

¿Qué significa aprendizaje colectivo? ¿Cómo lograrlo en la clase de matemáticas?

O que significa Aprendizagem Coletiva? Como alcançá-la na aula de matemática?

What does collective learning mean? How to achieve it in the mathematics classroom?

Luis Radford^{1*}

 ORCID iD <https://orcid.org/0000-0001-6062-0605>

Resumen

En este artículo abordo la cuestión de lo que significa el aprendizaje colectivo y de cómo poder propiciarlo en el aula de matemáticas. Sugiero que la cercanía espacial (real o virtual) no es un criterio suficiente para caracterizar el aprendizaje colectivo. Los estudiantes pueden estar encerrados en las cuatro paredes de un aula (real o virtual) sin que por lo tanto estén aprendiendo colectivamente. Caracterizar el aprendizaje colectivo requiere revisar la idea de la *actividad* en la que dicho aprendizaje ocurre. Basándome en ideas claves de la teoría de la objetivación, sugiero que esa actividad tiene que cumplir dos condiciones. Primero, estar direccionada hacia la satisfacción de una *necesidad colectiva*: alcanzar un objeto de aprendizaje *común* el cual se desvela progresivamente a la consciencia de los estudiantes a través de un trabajo conjunto con el profesor. Segundo, la actividad se desarrolla a través de una interacción entre estudiantes y entre estudiantes y profesores que pone en movimiento relaciones sociales de un tipo ético especial: relaciones sociales de una ética comunitaria que incluye, el compromiso, el cuidado del otro y la responsabilidad. Estas ideas son expuestas a partir de ejemplos de lecciones de matemáticas.

Palavras-chave: Teoría de la objetivación. Actividad. Aprendizaje. Matemáticas. Ética.

Resumo

Neste artigo, abordo a questão do que significa aprendizagem coletiva e como ela pode ser fomentada na sala de aula de matemática. Sugiro que a proximidade espacial (real ou virtual) não é um critério suficiente para caracterizar a aprendizagem coletiva. Os alunos podem estar juntos fechados dentro das quatro paredes de uma sala de aula (real ou virtual) sem aprender coletivamente. Caracterizar a aprendizagem coletiva requer rever a ideia de atividade na qual ocorre a aprendizagem coletiva. Com base nos principais insights da teoria da objetivação, sugiro que tal atividade tem que atender a duas condições. Primeiro, ela deve ser direccionada para a satisfação de uma necessidade coletiva: alcançar um objeto comum de aprendizagem que seja progressivamente revelado à consciência dos alunos através do labor conjunto com o professor. Em segundo lugar, a atividade é desenvolvida por meio de uma interação entre alunos e entre alunos e professores que se sustenta em relações sociais de um tipo ético especial: relações sociais de uma ética comunitária que inclui compromisso, cuidado com o outro e responsabilidade. Estas ideias são apresentadas com base em exemplos na aula de matemática.

Palavras-chave: Teoria da objetivação. Atividade. Aprendizagem. Matemática. Ética.

Recebido em: 03/09/2023 - Aceito em: 02/02/2023 - Publicado em: 13/02/2023

^{1*} Profesor emérito. Laurentian University, Sudbury, Ontario, Canadá. Lradford@laurentian.ca



Abstract

In this article I address the question of what collective learning means and how to foster it in the mathematics classroom. I suggest that spatial proximity (real or virtual) is not a sufficient criterion to characterize collective learning. Students can be enclosed in the four walls of a classroom (real or virtual) without learning collectively. Characterizing collective learning requires revisiting the idea of the activity in which such learning occurs. Based on key ideas from the theory of objectification, I suggest that this activity has to fulfill two conditions. First, it must be directed towards the satisfaction of a *collective need*: to reach a *common* object of learning, which is progressively revealed to the consciousness of the students through the joint work of teachers and students. Second, the activity is developed through an interaction among students and between students and teachers that sets in motion social relations of a special ethical type: social relations of a communitarian ethics that includes commitment, care for the other and responsibility. These ideas are presented on the basis of examples from mathematics lessons.

Keywords: Theory of objectification. Activity. Learning. Mathematics. Ethics.

1. Introducción²

La pregunta que quiero abordar en esta presentación es esta: ¿qué queremos decir con aprendizaje colectivo? A primera vista parecería que la pregunta se puede responder fácilmente. El aprendizaje colectivo es aquel que ocurre cuando estamos con otros. Mi tesis es que esta respuesta no solamente es insatisfactoria sino también falsa. No todo aprendizaje es colectivo, aunque ocurra en presencia (real o virtual) con otros.

Para entender mi tesis, coloquémonos en un caso extremo: el del aprendizaje magistral. En el aprendizaje magistral, el profesor habla todo el tiempo y los estudiantes oyen y toman notas. Creo que estaríamos de acuerdo en decir que esa aula puede ser vista como colectiva en la medida que el aula está ocupada por varias personas. Coloquémonos ahora en otro caso extremo: el aula de matemáticas de tipo constructivista. Por las mismas razones que vengo de exponer, esta aula podría también ser vista como un espacio colectivo. La pregunta es: ¿Acaso es que porque estamos en un espacio colectivo que podemos decir que estamos aprendiendo colectivamente? Mi tesis es que no. La estructura social que subyace a estas aulas es muy pobre para asegurar un aprendizaje genuinamente colectivo.

Sigamos adelante. Pensemos ahora en un aula de matemáticas con una estructura social más compleja, como la que se muestra en la Figura 1.

² Este artículo tiene origen en una conferencia dada el 22 de abril de 2022, durante el VIII EPDM. <https://www.youtube.com/watch?v=UHBgPmexNlo&t=4980s>. La conferencia fue transcrita por Prof. Dr. Valdir Bezerra dos Santos Júnior. En la versión escrita, he aprovechado para añadir algunos complementos y precisiones, manteniendo en general el carácter flexible e informal del discurso oral.

