, 228
- política, 60, 88, 199, 201, 203, 209, 218, 221, 223, 231, 250, 254, 268, 270, 281
- posicionamiento, 98, 103, 228, 236, 250
- potencialidad, 52, 61, 62, 67, 68, 71, 73, 86, 92
- praxis, 137-139, 234
- preguntas de investigación, 3, 8, 12
- Presmeg, N., 34, 36, 69, 86, 252
- profesor, XIII, XVI, 8, 9, 15, 41, 64, 98, 106, 108, 111, 118, 125, 151
- como patriarca, XVI, 28, 248, 277
- concepto de, 16-19, 21, 25-30, 38, 42-43, 70, 73, 99, 105, 112, 121, 122, 124, 130, 226, 228, 236
- progresismo, 227
- R**
- racionalidad, 11, 88, 197, 237, 248, 251, 259
- Ratner, C., 192, 229
- raza, 192, 196, 220, 223
- razón, 5, 19, 28, 49, 87, 94, 101, 135, 142, 144, 147, 176, 177, 181, 208, 211, 212, 216, 217, 226, 227, 242, 250, 257-259, 266, 267, 270, 279, 280

- realidad, 13, 14, 17, 31, 75, 85, 98, 102, 136-140, 159, 194, 203, 214, 229, 251, 255
- reificación, 95, 102
- resistencia, 31, 95, 193, 194
- responsabilidad, 46, 73, 170, 251, 255, 261-263, 270, 273-275, 277
- ritmo, 36, 37, 72, 123, 130, 155, 156, 160, 275
- Roth, W.-M., 26, 34, 36, 49, 74, 85, 86, 109, 140, 252, 255, 272
- Rubinstein, S. L., 19, 278
- S**
- Saber, 48, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73-75, 104, 206
- sensibilidad, 137-141, 263, 265, 266, 277
- Ser, 94, 225, 232, 235, 236, 249, 256, 262, 264, 266, 267, 268
- Sfard, A., 19, 22, 24, 32
- signos, 21, 22, 24, 32-37, 41, 43, 50, 62, 66, 74, 80, 81, 88, 105, 122, 125, 129, 151, 160, 161, 205, 237, 238, 252, 265, 280
- sistemas semióticos de significación cultural, 228, 229, 255
- situación fundamental, 16
- sobredeterminación, 74, 75, 203-205, 217, 221, 222
- solidaridad, 46, 73, 167, 170, 255, 266, 270, 273, 278, 282
- Spinoza, B., 39, 82, 127, 232
- subjetividad, 32, 39, 84, 85, 136, 228, 232, 235, 236, 248, 249, 253, 262, 263, 277
- subversión, 73, 234
- T**
- Tätigkeit*, 36, 62, 64, 67, 73, 139, 271, 272, 273
- tensión, 12, 31, 259
- teoría de situaciones didácticas, 3, 13, 33, 48
- Todorov, T., 22, 227
- trabajo humano, 53, 60
- U**
- unidad conceptual y contextual, 165, 166, 170, 174, 175, 184, 185
- V**
- Valero, P., 28, 49, 250
- verdad, 102, 136, 191, 199, 218-220, 229, 231, 237, 239, 244, 249, 262, 266, 274
- Veresov, N., 83, 84
- Voloshinov, V. N., 30, 31
- voz, 116, 118, 154, 215, 236, 248
- vulnerable, 248, 274
- Vygotsky, L. S., 12, 19, 23, 24, 26, 27, 33-35, 37, 44, 49, 50, 60-62, 77, 79-86, 97, 103, 127, 135, 147, 194, 195, 202, 232, 233, 282
- W**
- Weltanschauung*, 9
- Williams, J., 26, 194, 199-202, 221
- Williams, R., 26, 194, 199-202, 221
- Y**
- yo como exceso, 234,
- yo como carencia, 233
- Z**
- Zaporozhets, A. V., 84, 150

*La teoría de la objetivación. Una perspectiva vygotskiana sobre saber
y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas
se compuso en caracteres Bembo Std y Saira.*

MARZO 2023