Radford, L. (2022). Corps, matière et signes dans la constitution du sens en mathématiques [Body, matter and signs in the constitution of meaning in mathematics]. In C. Houdement, C. Hache, & C. de Hosson (Eds.), *sémiotique et apprentissages scientifiques* (pp. 245-280). Paris: ISTE Editions.

Corps, matière et signes dans la constitution du sens en mathématiques

Luis RADFORD
Université Laurentienne, Greater Sudbury, Canada

7.1. Introduction

Dans une classe d'enfants de 5-6 ans (classe de « jardin » en Ontario, Canada), l'enseignante propose une activité mathématique autour de la prolongation d'une suite « logique » composée de termes « chiens » et de termes « maisons » (figure 7.1).

Figure 7.1. *Les premiers termes d'une suite explorée par les enfants d'une classe de jardin*

En petits groupes de deux, les enfants devaient tirer des petites cartes d'un sac, une carte à la fois (figure 7.2a). Chaque carte contenait 3, 4 ou 5 termes, chaque terme étant « chien » ou « maison ». Par exemple, une carte montrait la suite « maison », « maison »,

.

« chien » ; une autre carte montrait la suite « maison », « chien », « maison », « maison ». Ensuite, les enfants devaient placer la carte tirée à la fin des éléments donnés de la suite et dire si oui ou non la carte prolongeait la suite.

Dans un des groupes, Chloé et Antoine travaillent ensemble :

1. Chloé : (*Donne le sac à Antoine*) Ton tour, Antoine.

2. Antoine : Je vais avoir un[e] bon[ne] carte, peut-être ! (*Il choisit une carte du sac. Il regarde la carte*). Ha ! (*Il obtient une carte qui montre « maison, maison, chien » ; il la dépose à la fin des éléments donnés de la suite* (figure 7.2b)). Ha ha ! (*Il commence à parcourir les éléments de la suite à partir du premier terme.*) Chien, maison, maison (figure 7.2c) ; chien, maison, maison ; chien, maison, maison ; chien, maison, maison ; chien ! (figure 7.2d). Oui !

3. Chloé : Tu l'as Antoine ! (*Elle prend le sac, tire une carte et ils continuent à étudier si la nouvelle carte continue ou non la suite*).

a) b) c) d)

Figure 7.2. *Les élèves explorent la prolongation d'une suite donnée par ses premiers termes*

p. 247

Ce court passage nous montre tout une série de ressources auxquelles les enfants ont recours pour répondre aux consignes de la tâche mathématique. Il s'agit d'une série de ressources d'ordre *sémiotique* qui comprend :

– des *signes* donnés (« maison », « chien » et leur ordre) ;

– une activité *sémiotico-perceptuelle* ;

– des *gestes* ;

– la *langue* ;

– le *rythme*.

Chacune de ces ressources opère à un niveau différent de la signification. Les gestes, la perception et les mots, par exemple, ne signifient pas de la même manière. Ils ne « disent » pas la même chose. Ainsi, comme le montre l'extrait ci-avant, pour déterminer si la carte tirée du sac prolonge ou non la suite, Antoine, dont les actions et les dires sont suivis de très près par sa co-équipière Chloé, place la carte à la fin des éléments donnés de la suite (figure 7.2b). Ensuite, après s'être exclamé : « Ha ha ! », il pointe, par des *gestes indexicaux* successifs, les éléments de la suite, l'un après l'autre, depuis le début. Ces gestes aident Antoine à organiser le parcours de la suite. Ils soutiennent l'attention. On voit bien qu'ils sont déployés en *synchronie* avec les *mots*, qui viennent distinguer et qualifier les objets parcourus. Mais ils sont aussi déployés avec une *activité perceptuelle* où le regard se déplace avec le geste et le mot prononcé : « Chien, maison, maison ; (figure 7.2c) chien, maison, maison ; chien, maison, maison ; chien, maison, maison ; chien ! »

Cette synchronie de l'activité perceptuelle avec le geste indexical et la procédure de nomination d'objets par l'entremise de la langue fait de la perception une *sémiosis perceptuelle*, c'est-à-dire un mouvement dialectique entre les signes perçus et produits, leur interprétation dans une structure théorique donnée (ici, une structure d'*ordre* d'objets) et l'action du sujet (Radford 2004).

Puisque les ressources listées ci-avant opèrent chacune à un niveau différent de la signification, on dit qu'elles relèvent de *modalités* sémiotiques différentes. Ensemble, elles rendent l'activité de l'enfant une *activité sémiotique multimodale* (Radford *et al.* 2009).

On peut poser la question suivante : pour rendre compte de la production du sens mathématique de l'enfant et de son apprentissage, est-ce nécessaire de s'attarder sur cette activité sémiotique multimodale ? La question du sens a souvent été étudiée en privilégiant les modalités de l'écriture ou de l'oralité et parfois les deux. Par exemple, le travail de Raymond Duval (1995, 1998), et avec François Pluvinage (Duval et Pluvinage 2016) se centre surtout sur la production écrite des élèves. La question est donc tout à fait pertinente : vaut-il la peine de s'attarder sur les autres modalités ? Que gagne-t-on ?

Ces questions et d'autres questions similaires ont fait leur apparition dans le domaine de l'éducation mathématique il y a quelques années. Elles sont relativement récentes et ont donné lieu à la question de ce qu'en anglais on appelle *embodiment*, et qu'on traduit en français par le terme *incarnation* ou, encore, *corporalité* (du latin *corporalis*, relatif au corps). C'est le terme corporalité qui me semble mieux traduire les idées sous-jacentes au principe théorique de l'*embodiment*. Selon ce principe, la pensée n'est pas quelque chose de purement mental. Au contraire, pour fonctionner, la pensée a recours à une série de modalités sémiotiques dont l'étude peut apporter de nouveaux éclairages sur la production du sens mathématique chez l'élève. Dans l'exemple précédent, on voit que ce qui semble offrir à Antoine et à sa coéquipière la garantie cherchée pour répondre à la question de l'adéquation/inadéquation de la carte tirée du sac trouve sa raison dans une *démarche rythmée* qu'Antoine bâtit avec un jeu d'intonation et de tonalité dans les mots, et aussi avec une cadence de mots et de gestes, et des pauses aussi. Il produit une pause à chaque fois que le motif est épuisé et que ce même motif recommence. Lorsque Antoine arrive vers la fin de la suite prolongée, il entend (il s'entend) dire (redire) le motif qui se répète : « Chien, maison, maison ». La certitude qu'il cherche ne se trouve pas dans le seul mouvement logique de la pensée, mais aussi dans les actions corporelles rythmées. C'est cette activité multimodale qui rend possible la production du sens mathématique. Elle nous dévoile la manière *sensuelle* dont la production de ce sens est accomplie : c'est à travers l'organisation complexe, émergente, toujours nouvelle, d'une série de signes de nature différente – l'inscription ou signe mathématique, les gestes, l'action kinesthésique, la sémiosis perceptuelle, la langue et sa prosodie – qu'Antoine parvient à donner un *sens* à la suite et qu'il est en mesure de dire, si oui ou non, telle ou telle carte prolonge la suite.

Nous avons pu observer comment des tâches de ce genre deviennent difficiles, voire impossibles à conduire, dès que l'on interdit au jeune enfant de pointer ou de parler ou de (re)visualiser les termes de la séquence. Nous l'avons vu également avec des élèves de fin de l'école secondaire, où les élèves devaient résoudre un système d'équations linéaires à deux inconnues. Les élèves n'ont pas réussi à résoudre le système d'équations dès qu'on leur a interdit d'écrire. Tout se passe comme si, pour se déployer, la pensée vient se poser sur des signes à modalités différentes en suivant une dynamique rythmée à travers laquelle le problème en question est exploré.

La corporalité, entendue donc comme une approche théorique qui invite à reconceptualiser la manière dont l'humain pense, manière qui inclut le corps ou la chair et la matérialité du monde (signes, artefacts, etc.), est devenue un sous-domaine relativement important de la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il y a eu en 2009 un numéro spécial sur ce thème dans la revue *Educational Studies in Mathematics* (Edwards *et al.* 2009) et, plus récemment, un chapitre lui a été consacré dans le *First compendium for research in mathematics education* (Radford *et al.* 2017).

p. 249

Or, l'arrivée de la corporalité dans notre champ de recherche, ainsi que dans d'autres domaines des sciences humaines, a débouché sur une série de problèmes théoriques et pratiques. Puisque la corporalité met en question la conceptualisation idéaliste traditionnelle de la pensée et des catégories théoriques sur lesquelles une telle conceptualisation repose, il devient nécessaire de reformuler clairement non seulement notre compréhension de la pensée, mais aussi ses rapports avec le corps, la chair, le sensible et le conceptuel. Il s'avère que, sans une prise de position claire à ce sujet, l'analyse de l'activité sémiotique multimodale peut rester superficielle, se limitant à *exhiber* le recours aux gestes, aux mots et aux symboles dans la situation étudiée. Le problème est que simplement exhiber les différentes facettes de la corporalité peut ne pas être assez pour parvenir à des explications convaincantes. C'est ici qu'un cadre théorique ou une approche théorique précise devient incontournable.

Dans ce chapitre, nous abordons la question de la corporalité dans la constitution du sens en mathématiques. Nous nous intéressons en particulier à la constitution du sens dans son rapport avec le corps, la matière et les signes. La première section de ce chapitre a pour but de rappeler quelques positions historiques concernant le rapport entre la pensée et le corps et de mentionner plusieurs pistes contemporaines de recherches sur la corporalité. En mettant en évidence certains présupposés adoptés autrefois dans la théorisation du rapport entre corps et pensée, ce court survol historique peut jeter un éclairage sur certaines compréhensions contemporaines de la corporalité. C'est notamment le cas de celles qui trouvent dans le corps une opportunité pour repositionner centralement le sujet dans sa compréhension du monde, mais qui, en se cantonnant sur le corps, tombent dans une nouvelle forme de subjectivisme – une forme de subjectivisme empirique radical. Nous optons pour une position différente sur la corporalité. Il s'agit de la position moniste articulée au XVII[e] siècle par Benedict de Spinoza (2010), réélaborée plus tard par Karl Marx (Fischbach 2014), Lev Vygotski (Clot 2015), Alexis Leontiev (1976) et Evald Vassilievitch Ilyenkov (1977) dans une perspective dialectique matérialiste. Ce « spinozisme matérialiste » me permet d'arriver à une conception sensuelle de la cognition (*sensuous cognition*, que l'on pourrait aussi traduire par « cognition sensible », mais nous craignons que certaines nuances soient perdues) dont les premières ébauches se trouvent dans certains travaux précédents (Radford 2013, 2014, 2015). Nous y revenons dans la deuxième section de ce chapitre pour explorer comment, à la fin du haut Moyen Âge et au début de la Renaissance, l'émergence historique du symbolisme algébrique entraîne une série de transformations du côté des sens. On passe d'une pratique algébrique organisée autour de l'oralité à une pratique sémiotique visuelle qui se déploie autour du signe écrit. La production du sens mathématique se voit ainsi profondément modifiée. Nous avançons l'idée que les transformations que l'on constate du côté des sens humains, notamment la perception, doivent être comprises à la lumière de l'émergence d'une culture visuelle par excellence – la culture de la Renaissance –, elle-même résultat des nouvelles formes de production de la vie matérielle et spirituelle qu'entraîne le capitalisme artisanal naissant. L'analyse phylogénétique de la deuxième section du chapitre cède la place, dans la troisième section, à une analyse ontogénétique qui porte sur une leçon d'algèbre en 6e année d'école primaire où les élèves vont au-delà d'une pratique algébrique organisée autour de l'oralité, le recours à des objets concrets, la tactilité et la visualité concomitante, pour rencontrer l'algèbre symbolique.

7.2. Corps, matière et pensée

7.2.1. De l'Antiquité au Moyen Âge

La question au centre de cette section – celle du rapport entre corps, matière et pensée – est une question qui traverse l'histoire de l'Occident. En général, dans chaque période historique, on trouve des vues divergentes dans les conceptions que l'on se fait au sujet du rôle épistémique du corps et de la matière. Dans l'Antiquité, par exemple, Platon, dont la conception du monde reflète la position d'une classe noble qui méprise le travail corporel, considérait le corps comme une nuisance ou un obstacle à l'acquisition de la vraie connaissance. Dans son célèbre dialogue, *Phédon*, un des personnages, Simmias, est invité à déterminer qui, parmi tous les types d'hommes, est capable d'atteindre la vraie connaissance. N'est-ce pas celui, demande Socrate :

> « qui poursuit la vérité en appliquant sa pensée pure et inaltérée à l'objet pur et inaltéré, en se coupant le plus possible de ses yeux, de ses oreilles et de presque tout le reste de son corps, comme un obstacle qui par sa présence empêche l'âme de parvenir à la vérité et à une pensée claire ? » (Plato 1961, p. 48, 65e-66a)[1]

Ce n'est donc pas par la vue ou par le toucher que l'on pourrait accéder, dans un tel cadre aristocratique conceptuel, à la vraie connaissance. Aristote, en revanche, articule une épistémologie plus mondaine, dans laquelle le corps et les sens jouent un rôle important. Dans la *Métaphysique*, la vue, dit-il, « est le sens qui produit particulièrement la cognition en nous et révèle de nombreux traits distinctifs des choses » ((Aristotle 1998, p. 4), Livre Alpha, 980a).