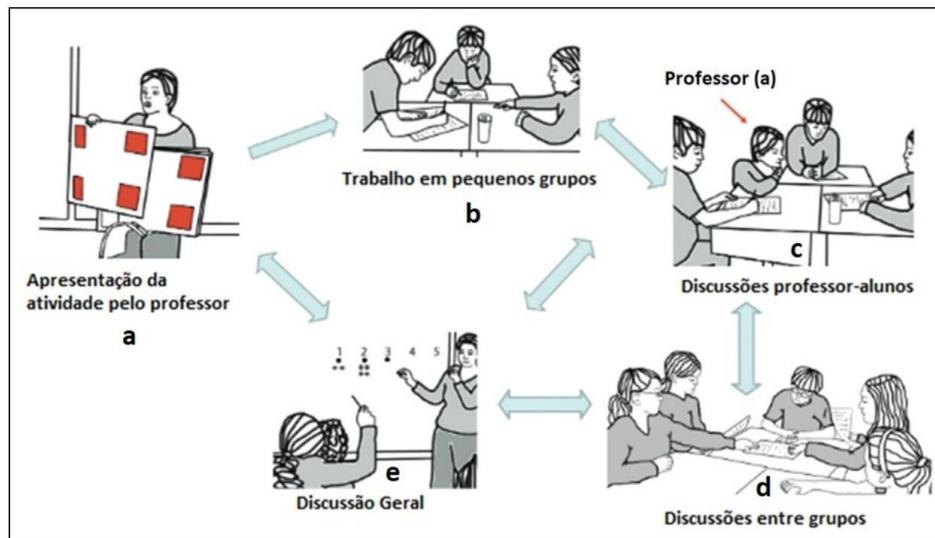


Figura 1 – Topografia típica de aula de matemáticas
 Fonte: Apresentação en el VIII EPEM

Es un aula que, si ustedes la miraran desde una ventana, lo que verían sería un profesor o profesora que, al inicio de la clase, da algunas instrucciones a los estudiantes respecto a la actividad matemática que va a ocurrir. Verían luego a niños trabajar en pequeños grupos. Ustedes verían que la profesora va a ver a los estudiantes y discute con ellos. Ustedes también verían por esta ventana que, en ciertos momentos en esa aula, hay discusiones generales. La pregunta de nuevo es la siguiente: ¿Es simplemente porque hay una estructura social más compleja que las estructuras del aula del aprendizaje magistral o constructivista que los estudiantes están ahora aprendiendo juntos? De nuevo mi respuesta es no.

En algunas oportunidades me han hecho la siguiente observación. Me han dicho que organizaciones sociales del aula como la que se ve en la Figura 1 se encuentran a menudo en las aulas norteamericanas, en las aulas socioconstructivistas y también en Europa. Pero, de nuevo, lo que yo afirmo es que esta estructura social del aprendizaje magistral o constructivista e incluso la que vemos en la Figura 1 son insuficientes para garantizar que los estudiantes están aprendiendo juntos.

La pregunta que se plantea es esta: ¿Qué se requiere realmente para que el aprendizaje sea genuinamente colectivo?

2. Colectivo y colectivo

Necesitamos distinguir aquí dos sentidos diferentes del término ‘colectivo’. El diccionario de la Real Academia Española nos ofrece las siguientes definiciones de ‘colectivo’:

1. adj. Perteneciente o relativo a una agrupación de individuos.
2. adj. Que tiene virtud de recoger o reunir.
3. m. Grupo unido por lazos profesionales, laborales, etc.

Es en el sentido de esas definiciones que la clase del aula magistral, constructivista y socio-constructivista aparece como colectivo: una simple agrupación o reunión de individuos unidos por el hecho que algunos son estudiantes y otros profesores. El punto es que, precisamente, no es ese el sentido que queremos darle al término colectivo. Tenemos que precisar entonces cuál es ese ‘colectivo’ al que hacemos referencia cuando hablamos de aprendizaje genuinamente colectivo. Mi argumento está basado en dos ideas.

La primera idea es que el *colectivo* que se tiene en mente cuando, en la teoría de la objetivación se habla de ‘aprendizaje colectivo’, no se define por una cercanía espacial (real o virtual). Para distinguirlo de este sentido, atrevámonos a forjar una nueva grafía. Escribamos *colectivo* (con *ê*; podemos pronunciar: “colectivo con c acento circunflejo”). Lo que caracteriza al *colectivo* no es la proximidad espacial, sino el *tipo de actividad* en que participa ese *colectivo*.

La segunda idea es que para hablar de ‘aprendizaje colectivo’ tenemos que revisar el concepto de aprendizaje. Cuando hablamos de ‘aprendizaje colectivo’ movilizamos necesariamente dos palabras y esas dos palabras hay que entenderlas conceptualmente bien: actividad y aprendizaje. Actividad y aprendizaje son dos conceptos claves en la teoría de la objetivación. Para poder desarrollar mi argumento necesito recordar algunas cosas acerca de esta teoría. Luego nos será más fácil entender la diferencia entre colectivo y *colectivo*.

3. La teoría de la objetivación

¿Cuál es la base teórica de la teoría de la objetivación? La teoría se inspira en la filosofía dialéctica de Hegel, Ilyenkov y de la escuela de psicología rusa de Vygotsky y sus colaboradores, como Leontiev y Luria. Pero también se inspira de una concepción Freiriana de la educación, en la cual la educación no es simplemente transmitir conocimiento, sino que es, sobre todo, la transformación de los individuos y de su mundo. Es entonces dentro de este contexto que tiene sentido preguntarse: ¿Qué es un aprendizaje colectivo?

Tratando de presentar pues un esbozo muy breve de la teoría de la objetivación cabe mencionar que esta teoría hace parte del espectro de teorías socio culturales educacionales contemporáneas (Radford, 2018). Las ideas principales están detalladas en el libro cuya carátula aparece en la Figura 2 (izquierda) y que fue publicado en 2021, el año pasado.

