Artículo de investigación

¿Qué constituye una buena clase de matemáticas?

Luis Radford

Laurentian University

Ontario, Canadá

En memoria del matemático y educador guatemalteco Bernardo Morales

Resumen

El objetivo de este artículo es presentar una indagación teórica sobre lo que puede entenderse como "una buena clase de matemáticas". Esta indagación se basa en investigaciones de campo realizadas en algunas clases de jardines infantiles, escuelas primarias y secundarias de diferentes escuelas públicas de Ontario, Canadá. En la primera parte del artículo se presentan dos modelos de enseñanza ampliamente difundidos en Canadá y se discuten sus limitaciones. Al evidenciar estas limitaciones, se abre la posibilidad de reimaginar lo que puede considerarse una buena clase de matemáticas. Para lograrlo, ha sido necesario repensar el concepto de aprendizaje, así como el concepto mismo de saberes matemáticos. Inspirándose en la filosofía del materialismo dialéctico y, en particular, en la obra de Lev Vygotsky y Paulo Freire, esta reconceptualización se aborda en la segunda parte del artículo. En la tercera y última parte se presenta un ejemplo de una clase de secundaria.

Palabras clave: aprendizaje, saber matemático, actividad de enseñanza-aprendizaje, ética, teoría de la objetivación.

Abstract:

The purpose of this paper is to present a theoretical inquiry into what can be understood as a "good mathematics lesson". The theoretical inquiry is based on field research conducted in kindergarten, elementary, and secondary school classrooms in Ontario's public education system. In the first part of the article, two teaching models widely used in Canada are presented and their limitations are discussed. Highlighting these limitations opens a window to the possibilities of reimagining what a good mathematics lesson can be. To do so, however, it has been necessary to rethink the concept of learning, as well as the very concept of mathematical knowledge. Drawing inspiration from the philosophy of dialectical materialism and, in particular, from the work of Lev Vygotsky and Paulo Freire, this theoretical reconceptualization is addressed in the second part of this article. In the third and last part, an example from high school mathematics is presented.

Keywords: learning, mathematical knowledge, teaching-learning activity, ethics, theory of objectification.

Introducción

El objetivo de este artículo es presentar una indagación teórica sobre lo que puede entenderse como "una buena clase de matemáticas". Es decir, identificar aquello que se reconoce como "bueno" en lo que *hacen* el profesor y los estudiantes durante el tiempo asignado por la institución educativa a las matemáticas.[1]

La investigación que aquí se presenta, motivada por mi labor como formador de futuros profesores, se ha nutrido de investigaciones didácticas de campo realizadas durante más de veinte años en escuelas públicas en Ontario, Canadá. En esas investigaciones los profesores de las clases estudiadas se han unido a mi equipo de investigación, contribuyendo a la elaboración conjunta de la idea de lo que podría ser una "buena clase de matemáticas". Como resultado de esas investigaciones han surgido una serie de conceptos que están temáticamente organizados en lo que hemos denominado la teoría de la objetivación (Radford, 2023a).

En la primera parte del artículo se exponen dos modelos de enseñanza ampliamente difundidos en el entorno educativo norteamericano, así como los problemas asociados a ellos. Precisamente, el intento de resolver estos problemas nos ha llevado a reimaginar lo que puede ser una buena clase de matemáticas. En el curso de nuestras investigaciones, nos dimos cuenta de que, para lograr nuestro objetivo, era necesario repensar los conceptos de aprendizaje y saberes matemáticos. Esta reconceptualización se aborda en

[1] El uso del masculino en este artículo tiene como única finalidad simplificar el texto.

la segunda parte del artículo. Por último, en la tercera parte se presenta un ejemplo de una clase de matemáticas en la escuela secundaria.

Una alternativa a la enseñanza magistral

Detrás de la expresión "el profesor 'da' una clase", aparentemente inofensiva, se oculta una visión de la educación como un proceso que va *desde el* profesor *hacia* el estudiante. El profesor asume una posición de poder desde el principio. Se presenta como poseedor del saber que será "entregado" a los estudiantes a través de ciertas acciones. El estudiante observa y contempla al profesor para luego imitar y repetir sus acciones. El educador brasileño Paulo Freire (1970) criticó ampliamente esta visión de la educación, a la que denominó educación bancaria, pues reduce el papel del estudiante a un simple receptor pasivo. Esta pedagogía oprime al estudiante al privarlo de cualquier posibilidad de acción e imaginación, y lo subordina al profesor, quien se presenta como el patriarca del saber. El problema al que nos enfrentamos en nuestras investigaciones de campo fue precisamente buscar una alternativa a este enfoque de enseñanza: la enseñanza magistral.

Una alternativa a la enseñanza constructivista

La enseñanza magistral no es la única opción. También está la enseñanza constructivista. Mientras que la enseñanza magistral se basa en la psicología conductivista, que postula que el aprendizaje ocurre a través de la repetición de acciones, la enseñanza constructivista se inspira en la psicología de Jean Piaget (1970), que sostiene que el aprendizaje surge de la adaptación y reorganización de las acciones individuales. La enseñanza constructivista ha dado lugar a diversas corrientes (constructivismo radical, socioconstructivismo, corporalidad, etc.).

Sin embargo, hablar de enseñanza constructivista es un oxímoron, es decir, una contradicción. En las aproximaciones constructivistas, el profesor no enseña, ya que se supone que el estudiante aprende por sí mismo. Este enfoque de aprendizaje fue impulsado a principios del siglo XX (Rohrs y Lenhart, 1995) por el movimiento pedagógico conocido como *progresivismo* y que dio lugar a modelos de aprendizaje centrados en el estudiante. "Dar" una "buena" clase en el sentido constructivista sería crear las condiciones pedagógicas para que los estudiantes generen *sus* propias ideas matemáticas, en pleno ejercicio de su libertad y autonomía. En este contexto, el profesor *no debe* interferir en las reflexiones del estudiante, pues podría influir en sus elecciones y privarlo de la libertad de tomar sus propias decisiones.[2]

Históricamente, el constructivismo surgió como respuesta a la enseñanza magistral y se presenta como su antítesis. Sin embargo, el problema con la enseñanza constructivista es que, al centrarse en promover la libertad y autonomía del estudiante, reproduce la sociedad individualista en la que lamentablemente vivimos. Aunque el constructivismo valora la interacción y la comunicación entre estudiantes, promueve en el fondo un aprendizaje individualista. La interacción y la comunicación son *medios* al alcance del estudiante para lograr sus propios intereses. El saber matemático que cada estudiante produce en clase es puramente personal y subjetivo. No hay forma de ponerlo en diálogo con los saberes histórico-culturales de la sociedad en que vivimos.