Au Moyen Âge, dans une large mesure, le corps et la chair ont été associés à l'omniprésence corrosive du péché. La chair « était pendant cette période une expression et une externalisation de la condition humaine avilie, portant l'empreinte héréditaire de la sexualité et de la mort » (Bierfnoff 2002, p. 23). Dans sa conception du corps en tant que véhicule du péché, le Moyen Âge donne une place prépondérante à la vue. Un fameux texte anonyme du XIIIe siècle, l'*Ancrene Wisse* (*Les règles des nonnes*), passe en revue les cinq sens, en commençant par la vue. Le texte nous dit, en effet, que c'est par la vue qu'Ève a péché.

1. Dans ce chapitre, toutes les traductions sont libres.

> « Et il est écrit d'Ève, notre mère à tous, que le péché est entré en elle pour la première fois par la vue, c'est-à-dire qu'Ève a regardé la pomme interdite, et l'a vue belle, et a commencé à prendre plaisir à la regarder, et a mis son désir sur elle, et a pris et mangé d'elle, et en a donné à son seigneur [Adam]. » (Morton 2000, p. 22)

Plus loin, l'auteur dit à ses lectrices : « Quand tu regardes un homme, tu es dans le cas d'Ève ; tu regardes la pomme » (Morton 2000, p. 22). Mais la vue, reliée à la vision (dont une des acceptions est « cognition » au sens de connaître), utilisée à bon escient, peut aussi mener au salut. C'est justement la vue qui est le médium de la contemplation (*contemplatio*), laquelle peut mener à « l'union avec Dieu » (Gunn 2008, p. 161). Hugues de l'abbaye de St. Victor, dans le texte du XII^e siècle, *In Salmonis Ecclesiasten homiliæ XIX*, nous dit que la contemplation est « la force vitale même de la compréhension qui, en gardant toutes les choses ouvertes à la vue, comprend tout avec une vision claire » (Petry 2006, p. 90).

Mais ces conceptions médiévales du corps, des sens, et de la vue en particulier, qui associent ceux-ci tantôt à la tentation des appétits sensuels et au péché, tantôt au chemin du salut à travers une pratique ascétique du corps et des sens, rentrent en tension avec l'apparition d'une nouvelle conception de la nature que promeuvent Roger Bacon et d'autres. En suivant Aristote, pour ces philosophes de la nature, vue et vision sont porteuses d'une épistémologique positive : « la vision seule révèle les différences entre les choses, car c'est par elle que nous recherchons la connaissance expérimentale de toutes les choses qui sont dans les cieux et sur la terre » (Bacon, cité dans (Biernoff 2002, p. 63)). Suzannah Biernoff (p. 63) suggère que « les sens corporels, libérés (au moins dans ce contexte) de leur association augustinienne avec la sensualité charnelle, ont pu s'aligner ainsi sur les connaissances expérimentales » (voir aussi (Kärkkäinen 2011)).

7.2.2. *Rationalisme et empirisme aux XVII^e^ et XVIII^e^ siècles*

Ces vues contradictoires sur le corps, la chair et les sens éclatent avec une force particulière aux XVII^e^ et XVIII^e^ siècles. On y trouve, en effet, un courant rationaliste qui pro- longe la vue ascétique médiévale du corps et une vue empiriste qui prolonge celles des philosophes de la nature. Citons, parmi les rationalistes, René Descartes, pour qui con- naître quelque chose équivaut à avoir une appréhension nette de la chose. Et pour lui, l'appréhension du caractère distinctif des choses n'est pas assurée par les sens. Ainsi, pour expliquer comment les corps et les choses extérieures deviennent connus, à la fin de la *Deuxième méditation*, Descartes dit que nous n'arrivons à la connaissance des corps ni par l'imagination ni par les sens. Ce n'est pas parce que nous touchons les corps que nous parvenons à les connaître, car la vraie connaissance est assurée, d'après Descartes, par la faculté d'entendement (c'est-à-dire la faculté par laquelle nous apercevons les idées), parce que les corps « nous les concevons par la pensée » (Descartes 1637, p. 26).

Ainsi, la connaissance des choses n'est pas à trouver dans la matérialité des choses ou dans la sensation. Gottfried Wilhelm Leibniz tenait des propos similaires : « toutes les pensées et actions de notre âme viennent de son propre fond, sans pouvoir lui être données par les sens » (Leibniz 1887, p. 79), de sorte que l'on peut « se fabriquer ces sciences [l'arithmétique et la géométrie] dans son cabinet, et même à yeux clos, sans apprendre par la vue ni même par l'attouchement les vérités dont on a besoin » (Leibniz 1887, p. 84).

À cette position ascétique du corps s'oppose en même temps la voie de l'empirisme prônée par George Berkeley, John Locke et David Hume, entre autres. Pour Hume, les idées que nous formons du monde sont le résultat d'impressions sensorielles, c'est-à-dire des perceptions obtenues grâce aux sens, les idées plus complexes n'étant que des compositions, transpositions, augmentations, diminutions des « matériaux que nous offrent les sens et l'expérience » (Hume 1921, p. 16). La seule manière par laquelle une idée peut avoir accès à l'esprit est par les sens et la sensation.

Les positions rationaliste et empiriste de l'époque peuvent se résumer ainsi : pour les empiristes, rien ne peut être dans l'intellect si ce n'est pas d'abord dans les sens. Pour les rationalistes, en revanche, rien ne peut être dans les sens si ce n'est pas d'abord dans l'intellect.

Au cours du XVIII^e siècle, Emmanuel Kant a essayé de proposer une voie qui se voulait un pont ou un compromis entre les positions rationalistes et empiristes. Dans l'épistémologie que propose Kant, en accord avec les empiristes, aucun objet conceptuel ne pourrait nous être donné sans qu'il passe d'abord par le sensible (directement ou à travers une représentation quelconque). Mais l'inverse est vrai aussi. En accord avec les rationalistes, Kant affirme que, sans la faculté de l'entendement, aucun objet sensible ne pourrait être pensé (Kant 2003, p. 93). Bien que la corporalité et les sens jouent un rôle plus important dans la théorie de la connaissance de Kant, leur contribution reste limitée à fournir à l'entendement la matière première pour que celui-ci mette en œuvre ses engrenages logiques. Selon Kant, une connaissance intelligible n'est pas le contenu d'une expérience généralisée, car les données empiriques – celles qui passent par le corps et les sens – ne deviennent pensables que parce que l'entendement les recueille et les remplit d'un contenu conceptuel.

7.2.3. Corps et sens dans la recherche contemporaine

Les conceptions empiristes et rationalistes mentionnées ci-avant ne vont pas sans implication pour la recherche en éducation, car comme nous le savons très bien, c'est de Kant que Jean Piaget (1970) s'inspire pour bâtir son épistémologie génétique. Et, à l'instar de l'épistémologie kantienne, elle se présente comme un point moyen entre le rationalisme et l'empirisme. Ainsi, dans l'épistémologie génétique piagétienne, le corps et les sensations jouent un rôle important. C'est le cas du stade sensori-moteur dans l'explication que fait Piaget du développement conceptuel. Or, si le corps joue un rôle dans l'explication de la manière dont les individus parviennent à la connaissance, ce n'est que comme étape de transition vers une pensée abstraite. Le stade sensori-moteur chez Piaget n'est qu'un passage éphémère vers le stade des opérations formelles, ce qui range l'approche piagétienne (comme celle de Kant d'ailleurs) proche du côté rationaliste. Comme le mentionne une des collaboratrices de Piaget, Hermine Sinclair, l'épistémologie génétique piagétienne demeure « plus proche du rationalisme que de l'hypothèse empirique » (Sinclair 1971, p. 121).

L'épistémologie génétique piagétienne a eu une influence importante dans les approches qui s'intéressent à l'apprentissage des mathématiques ; c'est le cas, en particulier, des théories appelées « processus-objet », c'est-à-dire les théories qui conçoivent la pensée comme allant de l'action de l'élève à des structures de connaissances opérationnelles. Deux exemples sont la théorie « actions, processus, objets et schémas » (APOS) (Dubinsky et McDonald 2001 ; Dubinsky 2002) et les « trois mondes des mathématiques » (Tall 2013).

Cependant, il y a de nouvelles tendances en recherche qui offrent une approche différente à la compréhension de la cognition humaine. Elles considèrent notre expérience tactile et kinesthésique du monde, et notre interaction avec les artefacts et les signes, comme étant beaucoup plus que des formes d'accès à des configurations opérationnelles cognitives de plus en plus abstraites. Une de ces tendances est offerte par George Lakoff et Rafael Núñez (2000) qui, à partir d'une tradition linguistique centrée sur les métaphores, essaient de montrer que les concepts fondamentaux des mathématiques proviennent de notre expérience sensorielle et de la manière dont celle-ci est véhiculée et exprimée par le langage. Plusieurs chercheurs ont suivi cette route pour étudier l'apprentissage des mathématiques (voir, par exemple, (Edwards 2009)). Mais il y a d'autres approches, comme celle, inspirée de la phénoménologie, qui mettent l'accent sur la nature charnelle de la pensée (Roth 2011 ; Thom et Roth 2011) ou celles qui soulignent la dimension matérielle de la pensée dans la perspective du nouveau matérialisme (de Freitas et Sinclair 2013, 2014).

La perspective sur la corporalité que nous présentons ici, la « cognition sensible », s'inspire du matérialisme dialectique. Dans une conception matérialiste dialectique, la sensation, les sens et la matière sont considérés comme une partie importante du soubassement de la cognition et de toute activité psychique des sujets (activité affective, volitive, etc.). Cette position semblerait me rapprocher de l'empirisme. Ce n'est pas tout à fait vrai. Dans les perspectives empiristes, la sensation, les sens et la matière sont compris comme des entités *données*. C'est-à-dire qu'ils sont considérés comme le point de départ à l'étude du sujet et de la cognition. C'est le cas de David Hume, par exemple, qui pense l'appareil sensoriel humain comme déjà donné, toujours le même, prêt à recevoir les impressions du monde. L'appareil sensoriel humain reste non *problématisé*. Un nombre important d'approches contemporaines de la corporalité suivent la voie de Hume et de l'empirisme britannique. C'est le cas notamment de la philosophe Maxine Sheets-Johnstone (1990, 2009) qui, en essayant de surmonter les limites du rationalisme, met l'accent non pas sur les sens, mais sur le mouvement corporel. Elle revendique le rôle épistémique du corps à travers le mouvement de celui-ci et soutient que c'est le mouvement corporel spontané qui est la source constitutive de notre capacité à faire des choses (*agency*) ; le mouvement serait aussi la source de notre subjectivité et de notre sens du soi (*selfhood*) (Sheets-Johnstone 2011, p. 119). Dans la ligne de pensée de Sheets-Johnstone, nous sommes avant tout des « organismes animés ». C'est dans le mouvement que l'on trouve aussi « le début de la cognition » (Sheets-Johnstone 2011, p. 118). Car, d'après Sheets-Johnstone « nos premiers pas cognitifs se font par le biais de notre propre mouvement » (Sheets-Johnstone 2011, p. 118). Elle note :

> « C'est dans et par le mouvement que la vie de chaque créature... acquiert de la réalité... Au début, nous sommes simplement imprégnés de mouvement – pas seulement d'une propension à bouger, mais avec la vraie chose (*the real thing* [c'est-à-dire, une animation primaire – LR]). Cette animation primaire, cette spontanéité cinétique originale qui imprègne notre être et définit notre vitalité, est notre point de départ pour vivre dans le monde et lui donner un sens. C'est le fondement épistémologique de notre apprentissage à nous mouvoir par rapport aux objets, et donc la base d'un répertoire de "je peux" qui se développe par rapport à l'ensemble naturel et artéfactuel d'objets qui nous entourent. » (Sheets-Johnstone 2011, p. 117)

Bref, dans cette perspective, la découverte par un individu de ce que son corps peut faire n'est pas le résultat d'une cogitation rationaliste contemplative. C'est grâce au mouvement du corps que l'individu découvre un « royaume véritable de "je peux" cinétiques : je peux m'étirer, je peux me tordre, je peux atteindre, je peux me retourner, etc. » et que le corps découvre un « domaine ouvert de possibilités » (Sheets-Johnstone 2011, p. 117). C'est à partir du mouvement que la « conscience kinesthésique » prend vie et que nous parvenons à la cognition.