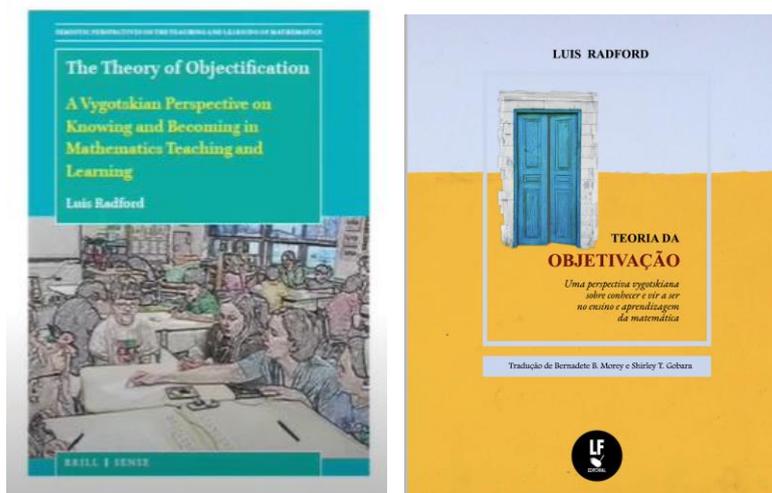


Figura 2 – Tapa del libro *The Theory of Objectification*
 Fonte: Apresentação en el VIII EPEM

Hay una traducción en portugués que fue hecha por Bernadete Morey y Shirley Gobara publicado en la *Livraria da Física* (ver Figura 2, derecha). Para aquellos entre ustedes que están interesados en el álgebra apareció también en el año pasado el libro *Pensamiento Algebraico en los Años Iniciales* (Moretti y Radford, 2021). Hay también en lengua portuguesa otro libro sobre la teoría de la objetivación (Takeco Gobara y Radford, 2020) que incluye aplicaciones a las matemáticas y a las ciencias.

Mencionemos dos especificidades de la teoría de la objetivación. Primero empecemos con su concepción de educación matemática. Inspirándonos del trabajo de Paulo Freire, la educación matemática se concibe en la teoría de la objetivación como un esfuerzo político, social, histórico y cultural que está orientado a la creación de individuos reflexivos y éticos, que se posicionan críticamente en prácticas matemáticas históricas y culturalmente constituidas y que reflexionan sobre nuevas posibilidades de acción y pensamiento. Tânia Mendonça Campos, en su intervención de esta mañana, hacía ver cómo la educación matemática surgió de un interés mostrado por matemáticos profesionales a principios del siglo 20; Tânia nos mostró cómo los matemáticos profesionales empezaron a preocuparse por la enseñanza de las matemáticas. Hubo al principio un problema fundamental que fue la organización del currículum de matemáticas. Más de cien años más tarde la educación matemática ha evolucionado y llegamos ahora a un punto en que nos hacemos preguntas sobre el tipo de individuo que nosotros queremos que aprenda matemáticas y del tipo de individuo que va a producir la escuela. Es aquí donde nos hemos visto en la necesidad de especificar nuestra concepción de la educación matemática.

Regresamos ahora a la segunda especificidad de la teoría de la objetivación, que es su

concepto de aprendizaje. Los pedagogos saben muy bien que hay varias concepciones de aprendizaje; por ejemplo, el behaviorismo (o conductismo) concibe el aprendizaje como algo que se transmite y que adquiere el estudiante. Los constructivistas tienen otro concepto de aprendizaje; para ellos el conocimiento no se transmite, para ellos el conocimiento es construido por cada estudiante. El conocimiento no viene de afuera del individuo, sino de su foro interior. Esta idea fue muy popular durante muchos años y sigue siendo muy popular. El problema con ella es que al asumir que el conocimiento es construido por cada individuo se llega a una concepción individualista del aprendizaje. No hay espacio para entender el papel de la cultura y de la historia en el aprendizaje (Moretti, Panossian y Radford, 2018; Radford, 2020a).

En la teoría de la objetivación el saber es *encontrado*. Es *colectivamente encontrado*. El saber matemático ya está en la cultura. El problema educativo es el de comprender el encuentro con este saber y propiciar las condiciones óptimas para que ese encuentro sea lo más rico posible. Ese encuentro con el saber cultural es lo que llamamos *objetivación*. Objetivación es el encuentro con lo nuevo, lo extraño, lo desconocido. La Figura 3 muestra una clase de escuela; imaginemos un niño que entra a esa clase. Al entrar a la clase, el niño va a encontrarse con los saberes culturales materializados en libros, artefactos y maneras culturales de ser, de hacer y de pensar. Pero ese encuentro lo va a hacer con otros; él no está solo.



Figura 3 – Una clase en la escuela
Fonte: <http://www.freepik.com>

Ese encuentro va a hacer un encuentro social que no es simplemente encuentro con saberes, sino que también la transformación del niño que encuentra los saberes. De esa cuenta, decimos en la teoría de la objetivación que la escuela no produce solamente saberes; produce también subjetividades. Eso nos lleva a repensar el aprendizaje de otra manera, pues el foco ya no está apenas en el contenido matemático; el aprendizaje ya no puede ser solamente sobre el saber, sino también sobre el individuo, sobre el tornarse.

Por eso, en la teoría de la objetivación declinamos el aprendizaje en dos ejes: el eje del

saber y el eje del ser. El eje del saber lo investigamos a través de los *procesos de objetivación* y aquellos del ser lo investigamos a través de los *procesos de subjetivación*. Guardamos siempre en mente la idea que mencionamos anteriormente: el aprendizaje ocurre dentro de una *actividad*. Es la actividad del aula, la actividad de enseñanza-aprendizaje, donde aprender es enseñar y enseñar es aprender. Ciertas actividades van a provocar ciertos procesos de objetivación, otras actividades van a producir otros procesos de objetivación. Es igual con los procesos de subjetivación. Así, una actividad de matemática pobre va a llevar a aprendizajes pobres. Una actividad de matemática alienante va a llevar a aprendizajes alienantes (Camilotti y Takeco Gobara, 2021).