Pensando el aprendizaje como proceso histórico-cultural

Ha sido a través de la confrontación con las limitaciones de los modelos magistrales y constructivistas que, tomando apoyo en la obra de Lev Vygotsky y Paulo Freire, hemos logrado articular una concepción del aprendizaje que intenta considerar sus dimensiones históricas y culturales (Radford, 2018). Considerar estas dimensiones no implica simplemente verlas como un telón de fondo, sino integrarlas *orgánicamente* en las explicaciones *teóricas y prácticas* que ofrecemos sobre el aprendizaje.

El psicólogo ruso Lev Vygotsky (1987) y sus colaboradores demostraron la influencia de la cultura en la cognición humana. A través de investigaciones teóricas y empíricas, mostraron el papel del lenguaje, los artefactos culturales y la interacción con otros en el desarrollo de la cognición humana.

Nuestra concepción del aprendizaje como proceso histórico-cultural se basa en la escuela histórico-cultural de Vygotsky y, como veremos más adelante, en la filosofía de la educación de Paulo Freire (1970).

La concepción del aprendizaje que proponemos se fundamenta en dos características clave.

[2] En una visita a Chile, en la ruta que va de Santiago a Valparaíso, un colega educador chileno me contaba la historia de un sacerdote, profesor de escuela secundaria, que libraba internas batallas por retenerse y no dar las respuestas a los estudiantes. Este profesor se comportaba como “buen” profesor constructivista.

La primera característica es que los saberes matemáticos implicados en el aprendizaje, como la representación cartesiana del movimiento de los cuerpos o las concepciones sobre número, son saberes que han sido constituidos histórica y culturalmente.

La segunda característica destaca que el aprendizaje escolar de esos saberes ocurre en el contexto de una *actividad* cuya *organización, sentido* y *despliegue* es de naturaleza histórica y cultural.

La primera característica expresa la idea de que los saberes matemáticos no son entidades psicológicas subjetivas, sino entidades histórico-culturales. Esto nos aleja de las corrientes constructivistas que consideran que el saber matemático es puramente subjetivo e individual, y que reside únicamente en la mente de los individuos. El filósofo Evald Ilyenkov (1977) argumentaba que, si abriéramos el cráneo, no encontraríamos allí conceptos (como el concepto de rojo u otro concepto); sino sangre, tejido neuronal, etc.

La segunda característica enfatiza la idea central de nuestra aproximación: si queremos comprender el aprendizaje, debemos observar, estudiar, analizar y comprender la *actividad* en la que ocurre.

A partir de estas dos características se desprende la idea de que no es el profesor quien "da" el saber a los estudiantes (enseñanza magistral), ni son los estudiantes quienes se "dan" el saber a sí mismos (enseñanza constructivista). Es la *actividad conjunta entre profesores y estudiantes* la que "da" el saber a todos. Sin embargo, ¿cómo sucede? Para responder a esta pregunta, debemos explicar con mayor detalle el concepto de saber.

Una reconceptualización del saber matemático

Hemos abordado teóricamente la idea de saber, apoyándonos en conceptos de una filosofía poco conocida, pues el pensamiento occidental ha sido dominado por filosofías racionalistas, empiristas y subjetivistas. La filosofía a la que nos referimos aquí es el materialismo dialéctico, basado en la obra del siglo XIX de Georg Wilhelm Hegel (para una traducción moderna, ver Hegel, 2009).[3] Inspirándonos en su obra, concebimos el saber

[3] Hegel elaboró una nueva concepción de la dialéctica muy diferente de las dialécticas de Platón, Aristóteles y Kant (para una discusión detallada, ver, por ejemplo, Pagès, 2015). La dialéctica hegeliana sirvió de base para el desarrollo de lo que se conoce hoy como materialismo dialéctico, el cual, conservando las ideas clave de negación, mediación y sublación (*sublation*) depuró la dialéctica hegeliana del idealismo que la acompañaba (ver, por ejemplo, Ilyenkov, 1977; Marx, 1988).

como un *sistema: un sistema dinámico* compuesto por formas histórico-culturales de pensamiento, acción y reflexión.

Esta concepción del saber nos lleva a teorizar el aprendizaje como la adquisición de esas formas. Por tanto, no se trata de aprender a demostrar teoremas geométricos específicos, sino de aprehender o comprender una forma histórico-cultural de pensamiento geométrico, como por ejemplo, una forma deductiva de pensar las figuras. Del mismo modo, no se trata de aprender a calcular la probabilidad de eventos específicos, sino de comprender el azar desde una racionalidad específica, que puede implicar un cálculo de probabilidades, pero que va más allá de eso.

Desde de esta postura teórica, el *modo de existencia del saber* no es idealista (que concibe el saber como una entidad psicológica que reside en la mente), ni tampoco es platónica (que supone que el saber trasciende las culturas). En nuestra aproximación, el *modo de existencia del saber* no es transcendente, sino inmanente a la cultura. Al igual que el lenguaje, el saber se produce, se reproduce, se expande y se manifiesta en las actividades de la cultura.

Estas ideas nos permiten comprender el sentido de la expresión mencionada anteriormente: es a través de la *actividad conjunta de profesores y estudiantes* que se “da” el saber a todos. Ese “dar” debe entenderse como una revelación o manifestación. En otras palabras, el saber emerge de la *interacción entre profesores y estudiantes* en la clase de matemáticas.

Hemos alcanzado un punto crucial en la ontología de las matemáticas con importantes implicaciones para el concepto de aprendizaje. En efecto, estamos afirmando que las matemáticas son formas histórico-culturales de pensamiento, acción y reflexión, y lo que los estudiantes aprenden son precisamente esas formas, que se revelan, manifiestan y aparecen a través de la actividad conjunta. En la siguiente sección profundizaremos en esta idea de manifestación del saber.