Comme d'autres travaux contemporains sur la corporalité, le travail de Sheets-Johnstone a le grand mérite de nous faire repenser le rôle du corps dans nos études sur la conceptualisation et l'apprentissage. Le problème d'une telle position théorique, qui est commune à toutes les positions subjectivistes depuis celle de Hume au XVIII^e siècle, est qu'elle se concentre sur l'individu seul. Cette position oublie que les individus en viennent à créer des concepts à l'intérieur d'un monde historico-culturel qui, avant que le corps ne bouge, lui présente des moyens et des limites. En effet, le mouvement qui actualise le « je peux », mouvement qui serait à la base du sens de nous-mêmes en tant qu'individus et du connaître, se réalise et devient toujours effectif au sein de réseaux économiques, politiques, sociaux, conceptuels, culturels et historiques. Et ces réseaux structurants n'auraient guère d'importance s'ils ne façonnaient pas profondément nos mouvements dans le monde et ce que nous pouvons et ne pouvons pas y faire. Ces réseaux affectent profondément la manière dont nous arrivons au savoir. L'explication que proposent Sheets-Johnstone et les courants corporels subjectivistes similaires au sujet de la genèse de la cognition et du sens du soi, serait appropriée à condition de faire abstraction du contexte historico-culturel. Et justement, pour le matérialisme dialectique, cette abstraction est impossible à faire. Dans le meilleur des cas, la position théorique de Sheets-Johnstone finit par offrir une explication partielle de la cognition et du sens du soi – une explication qui reste sans surmonter les limites et les difficultés des courants subjectivistes en général. Une telle position serait adéquate si le sujet du discours était Adam ou Ève. Si, en revanche, il s'agit de rendre compte des conceptualisations du monde et du soi des êtres comme nous, qui sommes arrivés à un monde avec ses formes historiques et culturelles de pensée et d'action déjà constituées (quoique toujours en transformation, par exemple, formes scientifiques, mathématiques, légales, esthétiques, etc.), une explication de la cognition à partir du corps et de son mouvement est certainement insuffisante. Pour le matérialisme dialectique, nos formes de sentir et de penser le monde, nos formes de nous mouvoir et de sentir ce mouvement sont conçues comme étant imbriquées, dès le départ, dans des formes de sensibilités constituées culturellement et historiquement.

Prenons l'exemple de l'ouïe. Dans son livre, *Joseph Haydn la mesure de son siècle*, Marcel Marnat (1995) mentionne le fait que l'on a récemment restauré un authentique pianoforte Schantz pour jouer une des sonates de Haydn. La restauration de ce pianoforte nous permettrait de restituer cette sonate et de l'écouter dans sa splendeur originale des années 1790. Le musicologue Marcel Marnat est d'accord que le pianoforte restauré est « d'une exquise sonorité », mais, dit-il, il est :

> « tellement impuissant à offrir à *nos* oreilles l'impact sonore équivalent à celui atteint en 1790. […] On oublie trop vite que nous comparons à tort avec ce qui est venu *après*, alors que les auditeurs "d'époque" appréciaient par rapport avec ce qu'ils avaient entendu *avant.* » (Marnat 1995, p. 78-79)

L'ouïe, comme tous nos organes de sensation, a subi des transformations historico-culturelles de sorte que nous n'entendons plus comme les gens du XVIII[e] siècle. Un même argument peut être fait pour les autres sens aussi. Concernant la perception, des joueurs d'échecs comme Jacob Aagaard (2004) soutiennent que l'apparition des programmes électroniques du jeu d'échecs a produit des transformations dans la perception des joueurs.
Bref, les sens se transforment historiquement à travers des pratiques sociales. Ce que nous trouvons devant nous à notre naissance ce n'est pas un espace vide que le corps parcourt dans ses mouvements. Ce n'est pas non plus un espace occupé par des objets et des artefacts qui seraient neutres cognitivement. Au contraire, devant nous s'érige un monde taillé et ciselé par les générations précédentes – un monde peuplé par des savoirs,

c'est-à-dire des systèmes historiques et culturels qui nous permettent de penser, de sentir, d'agir et de transformer ce monde et ses savoirs.

La critique que nous faisons ici de l'empirisme n'est pas nouvelle. C'est la critique que Marx a faite au matérialisme de Feuerbach, matérialisme du XVIII[e] siècle « qui ne s'arrête qu'à ce qui crève les yeux » (Marx 1982, p. 1078). Marx nous dit :

> « [Feuerbach] ne voit pas que le monde sensible qui l'entoure n'est pas une chose donnée immédiatement et de toute éternité, toujours semblable à elle-même, mais le produit de l'industrie et des conditions sociales, et ce au sens de produit historique, de résultat de l'activité de générations dont chacune s'élève sur les épaules de la précédente, continue à développer son industrie et son commerce, et modifie son ordre social en fonction de changements des besoins. Il n'est pas jusqu'aux objets de la "certitude sensible" la plus simple qui ne lui soient données que par l'évolution sociale, l'industrie et les échanges commerciaux. On sait que, comme presque tous les arbres fruitiers, le cerisier a été transplanté dans nos pays par le *commerce*, il y a quelques siècles à peine ; en sorte que, si Feuerbach a pu en avoir la "certitude sensible", c'est *grâce* à cette action d'une société déterminée, à une époque déterminée. » ((Marx 1982, p. 1078), l'italique est dans le texte original)

Le problème avec ce matérialisme est, d'après Marx, qu'il ne parvient « jamais à saisir le monde sensible comme l'ensemble de l'activité sensible des individus qui le constituent » (Marx 1982, p. 1080) et à reconnaître le fait que c'est cette activité sensible qui, dans la saisie de ses objets et de la nature humanisée plus généralement, est productrice et transformatrice de nos sens.

Dans les « manuscrits parisiens », Marx écrit :

> « C'est seulement par la richesse, objectivement déployée, de l'être de l'homme (*sic*) que, pour une part, sont formés et, pour une autre part, sont engendrés la richesse de la sensibilité *humaine* subjective, une oreille musicale, un œil pour la beauté de la forme, bref, des *sens* capables de jouissances humaines, des sens qui se confirment en tant que forces essentielles *humaines*. Car ce ne sont pas seulement les cinq sens, mais aussi les sens que l'on appelle spirituels, les sens pratiques (la volonté, l'amour, etc.), en un mot : c'est le sens *humain* ([ou] l'humanité des sens) qui n'est engendré que par l'existence de *son* objet, par la nature *humanisée*. » ((Marx 2007, p. 151), l'italique est dans le texte original)

C'est dans le contexte de cette position théorique concernant les sens que l'on peut, comme cela a été précédemment suggéré (Radford 2014), comprendre la cognition humaine comme *cognition sensuelle* : une forme sensible et multimodale, constituée culturellement et historiquement, de penser, d'agir, d'imaginer, de sentir, de transformer et de donner un sens au monde. Cette conception de la cognition traduit l'idée que nos pensées, nos sentiments, nos actes et, en fait, toutes nos relations avec le monde (par le goût, l'odorat, l'ouïe, le toucher, la vue, etc.), sont un enchevêtrement de notre corps et de notre culture matérielle et idéationnelle. Et ce qui rend possible cet enchevêtrement, c'est la *praxis* humaine, c'est-à-dire l'activité sensuelle, concrète des individus (Radford 2021).

Dans la section suivante, nous nous arrêtons sur l'émergence du symbolisme algébrique et de la manière dont celui-ci s'accompagne d'une réorganisation des sens, en particulier du sens de l'ouïe et de la vue.

7.3. Le corps et l'émergence historique du symbolismealgébrique

Dans l'histoire de l'Occident, on sait que la Renaissance a été un moment particulièrement important dans la recherche d'un système de symboles approprié pour traiter les problèmes de l'algèbre. Avant la constitution d'un système sémiotique algébrique approprié, les mathématiciens exprimaient tout dans une langue naturelle. Ensuite, ils ont incorporé une série d'abréviations de mots et d'opérateurs mathématiques, donnant lieu à ce que l'on appelle l'*algèbre syncopée*. Jens Høyrup (2008) montre bien que notre système algébrique alphanumérique contemporain s'est vu précéder par des tentatives qui cherchaient à conceptualiser et à exprimer de manière correcte et succincte les successives puissances de l'inconnue et à créer des schémas d'opérations sur les expressions algébriques qui restaient opératoirement encombrantes à effectuer à travers les langues naturelles. La recherche d'un système propre, affranchi de la langue naturelle, n'a pas été un processus direct ; elle est passée par une série de tentatives, donnant lieu à ce que Høyrup (2008) désigne comme « les voies tortueuses vers la compréhension de l'algèbre ».

Dans cette section, nous aimerions nous attarder sur l'impact qu'a eu sur les sens, la transition d'une pratique algébrique basée sur l'oralité à une pratique basée sur un système algébrique symbolique écrit. Pour ce faire, nous contrastons des extraits de deux textes, l'un provenant d'un manuscrit italien du XV^e^ siècle : le *Trattato d'Abaco* de Piero della Francesca, l'autre provenant du livre de Rafael Bombelli, *L'Algebra*, publié au XVI^e^ siècle.

Le *Trattato d'Abaco* appartient au genre de manuscrits élaborés par des professeurs des écoles dites d'abaque, lesquelles étaient fréquentées par les fils des artisans et des marchands, « y compris ceux qui appartenaient au plus haut patriarcat commercial » (Høyrup 2018, p. 2). Les manuscrits produits par les professeurs des écoles d'abaque étaient souvent de notes du professeur. En général, ils contiennent une série de problèmes traitant des sujets en rapport avec le commerce. L'algèbre qui s'y enseignait ne faisait pas partie du curriculum ; elle était destinée aux amateurs des mathématiques et à ceux qui voulaient devenir des professeurs d'école d'abaque. Concernant les méthodes d'enseignement dans ces écoles, Franci (1988) note que celles-ci étaient basées sur la répétition ; les élèves devaient faire de nombreux exercices, écrits ou oraux, allant des plus simples aux plus complexes. Au-delà des nombreux exercices faits à l'école, des devoirs étaient également donnés à la maison. Rafaella Franci cite un manuscrit du XV[e] siècle, où l'on lit :

> « Et notez que c'est une règle générale : chaque soir, on donne aux élèves des problèmes en fonction de leurs capacités, qu'ils doivent compléter et remettre le lendemain matin... Et notez que lorsque [le lendemain] est un jour férié, [le nombre des] problèmes mentionnés ci-dessus doit être doublé. » (Franci 1988, p. 185)

La figure 7.3 comporte le premier extrait dont nous souhaiterions discuter ici. Il contient l'énoncé d'un problème du manuscrit de Piero della Francesca et sa solution.