Digamos algunas palabras sobre los procesos de objetivación. La objetivación es un proceso social, corporal, material y simbólico de toma de conciencia de formas de expresión, acción y pensamiento constituida histórica y culturalmente. Vemos que hay tres elementos en esta comprensión del aprendizaje. Primero que el aprendizaje es un proceso social de toma de conciencia de ciertas cosas — esas cosas son los saberes culturales. El tipo de *actividad* que nosotros buscamos propiciar en la teoría de la objetivación es tal que ese encuentro con los saberes culturales ocurra a través de un proceso que es crítico, poético, sensual y sensible. Es un encuentro progresivo que se hace a través del cuerpo, del lenguaje y de artefactos, y que es subversivo, afectivo, simbólico y material. El problema central va a ser el de pensar e imaginar qué actividad conduce a ese tipo de proceso (Radford, 2020b; 2021a).

Digamos ahora unas palabras a respecto de la subjetivación. La subjetivación se da en aquellos procesos sociales en el curso de los cuales estudiantes y profesores llegan a ocupar un espacio, a posicionarse, y a afirmarse en el mundo social. La subjetivación ocurre en aquellos procesos históricos de la creación del yo. El yo entendido como una entidad cultural en flujo perpetuo, un proyecto de vida siempre en transformación (procesos de subjetivación son analizados en varios trabajos; ver, por ejemplo, Alves Paiva y Noronha (2020), Castilho y Moretti (2020), Lopes do Nascimento y Morey (2021)).

4. Aprendizaje colectivo

Regresamos ahora a mi argumento y a sus dos ideas principales. Hemos dicho que, para entender el aprendizaje colectivo, tenemos que interrogarnos sobre el tipo de *actividad* que lo caracteriza. Dijimos que no es la proximidad la que hace el aprendizaje colectivo realidad. La proximidad real o virtual no es suficiente. La segunda idea era que tenemos que revisar nuestra idea de aprendizaje. Hemos dicho hasta ahora que hay tipos de actividades que van a llevar a aprendizajes ricos conceptualmente y que también van a permitir al sujeto posicionarse en la práctica social. Pero también hay actividades que producen lo contrario. Por ejemplo, las

actividades de la sala de clase magistral van a conducir a aprendizajes pobres y a subjetividades alienadas. Las actividades constructivistas van igualmente a conducir a aprendizajes alienantes por la simple razón que en ellas los estudiantes no son capaces de entrar en un diálogo con la humanidad, con la historia, la cultura y sus problemas.

En la siguiente sección trataremos de identificar el tipo de actividad que podría conducir a un aprendizaje colectivo.

4.1 El objeto común de la actividad

¿Qué necesitamos para elaborar este concepto de actividad que podría conducir a un aprendizaje colectivo? Primero, la actividad debe estar direccionada hacia la satisfacción de una *necesidad colectiva*: encontrar un objeto cultural de aprendizaje *común*. Por ejemplo, en las fotos de la Figura 4, los estudiantes están tratando de encontrar la manera cultural de pensar matemáticamente el movimiento de cuerpos.



Figura 4 – Estudiantes estudiando sobre movimiento de cuerpos
Fonte: Presentación en el VIII EPEM

En la foto de la izquierda, los estudiantes están estudiando el movimiento de dos carros que se desplazan en línea recta uno hacia el otro y lo están haciendo a través de un encuentro con gráficas cartesianas y sistemas de ecuaciones lineares. En la foto de la derecha vemos otra clase; en la foto vemos como el profesor discute con los estudiantes respecto a la manera en que un cilindro desciende sobre la rampa que se muestra en la foto.

En ambos casos la actividad está dirigida a encontrar un objeto cultural de aprendizaje *común*: la manera en que los matemáticos piensan el movimiento. Es a través de esta actividad de profesores y estudiantes que el saber matemático se va a materializar y que el aprendizaje colectivo va a ocurrir.

4.2 Ética comunitaria

Pero hay otra cosa. Esta actividad que ustedes están viendo acá se basa en *relaciones*

sociales que van a caracterizar la interacción en el *colectivo*. Aquí llegamos a un punto importante de esta plática porque ya hemos dicho varias veces que no es la proximidad real o virtual la que hace al colectivo un colectivo genuino (es decir, un *colectivo*). *Lo que lo hace genuino es el tipo de relaciones sociales que se dan a él*. Ese tipo de relaciones sociales se enmarcan en lo que en la teoría de la objetivación hemos llamado una *ética comunitaria*.

Esta *ética comunitaria* implica o está organizada al redor de tres ejes o, como los filósofos dicen, de tres *virtudes*. El primer eje es *commitment*, que podemos traducir por *compromiso*. El compromiso significa implicarse a fondo en lo que estamos haciendo juntos. El segundo eje es el *cuidado del Otro*. El tercer eje es la *responsabilidad*. La responsabilidad implica el reconocimiento del otro. Implica mi responsabilidad por tratar de entender la voz del otro. No se trata simplemente de oírlo, sino de entenderlo. Se trata de ver el mundo desde *su* perspectiva. En las fotos de la Figura 4 vemos que los estudiantes están envueltos e implicados en lo que el *colectivo* está haciendo. En la foto de la derecha ustedes ven la atención profunda con que los estudiantes están tratando de entender lo que el profesor está diciendo. Los estudiantes muestran un *compromiso* hacia lo que se está haciendo y diciendo. Los estudiantes prestan atención. Esta atención desborda el ámbito de lo cognitivo y entra en el ámbito de la *ética*: la atención es parte del *cuidado del Otro*, en este caso el cuidado que los estudiantes prestan al profesor. Y recíprocamente: en sus explicaciones y sus gestos, el profesor presta cuidado a los estudiantes. En la foto de la izquierda vemos también el compromiso, el cuidado del otro y la responsabilidad. En ambos ejemplos, los estudiantes están implicados de cuerpo y alma en tratar de entender el movimiento de los autos. Los estudiantes están comprometidos en el aprendizaje.