La manifestación del saber

El saber *en sí mismo* corresponde a una categoría ontológica que Hegel denomina “general” (Hegel, 2009). Para convertirse en objeto de aprendizaje, el saber debe manifestarse; debe revelarse a la conciencia de los estudiantes. Para lograrlo, debe adquirir una forma “sensible” y “tangible”, similar a lo que sucede con la música. Una sinfonía, por ejemplo, es del orden de lo general. Nadie podrá escuchar nunca la séptima sinfonía de Beethoven *como tal*. Para oírla, se necesita que una orquesta la interprete y le dé una forma tangible. Otro ejemplo sería la pieza musical “Luna de Xelajú”. Para poder escucharla, se requiere de un conjunto de marimba que la toque. Sin este conjunto nadie podrá oír la obra del maestro Paco Pérez.

El saber adquiere su forma tangible (en términos de Hegel, se desarrolla) a través de un proceso en el cual adquiere *determinaciones culturales contextuales* precisas. Siguiendo con nuestro ejemplo, esas determinaciones culturales contextuales son las que la música va adquiriendo a medida que la orquesta o el conjunto de marimba la interpreta. Como esas determinaciones son contingentes e impredecibles en sus detalles, lo que se escucha siempre será *diferente*. Es por eso que no existirán dos interpretaciones de “Luna de Xelajú” (o de la séptima sinfonía de Beethoven) *idénticas*, incluso si son interpretadas por la misma marimba (o la misma orquesta, en el caso de la séptima sinfonía). Por lo tanto, el saber en su forma *general* (como categoría ontológica) se *manifiesta* a través de un *proceso*, una *actividad*, que lo hace tangible, convirtiéndolo así en objeto de conciencia y reflexión. Esto también se aplica al saber matemático. El saber musical es una expresión estética de la cultura; el saber matemático también es una expresión estética, pero también es una expresión de acción y pensamiento de la cultura.

Al concebirlo como compuesto por sistemas culturales de pensamiento, acción y reflexión, el saber matemático se manifiesta en la clase de matemáticas al adquirir una forma sensible o tangible a través de la *actividad* de clase que lo pone en movimiento.

La importancia de la actividad

El lector habrá notado que la indagación teórica que estamos realizando ha recurrido constantemente al concepto de actividad. De hecho, un elemento importante que distingue el materialismo dialéctico de otras filosofías es el papel *explicativo* que adquiere la actividad humana en la comprensión y estudio de los fenómenos sociales, políticos, económicos y educativos. ¿Por qué la actividad? La respuesta más concisa nos la ofrece el psicólogo vygotskiano Carl Ratner:

> La razón es que las actividades son los medios que permiten a las personas sobrevivir y desarrollarse. Sin [las actividades] de producción de bienes (por ejemplo, alimentos), de sistemas de creación y adjudicación de normas, de crianza y educación de los hijos, las personas no existirían como seres culturales, es decir, como humanos. (2000, p. 9)

Todos los sistemas de producción ocurren en actividades. Sin las actividades correspondientes, esos sistemas que sustentan a la sociedad no podrían existir. El saber de una cultura no es una excepción. El saber se produce, reproduce y modifica a través de la actividad humana. Y es también a través de la actividad que tiene lugar el aprendizaje.

De hecho, a partir de las consideraciones teóricas anteriores, no es difícil apreciar que el aprendizaje está directamente relacionado con la actividad mediante la cual el saber adquiere una forma tangible. Esto significa que la *calidad* de la actividad matemática es lo que puede explicar la *calidad* del aprendizaje. En otras palabras, la respuesta a la pregunta central de este artículo, es decir ¿qué constituye una buena clase de matemáticas?, se encontrará en las *características* que distinguen a la actividad. El aprendizaje en la enseñanza tradicional es pobre debido a que la actividad subyacente es deficiente: es una actividad en la que el profesor asume el control mientras que el estudiante se limita a observarlo, escucharlo e imitarlo. El aprendizaje en la enseñanza constructivista también es pobre, pero por otras razones: en la actividad constructivista subyacente al aprendizaje, el estudiante toma las riendas y el profesor es excluido de la ecuación. Sin embargo, el aprendizaje que resulta (centrado en los intereses del estudiante) no permite que el estudiante establezca un verdadero contacto con la cultura y la historia. Ambas actividades resultan alienantes, aunque por razones diferentes (Radford, 2014).

¿Qué es una buena actividad de enseñanza?

Siguiendo con la idea presentada anteriormente, según la cual es a través de la actividad que el saber cultural matemático se desvela a la conciencia de los estudiantes, hemos optado en nuestras investigaciones por explorar una vía en la cual dicha actividad no excluya la participación de los estudiantes (como hace la enseñanza magistral) y tampoco excluye la participación del profesor (como sucede en la enseñanza constructivista). En lugar de hablar de una actividad de aprendizaje realizada por el estudiante y de una actividad de enseñanza realizada por el profesor, hablamos de *una única y misma actividad*: la actividad de enseñanza-aprendizaje.

Esta actividad de enseñanza-aprendizaje (AEA) se fundamenta en dos ideas, una propuesta por Vygotsky y otra por Freire. Examinemos primero cómo nuestro concepto de AEA se inspira en Vygotsky.

La zona de desarrollo próximo

Vygotsky destacó el papel fundamental de la colaboración entre el niño y el adulto en proceso de aprendizaje. Al inicio, el niño puede resolver ciertos problemas de manera autónoma, pero no otros. Considerando el problema desde la perspectiva del desarrollo intelectual, Vygotsky explica que, entre los problemas que el niño no puede resolver por sí mismo, hay algunos que están completamente fuera de su alcance, pero otros que podría llegar a resolver con la ayuda de otra persona. Por ejemplo, “si no sé matemáticas superiores, una demostración de la resolución de una ecuación diferencial no moverá mi propio pensamiento en esa dirección ni un solo paso” (Vygotsky, 1987, p. 209). Así, cada niño tiene una serie de funciones psicológicas que aún no han madurado, pero que están a punto de hacerlo. La colaboración con otra persona precisamente estimula el desarrollo de esas funciones psicológicas latentes, llevando al niño a un nuevo nivel de desarrollo. Según Vygotsky, “esta diferencia entre el nivel real [o actual] de desarrollo del niño y el nivel de rendimiento que alcanza en colaboración con el adulto, define la zona de desarrollo próximo” (1987, p. 209).