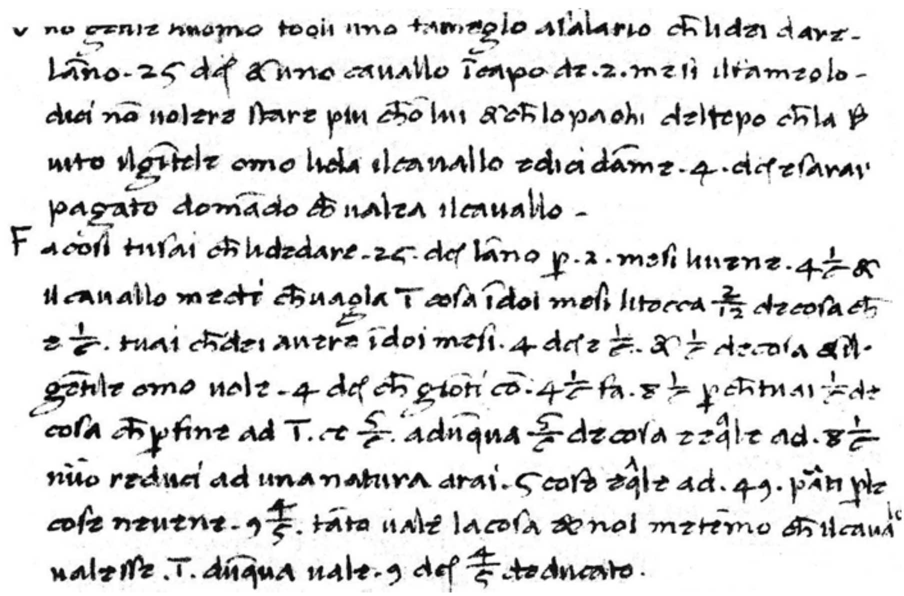


Figure 7.3. *Extrait du Trattato d'Abaco (della Francesca 1460)*

L'encadré 7.1 comporte une traduction en français à partir de l'édition du manuscrit faite par Arrighi (1970).

p. 259

> Un gentilhomme engage un serviteur avec un salaire ; il doit lui payer 25 ducats et un cheval par an. Au bout de deux mois, le serviteur dit qu'il ne veut plus rester avec lui et qu'il veut être payé pour le temps qu'il a servi. Le gentilhomme lui donne le cheval et lui dit : donne-moi 4 ducats et tu seras payé. Je te demande : combien valait le cheval ?
>
> Fais ceci. Tu sais qu'il doit lui donner 25 ducats par an, pour 2 mois cela fait 4 I/6 ; et dis que le cheval vaut $\bar{I}$ chose, pour 2 mois il lui revient 2/12 de la chose qui est I/6 (*sic* : il devrait être $\bar{1}/6$ et non I/6 comme le montre le manuscrit qu'Arrighi transcrit fidèlement). Tu auras dans 2 mois 4 ducats et I/6 et I/6 de la chose. Et le gentilhomme veut 4 ducats qui ajoutés à 4 I/6 font 8 I/6. Maintenant, tu as 1/6 de la chose, [et] jusqu'à *I* il y a 5/6 de la chose ; donc 5/6 de la chose est égal à 8 I/6 nombres. Réduis à une nature [c'est-à-dire à un nombre entier], tu auras 5 choses égales à 49 ; divise par les choses, il en ressort 9 4/5 : c'est ce qui vaut la chose et nous avons mis que le cheval vaut $\bar{I}$, donc il vaut 9 ducats 4/5 d'un ducat.

Encadré 7.1. *Traduction d'après l'édition faite par (Arrighi 1970, p. 107)*

Comme on peut le voir, le manuscrit abaquiste garde toute la cadence de l'oralité. En discutant de la solution du problème avec ses élèves, le maître d'abaque laissait très probablement des traces écrites (sur une tablette[2] ou un autre médium) au fur et à mesure que la solution était expliquée en classe. Car « les élèves ne possédaient pas leurs propres traités d'abaque ; le cours était enseigné directement par les professeurs » (Black 2007, p. 162). C'est la voix surtout, et la vue et la mémoire (et probablement les gestes du professeur) sur lesquelles s'appuie la pratique mathématique.

Comme les autres manuscrits abaquistes de l'époque, le manuscrit de Piero della Francesca exprime la solution du problème sous la forme syncopée mentionnée ci-avant. C'est-à-dire que Piero della Francesca exprime la solution en langue naturelle enrichie de quelques abréviations de mots. Mais, en réalité, notre auteur va un peu plus loin : au niveau de l'*écriture*, on y voit apparaître un symbolisme mathématique rudimentaire. Pour représenter les quantités inconnues, dans certaines parties du texte, suivant la tradition abaquiste, Piero della Francesca utilise le terme « chose » (*cosa*). Cependant, dans d'autres parties, il utilise un petit tiret placé au-dessus de certains nombres. Le petit tiret n'est pas encore un signe arbitraire, comme c'est le cas des signes algébriques chez Descartes (1637) : chez Piero della Francesca, le petit tiret signifie le *côté d'un carré*. C'est de là que le signe acquiert sa forme matérielle. Dans d'autres problèmes où

2. Dans un manuscrit du XV^e siècle conservé à la Bibliothèque nationale de France, on voit une référence à l'utilisation d'une tablette de bois couverte de cire noire à l'occasion d'une leçon de géométrie. Voir http://classes.bnf.fr/ema/grands/373.htm. Black (2007, p. 163) cite un document où il est question d'une « tavoletta del gesso, ch'è buona per fare ragioni », c'est-à-dire une tablette de craie qui est bonne pour résoudre de problèmes.

le carré du nombre inconnu est nécessaire dans les calculs, Piero della Francesca utilise un petit carré au-dessus du nombre de carrés de l'inconnue et il utilise, comme dans l'extrait précédent, un petit tiret pour signifier la quantité à considérer du nombre inconnu.

Historiquement parlant, le symbolisme très rudimentaire qu'utilise Piero della Francesca est l'un des premiers systèmes symboliques algébriques de la Renaissance. Son intérêt principal pour nous ici est qu'il nous permet de retracer une transformation qui est en train de se produire au niveau de la pratique mathématique. Les manuscrits abaquistes (pour un inventaire, voir (van Egmond 1980)) sont des notes écrites qui viennent servir de mémoire pour orienter et organiser une pratique orale. On voit cette oralité projetée dans la structure même du texte abaquiste. Mais, en même temps, on commence à voir l'apparition de petits symboles techniques qui vont au-delà de l'abréviation du mot parlé. Si à la première ligne de la solution, Piero écrit « p.2 mesi » (*per* 2 mesi, *pour* deux mois), le « p » étant donc une abréviation du mot « per », le petit tiret n'est plus une abréviation du mot « cosa » (chose, l'inconnue). En réalité, les abaquistes avaient une abréviation pour le mot cosa : « co. », qui était largement utilisée. Le petit tiret, comme le petit carré, sont des signes *techniques*, bien qu'ils restent rattachés à l'imaginaire géométrique (côté, carré).

Bien que l'on ne puisse pas imputer l'apparition du symbolisme algébrique émergent au seul passage d'une pratique orale à une pratique écrite (Radford 2006 ; Høyrup 2008), il reste néanmoins que ce symbolisme algébrique que l'on voit apparaître chez Piero della Francesca ou, plus tard, chez Viète (1630) et Descartes (1637), relève de l'*écriture* et non pas de la pratique orale de la langue. Comment oraliser l'expression écrite du texte de Piero « et dis que le cheval vaut7 chose » ? Dirait-on « et dis que le cheval vaut un tiret chose » ?

Quoi qu'il en soit, les historiens de l'art ont beaucoup insisté sur ce trait caractéristique du haut Moyen Âge et de la Renaissance qui distingue ces périodes historiques de celles qui les ont précédées, à savoir leur rapport à la visualité, à la représentation picturale du monde.

Revenons aux analyses de Biernoff qui montrent comment, au cours du haut Moyen Âge, commence un long processus de transformation culturelle qui, au lieu de considérer le monde perceptible comme un simple point de départ pour regarder au-delà, en vient à comprendre que c'est sur ce monde-ci, sur la nature, sur la vie quotidienne, qu'il faut poser le regard :

> « On pourrait parler d'un glissement perceptif du symbolisme au naturalisme durant cette période : au lieu de regarder à travers le monde visible vers une réalité supérieure et invisible, de nombreuses personnes (parmi lesquelles des scientifiques et des artistes) ont regardé attentivement la nature. » (Biernoff 2002, p. 40)

Walter Isaacson (2017, p. 173) cite un passage des carnets de Leonardo da Vinci où l'on lit : « Mon intention est de consulter d'abord l'expérience, puis, en raisonnant, de montrer pourquoi cette expérience est appelée à fonctionner de cette manière. » Le fameux humaniste italien du XV^e^ siècle, Leon Battista Alberti, auteur de *De Pictura* et du *Ludi rerum mathematicarum* (traductions modernes dans (Alberti 2011, 2002) respectivement), faisait continuellement référence « à des expériences visuelles de la vie » (Belting 2011, p. 172). De cette attention que porte le regard à la nature et de cette expérience sensuelle tout à fait nouvelle que fait l'individu du monde, le corps et les sens deviendront des éléments structurants de nouvelles manières de connaître et de représenter le monde. Dans les arts, une attention particulière est portée afin de rendre la « naturalité » des personnages peints – leurs corps, leurs mains, l'émotion, le mouvement. Isaacson met en contraste le tableau de *Tobias et l'Ange* d'Antonio Pollaiuolo et celui produit dans l'atelier de Verrocchio (tableau auquel da Vinci a contribué)[3]. « Une différence est que la version de Pollaiuolo est rigide, alors que celle de Verrochio transmet le mouvement » (Isaacson 2017, p. 50).

Dans le tableau de Verrocchio, les deux personnages de la peinture, Tobias et l'Ange :

> « se tournent l'un vers l'autre naturellement. Même la façon dont ils se tiennent la main est plus dynamique. Alors que les visages dans le tableau de Pollaiuolo semblent vides, les mouvements du corps dans la version de Verrocchio se connectent aux expressions émotionnelles, transmettant des mouvements aussi bien mentaux que physiques. » (Isaacson 2017, p. 50)

Et ainsi, à la suite des transformations culturelles du Moyen Âge et de la Renaissance, pour la première fois dans l'histoire de l'Occident, l'image dévotionnelle fait apparaître le sacré dans la sphère humaine :

> « Là où le désir oculaire avait été auparavant dénigré ou redirigé vers le haut de l'échelle de la perception ; là où la création visible avait donné lieu à la contemplation d'un créateur invisible ; Dieu peut désormais être vu dans la chair. » (Biernoff 2002, p. 163)

Dans les arts visuels, la *perspective* est l'expression de cette nouvelle manière de représenter le sacré et le mondain dans laquelle « la mise en forme du monde, la structure d'organisation de la représentation » se font « sous le principe de l'imitation de la nature » (Arasse 2004, p. 46). Il s'agit :

---

3. Pour la version de Pollaiolo, voir : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Antonio_del_Pollaiolo_-_Tobias_and_the_Angel_-_WGA18047.jpg. Pour la version de Verrocchio, voir : https://www.nationalgallery.org.uk/paintings/workshop-of-andrea-del-verrocchio-tobias-and-the-angel.

> « [d']un système de représentation parfaitement arbitraire, qui a été inventé par toute une société sur près d'un siècle […] Quelle est la fonction de ce système de représentation tellement arbitraire ? Une perspective… suppose un spectateur immobile, fixé à une certaine distance de ce qu'il regarde, et le regardant avec un seul œil. » (Arasse 2004, p. 50-51)

Daniel Arasse insiste sur l'arbitraire de la perspective que nous connaissons et qui, historiquement parlant, est entrée en compétition avec d'autres formes de perspective (par exemple la perspective convexe). Celle qu'a retenue la Renaissance repose sur l'idée d'un œil fixe, immobile, qui « n'a rien à voir avec la façon dont nous percevons, [car] nos yeux n'arrêtent pas de bouger » (Arasse 2004, p. 51). Outre la facilité de dessiner selon les principes de la perspective d'Alberti et de Masaccio, si la Renaissance a retenu ce type de perspective, c'est d'un côté, pour des raisons liées à la politique du pouvoir et de l'autre côté, par la position privilégiée « qu'elle donne au sujet, à l'homme dans le monde » (Arasse 2004, p. 57). La perspective affirme la nouvelle forme de subjectivité qui apparaît à la Renaissance. Celle qui amène l'individu à se concevoir comme *homo faber* (Arendt 1958), c'est-à-dire comme producteur et fabriquant des choses dans le réseau social et économique du capitalisme artisanal émergent, et qui finit par mettre « le centre de gravité de l'existence [des individus] dans la vie ordinaire », celle du travail et de la famille (Taylor 1994, p. 185).

Nous voudrions suggérer que c'est la même *épistémè* (Foucault 1966) qui, à la Renaissance, ordonne tant le monde visuel de la représentation dans les arts que le monde symbolique de l'algèbre. En d'autres mots, un phénomène similaire à celui de la représentation visuelle a eu lieu du côté du texte mathématique à l'intérieur duquel le symbolisme algébrique s'est raffiné. Sous l'effet de cette épistémè, le texte algébrique s'est détaché peu à peu de l'oralité qui l'organisait chez les abaquistes. L'oralité n'a jamais complètement disparu. Mais le texte algébrique a gagné une *spatialité* dont il n'avait pas joui auparavant en Occident. Non seulement de nouveaux signes spécifiques sont apparus, mais la discursivité algébrique s'est vue profondément altérée.