Evidentemente esto no quiere decir que en la práctica de la *ética comunitaria* tengamos que estar de acuerdo con el otro. Una *ética comunitaria* está llena de tensiones (Radford, 2021b), pero en la medida en que estamos envueltos en la actividad y comprometidos con ella, prestando continuamente cuidado al otro, nos mantenemos ‘pegados’ unos con otros, trabajando juntos más allá de nuestras diferencias.

Introduzcamos ahora otro concepto importante de la teoría de la objetivación. Decimos que cuando la actividad del aula tiene un objeto de aprendizaje *común* y las *relaciones sociales* de la actividad se basan en la *ética comunitaria*, esta actividad se llama *labor conjunta*.³

Ahora podemos responder la pregunta con la que empezamos esta plática: ¿Qué significa aprendizaje colectivo? Hemos dicho que, para responderla, debemos tener en mente

³ Un trabajo reciente sobre la labor conjunta es el de Ramos de Almeida y Martins (2022).

que lo que caracteriza al *colectivo* es el *tipo de actividad* en que participan los individuos. Esta actividad en la que ocurre el aprendizaje se distingue por: (a) su direccionamiento y (b) por el tipo de relaciones sociales que conlleva. La actividad está direccionada por el encuentro con un objeto cultural de aprendizaje *común* y está basada en una interacción de profesores y estudiantes que tiene lugar dentro de los marcos de la ética comunitaria mencionada arriba. Utilizando el concepto que hemos introducido hace un momento, el aprendizaje será *colectivo* si este ocurre dentro de una labor conjunta de profesores y estudiantes.

Regresemos a la Figura 1.

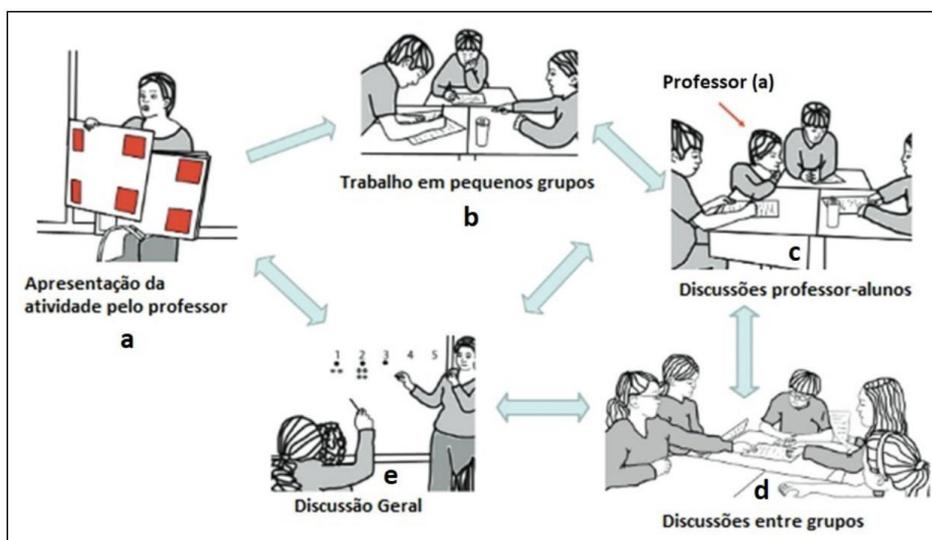


Figura 5– Las fases de labor conjunta de aula
Fonte: Apresentação en el VIII EPEM

Con los conceptos que hemos introducido, podemos decir que no es simplemente porque la clase se mira estructurada socialmente como se muestra en la Figura 5 (es decir, la clase es dividida en pequeños grupos y que hay discusiones generales) que hay aprendizaje *colectivo*. Quizás haya aprendizaje colectivo, pero no *aprendizaje colectivo*. Por ejemplo, en el constructivismo, las actividades colectivas son vistas como medios para que cada estudiante construya de mejor manera su propio saber, o sea, no hay un direccionamiento *colectivo* hacia un objeto de aprendizaje *común*, verdaderamente compartido por cada uno de los estudiantes y el profesor. La clase es vista como un conjunto de estímulos que cada individuo aprovecha lo mejor que puede según sus *propios* intereses y gustos.

Terminemos esta sección insistiendo en esto: en el caso de la teoría de la objetivación y su idea de aprendizaje *colectivo*, el aula podría parecer superficialmente similar a las aulas socioconstructivistas y muchas otras. Hay, sin embargo, una diferencia fundamental: hay un direccionamiento de la actividad hacia algo común, un objeto cultural de aprendizaje *común*

(en nuestro ejemplo, la manera matemática cultural de pensar el movimiento de cuerpos) y relaciones sociales que obedecen a una ética colectiva (la ética comunitaria).

5. Un ejemplo

Voy a dar un ejemplo. Voy a hablar de una clase de matemáticas que hace parte de uno de nuestros proyectos longitudinales. Es una clase de escuela primaria; el ejemplo proviene de una serie de lecciones sobre álgebra en el cual los estudiantes están encontrando las maneras culturales matemáticas de resolver ecuaciones.

En ciertos momentos de la actividad, los estudiantes discuten en pequeños grupos. La Figura 6 muestra a los estudiantes tratando de resolver una ecuación lineal.

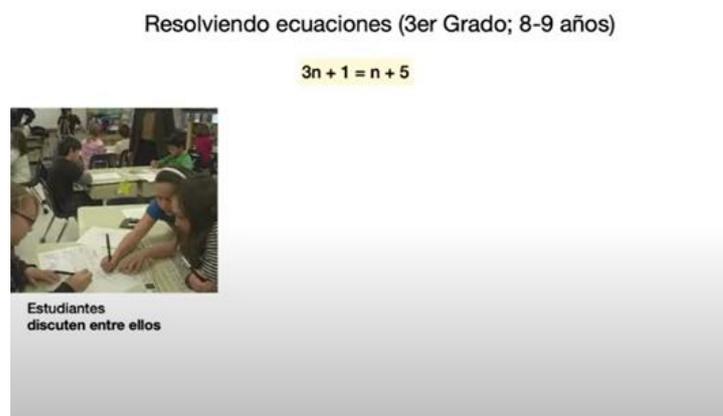


Figura 6– Estudiantes resolviendo una ecuación
Fonte: Presentación en el VIII EPEM

Luego hay discusiones con la maestra. También hay discusiones generales en las cuales los estudiantes presentan ideas a la clase y reciben críticas de manera que el colectivo pueda ir más lejos en el aprendizaje. La actividad está direccionada hacia un objeto *común*. ¿Cuál es ese objeto *común*? Es una idea, una idea colectiva que emergerá poco a poco: cómo resolver las ecuaciones lineales.

Evidentemente, como estamos en grado 3, con niños de 8-9 años, no damos a los niños la ecuación en la sintaxis alfanumérica, sino que utilizamos un material concreto como se puede ver en las fotos de la Figura 7.

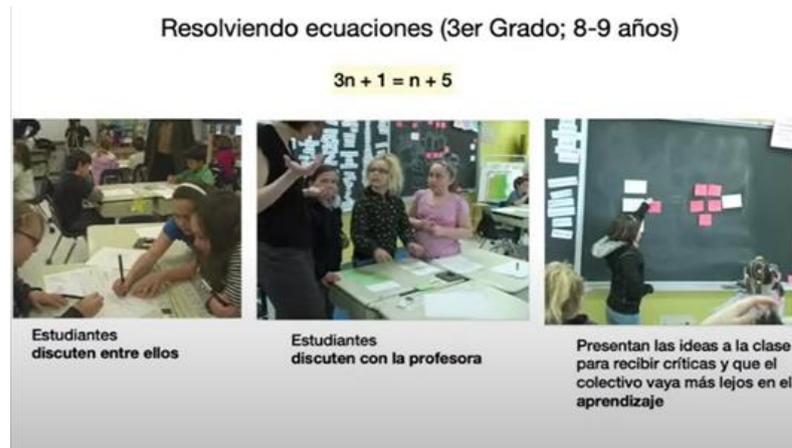


Figura 7– Estudiantes resolviendo ecuaciones 2

Fonte: Apresentação em el VIII EPEM

En la foto de la derecha ustedes ven varios sobres pegados al pizarrón. En cada sobre hay un número escondido de cartas. En el lado izquierdo de la ecuación, hay tres sobres y una carta (uno de los sobres está parcialmente visible). Esto corresponde a $3n+1$. Del lado derecho de la ecuación hay cinco cartas y un sobre; esto representa $5+n$. Dentro del proyecto didáctico de la profesora, se busca que los estudiantes encuentren la manera de resolver estas ecuaciones por un proceso de simplificación. Al principio los niños proponen métodos aritméticos de ensayo error (tratan de adivinar cuántas cartas hay en un sobre). Es de la conversación con la profesora que nuevas ideas algebraicas empiezan a emerger. En la foto de la derecha de la Figura 7, la niña está quitando una carta del lado izquierdo de la ecuación y luego va a quitar una carta del lado derecho de la ecuación; va a continuar así sucesivamente hasta simplificar la ecuación.

Además de manipular los objetos concretos, los estudiantes también van a escribir la simplificación de la ecuación. En la Figura 8 vemos la ecuación $2n+1=6+n$; los estudiantes tiran una carta del lado izquierdo de la ecuación, y tiran una carta del lado derecho; luego van a tirar un sobre de cada lado y van a poder deducir cuántas cartas hay dentro de un sobre.

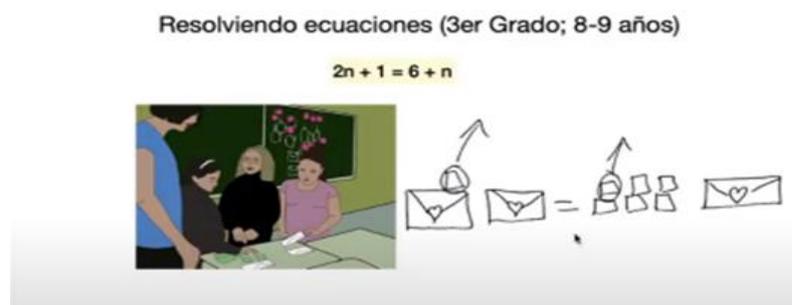


Figura 8 – Solución de los estudiantes

Fonte: Apresentação em el VIII EPEM

Esto es parte de esa secuencia didáctica que imaginamos para esta clase de estudiantes. Cuando estos mismos niños llegaron al 5º grado, es decir dos años más tarde, empezamos a

introducir el lenguaje simbólico, pero también empezamos a pedir a los estudiantes que *explicaran* cómo se resuelven las ecuaciones. Pedimos a los estudiantes escribir un texto que explique las etapas a seguir para resolver ecuaciones lineales como las que habían visto hasta ese día. En la Figura 9 vemos el trabajo de un pequeño grupo.

Resolviendo ecuaciones (5° Grado; 10-11 años)

Escribir un texto que explique las etapas a seguir



Pour faire une équation au 5^{ème} degré:
 1. On écrit l'équation.
 2. On fait le 1^{er} membre au membre de droite et on simplifie.
 3. On fait le 2^{ème} membre au membre de droite et on simplifie.
 4. On fait le 3^{ème} membre au membre de droite et on simplifie.
 5. On fait le 4^{ème} membre au membre de droite et on simplifie.
 6. On écrit le résultat de l'équation.
 7. On calcule le résultat des opérations.
 8. Si on a plus d'une solution, on écrit toutes les solutions.
 9. Après avoir terminé, on vérifie la solution.

Figura 9 – Etapas de los estudiantes en la solución de ecuaciones
 Fonte: Apresentação en el VIII EPEM

Los estudiantes de este grupo describieron en nueve etapas cómo resolver una ecuación. Otro grupo escribió otro texto que es el que aparece hacia la derecha en la Figura 10.

Resolviendo ecuaciones (5° Grado; 10-11 años)

Escribir un texto que explique las etapas a seguir



Pour faire une équation au 5^{ème} degré:
 1. On écrit l'équation.
 2. On fait le 1^{er} membre au membre de droite et on simplifie.
 3. On fait le 2^{ème} membre au membre de droite et on simplifie.
 4. On fait le 3^{ème} membre au membre de droite et on simplifie.
 5. On fait le 4^{ème} membre au membre de droite et on simplifie.
 6. On écrit le résultat de l'équation.
 7. On calcule le résultat des opérations.
 8. Si on a plus d'une solution, on écrit toutes les solutions.
 9. Après avoir terminé, on vérifie la solution.

Pour faire une équation au 5^{ème} degré:
 1. On écrit l'équation.
 2. On fait le 1^{er} membre au membre de droite et on simplifie.
 3. On fait le 2^{ème} membre au membre de droite et on simplifie.
 4. On fait le 3^{ème} membre au membre de droite et on simplifie.
 5. On fait le 4^{ème} membre au membre de droite et on simplifie.
 6. On écrit le résultat de l'équation.
 7. On calcule le résultat des opérations.
 8. Si on a plus d'une solution, on écrit toutes les solutions.
 9. Après avoir terminé, on vérifie la solution.

Figura 10 – Solución de otros estudiantes
 Fonte: Apresentação en el VIII EPEM

En cierto momento la profesora hace un intercambio de textos entre grupos. Cada grupo tiene que estudiar el texto del otro grupo y posicionarse críticamente respecto de ese texto. Por ejemplo, el grupo que se muestra en la Figura 10, recibió el texto de otro grupo (el texto que

aparece a la derecha en la Figura 10). Leen el texto del otro grupo y hace las observaciones que aparecen en la Figura 11.

Cecilia: yo diría que [falta] más detalles.
Carla: (leyendo la etapa 2 del texto) "Toma el lado [de la ecuación] con menos sobres y quita todos los sobres."
Emilie: ¿y qué sucede con el otro lado [de la ecuación]?"

Figura 11 – Observaciones del grupo de los estudiantes
Fonte: Presentación en el VIII EPEM

En el texto del segundo grupo, no se dice nada acerca de lo que va a pasar en el otro lado de la ecuación. Aunque los niños, es cierto, no lo dijeron por escrito, en la resolución de la ecuación sí quitan los sobres correspondientes del otro lado. Eso pone en evidencia un problema. ¿Qué es lo que tenemos que poner en un texto matemático?

Cada grupo recibe la crítica del otro grupo. Después se juntan para discutir las críticas y para tratar de producir juntos un texto mejor. La Figura 12 muestra el momento en que los grupos se juntan.



Figura 12 – Grupos juntos
Fonte: Presentación en el VIII EPEM

Ustedes pueden ver que los niños tienen un espacio para exponer sus ideas. Los niños están *comprometidos* con lo que se está haciendo y diciendo. Cada grupo se comporta *responsablemente* tratando de *entender* las ideas del otro y al mismo tiempo presentando objeciones a esas ideas. Esa presentación de ideas es parte del posicionamiento de los

estudiantes ante el saber matemático y frente a los otros estudiantes. La discusión es fuerte. Es fuerte en el sentido de que hay ideas contradictorias y que no hay una sola buena idea acerca de lo que es un buen texto matemático. Por ejemplo, unas de las cosas que resulta acá y que discuten los niños es la siguiente: ¿es necesario presentar un ejemplo como hace el segundo grupo o es suficiente escribir un texto *en general*, sin ejemplos? Aparece ahí el problema del papel epistemológico del ejemplo. ¿Es un texto matemático mejor porque tiene un ejemplo o no? El problema no se resuelve durante la actividad, pero el problema se plantea y eso es parte de esta actividad que trata de abrir un espacio para el aprendizaje colectivo a partir de relaciones sociales que mantienen a los niños juntos unos con otros, independientemente de las contradicciones, de los confrontamientos de ideas y de las concepciones que puedan tener respecto a lo que es un texto matemático. Esto es parte de lo que nosotros consideramos un aprendizaje colectivo.

En el caso del segundo grupo, por ejemplo, han visto que lo han escrito pudo haber sido más explícito. Hay ahí un aprendizaje y es un aprendizaje que no es solamente de ese grupo, sino que también viene con el apoyo del otro grupo. El segundo grupo aprende del primero. Pero también el primer grupo aprende del segundo. El hecho que el segundo grupo escribiera un ejemplo hizo pensar al primero grupo algo en lo que ellos no habían pensado — si es necesario o no poner un ejemplo. Para decirlo metafóricamente, estos grupos están poniendo piedrecitas unas sobre otras y de estas piedrecitas están construyendo una idea común. Esa idea común es cómo escribir un texto que explique cómo se resuelven las ecuaciones lineales.

6. ¿Cómo lograr el aprendizaje colectivo en la clase de matemáticas?

Hasta ahora he hablado de lo que significa un aprendizaje colectivo, pero no he hablado de cómo se alcanza en la clase de matemática. Cómo se alcanza hace parte de un proceso largo. La investigación longitudinal a la que he hecho referencia en esta plática fue una investigación de varios años. Lo que vimos en esa investigación es que al principio no existe una ética comunitaria. En general, los niños llegan a la escuela equipados con las concepciones que ellos encuentran en la sociedad. Son concepciones de relaciones sociales individualistas. No es sorprendente que sea todo un aprendizaje aprender a trabajar en conjunto.

En una investigación que fue realizada en Colombia, Adriana Lasprilla muestra que no es suficiente invitar a los niños a trabajar en pequeños grupos. Al principio, las relaciones sociales que se dan entre ellos no son de naturaleza comunitaria. Por ejemplo, en la Figura 13 vemos que una niña no está de acuerdo con la manera de resolver el problema que propone su amigo y entonces le da un golpe en la cabeza (Lasprilla, Radford, & León, 2021).



Figura 13 – Imagen de niña golpeando su amigo, publicado en (Lasprilla, 2021)

Fonte: Apresentação en el VIII EPEM

¿Qué quiere decir esto? Lo que quiere decir es que para alcanzar el aprendizaje colectivo en el aula va a ser necesario que el maestro o el profesor pueda crear las condiciones de emergencia de una ética comunitaria. Es un trabajo largo, pero no imposible. Es más, no es solamente largo; es *necesario* si queremos pensar la escuela y la educación de manera Freiriana, es decir como un sitio de transformación del mundo. La ética comunitaria no es un lujo, es una necesidad. Es una necesidad para poder pensar una sociedad diferente, inclusiva y democrática.

7. Síntesis

Empecé diciendo que la proximidad virtual o real no es suficiente para asegurar un aprendizaje colectivo. Podemos ver clases en donde los niños trabajan juntos en pequeños grupos y que tienen discusiones generales; sin embargo, esto no es suficiente para asegurar que haya un aprendizaje colectivo. Dijimos que para llegar a un aprendizaje colectivo tenemos que poner atención al tipo de actividad en la que ocurre aprendizaje y repensar nuestro concepto de aprendizaje. Fue tratando de repensar el aprendizaje de otra manera que llegamos a la idea de objetivación.

Esta idea trata de poner en evidencia que el saber no es algo que el profesor transmite al niño. Tampoco el saber es algo que el niño construye por sí solo. Lo que propusimos fue que el saber ya existe en la cultura, aún si está cambiando todos los días. Los matemáticos están cambiando, mejorando y expandiendo el saber matemático todo el tiempo. Ese saber está pues ya en la cultura y el problema educativo es el de dar cuenta del encuentro del niño con ese saber. Dijimos que tanto la objetivación como la subjetivación van a ocurrir dentro de la actividad de clase, la cual no la vemos como una actividad de aprendizaje y una actividad de enseñanza, sino que la vemos como una misma actividad: la actividad de enseñanza-aprendizaje, donde

profesores y estudiantes están aprendiendo juntos. Los maestros y profesores están, al igual que los estudiantes, formándose cada día y transformándose cada día.

Para que lleve a un aprendizaje coletivo, esta actividad de enseñanza-aprendizaje tiene que estar direccionada hacia el encuentro con un objeto cultural de aprendizaje *común* y estar basada en relaciones sociales amparadas en una ética comunitaria. Es esta actividad que hemos llamado labor conjunta. Para resumir, el aprendizaje será colectivo si la actividad en que ocurre satisface las dos condiciones de la labor conjunta entre profesor y estudiantes.

Reconocimientos

Este artículo ha sido escrito en el marco de un programa de investigación subvencionado por el Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH).

Referências

- Alves Paiva, J., & Noronha, C. (2020). O entrelaçamento entre os processos de objetivação e subjetivação no labor conjunto em uma tarefa sobre orientação espacial para alunos do 6º ano do ensino fundamental. In S. Takeco Gobara & L. Radford (Eds.), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 153-173). Livraria da Física.
- Camilotti, D., & Takeco Gobara, S. (2021). Formação continuada e permanente de professores: Emancipação coletiva das práticas pedagógicas alienantes. *REMATEC*, 16(39), 1-18.
- Castilho, R., & Moretti, V. (2020). O “encontro” com o mapa: Aprendendo a pensar sobre o espaço por meio do sistema semiótico cartográfico. In S. Takeco Gobara & L. Radford (Eds.), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 175-197). Livraria da Física.
- Lasprilla, A. (2021). *Constitución dialéctica de los procesos de objetivación y subjetivación con una ética comunitaria en Actividades desarrolladas al abordar tareas de generalización de patrones*. Tesis de doctorado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Lasprilla, A., Radford, L., & León, O. (2021). Formas de interacción social y aspectos éticos en actividades matemáticas escolares. In L. Radford & M. Silva Acuña (Eds.), *Ética: Entre educación y filosofía* (pp. 211-232). Uniandes.
- Lopes do Nascimento, V., & Morey, B. (2021). Processos de Subjetivação em torno da escrita da obra *Ex Ludis Rerum Mathematicarum* de Leon Battista Alberti. *REMATEC*, 16(39), 185-205.
- Moretti, V., Panossian, M. L., & Radford, L. (2018). Questões em torno da teoria da objetivação. *Obutchénie*, 2(1), 230-251.
- Moretti, V., & Radford, L. (2021). *Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural*. Livraria da Física.

- Radford, L. (2018). A teoria da objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em educação matemática. In V. Moretti & W. Cedro (Eds.), *Educação Matemática e a teoria histórico-cultural* (pp. 229-262). Mercado de Letras.
- Radford, L. (2020a). El aprendizaje visto como saber y devenir: una mirada desde la teoría de la objetivación. *REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 15(36), 27-42.
- Radford, L. (2020b). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana de Matemática Educativa, RECME, Número especial de la Teoría de la Objetivación*, 5(2), 15-31.
- Radford, L. (2021a). Reimaginar el aula de matemáticas: Las matemáticas escolares como praxis emancipadora. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 13(2), 44-55. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i2.88>
- Radford, L. (2021b). *Teoria da objetivação: uma perspectiva Vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática*. (Tradução de B. Morey e S. Gobara). Livraria da Física.
- Ramos de Almeida, J., & Martins, J. (2022). Labor conjunto remoto: uma proposta metodológica para formação continuada de professores que ensinam matemática. *RIPEM*, 12(3), 106-124.
- Takeco Gobara, S., & Radford, L. (2020). *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática*. Livraria da Física.

Anexo

Caso seja necessário, os anexos devem ser inseridos em uma nova página. Devem ser sequenciados Anexo A, Anexo B...