Como podemos ver, el concepto de “zona de desarrollo próximo” (ZDP) es un concepto psicológico cuyo objetivo es explicar el desarrollo cognitivo del niño en términos de funciones psicológicas. Este concepto ha sido retomado en el ámbito educativo debido a la estrecha relación que existe entre el desarrollo cognitivo y la instrucción, lo que da pautas para reflexionar sobre los saberes que pueden estar al alcance de la comprensión del niño. La instrucción debería girar en torno a aquellos saberes que el niño no puede alcanzar por sí mismo, pero que puede lograr con la participación del profesor. Vygosky señala que “es tan infructuoso enseñar al niño lo que es [absolutamente] incapaz de aprender como enseñarle lo que ya puede hacer de forma independiente” (1987, p. 213).

En nuestro caso, el concepto de ZDP ha sido fundamental para comprender mejor el papel del profesor y la forma que puede tomar lo que hemos denominado la AEA. Con respecto al papel del profesor, es importante mencionar un error en el que a menudo incurren los intérpretes de Vygotsky: muchos de ellos conciben la ZDP como algo inherente al niño. En realidad, la ZDP es *relacional*, es decir, es una zona que se produce *conjuntamente* entre el niño y el adulto. El mismo niño con dos profesores diferentes generará ZDPs diferentes. Otro error común es confundir la ZDP con la interacción y considerarla como una *zona de interacción* entre el profesor y el estudiante. Debemos entender la ZDP como un concepto dialéctico materialista. La ZDP es, como afirma Vygotsky, una *distancia de desarrollo de funciones cognitivas* que se manifiesta entre lo que el estudiante puede *potencialmente* hacer con ayuda y lo que puede hacer *actualmente* de manera autónoma. Por lo tanto, una buena lección de matemáticas debería incluir saberes cuya complejidad conceptual pueda estar al alcance del niño con la ayuda del profesor. Sin embargo, si bien esta consideración sobre los saberes es necesaria para la producción de una buena lección de matemáticas, desde la perspectiva que hemos desarrollado, resulta insuficiente. Para corregir esta insuficiencia, nos tornamos hacia el trabajo de Freire.

El concepto de aprendizaje en Freire

En cierto sentido, el adulto que figura en el concepto de ZDP da la impresión de situarse "por encima" del niño. Es cierto que el adulto colabora con el niño, se involucra en esa colaboración, etc. Sin embargo, Freire va un paso más allá al insistir en que el que enseña también aprende y sugiere que enseñar es aprender, y aprender es enseñar. En otras palabras, el educador brasileño complementa la idea del psicólogo ruso al plantear una *simetría* entre profesores y estudiantes. Según Freire:

> El hecho de que el profesor supuestamente sepa y que el alumno supuestamente no sepa no impide que el profesor aprenda durante el proceso de enseñanza y que el alumno enseñe en el proceso de aprendizaje. (Freire, 2016, p. 30)

¿Cuántas veces no hemos comprendido mejor la demostración de un teorema frente a la pizarra cuando un estudiante nos plantea una pregunta en medio de la acción? Freire nos brinda la posibilidad de imaginar al profesor más allá de su papel de patriarca del saber.

Nuestro concepto de la AEA recoge estas ideas de Vygotsky y Freire. En primer lugar, rompe con la línea de separación que se encuentra en otras teorías educativas, donde se coloca al profesor de un lado y al estudiante del otro. En segundo lugar, comprende la enseñanza-aprendizaje como una actividad *compartida*, llevada a cabo *colectivamente* por profesores y estudiantes. Evidentemente, el profesor no realiza exactamente las mismas acciones que los estudiantes. Existe una división de trabajo. Sin embargo, esta división no implica que el profesor no trabaje junto con los estudiantes.

Una nueva concepción del aprendizaje

Durante nuestras investigaciones de campo, hemos observado que, aún si el profesor selecciona adecuadamente los contenidos matemáticos de la AEA y está dispuesto a abandonar su papel de sabelotodo, comprendiendo que también va a aprender, la AEA no necesariamente conduce a los resultados de aprendizaje esperados (ver, por ejemplo, Lasprilla, 2022). ¿Qué significa esto?

La naturaleza histórica y cultural del aprendizaje

Ahora podemos ampliar el sentido que subyace a la segunda característica sugerida en la sección 3 (Pensando el aprendizaje como proceso histórico-cultural). De los puntos 7.1 y 7.2 se desprende la idea de que se aprende trabajando con otros (el profesor y también los compañeros de clase). Siempre nos apoyamos en ideas de otros, en artefactos culturales producidos por otros; si estos otros están frente a nosotros o no, no es relevante. Por ejemplo, un estudiante puede estar "solo" leyendo un libro en una biblioteca. Aunque parecería que está aprendiendo de manera individual, no lo está. El libro porta otras voces, otras perspectivas. El estudiante está en diálogo con otras personas; está utilizando un lenguaje que no creó, sino que encontró en su cultura, y está utilizando artefactos histórico-culturales para aprender (el libro, la escritura, Internet, etc.).

La naturaleza transformadora del aprendizaje

Además de ser siempre histórico y cultural, el aprendizaje también implica una *transformación* de la persona. Al aprender, la persona adquiere nuevas posibilidades para satisfacer sus necesidades y posicionarse frente a los demás. El aprendizaje, en otras palabras, es parte de la experiencia educativa a través de la cual nos formamos como seres humanos. Esto requiere conceptualizar el aprendizaje y la educación en general más allá de su característica instrumental frecuentemente atribuida. Freire proponía que "el proceso educativo es mucho más que los conocimientos adquiridos didácticamente en las instituciones formales" (Ferreira de Oliveira, 2016, p. 110). En este contexto, la educación es "una clave para explorar el dilema de la propia existencia humana, un fenómeno trascendente que es a la vez una herramienta y un campo creativo" (p. 110).

Estas consideraciones nos han llevado a sugerir que el aprendizaje se organiza en torno a dos ejes: el del saber y el del ser; es decir, el eje disciplinario (matemático, científico, artístico, etc.) y el de la constitución de subjetividades. La clase de matemáticas no solo produce saberes, sino también subjetividades, es decir, individuos (profesores y estudiantes) en constante transformación.