Regardons à cet effet un premier extrait d'un livre du XVIe siècle. Il s'agit d'un extrait de *L'Algebra* de Bombelli. À la différence du *Trattato d'abaco* de Piero de la Francesca, *L'Algebra* de Bombelli est un livre imprimé, publié en 1572, bien que la version manuscrite aurait été rédigée entre 1557 et 1560. Comme Jayawardene le remarque, les mathématiques n'étaient pas en soi la vocation de Bombelli. « Il n'était ni un professeur de la matière ni un gentleman des loisirs » (Jayawardene 1965, p. 298). Bombelli était architecte. En écrivant ce livre :

> « Bombelli pensait que seul Cardano parmi ses prédécesseurs avait exploré en profondeur le sujet de l'algèbre. Cependant, il a estimé que Cardano n'avait pas été clair dans son exposé […] Il décida donc d'écrire un traité qui permettrait à un débutant de maîtriser le sujet sans l'aide d'aucun autre livre. » (Jayawardene 1973, p. 513)

p. 263

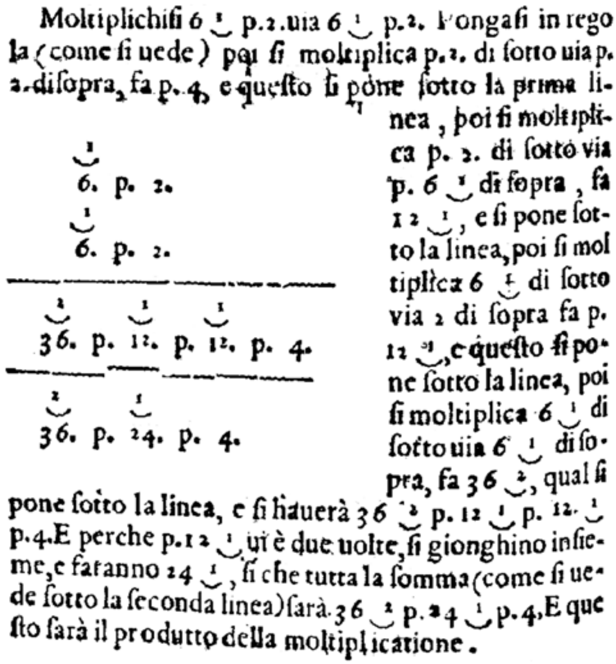
Le livre de Bombelli est influencé par la vénération que la tradition humaniste de la Renaissance a montré pour les penseurs de l'Antiquité. Inspiré par *L'Arithmétique* de Diophante, Bombelli écrit son livre de manière à rompre avec la tradition des maîtres d'abaque, qui posaient leurs problèmes sous « l'apparence des actions ou des affaires humaines » (Bombelli 1572, p. 414), comme c'est le cas des problèmes d'achats et de ventes et d'autres problèmes commerciaux.

Le premier extrait que nous aimerions discuter porte sur la multiplication de binômes, c'est-à-dire d'expressions algébriques comportant deux termes. Notons d'abord que Bombelli introduit des petits traits courbés au-dessus desquels il ajoute un nombre ; le trait courbé indique qu'il s'agit d'une puissance de l'inconnue et le petit nombre placé dessus ce trait indique la puissance de l'inconnue. Le trait courbé et le nombre dessus sont placés à côté d'un nombre (parfois dessus ce nombre), lequel correspondrait à ce que nous appelons, dans la terminologie moderne, le *coefficient* de l'inconnue. Ainsi $6\,\overset{1}{\smile}$ signifie $6x$. Ce qui est intéressant dans le symbolisme algébrique de Bombelli, c'est que l'inconnue n'est pas représentée. Elle est *implicite*. En suivant la tradition abaquiste, Bombelli utilise des abréviations pour désigner des opérations (comme « p » pour « plus » et « m » pour moins). Voyons le premier texte, où il s'agit de multiplier $6x + 2$ par $6x + 2$.

L'explication est faite un peu à la manière de Piero della Francesca, en suivant une explication verbale qui inclut des mots et des signes techniques. Mais à la place du pronom personnel « tu » (*tu* fais, *tu* ajoutes, par exemple) ou la formule impérative associée (« fais ceci, multiplie », etc.), Bombelli utilise une commande impersonnelle : « Moltiplichisi $6\,\overset{1}{\smile}$ p. 2 *via* $6\,\overset{1}{\smile}$ p. 2 ». La commande n'est plus adressée à quelqu'un de *particulier*. Le sujet qui fait les calculs, n'est plus le sujet concret – l'élève – devant le maître d'abaque, mais un sujet *abstrait*. Et c'est ce sujet abstrait qui *regarde* maintenant le tableau à gauche, tableau qui ne contient plus de mots. Il ne contient que des symboles.

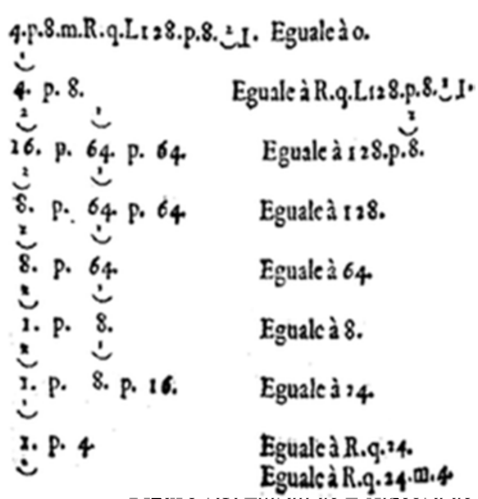
Regardons maintenant un deuxième extrait du même livre (figure 7.5). Cet extrait porte sur la résolution de l'équation que nous écririons dans le système sémiotique alphanumérique comme $4x + 8 - \sqrt{128 + 8x^2} = 0$ à droite se trouve une traduction en symboles modernes). Dans le texte, ce problème a été précédé par un problème similaire dont la solution est expliquée par Bombelli en ayant recours aux commandes impersonnelles vues à la figure 7.4.

En plus des abréviations d'opérations (comme « p » pour « plus » et « m » pour moins), il y a de nouveaux signes, comme « L » et un « L » inversé : ils enferment l'expression sur laquelle porte la racine carrée (« R.q. »). Bombelli n'utilise pas de signe spécifique pour l'expression « égale à ». Le signe d'égalité est une invention tardive (Heeffer 2009).


Moltiplichisi 6 $\overset{1}{\smile}$ p.2. via 6 $\overset{1}{\smile}$ p.2. Pongasi in regola (come si vede) poi si moltiplica p.2. di sotto via p.2. di sopra, fa p.4. e questo si pone sotto la prima linea, poi si moltiplica p.2. di sotto via p.6 $\overset{1}{\smile}$ di sopra, fa 12 $\overset{1}{\smile}$, e si pone sotto la linea, poi si moltiplica 6 $\overset{1}{\smile}$ di sotto via 2 di sopra fa p.12 $\overset{1}{\smile}$, e questo si pone sotto la linea, poi si moltiplica 6 $\overset{1}{\smile}$ di sotto via 6 $\overset{1}{\smile}$ di sopra, fa 36 $\overset{2}{\smile}$, qual si pone sotto la linea, e si haverà 36 $\overset{2}{\smile}$ p.12 $\overset{1}{\smile}$ p.12 $\overset{1}{\smile}$ p.4. E perche p.12 $\overset{1}{\smile}$ vi è due volte, si gionghino insieme, e faranno 24 $\overset{1}{\smile}$, si che tutta la somma (come si vede sotto la seconda linea) sarà 36 $\overset{2}{\smile}$ p.24 $\overset{1}{\smile}$ p.4. E questo sarà il produtto della moltiplicatione.

$\overset{1}{\smile}$ 6. p. 2.
$\overset{1}{\smile}$ 6. p. 2.
$\overset{2}{\smile}$ 36. p. $\overset{1}{\smile}$ 12. p. $\overset{1}{\smile}$ 12. p. 4.
$\overset{2}{\smile}$ 36. p. $\overset{1}{\smile}$ 24. p. 4.

Figure 7.4. *Extrait de L'Algebra de (Bombelli 1572, p. 214)*


4.p.8.m.R.q.L128.p.8.$\overset{2}{\smile}$J. Eguale à o.
$\overset{1}{\smile}$ 4. p. 8. Eguale à R.q.L128.p.8.$\overset{2}{\smile}$J.
$\overset{2}{\smile}$ 16. p. $\overset{1}{\smile}$ 64. p. 64. Eguale à 128.p.$\overset{2}{\smile}$8.
$\overset{2}{\smile}$ 8. p. $\overset{1}{\smile}$ 64. p. 64. Eguale à 128.
$\overset{2}{\smile}$ 8. p. $\overset{1}{\smile}$ 64. Eguale à 64.
$\overset{2}{\smile}$ 1. p. $\overset{1}{\smile}$ 8. Eguale à 8.
$\overset{2}{\smile}$ 1. p. $\overset{1}{\smile}$ 8. p. 16. Eguale à 24.
$\overset{1}{\smile}$ 1. p. 4. Eguale à R.q.24.
$\overset{1}{\smile}$ Eguale à R.q.24.m.4.

$$4x + 8 - \sqrt{128 + 8x^2} = 0$$
$$4x + 8 = \sqrt{128 + 8x^2}$$
$$16x^2 + 64x + 64 = 128 + 8x^2$$
$$8x^2 + 64x + 64 = 128$$
$$8x^2 + 64 = 64$$
$$x^2 + 8 = 8$$
$$x^2 + 8 + 16 = 24$$
$$x + 4 = \sqrt{24}$$
$$x = \sqrt{24} - 4$$

(Bombelli 1572, p. 250), avec traduction en symboles modernes à droite

Ce qui frappe dans ce texte de Bombelli, c'est que, maintenant, le tout se passe sur le tableau. Brian Rotman avait noté, il y a plusieurs années, que la perspective de la Renaissance comporte un système sémiotique avec ses propres règles. La perspective est, dans ce sens, système : système qui sert à produire des scènes qui n'existent pas nécessairement (comme la scène précise de *Tobias et l'Ange*, que nous avons citée ci-avant).

> « Le système devient à la fois la source de la réalité, il articule ce qui est réel et fournit les moyens de "décrire" cette réalité comme s'il s'agissait d'un domaine externe et antérieur à lui-même, c'est-à-dire comme s'il y avait une différence intemporelle et "objective", une opposition transcendantale, entre présentation et représentation. » (Rotman 1987, p. 28)

Rotman faisait le parallèle avec le nombre zéro qui, dans son analyse, vient jouer un peu le même rôle sémiotique que le point de fuite dans la perspective : articulé autour de la notion d'absence, le zéro est un signe : le signe du cardinal de l'ensemble vide, ∅. Dans le système sémiotique de l'arithmétique, ce signe, que l'on écrit ∅ *ou* 0 (Bourbaki 1970, p. 30), *produit* d'autres signes, {∅}, {∅, {∅}}, {∅, {∅}, {∅, {∅}}} …, soit les entiers natures 1, 2, 3, etc. Mais ce que Rotman a vu pour le zéro vaut en fait pour le système sémioti- que algébrique que Bombelli nous offre. Ce système sémiotique (avec ses « p », « m »,
R.c., le signe pour les puissances de l'inconnue, etc.) permet maintenant de *générer* (comme le zéro le fait pour l'arithmétique) des *scènes* algébriques à volonté (des calculs de polynômes, des équations, etc.). Et ces *scènes* algébriques s'affranchissent de plus en plus de l'oralité.

L'oralité, en effet, cède la place à une activité *visuelle*. Dans la foulée de problèmes/ scènes que l'on peut maintenant générer à volonté avec les symboles que nous donne Bombelli, il se trouve que, de la même manière que « le rapport visuel – plus que tout autre rapport sensoriel – permettait [dans l'art] la participation corporelle au divin » (Biernoff 2002, p. 134), le rapport visuel permet maintenant la participation corporelle à l'algèbre.

De la même manière que le sujet ne figure pas explicitement dans un tableau en perspective et qu'il se tient à distance pour regarder ce qu'il y a à regarder, le sujet du nouveau symbolisme algébrique commence à ne pas figurer explicitement dans le texte. Comme dans le cas de la perspective, il y a un déplacement du sujet : alors que le sujet était au centre du texte de Piero della Francesca en train de faire ceci ou cela, le sujet du texte de Bombelli est déplacé aux marges du texte, à distance de ce qui est vu et dit. L'œil peut maintenant examiner le monde depuis le nouveau locus de la subjectivité.

Mais, contrairement à l'interprétation traditionnelle qui conçoit l'œil de la Renaissance comme une entité désincarnée (*disembodied*), *objective*, neutre, détachée du perçu, nous voudrions suggérer, au contraire, qu'à partir du haut Moyen Âge et la Renaissance, l'œi
l

n'est pas simplement un instrument réceptif, mais un œil actif et affecté émotionnellement. Déjà dans ses travaux sur la perception, Roger Bacon avait noté que « la vision est active et passive » (Bacon 1962, p. 470). L'œil affecte le perçu et le perçu affecte l'œil. Il s'agit d'une tout à fait nouvelle expérience esthétique-corporelle. Dans celle-ci, l'œil parcourt les formes et les symboles, comme s'il les touchait à distance, comme lorsque l'on palpe un objet. Et en palpant l'objet, l'œil, comme la main, est à son tour *affecté*. Il s'agit d'une « *relation* perceptuelle, et non pas d'un acte unidirectionnel de perception » ((Biernoff 2002, p. 86), c'est moi qui mets en italique). La saisie que fait l'œil de l'objet perçu est tant participative que créative. L'œil vient ajouter *du sens* à ce qui se présente devant lui – une scène, un texte, etc. Ainsi, dans la figure 7.5, pour passer d'une ligne à la suivante, l'œil mathématique doit *ajouter* ce qui manque et qui autorise la déduction. L'œil doit apprendre à voir ce qui n'est pas là et l'ajouter au tableau. Bien sûr, ceci ne signifie pas la disparition totale de la langue. La langue naturelle ne disparaît même pas dans l'œuvre de Bourbaki (1970). Comme Gérard Vergnaud remarque, « aucun diagramme, aucun symbolisme non langagier, aucune algèbre ne peut remplir sa fonction sans un accompagnement langagier, fût-il intérieur » (Vergnaud 2001, p. 14). La lecture et compréhension du tableau de Bombelli demande une réorganisation des sens dans laquelle la perception vient maintenant jouer un rôle fondamental. Et de cette réorganisation corporelle, une relation dynamique vient s'établir entre corps et matière. À la base de cette relation se trouve cet *effet* du perçu qui affecte l'œil : le perçu, en affectant l'œil, devient un objet qui, en s'exposant, en se donnant à l'œil, invite celui-ci à le suivre et à le poursuive. En empruntant l'expression à Biernoff (2002), il s'agit maintenant d'une vision que l'on pourrait appeler *charnelle*, dans la mesure où elle est *affection* de l'être et de l'objet. La vision charnelle est, de ce point de vue, *mouvement* – mouvement entre celui ou celle qui voit et ce qui est vu.

Avant de passer à la prochaine section, récapitulons ce qui vient d'être vu et dit. Dans cette section, nous avons proposé une analyse de courts passages en provenance de deux textes algébriques, l'un du XVe siècle et l'autre du XVIe siècle. Dans le premier texte, celui de Piero della Francesca, la pratique algébrique s'organise à travers l'oralité. Dans la manière de résoudre le problème, le professeur explique à l'élève, à travers la langue, les calculs à faire. Bien que l'on voie apparaître un langage symbolique rudimentaire, la production du sens mathématique (la signification des symboles, la perception de ceux-ci, les calculs) s'articule autour de la langue. Dans le deuxième texte (celui de Bombelli), la langue demeure importante. Mais on assiste à une réorganisation du *sensorium* ou complexe sensoriel. Dans le premier extrait du texte de Bombelli, un schéma symbolique de calcul de binômes est encore expliqué à travers la langue. Mais peu à peu, il y a une centration sur les symboles. Ceux-ci viennent s'organiser sous forme de tableau où le tout est donné d'un *coup*. L'œil est appelé à parcourir les symboles, comme il parcourt les personnages dans les tableaux des arts visuels. Ce phénomène devient encore plus clair dans le cas de l'équation et sa solution vues dans le deuxième extrait du texte de Bombelli. Ici, le mot s'arrête et l'œil regarde. Il y a une transformation dans la production du sens mathématique. La pensée verbale que mettait au centre le texte de Piero della

Francesca cède la place à un autre type de pensée mathématique : la pensée symbolique. Nous voudrions insister sur l'idée que cette transformation devrait être comprise à la lumière de l'importance que revêt la dimension visuelle à la Renaissance. Il y a une sécularisation de l'œil qui commence avec les philosophes de la nature et fait partie d'un mouvement historique remettant en question le rapport du corps au monde. Le rapport ascétique que nous lègue le Moyen Âge du corps au monde – rapport que le rationalisme fait sien et que l'on voit encore sédimenté aujourd'hui dans certaines pratiques pédagogiques – est remplacé par un rapport où le vu et la vue interagissent et se constituent mutuellement.

7.4. Vue, tactilité, oralité et symbole

Dans cette section, nous discutons d'un exemple de solution algébrique d'une équation dans une classe de 6e année (élèves de 11-12 ans). L'exemple provient de la fin d'une étude longitudinale de trois ans d'une classe d'élèves que nous avons commencée à suivre lorsque les élèves étaient en 4e année du primaire. Notre intérêt était de comprendre la manière dont la pensée algébrique des élèves apparaît et se transforme au cours de l'activité d'enseignement-apprentissage lorsque l'on passe d'une algèbre non-symbolique à une algèbre symbolique. Ainsi, en 4e année, les élèves ont travaillé sur des équations modélisées à travers l'idée d'une balance. La balance était dessinée sur la page ; sur les plateaux du dessin de la balance, il y avait des objets concrets (petits carrés en carton rouge, vert ou bleu). La masse des carrés était la même et elle était connue ; les cylindres en plastique avaient tous la même masse et cette masse était inconnue (voir figure 7.6a). Les élèves ont aussi travaillé sur des équations modélisées à l'aide de cartes concrètes (en nombre connu) et des enveloppes contenant un même nombre inconnu de cartes (voir figure 7.6b ; pour plus de détails, voir aussi (Radford *et al.* 2009)). Ici, un travail sur des objets concrets mettait en vedette des artefacts concrets, la tactilité, l'action, la perception et l'oralité. En 5e année, une introduction progressive aux équations écrites à l'aide de lettres et de nombres a eu lieu (c'est-à-dire une écriture d'équations en notation alphanumérique) ; cela s'est fait à partir des modélisations concrètes sur les contextes de cartes et enveloppes vues en 4e année. En 6e année, les équations étaient données directement dans le système sémiotique alphanumérique.

L'extrait que nous allons discuter ci-après avait été précédé d'un travail fait la veille en classe. Lors de ce travail, les élèves, en travaillant en petits groupes, avaient abordé la résolution des équations suivantes :

a) $4 \times n + 2 = 2 \times n + 18$

b) $3n - 8 = n + 8$

c) $4n = 20 - n$

p. 268

Équation $x + 2 = 4$ — a)

Équation $2x + 4 = x + 7$ — b)

Figure 7.6. *a) Les élèves expliquent à la professeure la résolution de l'équation* $x + 2 = 4$ *modélisée à l'aide de petits carrés et un cylindre (qui jour le rôle de* x*). Sur le plateau gauche de la balance, on voit 2 carrés et un cylindre ; sur le plateau droit, on voit quatre carrés. b) Les élèves viennent juste d'écrire l'équation* $2x + 4 = x + 7$ *modélisée à l'aide de cartes et d'enveloppes (qui jouent le rôle de x) et s'apprêtent à la résoudre.*

Les élèves apprenaient à passer de l'écriture $a \times n$ à an. Ils rencontraient aussi des équations comportant des soustractions (qui ne pouvaient pas se modéliser à l'aide des deux contextes concrets précédents : la balance, les cylindres et les carrés, d'une part ; les cartes et les enveloppes, d'autre part).

Après la discussion générale, les élèves ont été invités à résoudre le problème suivant, qui est celui que nous allons discuter dans la suite de ce chapitre :

> « En fouillant dans le grenier de sa grand-mère, Julie a trouvé un livre d'algèbre. Elle a ouvert une page et a trouvé une équation avec sa solution. Malheureusement, le livre avait des taches et certaines parties ne sont plus lisibles. Ci-dessous, Julie a copié l'équation et sa solution. Elle a indiqué par des tirets les parties qui ne sont plus lisibles. Peux-tu l'aider à retrouver les parties manquantes ? »
>
> « Écris les parties manquantes sur les pointillés ci-dessous :
>
> $3n + \ldots = 5n + 8$
>
> $9n = 5n + 8$
>
> $4n = \ldots$
>
> $n = \ldots$ »

p. 269

Comme d'habitude, la classe avait été divisée en petits groupes de deux ou trois élèves. Nous discutons les propos tenus à l'intérieur d'un de ces groupes, en appui sur la figure 7.7. Le professeur arrive lorsque les élèves se préparent à commencer la tâche.

> « 1. Professeur : Est-ce qu'il y a des indices ?
>
> 2. Paul : Oui !
>
> 3. Professeur : Quels sont ces indices ?
>
> *4.* Paul : Le $9n$ ici (*sur la deuxième équation de sa feuille, Paul pointe* $9n$ *avec son crayon* ; voir figure 7.7a).
>
> Moi, ça me dit que $3n$ (*sur la première équation*, *il pointe* $3n$; voir [1] figure 7.7b) plus (*il pointe le signe « + »,* voir [2] même figure) $6n$ (*il pointe le tiret* ; voir [3] même figure) est égal à $9n$ (*sur la deuxième équation, il pointe* $9n$; voir [4] même figure) [. . .]
>
> Puis, là, après, ça serait $9n - 5$ [il veut dire « moins $5n$ »] (*il pointe* $9n$; voir [1] figure 7.7c) ; ça donne $4n$; puis, ça serait moins 5 sur l'autre côté [il veut dire « moins $5n$ »]. Ça (*il pointe* $5n$ *dans la deuxième équation* ; voir [2] même figure) serait 0.
>
> So, $4n$ (*il pointe* $4n$ *sur la troisième équation* ; voir figure 7.7d) égale 8 (*il pointe le tiret* ; voir figure 7.7e).
>
> Puis, si on divise ça (*c'est-à-dire* $4n$) par 2, ça donne $2n$; (*un peu embêté, il continue*), mais y'a juste $1n$ là (*il pointe n sur la dernière équation* ; voir figure 7.7f).
>
> 5. Albert : (*lui venant en aide, dit*), mais, si tu divises… OK, si tu divises ça (*c'est-à-dire* $4n$) par 4, ça donne $1n$. »

Paul a réussi à résoudre l'équation sans écrire. Il n'a pas encore rempli les tirets. Comme dans le cas du texte de Bombelli, l'équation et les équations subséquentes apparaissent comme un tableau. C'est un tableau que le regard parcourt sensuellement. Mais ici, à la différence du texte de Bombelli, le dispositif didactique met le sujet lecteur (ou, mieux, le sujet percevant) dans une situation où on lui demande de remplir certaines parties du tableau qui ont été enlevées de manière intentionnelle. Le regard se fait aider par le geste indexical et les mots. On pourrait revenir ici au texte de Piero della Francesca pour mieux apprécier le bouleversement effectué : alors que dans le texte de Piero, le mot, la langue et la cadence de son débit marquaient le rythme de la pensée, en laissant des traces écrites ici et là, et que la procédure de résolution du problème se donnait à *voir* et à *entendre* en *même temps*, la temporalité ici, dans la démarche de Paul, est assujettie à la manière de parcourir le tableau sémiotique.

p. 270

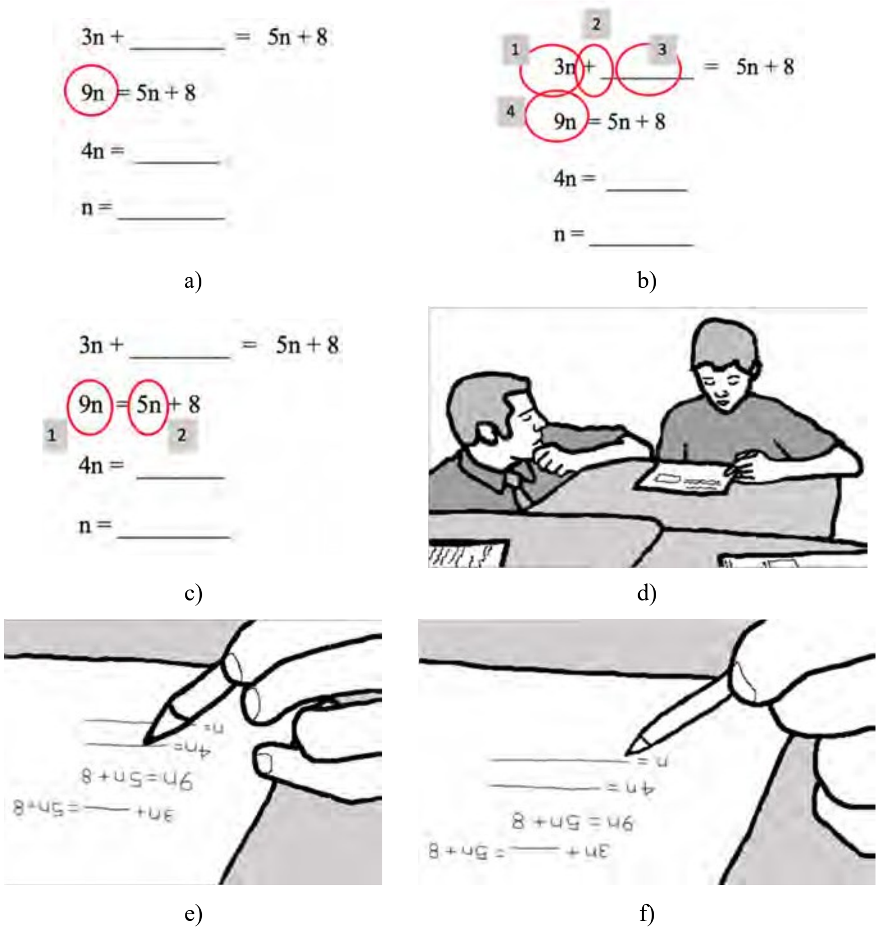


Figure 7.7. *L'activité perceptuelle de Paul sur le texte algébrique alphanumérique*

Pour trouver ce qu'il faut placer dans le premier tiret, Paul descend de la première équation à la deuxième. C'est là, dans ce mouvement perceptuel, qu'il va chercher des indices. « Le 9*n* ici », dit-il, en faisant référence au premier monôme de la deuxième équation, « ça me dit que 3*n* (voir [1] figure 7.7b) plus 6*n* (voir [3] figure 7.7b) est égal à 9*n* ». C'est la mise en rapport de plusieurs éléments du tableau qui lui permet de trouver ce qu'il faut mettre sur le premier tiret.

Dans les activités de 4^e^ année et de 5^e^ année, la langue organisait encore le travail sur les artefacts culturels (comme les carrés et cylindres placés sur le dessin de la balance ou les cartes et les enveloppes), avec l'aide de la perception et de la tactilité.

La tactilité demeure là, dans les mouvements de la main qu'effectue Paul tout au long de la résolution du problème. Mais elle s'est transformée complètement. Elle devient plus « théorique », de même que la perception. C'est que, maintenant, la pensée symbolique (c'est-à-dire la pensée perceptuelle qui se pose sur les signes algébriques) devance et dépasse la pensée verbale. Ce dépassement de l'une par l'autre est l'un des grands accomplissements des transformations culturelles que subit la pensée algébrique des élèves, transformations qui n'étaient pas encore tout à fait accomplies dans les activités de 4ᵉ année et de 5ᵉ année.

Mais Albert n'est pas tout à fait d'accord avec la procédure de Paul. Bien qu'il la trouve logique, il n'est pas d'accord avec l'idée de mettre 6n sur le tiret.

> « 6. Albert : Oui, mais ici (*il pointe le tiret*), pourquoi est-ce qu'on mettrait $6n$, si le $3n$ est déjà là ? Je pense qu'ici (*il pointe le tiret*), ça devrait être un nombre !
>
> 7. Professeur : Un nombre ? Pourquoi ?
>
> 8. Albert : Parce que tu ne fais pas juste $3n + 6n$; pourquoi tu ferais ça ?
>
> 9. Paul : À cause que, ben, qu'ici (*il pointe le premier monôme de la deuxième équation*), ça dit $9n$…
>
> 10. Professeur : (*en s'adressant à Albert*) Est-ce que tu vois ça ?
>
> 11. Albert : Oui, mais je pense que je peux trouver un nombre pour ça (*c'est-à-dire pour remplir le tiret*).
>
> 12. Professeur : Tu peux trouver un nombre… ?
>
> 13. Albert : Oui…
>
> 14. Professeur : qui rend l'équation vraie quand même ?
>
> 15. Albert : ça va être 12 ! (*le professeur part discuter avec un autre groupe*).
>
> 16. Paul : Oui, mais où est-ce qu'il va le 12 ?
>
> 17. Albert : 12, parce que tu dois ajouter $6n$ alors tu vas faire 2×6.
>
> 18. Paul : Oui, (*avec un ton frustré*), mais je ne comprends pas ; où est-ce qu'il va le 12 ?
>
> 19. Albert : Ici (*Albert utilise son stylo pour indiquer le placement du 12 sur la feuille de Paul*) »

Comme on le voit dans cet extrait, Albert a à l'esprit une équation de la forme $ax + b = cx + d$. À la ligne 7, il exprime des doutes par rapport à l'écriture « $3n + 6n$ ».

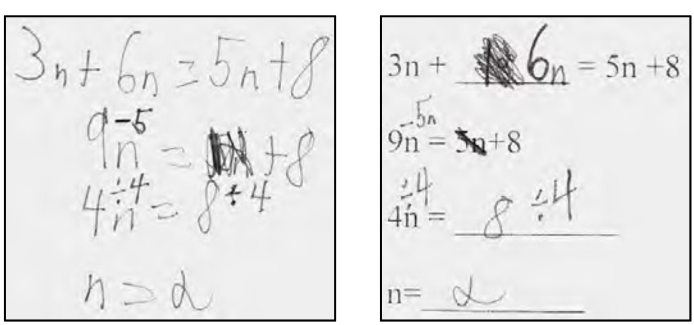
p. 272

Comme Paul n’est pas tout à fait convaincu, la discussion se poursuit. Après quelques échanges, Albert convient que sa procédure peut poser un problème :

> « 20. Albert : Oui, mais comment est-ce qu’on sait que 12 est égal à 6n ?
>
> 21. Paul : Je t’avais dit !
>
> 22. Albert : Oui, mais ici (*pour remplir le tiret*) tu dois savoir la valeur de n avant de, de faire…
>
> 23. Paul : Oui, exactement ! Moi je trouve que ma façon est plus facile, à cause… [re]garde, c’est vraiment comme 3 plus 6, $3n$ plus $6n$.
>
> 24. Albert : Oui, mais 12 fait du sens !
>
> 25. Paul : Euh, ben oui, mais… »

En suivant l’idée de mettre 6n sur le premier tiret, Paul se met à écrire l’équation sur sa feuille. Rapidement, en même temps qu’il écrit les termes de l’équation, il les prononce à haute voix. Une fois qu’il a terminé d’écrire et de dire l’équation « $3n + 6n = 5n + 8$ », il écrit en dessous et énonce la deuxième équation (voir figure 7.8a). Puis, il dit doucement, comme s’il se parlait à lui-même : « car ça (*il pointe* $3n + 6n$) est égal à ça (*il pointe* 9n *sur la deuxième équation*) ». Il commence à soustraire $5n$ du premier monôme de la deuxième équation. Il écrit un petit 5 sur la deuxième ligne, mais il est interrompu par Albert :

> « 26. Albert : Attends ! Je pense que j’ai trouvé quelque chose . . . On va résoudre ça (*la deuxième équation*) et si ça (*il pointe n*) égale à 2, alors, c’est bien. Et si ça n’égale pas à 2, alors c’est mal.
>
> 27. Paul : ça, ça veut dire qu’on aurait deux façons de trouver… »



a) b)

Figure 7.8. *a) L’écriture de l’équation et sa solution, telles que proposées par Paul. b) Paul remplit les tirets*

Paul revient à son équation et soustrait $5n$ du côté droit de la deuxième équation en barrant le terme « $5n$ ». Puis, il continue à écrire et en même temps à dire chacun des termes des troisième et quatrième équations. Lorsqu'il finit, il s'exclame, satisfait : « Oui ! OK, je l'ai (*on voit son corps se détendre*). »

Ensuite, Paul remplit les tirets (voir figure 7.8b).

Lors de la discussion générale, Paul est allé au tableau montrer sa solution. Ensuite Albert a montré la sienne. Il a expliqué qu'en partant de la deuxième équation, il a trouvé que n est égal à 2. Il a donc remplacé n par 2 dans $6n$ pour obtenir 12.

Il y a eu des objections :

> « 28. Alexandre : (*en s'adressant à Albert*), mais on aurait besoin de la première ligne pour être capable de trouver la valeur de n.
>
> 29. Albert : ça c'est pourquoi je ne savais pas si c'était bien.
>
> 30. Professeur : Donc, toi [Alexandre], tu sembles dire que si on résout les équations on commence toujours par la première ligne et on descend vers le bas…
>
> 31. Alexandre : Oui… À cause que la deuxième ligne qui dit $9n$…
>
> 32. Professeur : (*en répétant pour toute la classe, afin de souligner l'idée*) à cause qu'il y a le $9n$. Peux-tu nous expliquer ça ?
>
> 33. Alexandre : Oui, car ça ne dit pas la valeur de n. [*La valeur de n est*] tout à fait au bas, et ça dit $9n$ (*en pointant depuis son pupitre vers le premier terme de la deuxième équation*) ; alors, comment est-ce qu'on saurait que $3n + 12$ est égal à $9n$? »

Le professeur a encouragé la classe à prendre position par rapport aux idées proposées. Par la suite, la classe a abordé, en petits groupes, le prochain problème de la leçon du jour. La résolution de ces problèmes et leur discussion générale en classe a permis aux élèves de mieux comprendre les subtilités derrière l'écriture et la résolution des équations linéaires.

On voit dans l'agir et les discussions des élèves la réorganisation du corps et des sens qui est sous-jacente au cheminement conceptuel proposé par le professeur à travers les problèmes choisis. La production du sens change maintenant et se fait autour du symbolisme et d'un métalangage fourni par la langue naturelle.

7.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de la corporalité dans la constitution du sens en mathématiques. Notre intérêt s'est centré, en particulier, sur la constitution du sens mathématique dans son rapport avec le corps, la matière et les signes. Dans la première section, nous avons posé la question de l'importance de l'analyse sémiotique multimodale des élèves. La question est tout à fait pertinente, car la dimension sémiotique multimodale mettant au centre la question du corps n'était pas nécessairement un point de référence – ou, en tout cas, pas de manière décisive et organique – des théorisations sur la didactique des mathématiques. Cela a pris une vingtaine d'années (depuis les travaux pionniers de (Lakoff et Núñez 2000)) pour que l'on commence à réfléchir, du point de vue de l'apprentissage, sur le corps, les gestes, la perception, le rythme et certains phénomènes phoniques de la langue naturelle. Il faudrait peut-être chercher les raisons de ce « retard » dans la tradition plutôt rationaliste qui pèse sur nos conceptions de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques et d'autres disciplines. Le rationalisme dont nous avons hérité de Descartes, Leibniz et d'autres philosophes se prononce ouvertement contre le rôle du corps et des sens dans l'acte de la connaissance.

La deuxième section de ce chapitre fait une petite incursion du côté historique pour montrer cette épistémologie rationaliste qui prêche, dans la pratique, un exercice ascétique du corps. Historiquement parlant, cette épistémologie remonte à Platon, puis au christianisme tel que pratiqué au Moyen Âge. Mais le retour au corps que l'on voit de plus en plus dans les discussions contemporaines en philosophie (Massumi 2002), en sciences cognitives (Johnson et Rohrer 2007), et en anthropologie (Geurts 2002), entre autres – « retour » au corps car on *revient* d'une façon ou d'une autre aux préceptes de de la philosophie empiriste du XVIII^e^ siècle – pose de grandes difficultés. Il s'agit en effet de repenser notre compréhension de la pensée et ses rapports avec le corps, la chair, le sensible et le conceptuel. C'est une question qui ne va pas de soi. Souvent, le retour au corps se présente comme une possibilité relativement facile pour *repositionner* le sujet dans la scène épistémique ; c'est-à-dire que le retour au corps est vu comme une possibilité pour le sujet de essayer de retrouver une place effective dans la production du savoir. Car il n'y a rien de plus intime, de plus propre au sujet que son propre corps. Mais cette position débouche, comme nous avons essayé de le montrer en prenant comme exemple la position théorique de Maxine Sheets-Johnstone, dans une forme subjectiviste d'empirisme radical que Marx avait déjà réfutée au XIX^e^ siècle. Dans la perspective dialectique matérialiste élaborée par Vygotski (1987, 2014), Leontiev (1976, 2005), Luria (1984) et d'autres, la sensation, les sens et la matière sont considérés comme partie importante du soubassement de la cognition et de toute activité psychique des sujets (activité affective, volitive, etc.). Mais à la différence des positions empiristes, les sens, le corps et la chair ne sont pas conçus comme *déjà donnés* ; ils ne sont pas considérés comme le point de départ de la cognition, mais comme des entités qui se *produisent* et se *transforment* de manière dialectique *dans la pratique sociale* (Radford 2021). Dans ce contexte, la cognition humaine est conçue comme *cognition sensuelle* : une forme sensible et multimodale, constituée culturellement et historiquement, de penser, d'agir, d'imaginer, de sentir, de transformer et de donner un sens au monde.

Les deux dernières sections de ce chapitre (sections 7.3 et 7.4) ont abordé la transformation des sens sous l'angle phylogénétique et ontogénétique, respectivement. Nous avons essayé de montrer que l'apparition du symbolisme algébrique à la Renaissance va de pair avec toute une transformation des sens que l'on voit à l'œuvre dans d'autres domaines comme celui des arts visuels, transformation que l'on doit mettre en rapport avec les changements de production de la vie matérielle et spirituelle qu'entraînent le capitalisme artisanal naissant et les nouvelles procédures ou techniques de subjectivation de l'époque. De la même manière que le sujet est soustrait des tableaux en perspective de la Renaissance, qu'il est placé devant ces tableaux et les scènes que ceux-ci représentent, le sujet de la pratique algébrique est aussi placé devant le texte/tableau algébrique. Dans un cas comme dans l'autre, le sujet *regarde*. L'oralité cède la place à une activité *visuelle* et la perception (transformée en *perception symbolique*) devient le principe organisateur de la production du sens.

La section 7.4 ne doit pas être lue comme suggérant qu'il y a un parallélisme (ou récapitulation) de la phylogénèse par l'ontogénèse (Radford et Puig 2007). Si l'ontogénèse (c'est-à-dire le développement cognitif du sujet) semble reproduire la phylogénèse (c'est-à-dire le développement historique du savoir), la raison n'est pas à trouver dans un mouvement *naturel* de la pensée. Au contraire, il s'agit de l'effet de toute une série de dispositifs didactiques qui viennent donner une direction au développement cognitif. Bref, il ne s'agit pas d'une loi biologique de développement, mais de choix culturels éducatifs.

L'analyse sémiotique multimodale peut aider à mieux comprendre les parcours de transformation cognitive que nous proposons à nos élèves à l'école. À travers une articulation des versants phylogénétique et ontogénétique, l'analyse sémiotique multimodale peut aider à révéler la densité épistémologique des concepts mathématiques et permettre une flexibilité dans l'organisation des activités d'apprentissage que nous proposons à nos élèves. Une telle analyse peut nous aider à mieux comprendre les présupposés historiques au sujet du corps, des sens et de la matière dans les pratiques mathématiques d'antan – ce qui reste un domaine très peu exploré dans la didactique – et nous permettre, en même temps, de mieux exercer une pratique critique par rapport à nos propres présupposés théoriques et pratiques.

7.6. Bibliographie

Aagaard, J. (2004). *Excelling at Chess Calculations*. Everyman Chess, Londres.

Alberti, L. (2002). *Divertissements mathématiques*. Le Seuil, Paris.

Alberti, L. (2011). *On Painting*. Cambridge University Press, Cambridge.

Arasse, D. (2004). *Histoire de peintures*. Gallimard, Paris.

Arendt, H. (1958). *The Human Condition*. The University of Chicago Press, Chicago.

Aristotle (1998). *Metaphysics*. Lawson-Tancred, H. (trad.). Penguin Books, London.

Arrighi, G. (1970). *Piero della Francesca: Trattato d'Abaco*. Domus Galileana, Pise.

Bacon, R. (1962). *The Opus Majus of Roger Bacon*, volume 2. Burke, R.B. (trad.). Russell & Russell, New York.

Belting, H. (2011). *Florence and Baghdad. Renaissance Art and Arab Science*. The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge.

Biernoff, S. (2002). *Sight and Embodiment in the Middle Ages*. Palgrave Macmillan, New York.

Black, R. (2007). *Education and Society in Florentine Tuscany. Teachers, Pupils and Schools, c. 1250–1500*, volume 1. Brill, Leiden/Boston.

Bombelli, R. (1572). *L'Algebra*. Giovanni Rossi, Bologne.

Bourbaki, N. (1970). *Éléments de mathématique. Théorie des ensembles.* Springer, Berlin.

Clot, Y. (2015). Vygotski avec Spinoza, au-delà de Freud. *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, 140(2), 205–224.

Descartes, R. (1637). *Discours de la méthode plus la dioptrique, les météores et la géométrie*. Ian Maire, Leyde.

Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Dans *Advanced Mathematical Thinking*, Tall, D. (dir.). Kluwer, New York, 95–123.

Dubinsky, E., McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. Dans *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Arnon, I.I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S., Trigueros, M., Wellwe, K. (dir.). Kluwer, Dordrecht, 275–282.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Lang, Berne.

Duval, R. (1998). Signe et objet, I et II. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6, 139–196.

Duval, R., Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 117–152.

Edwards, L. (2009). Gestures and conceptual integration in mathematical talk. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 127–141.

Edwards, L., Radford, L., Arzarello, F. (2009). Gestures and multimodality in the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 91–215.

van Egmond, W. (1980). Practical mathematics in the Italian Renaissance: A catalog of Italian abbacus manuscripts and printed books to 1600. *Istituto e Museo di Storia della Scienza. Supplemento agli Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza*, 1.

Fischbach, F. (2014). *La production des hommes. Marx avec Spinoza*. Vrin, Paris.

Foucault, M. (1966). *Les mots et les choses*. Gallimard, Paris.

della Francesca, P. (1460). *Trattato d'Abaco*. Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze, Florence.

Franci, R. (1988). L'insegnamento della Matematica in Italia nel tre-quatrocento. *Archimede*, 4, 182–194.

de Freitas, E., Sinclair, N. (2013). New materialist ontologies in mathematics education: the body in/of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 453–470.

de Freitas, E., Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the Body*. Cambridge University Press, Cambridge.

Geurts, K. L. (2002). *Culture and the Senses*. University of California Press, Berkeley.

Gunn, C. (2008). *Ancrene Wisse. From Pastoral Literature to Vernacular Spirituality*. University of Wales Press, Cardiff.

Heeffer, A. (2009). On the nature and origin of algebraic symbolism. Dans *New Perspectives on Mathematical Practices*, Van Kerkhoe, B. (dir.). World Scientific, New Jersey, 1–27.

Høyrup, J. (2008). The tortuous ways toward a new understanding of algebra in the Italian abbacus school (14th-16th centuries). Dans *Proceedings of the Joint 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 30th North American Chapter*, Figueras, O., Cortina, J.L., Alatorre, S., Rojano, T., Sepúlveda, A. (dir.). Morelia, Mexico, 1, 1–15.

Høyrup, J. (2018). Abbacus School. Dans *Encyclopedia of Renaissance Philosophy*, Sgarbi, M. (dir.). Springer International Publishing, Cham. [En ligne]. Disponible à l'adresse : https://doi.org/10.1007/978-3-319-02848-4_1135-1 [Consulté le 15 août 2020].

Hume, D. (1921). *An Enquiry Concerning Human Understanding and Selections from A treatise of Human Nature*. The Open Court Publishing Co., Chicago.

Ilyenkov, E.V. (1977). *Dialectical Logic*. Progress Publishers, Moscou.

Isaacson, W. (2017). *Leonardo da Vinci*. Simon & Schuster, New York.

Jayawardene, S. (1965). Rafael Bombelli, engineer-architect: Some unpublished documents of the apostolic camera. *Isis*, 56(3), 298–306.

Jayawardene, S. (1973). The Influence of Practical Arithmetics on the Algebra of Rafael Bombelli. *Isis*, 64(4), 510–523.

Johnson, M., Rohrer, T. (2007). We are live creatures: Embodiment, American pragmatism, and the cognitive organism. Dans *Body, Language and Mind*, Ziemke, T., Zlatev, J., Frank, R. (dir.). Mouton de Gruyter, Amsterdam, 17–54.

Kant, I. (2003). *Critique of pure reason*. Smith, N. (trad.). St. Martin's Press, New York.

Kärkkäinen, P. (2011). Sense Perception, Theories of. Dans *Encyclopedia of Medieval Philosophy: Philosophy Between 500 and 1500*, Lagerlund, H. (dir.). Springer, Dordrecht, 1182–1185.

Lakoff, G., Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From*. Basic Books, New York.

Leibniz, G.W. (1887). *Nouveaux essais sur l'entendement humain (Avec étude et commentaires de J. H. Vérin)*. Poussielgue Frères, Paris.

Leontiev, A.N. (1976). *Le développement du psychisme*. Éditions sociales, Paris.

Leontiev, A.N. (2005). The structure of consciousness. *Journal of Russian and East European Psychology*, 43(5), 14–24.

Luria, A.R. (1984). *Sensación y percepción.* Martínez Roca, Barcelone.

Marnat, M. (1995). *Joseph Haydn: la mesure de son siècle.* Fayard, Paris.

Marx, K. (1982). *Œuvres. Philosophie*, tome 3. Gallimard, Paris.

Marx, K. (2007). *Manuscrits économico-philosophiques de 1844*. Fischbach, F. (trad.). Vrin, Paris.

Massumi, B. (2002). *Parables for the Virtual. Movement, Affect, Sensation*. Duke University Press, Durham/Londres.

Morton, J. (2000). *The Nun's Rule. (The Ancren Riwle)*. In parentheses Publications, Cambridge, Ontario.

Petry, R. (2006). *Late Medieval Mysticism*. Westminster John Knox Press, Louisville.

Piaget, J. (1970). *Psychologie et épistémologie*. Gonthier, Paris.

Plato (1961). *The Collected Dialogues of Plato Including the Letters*. Pantheon, New York.

Radford, L. (2004). Syntax and meaning. Dans *Proceedings of the 28 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 28)*, volume 1, Høines, M.J., Fuglestad, A.B. (dir.). Bergen University College, Bergen, 161–166.

Radford, L. (2006). The cultural-epistomological conditions of the emergence of algebraic symbolism. Dans *Proceedings of the 2004 Conference of the International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics and ESU 4 - Revised edition*, Furinghetti, F., Kaijser, S., Tzanakis, C. (dir.). Uppsala, 509–524.

Radford, L. (2013). Sensuous cognition. Dans *Visual Mathematics and Cyberlearning*, Martinovic, D., Freiman, V., Karadag, Z. (dir.). Springer, New York, 141–162.

Radford, L. (2014). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM Mathematics Education*, 46, 349–361.

Radford, L. (2015). Rhythm as an integral part of mathematical thinking. Dans *Mind in Mathematics: Essays on Mathematical Cognition and Mathematical Method,* Bockarova, M., Danesi, M., Martinovic, D., Núñez, R. (dir.). Lincom Europa, Munich, 68–85.

Radford, L. (2021). *The theory of objectification. Learning as a cultural collective process: A Vygotskian perspective*. Brill/Sense, Leiden/Boston.

Radford, L., Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 145–164.

Radford, L., Demers, S., Miranda, I. (2009). *Processus d'abstraction en mathématiques*. Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, Ottawa.

Radford, L., Edwards, L., Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 91–95.

Radford, L., Arzarello, F., Edwards, L., Sabena, C. (2017). The multimodal material mind : Embodiment in mathematics education. Dans *First Compendium for Research in Mathematics Education*, Cai, J. (dir.). NCTM, Reston, 700–721.

Roth, W.-M. (2011). *Passibility: At the Limits of the Constructivist Metaphor*. Springer, New York.

Rotman, B. (1987). *Signifying Nothing. The Semiotics of Zero*. The MacMillan Press, Londres.

Sheets-Johnstone, M. (1990). *The Roots of Thinking*. Temple University Press, Philadelphie.

Sheets-Johnstone, M. (2009). *The Corporeal Turn.* Imprint Academic, Exeter.

Sheets-Johnstone, M. (2011). *The Primacy of Movement.* John Benjamins, Amsterdam.

Sinclair, H. (1971). Sensorimotor action patterns as a condition for the acquisition of syntax. Dans *Language Acquisition: Models and Methods*, Huxley, R., Ingram, E. (dir.). Academic Press, Londres/New York, 121–135.

Spinoza, B. (2010). *Éthique*, Pautrat, B. (trad.). Le Seuil, Paris.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge University Press, Cambridge.

Taylor, C. (1994). Précis of sources of the self. *Philosophy and Phenomenological Research*, 54(1), 186–186.

Thom, J., Roth, W.-M. (2011). Radical embodiment and semiotics: Towards a theory of mathematics in the flesh. *Educational Studies in Mathematics*, 77, 267–284.

Vergnaud, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. Dans *Actes du Colloque GDM-2001*, Portugais, J. (dir.). Montréal, 1–22.

Viète, F. (1630). *Les cinq livres des zététiques*. Ivlian Iacquin, Paris.

Vygotski, L.S. (1987). *Collected Works*, volume 1. Plenum Press, New York.

Vygotski, L.S. (2014). *Histoire du développement des fonctions psychiques supérieures*. La Dispute, Paris.