Esto que estamos planteando es válido, argumentamos, para cualquier modelo pedagógico, como el constructivismo y la enseñanza magistral. El problema radica en que, en esos modelos de enseñanza, la formación de subjetividades toma direcciones que no son coherentes con el proyecto histórico-cultural educativo en el que se inscribe nuestro proyecto pedagógico. En el caso del constructivismo, las subjetividades formadas están guiadas por intereses individualistas. En el caso de la enseñanza magistral, las subjetividades se ven influenciadas por mecanismos de opresión que generan subjetividades de obediencia. Por lo tanto, necesitamos repensar la AEA de manera que permita la creación de subjetividades de otro tipo.

El aprendizaje enmarcado en un proyecto transformador de la sociedad

Nuestro proyecto, cuya conceptualización sistemática ha dado lugar a lo que denominamos la teoría de la objetivación, se inscribe en una visión que plantea el objetivo de la educación matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural dirigido a la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en los discursos y prácticas matemáticas histórica y culturalmente constituidas, y que consideran nuevas posibilidades de acción y pensamiento.

En este contexto, definimos el aprendizaje como ese proceso a través del cual *encontramos* otras voces y saberes y nos co-posicionamos *ética* y *críticamente* ante ellos. De hecho, el término “objetivación” presente en el nombre de la teoría se refiere precisamente a ese *encuentro*, el encuentro con algo o alguien que no somos nosotros. Es el *encuentro con aquello que nos objeta, nos interroga e interpela*; es el encuentro con el otro y lo otro, con la alteridad y la otredad.[4]

Síntesis

En las secciones anteriores se ha sugerido que el saber es un sistema histórico-cultural conformado por formas de pensar y actuar en el mundo. Se ha propuesto que, para convertirse en objeto de aprendizaje, ese saber (presentado al estudiante como capacidad potencial de acción y pensamiento), debe adquirir determinaciones culturales que le den contenido, volviéndolo así objeto de consciencia y reflexión. La AEA juega un papel fundamental en permitir que el saber adquiera esas determinaciones. Hemos sugerido que la AEA atiende tanto a la esfera del saber como a la del ser. Sin embargo, esta AEA puede ser pobre o rica. Es pobre cuando despoja al saber de sus dimensiones histórico-culturales, por ejemplo, al reducirlo a una mera herramienta de promoción individual (como sucede

[4] Un análisis etimológico-conceptual del término objetivación se encuentra en el capítulo 4 del libro sobre la teoría de la objetivación (Radford, 2023a, pp. 93-96)

con el discurso de competencias impulsado por la OCDE con una fuerza invasiva e imperialista). Es pobre cuando reduce el saber a una fuente de satisfacción personal. Como menciona Freire:

> Me siento muy triste cuando un educador me dice “enseño matemáticas, mi sueño son las matemáticas”. No, el sueño no puede ser sólo matemático. Enseño matemáticas porque creo que es necesario que la sociedad tenga menos discriminación. El sueño principal, el sueño fundamental no son las matemáticas. Las matemáticas son muy importantes, pero tienen que estar al servicio de algo [un bien común, comunitario]. (Freire, 2016, pp. 32-33)

La AEA es pobre cuando despoja al estudiante de su naturaleza histórica, social y humana, alienándolo y centrando su atención en intereses individualistas (como ocurre en el constructivismo) o en modelos de sujeción y obediencia (como en la enseñanza tradicional).

Proponemos que una buena AEA sería aquella que:

> a) se orienta hacia un encuentro crítico y polifónico con otras voces y saberes culturales,
>
> b) fomenta ese encuentro en el marco de una ética de relaciones interpersonales guiada por un interés común, en el que se busca alcanzar un objetivo de satisfacción compartida a través de acciones solidarias, comprensivas, inclusivas y democráticas.

Veamos ahora un ejemplo para ilustrar las ideas anteriores.

Ejemplo

Nuestro ejemplo proviene de una clase del último grado de la escuela secundaria canadiense, con estudiantes de 17-18 años, y se enmarca en el estudio de funciones. Para promover una AEA “buena” según lo expuesto anteriormente, la clase se dividió en pequeños grupos de tres o cuatro estudiantes. El objeto de la actividad consistió en permitir a los estudiantes explorar las formas matemáticas de pensar la matematización del mundo, utilizando funciones polinómicas y racionales, el concepto de derivada y la tasa de cambio.

En la primera parte de la AEA, que es en la que nos centramos en este artículo y tuvo una duración de 60 minutos, los estudiantes trabajaron en pequeños grupos y realizaron un análisis cualitativo del agua que salía de un recipiente con forma de cono y un pequeño orificio en la punta. Este análisis permitió a cada grupo generar hipótesis y argumentos sobre la relación gráfica entre determinadas variables. En la segunda y tercera parte de la AEA, que se llevaron a cabo en los días subsiguientes de la misma semana, los estudiantes compararon sus hipótesis y argumentos con los formulados por otros grupos, lo que les permitió afinar sus hipótesis. Luego, realizaron un experimento utilizando un cronómetro, una regla, un cono con un pequeño orificio en la punta y un recipiente de plástico para recoger el agua que salía del cono. A través de este experimento, se buscaba que los estudiantes aprendieran a confirmar o refutar sus hipótesis. La actividad concluyó con un debate sobre las suposiciones realizadas y el significado de la matematización realizada.

En el primer día de la AEA, la clase comenzó con una explicación por parte del profesor. En la Figura 1 se muestra al profesor captando la atención de los estudiantes y destacando las variables a estudiar cuando el cono se vacía a un ritmo constante (para una exposición más detallada de la AEA, ver Radford y Demers, 2004).

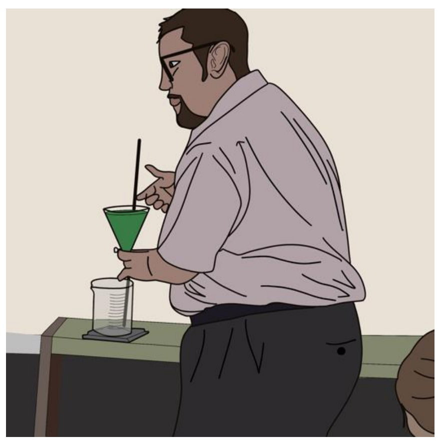


Figura 1. El profesor explica la tarea a realizar con el material concreto que utilizarán los estudiantes

El primer día, la tarea de la AEA incluyó las siguientes preguntas sobre las variables: *V* (volumen) del agua que queda en el cono, *h* (altura del agua que queda en el cono), *r* (radio de la superficie de agua en el cono y *t* (tiempo transcurrido) (ver Figura 2).

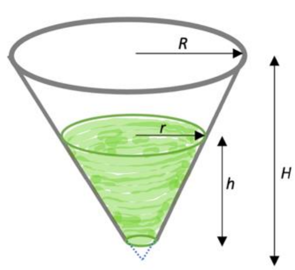


Figura 2. Esquema del cono utilizado en la AEA

Sin hacer ningún cálculo, se pidió a los estudiantes que, discutiendo con los demás miembros de su equipo, realizaran las siguientes acciones: elaborar un croquis de la gráfica de la relación entre las siguientes variables independientes y dependientes, dadas a continuación en ese orden.

a) r y h

b) h y r

c) t y r

d) t y h

e) h y V

f) r y V

g) t y V.

Se pidió también que, en cada uno de los casos anteriores, los estudiantes explicaran su razonamiento con argumentos matemáticos convincentes.

La AEA concluyó en los días siguientes con la deducción de una fórmula matemática de $V(t)$, así como de $h(t)$, y el cálculo de dh/dt en $t = 1$ y $t = 2$, explicando el signo del número obtenido.

Dicho en los términos conceptuales desarrollados en las secciones anteriores, la AEA ubica a los estudiantes frente a un saber cultural: la forma de pensar la matematización del mundo. Este saber es de naturaleza histórico-cultural: se originó durante el Renacimiento europeo como resultado de un proceso de transformación social de varios siglos en los que se produjo una secularización de la sociedad y se replanteó la relación entre teoría y práctica, en particular, este último, a través del trabajo de Tartaglia, Guidobaldo del Monte, Galileo y otros (Radford, 2023b). Desde el punto de vista del aprendizaje, ese saber cultural está ya en la cultura de los estudiantes. Desde una perspectiva ontológica, este saber se presenta como una forma potencial de acción y pensamiento. Su existencia no puede mostrarse *directamente*; el encuentro con el saber es siempre *mediado*. A través de esa mediación, la de la AEA, el saber adquiere determinaciones contextuales y se convierte en objeto de consciencia y pensamiento, siendo ahora un objeto que *objeta* (es decir, que se erige frente a los estudiantes y que ahora puede ser conocido). Etimológicamente hablando, la *objetivación* implica el *encuentro* con aquello que, al estar frente a nosotros, nos objeta.

La *tarea* propuesta por el profesor permitirá que la forma de pensar matemáticamente el mundo se revele a los estudiantes.

La tarea es una parte central de la AEA, pues ofrece orientación y dirección a las discusiones y reflexiones que llevarán a cabo los estudiantes y el profesor. La tarea incluye preguntas y problemas planteados por el profesor. Sin embargo, la tarea por sí sola no es suficiente. También debemos considerar la *organización social* que permite a los estudiantes interactuar con otras voces y saberes. En nuestro trabajo con profesores, se enfatiza la importancia de fomentar la interacción basada en una *ética* de acciones solidarias, comprensivas, inclusivas y democráticas (Radford, 2022).

Al principio de la AEA, algunos estudiantes proponen un croquis lineal para describir la relación entre las variables h y r (acción a). Este es el caso del grupo conformado por Édouard, Sylvain y Diane:

1. ÉDOUARD: ¡Sí! A medida que la altura disminuye, ¡el radio también disminuye!
2. SYLVAIN: Así es, el radio disminuye a medida que la altura disminuye.
3. ÉDOUARD: No sé si eso es correcto... (*no termina la frase y se pone a pensar*).
4. SYLVAIN: (*Continúa la frase de Édouard y dic*e:) ¡Bah!... Debe ser constante, sí...
5. DIANE: Bueno, es uniforme ...
6. ÉDOUARD: Entonces, ¿sería como una línea diagonal hacia abajo? (*Hace un gesto con la mano derecha*).
7. SYLVAIN: Sí, una línea recta...
8. DIANE: Sí, porque ambos disminuyen, así que... (*los alumnos comienzan a dibujar*).
9. SYLVAIN: Pero si no disminuyen al mismo ritmo, no es una línea recta.

Los estudiantes proponen el gráfico 3a, mostrado en la Figura 3. Otros grupos también proponen una línea recta, pero con una pendiente diferente (ver 3b en Figura 3).

Cuando se trata de hacer el croquis de t y r (acción c) también hay desacuerdo. Algunos grupos proponen una línea recta, otros una función cóncava y otros una función convexa (ver 3c y 3d en Figura 3).

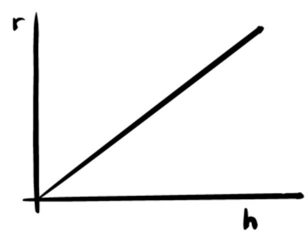
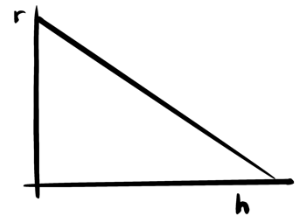
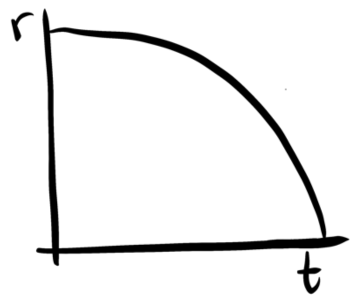
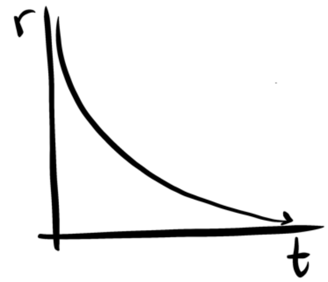
	
3a	3b
	
3c	3d

Figura 3. Algunas gráficas producidas por los grupos

El grupo de Édouard acaba de terminar de producir una gráfica tiempo-radio que muestra una relación lineal de pendiente positiva cuando el profesor se acerca y dice:

1. PROFESOR: Lo que están prediciendo es que en cada intervalo regular [de tiempo], el radio cambiará la misma cantidad... ¿de manera constante?
2. DIANE: ¡Sí!
3. SYLVAIN: ¡Sí! [...]
4. ÉDOUARD: Bueno, el radio al final va más rápido, como...
5. PROFESOR: ¡Oh, bueno! No lo he visto en la gráfica. ¡Han hecho una línea recta! (*dirigiéndose a Édouard*). Pero acabas de poner en juego otro concepto, que no encaja con su gráfico. Hay algo que... deben considerar aquí... Son buenas observaciones... ¿Quieren repensar su gráfica una vez más?

El término clave es el *cambio de radio por intervalo regular de tiempo*, es decir, la tasa de cambio. Al introducir el concepto de tasa de cambio en la discusión, el profesor proporciona a los estudiantes una vía para comprender desde la perspectiva cultural de la ciencia el fenómeno en cuestión.

Después de discutir cierto tiempo, Édouard y su grupo modifican su gráfica tiempo-radio; proponen una gráfica cóncava (ver 3c en la Figura 3).

El profesor aprovecha las diferentes perspectivas que proponen los estudiantes para provocar un debate. Toma una gráfica tiempo-radio convexa propuesta por otro grupo (ver 3d en Figura 3) y la muestra al grupo de Édouard. También toma la gráfica del grupo de Édouard y la lleva a este otro grupo. Ambos grupos se sorprenden de lo que han hecho los otros. Lo que hace el profesor es, a través de una gráfica diferente, poner a cada uno de estos grupos ante una voz y una conceptualización distintas. Es el encuentro con el Otro.

Dirigiéndose al grupo de Édouard, el profesor dice: “¡Pero hay una diferencia entre ambos gráficos! Sé que el radio disminuye a medida que aumenta el tiempo, pero ¿cómo disminuye?”

Siguiendo las pautas de la zona de desarrollo próximo de Vygotsky, el profesor ha buscado problemas matemáticos que pueden ser difíciles de resolver de manera autónoma por el estudiante, pero que pueden ser resueltos mediante discusiones con otros compañeros o con el profesor.

El profesor se retira a ver lo que están haciendo otros grupos. Mientras tanto, Édouard y su grupo intentan comprender su gráfica a la luz de la gráfica del otro grupo.

1. ÉDOUARD: Eso [el gráfico 3d] significa que el radio disminuye más lentamente (*hace un gesto con la mano al hablar de la disminución del radio; ver Figura 4*).
2. SYLVAIN: (continuando la frase de Edward) … al final.
3. ÉDOUARD: [Ese gráfico (ver 3d)] dice que como... (*interrumpido por Sylvain*).
4. SYLVAIN: (*Interpretando la naturaleza asintótica del radio a medida que t aumenta, dice:*) Esto *(el gráfico 3d*) no es cierto porque dice que a medida que aumenta el tiempo... el radio disminuye lentamente.
5. ÉDOUARD: Sí, toma nota de eso.

Figura 4. Diane (izquierda) y Sylvain (derecha) oyendo el argumento de Édouard (medio)

Durante la AEA, el profesor se asegura constantemente de que todos los estudiantes tengan la oportunidad de vivir una experiencia de solidaridad, inclusión y democracia a través de la participación en la discusión con los demás. Esta participación implica considerar respetuosamente las ideas ofrecidas. El profesor se asegura de que haya un esfuerzo por comprender al otro, incluso si no se está de acuerdo con sus propósitos e ideas. Por ejemplo, cuando el grupo de Sylvain discute el croquis de la relación entre *h* y *r*, al principio los estudiantes no llegan a un acuerdo. Después de observar la discusión por un momento, el profesor se dirige a Sylvain y le dice: “Puedes escribir las razones por las que no estás de acuerdo [con tu grupo]. Pero ¿por qué no estás de acuerdo?”

Con esta intervención, el profesor no solo deja claro que la divergencia de puntos de vista no es negativa; al contrario, la divergencia es positiva siempre y cuando se haga un esfuerzo por comprender, con respeto y solidaridad, la perspectiva del otro. La respuesta de Sylvain al profesor reinicia el diálogo con sus compañeros, donde se evidencia el compromiso de cada uno en la elaboración de una idea colectiva, que conduce a una mejor comprensión del problema matemático. Por ejemplo, Diane hace una observación sobre la gráfica 3a, señalando que podría implicar “que la altura comenzó en cero y luego aumentó”, lo cual contradice la manera en que se vacía el cono. Mientras Édouard se muestra sorprendido ante esta observación inesperada, Sylvain logra articular una respuesta: “No, el tiempo no interviene [en la gráfica 3d]”, la cual será retomada más adelante en una discusión general con demás grupos.

Este ejemplo resalta la importancia de considerar, como un problema del aprendizaje en sí, la dimensión social de la interacción. La interacción, tal como la concebimos en la teoría de la objetivación, no es un simplemente un apoyo para la conceptualización. La calidad de la interacción, y de la relación con el otro que la subyace, es decir, la calidad de la dimensión ética, es parte del aprendizaje que nos interesa: el aprendizaje genuinamente colectivo.

Observaciones finales

El propósito de este artículo ha sido investigar lo que se puede considerar una buena clase de matemáticas. La respuesta depende de la perspectiva teórica que se adopte. No es sorprendente que los profesores y educadores que siguen el modelo behaviorista de la enseñanza tradicional vean en el ejemplo presentado una clase indisciplinada, con mucho ruido, una clase caótica. La perspectiva teórica adoptada en este artículo es la de la teoría de la objetivación y sus supuestos filosóficos del materialismo dialéctico. Nuestra respuesta a la pregunta de qué hace que una clase de matemáticas sea “buena” se encuentra en una nueva concepción de los fines de la educación matemática y, en particular, en una nueva concepción de los saberes matemáticos, del aprendizaje y del papel del profesor y los estudiantes. Nuestra respuesta se articula en torno a la idea del *tipo* de actividad de enseñanza-aprendizaje (AEA). Una buena clase de matemáticas es aquella que se desarrolla en una AEA que satisface al menos dos requisitos: a) está orientada hacia un encuentro crítico y polifónico con otras voces y saberes culturales, y b) fomenta ese encuentro en el marco de una ética de relaciones interpersonales guiada por un interés común, un interés en el que se busca alcanzar un objetivo de satisfacción común (en este caso, producir una gráfica cartesiana de la relación entre ciertas variables) mediante acciones solidarias, comprensivas, inclusivas y democráticas[5]. El ejemplo presentado en el artículo ilustra algunas de estas ideas; muestra, en particular, cómo los estudiantes, apoyados por el profesor, entran en una interacción cuyo motor no es el interés propio, sino una colaboración genuinamente humana, donde los estudiantes ofrecen sus voces y encuentran otras voces y formas de pensar, una otredad que los lleva a replantear sus propias ideas. En ese proceso, los estudiantes se escuchan, se ayudan mutuamente y van construyendo una idea *colectiva* cuya textura y sustancia están formadas por diferentes voces.

[5] Uno de los problemas actuales que se estudia en la teoría de la objetivación es el de la ética. Existe un interés por definir los vectores que podrían asegurar un espacio mínimo suficiente en la clase de matemáticas para la co-producción de subjetividades coherente con el proyecto histórico-cultural mencionado en la sección 8.3. En Radford (2020, 2022, 2023a) se ha introducido el concepto de *ética comunitaria*, a la cual correspondería una AEA que denominamos *labor conjunta* (ver también Radford, 2023c).

Por último, es importante destacar que la actividad colectiva no es necesariamente una actividad exenta de desacuerdos y tensiones. En general, está llena de contradicciones (reflejo de diferentes posiciones subjetivas) que son, en el fondo, su motor, lo que permite que los estudiantes se posicionen crítica y éticamente entre sí.

Agradecimientos

Agradecemos a los dos revisores de este artículo por sus sugerencias y críticas. Este artículo se ha redactado en el marco de un programa de investigación financiado por el Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH).

Referencias

Ferreira de Oliveira, W. (2016). Fatalismo e conformidade: a pedagogia da opressão. En P. Freire (Ed.), *Pedagogia da solidariedade* (pp. 110–132). Paz & Terra.

Freire, P. (1970). *Pedagogia do oprimido*. Paz e Terra.

Freire, P. (2016). *Pedagogia da Solidariedade*. Paz & Terra.

Hegel, G. (2009). *Hegel's Logic*. MIA.

Ilyenkov, E. V. (1977). *Dialectical logic*. Progress Publishers.

Pagès, C. (2015). *Qu'est-ce que la dialectique?* Vrin.

Lasprilla, A. (2022). *La ética comunitaria en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en educación primaria.* Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico. https://descubridor.idep.edu.co/Record/ir-001-2587

Marx, K. (1988). *Economic and philosophic manuscripts of 1844*. Prometheus Books.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology.* W. W. Norton.

Ratner, C. (2000). Outline of a coherent, comprehensive concept of culture. *Cross-Cultural Psychology Bulletin*, *34*(1-2), 5-11.

Radford, L. (2014). On teachers and students. En P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the American Chapter* (Vol. 1, pp. 1-20). PME.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA*, *12*(2), 61–80. https://doi.org/10.30827/pna.v12i2.6965

Radford, L. (2020). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana de Matemática Educativa, RECME, Número especial de la Teoría de la Objetivación*, *5*(2), 15-31.

Radford, L. (2022). Ethics in the mathematics classroom. *Hiroshima Journal of Mathematics Education,* 16. https://www.jasme.jp/hjme/download/2022/Vol16.pdf

Radford, L. (2023a). *La teoría de la objetivación. Una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Uniandes. https://bit.ly/Radford_TO

Radford, L. (2023b). Préface: Au sujet des conditions d'émergence de la science moderne. En Y. Lenoir, *Une approche sociohistorique de l'émergence de la science: Un rapport épistémique au savoir sous influence idéologique et politique*. Éditions du Méridien.

Radford, L. (2023c). ¿Qué significa aprendizaje colectivo? ¿Cómo lograrlo en la clase de matemáticas? *Μαθηματικά: epistemologia e educação*, 1, 1-19. https://periodicos.ufpe.br/revistas/revistamatematica/article/download/257280/43532

Radford, L., & Demers, S. (2004). *Communication et apprentissage. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques*. Centre franco-ontarien des ressources pédagogiques.

Rohrs, H., & Lenhart, V. (1995). *Progressive education across the continents: A handbook.* Peter Lang.

Vygotsky, L. S. (1987). *Collected works* (Vol. 1). Plenum.

Autoría

Nombre autor 1: Luis Radford
Dirección electrónica: Lradford@laurentian.ca
Título: Doctor
Institución a la que pertenece: Laurentian University
Lugar de residencia: Sudbury, Ontario, Canadá

Publicaciones más recientes:

Radford, L., Salinas, U., & Sacristán, A. (2023). A dialogue between two theoretical perspectives on languages and resource use in mathematics teaching and learning. *ZDM - Mathematics Education*, 611-626. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01459-y

Radford, L. (2023). Accogliere l'altro come problema educativo. *CEMeR - Caminhos da Educação Matemática em Revista*, *13*(2), 113-125.

Radford, L. (2023). *La teoría de la objetivación. Una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Uniandes. https://bit.ly/Radford_TO

Radford, L. (2023). Política, saber y ética: la necesidad de replantear la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *EMP – Educação Matemática Pesquisa*, *25*(2), 45-68. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p45-68

Radford, L. (2023). ¿Qué significa aprendizaje colectivo? ¿Cómo lograrlo en la clase de matemáticas? *Revista Μαθηματικά: epistemologia e educação, Caruaru*, 1-19. https://periodicos.ufpe.br/revistas/revistamatematica/article/download/257280/43532

Vargas, J., & Radford, L. (2023). Teoria da objetivação: Um foco na produção de subjetividades. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, *3*(3), 1-17. DOI: 10.54541/reviem.v3i3.71

Breve reseña biográfica de no más de 5 líneas:

Luis Radford es profesor emérito de Laurentian University, Canadá. Sus líneas de investigación incluyen el desarrollo del pensamiento algebraico y la relación entre cognición y cultura. Ha desarrollado una teoría histórico-cultural de la enseñanza-aprendizaje: la teoría de la objetivación y ha recibido la Medalla Hans Freudenthal 2011, concedida por la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI).