< 17

Énfasis

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos

Autores
Bruno D'Amore
Luis Radford

Prefacios
Michèle Artigue
Ferdinando Arzarello

Doctorado Interinstitucional en Educación DIE

Universidad del Valle
UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Doctorado Interinstitucional en Educación DIE

Universidad del Valle · Universidad Distrital Francisco José de Caldas · Universidad Pedagógica Nacional

Énfasis

Libros de la serie Énfasis

Doctorado Interinstitucional en Educación

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Énfasis

Libros de la serie Énfasis

Doctorado Interinstitucional en Educación

Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:

problemas semióticos, epistemológicos y prácticos

Bruno D'Amore y Luis Radford

Prefacios de

Michèle Artigue

Ferdinando Arzarello

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Bogotá, Colombia 2017

ISBN Impreso: 978-958-5434-47-9
ISBN Digital: 978-958-5434-48-6

Primera Edición 2017

Preparación Editorial
Doctorado Interinstitucional en Educación
http://die.udistrital.edu.co/publicaciones
Sede Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Aduanilla de Paiba, Edificio de Investigadores, calle 13 No. 31-75
Asistente editorial eventosdie@udistrital.edu.co
PBX: (57+1) 3239300, ext.6330-6334

Fondo de publicaciones
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
www.udistrital.edu.co
Carrera 24 No. 34 - 37
PBX: (57+1) 3239300, ext.6201
publicaciones@udistrital.edu.co

Corrección de Estilo
Catina Barrera

Diseño y Diagramación
Diego Calderón

Impresión
Cooperativa Editorial Magisterio

Bogotá, Colombia, 2017

D'Amore, Bruno, 1946-

Radford, Luis

Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas : problemas semióticos, epistemológicos y prácticos / Bruno D'Amore, Luis Radford. -- Bogotá : Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017.

192 páginas ; 24 cm.

ISBN 978-958-5434-47- 9

1. Matemáticas - Enseñanza 2. Semiología (Matemáticas) 3. Matemáticas - Problemas, ejercicios, etc. I. Radford, Luis, D'Amore, Bruno autor II. Tít.

510 cd 21 ed.

A1572556

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

UD Editorial

Índice

Prefacio de

Michèle Artigue

Es con gran gusto que leí la obra *Enseñanza y aprendizaje de la matemática: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*, la cual reúne una serie de artículos de Bruno D'Amore y de Luis Radford y que termina con el texto de una entrevista a los dos autores hecha por Giorgio Bagni.

En la presentación de la obra, Bruno D'Amore y Luis Radford ponen en evidencia, a la luz de nuevos enfoques –sobre todo socioculturales–, que progresivamente se han venido imponiendo en el campo de la educación matemática, la necesidad de repensar hoy en día algunas nociones centrales de la didáctica, como aquellas del saber, del conocimiento y del aprendizaje. Los dos autores se refieren con frecuencia a estas nociones a lo largo de la colección de textos.

La cultura didáctica y la sensibilidad de los autores son evidentemente diferentes; cada uno teje su reflexión según una lógica propia, pero lo que los une, y que yo percibo de forma particular al interior de la reflexión que ellos conducen, es la importancia que ambos conceden a la dimensión epistemológica y semiótica.

En el primer texto escrito por Bruno D'Amore, la reflexión se delinea bajo el ángulo de una lectura proporcionada por construcciones sociológicas, preguntándose sobre lo que estas construcciones pueden hacernos comprender, a propósito de las prácticas individuales y colectivas que se desarrollan al interior de la clase vista como una sociedad, y de los contratos didácticos a los cuales son sometidos.

El segundo texto, coescrito con Martha Isabel Fandiño Pinilla, es una reflexión sobre la espinosa cuestión de la enseñanza de la didáctica misma. En dicha reflexión el autor nos invita, basándose en su rica experiencia en este dominio, a comprender cómo el pasaje de la enseñanza de la matemática a la enseñanza de su didáctica modifica los diferentes elementos del clásico triangulo de la didáctica. Bien se perciben las consecuencias de la ausencia de acuerdos sobre los tipos y los contenidos de saberes que hay que transmitir, aun si dicha ausencia no es suficiente para explicar las razones por las cuales los resultados de la investigación didáctica tienen tanta dificultad en alimentar eficazmente la formación del profesorado. No pude evitar reconocer una relación entre esta reflexión y los debates y trabajos que han sido llevados a cabo en mi propia comunidad acerca de la formación tanto de los docentes como la de los formadores de docentes sobre los equilibrios idóneos entre una didáctica objeto y una didáctica instrumento, así como sobre las técnicas y métodos a desarrollar para anclar la formación en realidades de prácticas y responder de la mejor manera posible a las necesidades de los docentes.

Después de este interludio, en su tercer texto, Bruno D'Amore regresa a las cuestiones fundamentales citadas en el prólogo: las de la conceptualización, las del aprendizaje, las de la relación entre semiótica y noética, haciendo numerosas referencias a una gran variedad de trabajos en los que, en el tema de la semiótica, las referencias a los trabajos de Raymond Duval son particularmente frecuentes.

Si los tres capítulos escritos o co-escritos por Bruno D'Amore ven cruzarse perspectivas diferentes, los tres capítulos escritos por Luis Radford son organizados con gran coherencia alrededor de la teoría de la objetivación que él ha desarrollado y que propone una respuesta a las cuestiones fundamentales formuladas en el prólogo, respuesta basada, como dice el mismo autor, sobre la idea fundamental que el aprendizaje es tanto conocer como devenir. El primer texto es dedicado a la clarificación del sentido dado en esta teoría a los conceptos de saber y de conocimiento. El autor se propone explicar, de manera detallada, que su propia posición histórico-cultural y, en general, las visiones socio-culturales se distinguen de las posiciones constructivistas y socio-constructivistas que por mucho tiempo dominaron el campo de la educación matemática. El autor pasa luego a definir el saber como *"sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente*", pero también como pura potencialidad, y el conocimiento como su materialización, su actualización, por medio de la actividad.

Después de estas clarificaciones, el segundo texto es dedicado a la noción de aprendizaje. Mezclando discursos generales y ejemplos destinados a ayudar a dar un sentido a las ideas presentadas, el autor nos explica la concepción de aprendizaje como proceso de objetivación y de concientización que constituye la teoría de la objetivación, de transformación en la actividad conjunta del docente y de los estudiantes de un saber cultural "en sí" en un saber "para sí".

El tercer texto se centra sobre la dimensión del devenir. Luis Radford inicia este texto relatando una conversación con Guy Brousseau. El relato pone en evidencia la diferencia entre la teoría de situaciones y la teoría de la objetivación. Radford contrasta, en particular, la visión del aprendizaje como proceso de adaptación autónoma del estudiante o del grupo de estudiantes basada sobre la noción de situación adidáctica en la teoría de situaciones con la visión del aprendizaje como trabajo conjunto entre docente y estudiantes en la teoría de la objetivación, dos visiones que son en su opinión irreconciliables.

La argumentación es a priori convincente pero leyendo este pasaje, no pude impedirme evocar los trabajos de Gérard Sensevy en torno a la Teoría de la Acción Conjunta en Didáctica (TACD), una teoría que, reivindicando la herencia de la teoría de situaciones, ha producido una construcción original y coherente en la cual justamente la acción conjunta entre docente y estudiantes está al centro de la teorización. Sin duda, esto nos invita a profundizar la reflexión.

El punto central de este capítulo es el de los conceptos de *ser* y de *subjetividad*. Aquí se ve muy claramente el punto de vista transformativo de la teoría de la objetivación: cómo la manera en que se combinan la atención al devenir del estudiante y la atención a la dialéctica entre saberes y conocimientos, conlleva a una teoría apta para rechazar la escuela que contribuye a la alienación de los individuos, como es, incluso con mucha frecuencia, el caso hoy en día. La lectura de estos tres textos, profundos, y al mismo tiempo iluminadores, me ha ayudado a darme cuenta de este hecho.

La obra termina con un capítulo que relata una conversación de los dos autores con Giorgio Bagni. Sus voces se mezclan en las respuestas dadas a las preguntas complejas que son planteadas, produciendo un texto que necesita una lectura atenta.

En la conclusión del prólogo, los dos autores expresan su esperanza que el libro permita la continuación de los debates en curso sobre la redefinición de la educación matemática como acción social y política. No hay ninguna duda que la lectura de esta obra proporciona los elementos sustanciales para fortalecer este debate y sé que tendrá muchos lectores.

Prefacio de

Ferdinando Arzarello

Imaginen que se les pidiera observar, sin ser vistos, una clase mientras estudiantes y docente "hacen matemáticas" y, posteriormente, comentar lo observado. En sus respuestas se encontrarían una variedad de ideas y de juicios de carácter muy diverso, respuestas que tendrían como base sus experiencias, creencias, conocimientos, por más ingenuos o eruditos que fueran. Pues bien, esta colección de ensayos les servirá de guía a través de un recorrido que revela los posibles lentes con los cuales mirar y discutir científicamente la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas.

Para hacer que la lectura sea más eficaz y favorecer aquello que Umberto Eco en su célebre escrito (Eco, 1981) llama la "cooperación interpretativa de los textos", me permito sugerir una lectura "no estándar" del volumen. Así se logrará apreciar plenamente de forma activa y dinámica todo lo que los Autores quieren comunicar en el conjunto de sus capítulos, de una forma mucho más estándar, ordenada y, me atrevo a decir, más académica.

¿Están de acuerdo? Muy bien: ahora les pido tener a la mano lápiz y papel antes de dar inicio a la lectura. Damos inicio leyendo la situación descrita en la pág. 66 junto con los diálogos presentados en las páginas 69-70; así como observando las figuras 5.4, 5.7, 5.8. Pero les ruego hacer caso omiso de los comentarios que allí dan los Autores: tengan en cuenta sólo la parte descriptiva de lo que está sucediendo. Estarán así dentro de la clase de la señora Giroux, grado 4° (9-10 años): ahora lean el problema que ella propone a sus estudiantes, tomen conciencia del material que distribuye y asistan a unos de los diálogos con sus estudiantes. Con un poco de imaginación tendrán frente a sus ojos un episodio vivido de lo acontecido en la clase.

¿Qué piensan? Ahora, escriban inmediatamente los comentarios que les surgen después de leer: ¿están de acuerdo con el método del docente? ¿Tienen alguna crítica u observación que hacer? ¿Piensan que los estudiantes puedan aprender verdaderamente las matemáticas enseñadas de esta forma?

Es posible que puedan sugerir alguna idea general sobre lo que significa enseñar – aprender matemáticas, o sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, cuyo aprendizaje es el objetivo de la enseñanza de las matemáticas, o sobre el papel que los materiales concretos puestos a disposición de los estudiantes juegan o no, pensando en el aprendizaje de lo que se está enseñando, o sobre la mayor o menor eficacia de las intervenciones del docente y sobre cuáles principios didácticos, cognitivos o comunicativos se basan o deban sustentarse.

Hecho esto, finalmente pueden abrir el volumen en la página uno e iniciar a leer de forma estándar: a este punto pueden estar seguros de que encontrarán las respuestas a estas preguntas, las cuales son planteadas por los autores a medida que se avanza en la lectura de los ensayos. Naturalmente, se trata del punto de vista de estos Autores, muy bien fundamentado y argumentado. En este punto sugiero confrontar estas ideas con sus notas y tratar de interpretarlas a la luz de sus comentarios: la imagen que tienen de lo que sucede en una clase de matemáticas surgirá mucho más rica y animada. Es como si tuvieran un diálogo con los Autores mientras les proporcionan los lentes adecuados para leer en profundidad el significado de enseñar – aprender las matemáticas.

De esta forma aprenderán que una clase es una *comunidad de práctica*, donde las dos palabras, comunidad y práctica, dan relevancia a los elementos importantes de los procesos de enseñanza – aprendizaje.

De una parte de los aspectos sociales del aprendizaje; la clase, es como una sociedad:

> *También la clase puede ser vista como una sociedad específica de individuos cuya unidad social se debe a la necesidad sancionada por ley de la realización de 'prácticas' definidas y en gran medida compartidas. La clase, de hecho, responde a los requisitos típicos que los sociólogos exigen a un grupo de individuos para poder usar la denominación «sociedad». (p. 10)*

De otra parte son las prácticas compartidas, que dentro de dicha clase se activan, las que permiten a los estudiantes construir el saber matemático:

> *Es, en este contexto, muy común hablar sobre el saber/conocimiento como algo que uno hace o que uno construye. Saber o conocer es construir. La metáfora fundamental detrás de esta idea es que el saber/conocimiento es algo similar a los objetos concretos del mundo. Uno construye, ensambla el conocimiento, tal como construye o ensambla las partes de una silla. (p. 49)*

Naturalmente estas prácticas sociales se basan en el uso de diversas formas de las representaciones de los objetos matemáticos: estos, siendo por su naturaleza no concretos, necesitan de formas oportunas de representación. De aquí la dialéctica que se establece entre lo que D'Amore, sobre la base de los estudios de R. Duval, describe como dialéctica entre noesis y semiosis: es como decir la batalla entre las cosas y sus signos. Es una batalla que se libra continuamente en clase: aprender significa vencer esta batalla a través de oportunos proyectos didácticos. Pero para llevarlos a cabo se requiere una profunda reflexión epistemológica sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, sobre las relaciones de estos con los signos que los representan y sobre las modalidades cognitivas, además de las epistemológicas, con las cuales estos pueden volverse accesibles a los estudiantes. De hecho, es a través de las prácticas compartidas culturalmente que se establecen en clase con miras a un proyecto didáctico del docente, y a través del uso con instrumentos de mediación que "toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos" (Moreno Armella, 1999, p. 39).

Este volumen abarca, en varias etapas, el recorrido que lleva a la comprensión de este complejo nudo ejemplificado en el espisodio didáctico de la clase de la señora Giroux, al cual asistimos y que lleva a la elaboración de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica: de los instrumentos sociológicos, semióticos, epistemológicos necesarios para organizar instrumentos de análisis y de intervención en clase (primeros tres capítulos, de Bruno D'Amore, incluido un capítulo sobre la didáctica de la didáctica de la matemática escrito con Martha Isabel Fandiño Pinilla) a la noción de objetivación, el proceso culminante a través del cual se da el aprendizaje del saber matemático en clase (capítulos 4, 5, 6, escritos por Luis Radford). Todo está ilustrado con una gran riqueza de referencias bibliográficas, que no tienen que ver únicamente con la didáctica de las matemáticas en sentido estricto, sino que abarcan sociología, filosofía y psicología: las referencias, estimulantes y provocadoras, van desde Descartes a Kant y de Marx a Vygotsky y Piaget.

Dos puntos entre tantos otros fueron para mí iluminantes y creo que lo puedan ser también para quienes han seguido mi sugerencia de lectura no estándar: la función mediadora de las actividades con instrumentos y el papel del docente. Estos son particularmente relevantes si se relee con su ayuda todo lo que sucede en la clase de la señora Giroux.

Para los primeros:

> *Podemos resumir la relación entre saber, actividad y conocimiento de la siguiente manera: El conocimiento es un modo del saber: una de sus formas singulares desarrolladas. Esta forma desarrollada que la actividad mediadora hace posible, pone al saber en movimiento y lo actualiza o materializa. El saber (algebraico, geométrico, etc.) no es un ente sensible en sí. ¿Podemos acaso sentir, percibir o pensar el álgebra*

en sí? No. No podemos. Pensar algebraicamente es ya algo que ocurre en ese proceso que hemos llamado hace un momento actividad. (p. 56)

Para los segundos, es importante una distinción fundamental, que distingue las prácticas de la señora Giroux de otras prácticas, definiendo una figura de docente que:

funge de mediador entre alumno y saber y hace que el primero sea activo: consagra las elecciones y los 'descubrimientos' del alumno reconociéndole un estatuto institucional de consumo y un permiso oficial de uso; el fundamento de todo esto se halla en el hecho que fue el alumno el que construyó. (p. 45)

Esta figura de docente es completamente diferente de aquella prefigurada en otros contextos teóricos, según los cuales:

el maestro funge de mediador totalitario y hace que el alumno sea un sujeto pasivo: le pide fe ciega, fe ciega en la institución a cambio de promesas acerca de capacidades y habilidades futuras que nadie garantiza que lleguen algún día o que no podrían jamás ser consumidas. El alumno cesa de construir, es decir cesa de aprender. (ibid.)

Si por caso en sus comentarios se encuentra algo parecido al segundo retrato, les sugiero volver a leer con calma las páginas aquí citadas: es un punto clave de todo el edificio teórico y práctico de nuestros autores.

Esta discusión sobre el papel del docente es crucial también para distinguir las posiciones de nuestros autores de aquella, planteada por Guy Brousseau, muy difundida en Francia, y conocida como Teoría de la Situaciones Didácticas (TSD).

En el capítulo 6, de hecho, Radford contrapone sus posiciones a aquella del ilustre investigador francés. Explica una sutil pero importante diferencia entre la forma con la cual el papel del docente es propuesto aquí y el papel del docente que propone la TSD:

Para la teoría de las situaciones didácticas, no existe tal cosa como que el profesor y los estudiantes trabajen de manera conjunta en la solución de un problema —ciertamente no en el sentido en que lo hemos concebido en la teoría de la objetivación (ver el ejemplo de la profesora Giroux y Albert discutido en el capítulo anterior). (p. 75)

Es el corazón de la teoría social de la construcción del saber que no va de acuerdo con la TSD; mientras para Bruno D'Amore y Luis Radford estudiante y docente trabajan juntos en la producción del saber, para la TSD es necesario que se proponga al estudiante la llamada devolución de la situación:

> *"Profesores y estudiantes son conceptualizados [...] como individuos que obedecen a una división de trabajo implícitamente formulada en un contrato didáctico. De acuerdo a este contrato didáctico, la solución matemática tiene que efectuarla el estudiante, no el docente." (ibid.)*

También sobre este punto podría ser interesante lo que se anotó a propósito del método de la señora Giroux. Gracias a D'Amore y Radford la clase de esta docente desvela shakesperianamente a nosotros, novatos Horacios, que existen más teorías y prácticas en didáctica de las matemáticas que cuantas pueda imaginar nuestra filosofía personal.

El cuadro socio-constructivista que emerge de nuestros autores es así delineado de forma precisa. Pero generalmente los métodos que se basan sobre estos, así como también aquellos de otros sistemas fundados sobre otras bases teóricas, encuentran concretamente dificultad de naturaleza diversa, didáctica, cognitiva, epistemológica. Son los llamados obstáculos, discutidos ampliamente por Guy Brousseau, quien a su vez hacía referencia a G. Bachelard. Estos resultan particularmente difíciles e inevitables, sobre todo cuando son de naturaleza epistemológica y cuando se asume que los conocimientos matemáticos se adquieren a través de una mediación esencial de naturaleza cultural, que trae a cuenta el problema de las relaciones entre la ontogénesis y la filogénesis de los conceptos matemáticos. Una teoría como la delineada en este volumen no puede eximirse de discutir este punto. Nuestros autores lo hacen en el último capítulo, en el cual se imagina un diálogo entre tres, los dos autores y el recordado Giorgio Bagni, quien plantea a los dos autores varias preguntas sobre este tema.

El capítulo expone sustancialmente la formulación teórica de Luis Radford, a propósito de la interpretación que daremos a la idea de "obstáculo epistemológico (Bachelard, 1938)". En este sentido los autores formulan una conexión de la historia con la didáctica, a través de la epistemología (p. 94).

Una de las ideas de base sobre este punto es que:

> *no somos ni el producto exclusivo de nuestras actividades, ni el producto irrevocable de nuestras prácticas discursivas. La historia de la matemática (concebida no como una simple secuencia de eventos heroicos, con nombres y fechas) es un medio para comprendernos a*

nosotros mismos como seres históricos y comprender nuestra responsabilidad de educadores. (p. 96)

En lugar de hacer una distinción entre historia de las matemáticas interna e historia de las matemáticas externa, como lo hace Lakatos, es necesario considerar el papel holístico que la cultura tiene en la adquisición del conocimiento matemático:

la cultura es mucho más que un estímulo y mucho más que un obstáculo para el conocimiento. Lo que afirmo es que el conocimiento está estrechamente enraizado en su contexto cultural o, en otras palabras, que la cultura es consustancial al conocimiento. (p. 98)

La discusión sobre los obstáculos muestra aún, una vez más, las posiciones muy originales con las cuales los autores afrontan el análisis de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y constituye un final feliz de esta obra, que muestra cómo la reflexión filosófica y epistemológica puede proporcionar instrumentos de lectura eficaces, incluso a las aparentemente simples acciones que se presentan en nuestras clases.

Referencias

Eco, U. (1981). *Lector in fabula*. Barcelona: Lumen.

Bruno D'Amore y Luis Radford

La investigación en torno a la enseñanza y aprendizaje de la matemática se ha visto enriquecida en los últimos años con la aparición de nuevas problemáticas y nuevos enfoques, entre los cuales cabe señalar los enfoques socioculturales y políticos. Dichos enfoques han puesto en evidencia la complejidad en la que se encuentra inmersa el aula de matemática, la escuela, así como los docentes y estudiantes. Esos enfoques han puesto igualmente en evidencia la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Ha aparecido una necesidad de discutir de nuevo conceptos que habían quedado implícitos en el discurso didáctico o que habían adquirido cierta estabilidad conceptual a lo largo de las últimas décadas en el proceso de enseñanza y apredizaje de la matemática, como el concepto de saber, de conocimiento, de representación e incluso el concepto mismo de aprendizaje. En pocas palabras, la aparición de nuevas problemáticas y enfoques han producido la necesidad de repensar ciertos conceptos fundamentales. En este libro retomamos precisamente ciertos conceptos "fundamentales" y los discutimos desde una perspectiva semiótica y epistemológica.

El libro está dividido en tres partes: la primera está constituida de tres capítulos, escritos por Bruno D'Amore; la segunda parte está constituida por tres capítulos escritos por Luis Radford; en la tercera parte, se publica una entrevista conducida por Giorgio Bagni a los dos autores.

En el primer capítulo, D'Amore pone en evidencia algunos aspectos relacionados con la idea de práctica y de meta-práctica en el actividad escolar, tomando como punto de análisis la sociología, para demostrar que se pueden dar explicaciones de algunos fenómenos clásicos de la Educación Matemática desde otras perspectivas, mostrando así que problemáticas debatidas al interior de la Educación Matemática pueden ser alumbradas a partir de perspectivas que provienen de otros campos de estudio.

En el segundo capítulo, escrito con Martha Isabel Fandiño Pinilla, D'Amore afronta un tema explícito y concreto de gran relevancia en el campo de la formación de los docentes, es decir la extensión de los estudios de Educación Matemática (en la cual el Saber está constituido por la Matemática) a los casos en los cuales el Saber está constituido por otras temáticas específicas, conexas con la Matemática, como la Educación Matemática. Se trata, por tanto, del problema de la "Didáctica de la Didáctica de la Matemática", un tema de mucha actualidad en el contexto internacional. En este artículo los autores buscan extender las bases de la teoría de las situaciones a este campo, basándose en sus experiencias en campo concreto.

En el tercer capítulo, D'Amore estudia las bases semióticas del proceso de enseñanza– aprendizaje, buscando un diálogo entre las diversas teorías.

En los siguientes tres capítulos, Radford ofrece una alternativa educativa a aquella propuesta por las corrientes constructivistas inspiradas de la epistemología genética de Piaget, corrientes que han tenido una gran influencia en la educación contemporánea en general y en la educación matemática en particular. Buscando salir de los límites del individualismo que se desprende de las corrientes constructivistas contemporáneas, la teoría de la objetivación ofrece una manera diferente de pensar la enseñanza y el aprendizaje.

El capítulo 4 del libro se centra en una discusión de los conceptos de *saber* y *conocimiento*. Dichos conceptos son abordados a través de ideas fundamentales de la filosofía dialéctico-materialista. El saber es presentado como una capacidad latente incrustada en la cultura: una posibilidad de hacer algo. El origen de esa posibilidad no se encuentra en un mundo platónico, sino en la práctica política y social.

Esta capacidad latente, que es una codificación histórico-cultural de la labor humana, da la pauta al concepto de conocimiento, que en vez de ser un fenómeno mental, aparece como la materialización de eso que hasta antes se perfilaba como posibilidad. Estos conceptos permiten redefinir el aprendizaje como un proceso de encuentro con el saber cultural (formas de pensamiento, de acción, de imaginación etc., como son por ejemplo las formas de pensamiento, de imaginación y de acción que constituyen el saber matemático en cierta cultura, en cierto punto de su existencia). El concepto de aprendizaje es el objeto de discusión del capítulo 5.

El capítulo 6 aborda el problema del ser, de la subjetividad y de la alienación. En este capítulo, Radford arguye que el aula de matemática produce no solamente saberes, sino que también individuos. Luego sostiene que es necesario entender las causas que han llevado a muchas aulas de matemáticas a producir estudiantes alienados. Luego de definir de manera precisa los conceptos de ser y de subjetividad, Radford sugiere que es urgente cambiar las formas de cooperación humana que son fomentadas a través de la acción pedagógica constructivista y tradicional por acciones susceptibles de conducir a una producción de sujetos críticos no alienados.

En el artículo final, Giorgio Bagni (1958-2009), alumno de Bruno D'Amore, propone preguntas específicas sobre el tema del "obstáculo epistemológico", clásica base de los estudios pioneros de Guy Brousseau. Bruno D'Amore y Luis Radford dan respuesta a esas preguntas, dando interpretaciones diferentes a las diversas componentes (epistemológicas, históricas, filosóficas y didácticas) de este concepto.

Los autores esperan que el libro permita la continuación de los debates actuales en torno a la redefinición de la educación matemática. Dicha redefinición busca pensar e imaginar la educación matemática como una acción social y política que va más allá de la dimensión cognitivista, tecnológica y utilitarista que la ha caracterizado en gran medida hasta hoy en día.

Bruno D'Amore y Luis Radford.

Bogotá y Sudbury.

Febrero 2016.

Algunos elementos relevantes de la didáctica de la matemática interpretados en clave sociológica

Las ideas de prácticas y meta-prácticas en la actividad matemática

Bruno D'Amore

Prácticas en el aprendizaje de la matemática

Categorías de prácticas

La clase como *comunidad de prácticas* compartidas, que tienen como objetivo la construcción de conocimiento matemático, fue señalada por más de un autor en diversos contextos (Godino & Batanero, 1994; Radford, 1997).

Podemos intentar clasificar estas prácticas en cinco categorías que presentaré brevemente a continuación (Fandiño Pinilla, 2010):

- Prácticas conceptuales.
- Prácticas algorítmicas o ejecutivas.
- Prácticas estratégicas o resolutivas.
- Prácticas semióticas.
- Prácticas comunicativas.

En una didáctica significativa, todas estas prácticas son consideradas de manera explícita en los procesos de enseñanza - aprendizaje y dan un *significado social* a la existencia de una comunidad (como la sociedad clase) cuyos miembros realizan dichas prácticas como actividades. Aún más, es gracias a esta participación en el ejercicio de dichas prácticas que adquiere sentido esta comunidad específica.

Las prácticas conceptuales tienen que ver principalmente con la noética, es decir con la construcción cognitiva de los conceptos matemáticos (Duval, 1993a, b, 1999); forman parte de esta categoría de prácticas todas las actividades de enseñanza-aprendizaje cuya finalidad es la de hacer que los estudiantes construyan conceptos. Múltiples pueden ser los temas (estos dependen de las elecciones del docente en el curso de la transposición didáctica), las metodologías (diversos tipos de *situaciones* puestas en juego), las elecciones de ingeniería didáctica; el objetivo es hacer que cada estudiante tenga las condiciones que le permitan construir cognitivamente el(los) concepto(s) propuesto(s) como objetivo.

Las prácticas algorítmicas o ejecutivas tienen que ver con la construcción de habilidades de cálculo, de habilidades ejecutivas, de organización de actividades en componentes elementales (como en el caso de una construcción con regla y compás) en los diversos niveles: de la adición entre naturales, al cálculo de las integrales; de la memorización de las tablas de multiplicar, a la de los límites fundamentales; de la ejecución de operaciones para el cálculo de una expresión, a la solución de las ecuaciones. La componente algorítmica o ejecutiva está presente, sin duda alguna, en muchas de las prácticas puestas en acción en el curso del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática a cualquier nivel.

Las prácticas estratégicas o resolutivas tienen que ver con el proceso de resolución de problemas o con las estrategias que se ponen en acción en una situación problemática. En este tipo de actividad se recurre cada vez con más frecuencia a situaciones de carácter adidáctico, en las cuales la función del docente es más cercana a la función de un director de escena. Tales prácticas, más que otras, como veremos dentro de poco, se prestan para actividades colectivas.

Las prácticas semióticas tienen como base los elementos críticos de una actividad semiótica: elección del registro en el cual representar un objeto matemático, capacidad de operar con las transformaciones de tratamiento y de conversión. Dar un sentido coherente a cada representación semiótica de un objeto matemático dado.

Las prácticas comunicativas, puestas en evidencia escasamente como específicas exigencias de aprendizaje en la práctica didáctica, no sólo de enseñanza sino también de aprendizaje, fueron por mucho tiempo dadas por descontadas, como una especie de resultado implícito, alcanzado por imitación o por osmosis. Hoy existe la tendencia a considerar este aspecto como un aprendizaje específico e importante, con particularidades propias (Radford & Demers, 2006; Fandiño Pinilla, 2010). La práctica comunicativa, más que las prácticas de cualquier otra categoría y por su misma naturaleza, es una práctica colectiva, es más, lo exige como requisito. Se trata de exponer el propio pensamiento sobre temas de matemática (por ejemplo en una situación de discusión colectiva); se trata de defender la propia construcción personal (validación) frente a escépticos o contrarios (por ejemplo en el curso de una situación adidáctica); se trata de responder a preguntas específicas del docente... Una de las prácticas comunicativas de mayor interés y de mayor nivel es la demostración, donde al menos la argumentación (en los diferentes niveles) es parte integrante de esta categoría (Duval, 1993b).

Por ahora, "práctica" es una palabra de sentido común, pero que implica una labor que la identifica y la caracteriza; sobre esto se puede leer Radford (2014) y D'Amore (2015).

Prácticas transversales

Existen prácticas de aprendizaje "transversales", aprendizajes que pueden incluirse en alguna de las categorías precedentes, ya que hacen referencia a modalidades de expresión, pero que al mismo tiempo son externas a todas ellas, pues hacen referencia a la gestión global del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Una de estas, por ejemplo, es la gestión de los aspectos semióticos del discurso matemático que consta de los siguientes elementos (Duval, 1993a; D'Amore, 2003):

- La elección de las características distintivas del objeto matemático O bajo análisis o en proceso de presentación.
- La elección de un registro semiótico r^m en el cual representar $T_p(O)$.
- La elección de una representación semiótica R^m_i de estas características en el interior del registro elegido r^m.
- El pasaje de R^m_i a R^m_j ($i \neq j$), es decir el tratamiento (transformación de una representación en otra, en el interior del mismo registro r^m).
- La elección de otro registro semiótico r^n ($m \neq n$) en el cual representar estas características mediante la representación R^n_h.
- El pasaje de R^m_i a R^n_h, es decir la conversión (transformación de una representación en otra, perteneciente a registros diferentes).

Aunque estos aprendizajes transversales son hoy considerados como objetivos explícitos del proceso de enseñanza-aprendizaje y, por tanto, determinantes de una buena actividad de práctica didáctica, deben ser considerados como verdaderas y propias prácticas en el interior de la sociedad-clase.

Prácticas individuales y colectivas

Entre estas prácticas, algunas son individuales y otras colectivas; en verdad más que tratarse de una categorización, aquí se trata de modalidades que dependen de las circunstancias o de una determinada elección.

Un estudiante puede ser invitado a resolver un problema individualmente o en grupo, o a discutir con sus compañeros; una demostración puede ser un hecho privado, pero también el fruto de una discusión colectiva (Bartolini Bussi, 1994); la ejecución de un algoritmo puede ser un hecho privado o el resultado de un trabajo en pareja...

Sin embargo, es innegable que a unas de estas prácticas se les reconoce más un carácter privado y a otras un carácter colectivo. Así, la argumentación es una práctica que por sus características requiere de una colectividad, mientras que la memorización de las tablas de multiplicar o de fórmulas pueden ser catalogadas como un acto privado.

La clase como sociedad

En la línea sostenida por Radford (1997, 2003a, b), la atención se dirige a la práctica del ser humano en la sociedad, al conjunto de sus experiencias, a los problemas afrontados desde diversos puntos de vista. Lenguaje, semiótica o cualquier otro desarrollo de carácter expresivo, son sólo señales que expresan actividades del ser humano que está implicado a manifestar sus propias acciones, sobre la base de las exigencias de la sociedad y de la cultura en la cual vive haciendo referencia directa a las actividades, a las prácticas del comportamiento humano en el interior de una sociedad que expresa necesidades y condicionamientos culturales (Bagni & D'Amore, 2005).

También la clase puede ser vista como una sociedad específica de individuos cuya unidad social se debe a la necesidad sancionada por ley de la realización de "prácticas" definidas y en gran medida compartidas. La clase, de hecho, responde a los requisitos típicos que los sociólogos exigen a un grupo de individuos para poder usar la denominación "sociedad" (véase Robertson, 1977, pág. 83); estos son:

- Ocupan un "territorio" común (el aula, la escuela).
- Interactúan entre ellos.
- Saben que pertenecen al mismo grupo.
- Tienen, al menos en parte, una cultura común (o, por lo menos, esto es lo que se supone).

Cada sociedad determina sus prácticas específicas; algunas tienen origen en los objetivos constitutivos de la sociedad (a veces abstractos), otros en la adaptación al hecho mismo de esta pertenencia.

Por lo tanto, estas "prácticas" se pueden dividir en dos grandes categorías:

Aquellas establecidas *a priori* por dicha sociedad (el aprender, el compartir la actividad...).

Aquellas que nacen a causa del objetivo que con dicha actividad se planea obtener (la competitividad, las acciones relativas al contrato didáctico, aquellas destinadas a hacer suponer a quien evalúa que se poseen habilidades que de hecho no se tienen...).

Las primeras son prácticas codificadas y por tanto funcionales (Robertson, 1977); son aquellas que dan un significado a la constitución misma de dicha sociedad. Las segundas, que podemos definir meta-prácticas, se deben a la situación específica, son por tanto de carácter extra-funcional.

Entre las varias posibilidades de aproximación al tema sociológico, en el sentido clásico, elijo como apoyo la *aproximación ecológica* (Hardesty, 1977) puesto que esta permite analizar los aspectos culturales y las prácticas compartidas en el contexto del ambiente social y global en el cual una sociedad está inserta (D'Amore, 1999, 2006). De otra parte, la sociedad "clase" vive en el aula, pero esta no está aislada del contexto "escuela", se ve afectada por los contextos "sociedad" y "familia" (noosfera), no es inmune a una aceptación de expectativas de las prácticas consideradas típicas del aula, de la tradición y de la sociedad más vasta en la cual está inserta. En sociología clásica se habla con frecuencia, en estos casos, de "organización formal" (Robertson, 1977).

De otra parte, las prácticas de los individuos que pertenecen a la sociedad están en conexión con las expectativas y las limitaciones puestas por el ambiente en el cual viven, y por las posibilidades que este ofrece. Por tanto, las prácticas no son libres, por el contrario, están fuertemente condicionadas por el ambiente, sistémicamente entendido (Bagni & D'Amore, 2005).

Desde este punto de vista, las prácticas (de las dos categorías enunciadas líneas arriba) que se realizan en el aula forman parte de un sistema de adaptación de los individuos (los estudiantes) a la sociedad, bajo la dirección (custodia, análisis, ejemplificación, tutela, evaluación…) de otro individuo que la institución social reconoce como su representante (el docente).

Las prácticas que tienen origen en la enseñanza-aprendizaje de la matemática no quedan fuera de estas categorías sociológicas, es más: según mi opinión las refuerzan. Así, los sistemas de práctica y las acciones en el aula comparten exactamente todo lo descrito hasta ahora; lo que es importante es lo que los individuos hacen, en el contexto aula, en el interior del proceso.

Grupos secundarios y meta-prácticas de adaptación

En sociología se suele distinguir entre "grupos primarios" y "grupos secundarios" según el tipo de intercambio y de interacción que se da entre los individuos de la sociedad.

En un grupo primario existe la aceptación total de los fines y de los objetivos (y por tanto también de las prácticas) que definen dicha sociedad.

Una clase normal tiende a ser un grupo secundario, pues no está dicho que todos los individuos que forman parte del grupo acepten exactamente los mismos fines y que tengan las mismas perspectivas. Entre los estudiantes de la misma clase, de hecho, algunos privilegian las actividades, las prácticas funcionales, mientras que otros son más propensos a aquellas que hemos llamado meta-prácticas (Bagni & D'Amore, 2005).

Las dos tipologías de práctica están condicionadas por perspectivas del todo diversas.

Por ejemplo, en el interior de la misma clase, algunos estudiantes tienen como objetivo aprender lo que se ha establecido *a priori* como conocimiento a adquirir, para otros el objetivo es aprender a influir en el juicio que hará quien evalúa. Este hecho no es típico sólo de las clases de los primeros niveles escolares, sino de todos los niveles, incluida la universidad y el postgrado.

Es así como, en el seno de la clase (grupo social secundario), se forman grupos primarios diversos entre ellos, conjuntos reducidos de individuos que comparten los mismos fines y por tanto interactúan entre ellos para alcanzarlos, según la idea de "comportamiento colectivo" (Robertson, 1977).

Algunos grupos primarios eligen actividades, objetivos, prácticas que son funcionales, es decir aquellas que la noosfera considera como determinantes, como parte fundamental de la sociedad clase.

Pero en su seno se forman otros grupos primarios cuyos individuos privilegian la realización de las meta-prácticas de adaptación.

El conjunto de dichos grupos primarios, en los cuales se divide la clase, forma en su totalidad un grupo secundario que es la clase en su conjunto.

La primera práctica es la expresión de la adecuación del individuo a la sociedad en la cual está inmerso, la segunda está condicionada por el intento de adaptación a una sociedad a la cual reconoce pertenecer pero de la cual perdió el significado originario.

Las prácticas individuales de los miembros de los pequeños grupos sociales secundarios (Bales, 1950, 1970; Mills, 1967) que actúan sobre la base de un comportamiento colectivo parecen ser unívocas y repetitivas, compartidas. Por tanto, dado que en este texto se desea dar importancia a las prácticas que los individuos activan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, se evidenció cómo éstas no son ajenas a comportamientos codificados, de hecho no son libres en absoluto. Si una práctica funcional no alcanza el objetivo previsto, antes de entrar en el grupo de los que operan "mal", entra en el de los "desviados" del grupo. El error, por tanto, en una comunidad de práctica con un marco sociológico es una desviación, un mal funcionamiento de carácter social antes que cognitivo.

En este punto podemos volver a las dos grandes categorías de prácticas y de meta-prácticas.

La falta de univocidad en el grupo clase en relación con los objetivos, la confusión que nace entre los individuos por el hecho de que las expectativas son diversas, la incapacidad a veces demostrada por el docente-evaluador de estigmatizar la actuación de quien no realiza la práctica de la matemática en aula, sino las meta-prácticas para superar los obstáculos, crean conflictos en el interior de la mini sociedad de la clase. Algunos de sus componentes piensan que las normas sociales son demasiado débiles, que el esfuerzo de práctica no es suficientemente evaluado y el otro no suficientemente punible o, por lo menos, no controlable...

De hecho, nace una versión débil de aquella que Emile Durkheim llamaba *anomia* (1893) que después se convirtió en la idea de partida del llamado *comportamiento desviado* de Robert Merton (1968). Si la anomia alcanza un determinado nivel, la sociedad se disgrega, dado que se da una confusión de valores no compartidos.

Precisamente los estudios de Merton, de carácter funcionalista, pusieron en evidencia que en varias ocasiones, en las sociedades de cualquier tipo, las metas propuestas no se adaptan a sus propios miembros, como si éstas fueran *obstáculos* para alcanzarlas o, por lo menos, para su reconocimiento. De hecho, entonces, es lícito pensar en una clase como una sociedad que tiene metas no compartidas por todos los sujetos, algunos de los cuales ponen en acto prácticas y otros meta-prácticas, con *obstáculos* de diversos tipos que impiden el logro de dichas metas y que, además, las condicionan y hacen problemática su aceptación.

Parece significativo, en el interior del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, el hecho de que este proceso se juegue en el seno de la *escuela*; es por esto que el sociólogo clásico establece que la instrucción es la transmisión sistemática y formalizada de conocimientos, habilidades, valores (Robertson, 1977); lo que lleva a las prácticas funcionales. Pero dado que tal sistematicidad y formalización son burocratizadas en un sistema social que prevé una evaluación, este hecho desencadena automáticamente la necesidad de actividades de meta-prácticas como adaptación a la sociedad clase, lo que contribuye a explicar el punto de partida.

Las dificultades de los estudiantes en el aula como síntoma de malestar social

La micro-sociedad clase es un conjunto de seres humanos que operan según esquemas más o menos pre-establecidos, que actúan, que se intercambian prácticas ligadas a un *Saber*. Esto implica que cada desviación de la práctica esperada determine una situación de ruptura de la práctica compartida.

Lo que sucede en el aula puede ser interpretado desde un punto de vista sociológico y distinguirse ampliamente en:

- Prácticas esperadas.
- Prácticas desviadas.

Es obvio que uno de los miembros de la micro-sociedad clase debe tener la autoridad (sancionada socialmente y reconocida por la noosfera y por los otros miembros de la micro-sociedad) para establecer si una práctica singular, en el interior de una sociedad, sea o no (más o menos) desviada o si coincide con las expectativas; dicho miembro está ya pre-determinado: el docente.

En cierto sentido, se puede suponer que la desviación de la práctica esperada testimonia la existencia de un obstáculo que se interpone entre la invitación a compartir una práctica social, por parte del docente, y la práctica privada puesta en juego por un determinado estudiante, miembro de la micro-sociedad clase (Bagni & D'Amore, 2005).

Es así como el análisis sociológico sería el instrumento que permitiría reconocer la existencia de un obstáculo que impide la actuación y la aceptación de las prácticas, en el seno de una micro-sociedad, que comparte problemas, usos y, precisamente, prácticas.

Si el análisis se limita a tales constataciones, estamos en plena actividad sociológica; si se desea profundizar e ir más allá, parece sensato preguntarse: ¿no será por casualidad, que existen otras "naturalezas" de dicho *obstáculo*? A esta pregunta debe seguir necesariamente un análisis, lo que nos lleva a una situación de carácter analítico y de categorización.

Es en este punto que podemos aceptar la idea que existen otros tipos de obstáculos para el aprendizaje: obstáculos de naturaleza ontogenética, de naturaleza didáctica, de naturaleza epistemológica, los que la didáctica de la matemática considera como clásicos. En este orden de ideas, usando un punto de vista sociológico, el obstáculo ontogenético evidencia la no uniformidad de la sociedad clase, y por tanto un "error" originado en su construcción; el obstáculo didáctico muestra la incongruencia entre las elecciones que están en la base de la relación que constituye la sociedad clase; el obstáculo epistemológico muestra la necesidad de una aceptación de objetivos mayormente aceptados y compartidos. Pero sobre este punto se deberá aún indagar.

Dado que se habla de obstáculos evidenciados, de desviaciones, de errores, viene inmediatamente a la mente que podría ser útil proponer "terapias" oportunas. Una "terapia" se entiende aquí en el sentido más general posible, es decir como un conjunto de medios necesarios para remediar un mal funcionamiento o al menos para reducir o aliviar las consecuencias. Una terapia puede ser *causal*, si se busca abolir las causas del estado patológico; o *sintomática*, si el objetivo es abolir los síntomas únicamente.

Cuando se habla de didáctica de la matemática, generalmente, frente a la denuncia o al análisis de casos descritos en la literatura o revelados por la investigación, los destinatarios del trabajo, generalmente los docentes, piden inmediatamente al investigador las terapias; pero un primer objetivo del trabajo de investigación en didáctica está precisamente en evidenciar síntomas que escapan a la evidencia, reconocer las desviaciones nombradas, analizarlas, clasificarlas. La terapia es un hecho sucesivo, útil, esperado, necesario, pero no siempre contemporáneo (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015).

Me limitaré a un sólo ejemplo.

Hemos visto cómo el sucumbir a las insidias del contrato didáctico puede ser interpretado como un intento de adaptación a un grupo secundario, cuando los objetivos de la sociedad no han sido aceptados o porque no son claros, o porque son tergiversados, o porque son rechazados. Las actividades puestas en juego en dicha sociedad, por tanto, no son las previstas por ésta, sino que constituyen un conjunto de meta-prácticas que la sociología clásica nos ha ayudado a reconocer.

Se puede entonces suponer que otros argumentos típicos de la didáctica de la matemática pueden ser interpretados en sentido análogo: las misconcepciones, la lucha entre modelo intuitivo y modelo formal, el hecho de que una imagen se convierta en un modelo, la incidencia de obstáculos didácticos, la dificultad de pasar de un modelo interno a un modelo externo... (D'Amore, 1999, 2006).

Un análisis de los principales aspectos y argumentos de la didáctica de la matemática con instrumentos tomados de la sociología, podría explicar algunos hechos que conciernen a las prácticas de adaptación en el aula y, como consecuencia, se refieren a fracasos en el aprendizaje cuya raíz está en el hecho de no compartir los objetivos.

Referencias

Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*, *19*(1), 73–89.

Bales, R. (1950). *Interaction process analysis: A method for the study of small groups*. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley.

Bales, R. (1970). *Personality and interpersonal behavior*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Bartolini Bussi, M. (1994). Theoretical and empirical approaches to classroom interaction. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 121–132). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática* (1ª edición italiana, 1999). Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B. (2003). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*, *23*(1), 47–51.

D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: una contribución a la teoría de la objetivación. En L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Número especial]. *Isonomia-Epistemologica* (pp. 151–171). Universidad de Urbino "Carlo Bo". Recuperado de: http://isonomia.uniurb.it/archive_epistemologica_special/201509

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015). Propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de la matemática. *Educación matemática* [México DF, México], *27*(3), 7-43.

Durkheim, E. (1964). *The division of labor in society*. New York: Free Press. (Trabajo original publicado en 1893).

Duval, R. (1993a). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (1993b). Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, 31, 37–61.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Prólogo de Giorgio Bolondi. Bogotá: Magisterio.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactiques des mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Hardesty, D. (1977). *Ecological anthropology*. New York: Wiley.

Merton, R. (1968). *Social theory and social structure*. New York: Free Press.

Mills, T. (1967). *The sociology of small groups*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26–33.

Radford, L. (2003a). On the epistemological limits of language: Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(2), 123–150. doi: 10.1023/A:1024029808871

Radford, L. (2003b). On culture and mind: A post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, & V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49–79). Ottawa: Legas Publishing.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132-150.

Radford, L., & Demers, S. (2006). *Comunicazione e apprendimento*. Prólogo de Bruno D'Amore. Bologna: Pitagora.

Robertson, I. (1977). *Sociobiology*. New York: Worth Publishers Inc.

Notas

Trabajo desarrollado en el ámbito del Programa de Investigación de relevante interés nacional de la Universidad de Bologna, Departamento de Matemática (financiación: 60% Universidad de Bologna, 40% Ministero dell'Università e della Ricerca): «*Aspectos metodológicos (teóricos y empíricos) de la formación inicial y en servicio de los docentes de matemática de cualquier nivel escolar*».

Una precedente versión de parte de este texto se publicó como artículo de revista:

D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società: Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, *19*(3), 325–336.

Se agredece a el director de la revista *La matematica e la sua didattica* y a la Editorial Pitagora de Bologna, Italia, para el permiso de publicación.

Esta precedente versión (2005) fue la base para varios artículos de investigación, entre los cuales señalo:

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, 28*(2), 49–77.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, D. J. (2008). La dimensione metadidattica dei processi di insegnamento e di apprendimento della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *22*(2), 207–235.

Font, V., Godino, D. J., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to rappresentations in mathematical education. *For the learning of mathematics*, *27*(2), 2–7 and 14.

La didáctica de la didáctica de la matemática: experiencias personales e indicaciones críticas de algunas discusiones e investigaciones

Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla

Las bases de la demanda y de la oferta de cursos de didáctica de la matemática

Las demandas oficiales de cursos de didáctica de la matemática (ddm) provienen principalmente de dos tipos de organismos institucionales: las universidades y las instituciones escolares.

La universidad solicita este tipo de cursos, básicamente, en vista de la formación de futuros docentes de matemática de todos los niveles escolares: pre-escolar, primaria y secundaria (media y superior).

En el primer caso se trata de cursos dentro de las facultades de educación en pre-escolar, infantil y de licenciatura en educación básica; en los otros dos casos, terminado el curso básico en matemática (actualmente es de 3 años), se pasa al curso de dos años que otorga el título de máster necesario para enseñar matemática; esta es la situación más común en Europa, por ejemplo de Italia. Dentro del curso de máster se encuentra uno en particular que otorga el título en Didáctica de la matemática (a veces se llama impropriamente Enseñanza de la matemática) y prevé la formación de los docentes de secundaria. Teniendo en cuenta los casos y los acuerdos, estos cursos prevén un número muy diferente de horas de docencia. En este momento está ocurriendo un cambio radical en diferentes países del mundo, por lo tanto aún no es posible llegar a conclusiones, dado que se carece de datos objetivos.

Evitaremos afrontar aquí los temas más específicos relativos a los cursos de ddm para futuros docentes de escuela de infancia, de doctorados en ddm y de post-doctorado de investigación en ddm, que se están generalizando por todo el mundo. En estos cursos se afrontan problemáticas del todo diferentes a aquellas aquí consideradas: los cursos de formación de docentes de escuela de infancia, por la particularidad del contenido "matemático" que el docente debe tratar; los cursos de doctorado y de post-doctorado por la peculiaridad específica de la relación que se establece entre docente, alumno y saber.

Ahora bien, respecto a los institutos de educación básica, redes de escuelas o grupos de docentes o directores escolares, incluso solicitan explícitamente cursos de formación sobre la ddm para docentes de matemática en servicio. Por lo general, no se trata de decenas de horas, como sucede dentro de la universidad, sino de intervenciones breves que normalmente no superan las 6-8 horas (por lo menos, esta es nuestra experiencia). Las solicitudes que se nos hacen, por lo general, no citan explícitamente la ddm, sino que son de diversa índole: vagos cursos de matemática, sobre la enseñanza de la matemática, de la lógica, sobre el laboratorio, sobre la dificultad en la resolución de problemas, entre otras. Estas terminan siempre con recaer, por nuestra elección o nuestra imposición, en cursos de base de formación en ddm.

Sea en los casos de las universidades (U) como en aquellos de las instituciones escolares (E), es inevitable, es imposible, por razones que poco a poco en la redacción del texto iremos mostrando, hablar sólo y únicamente de ddm. Se hace indispensable afrontar temáticas de matemática, en los diversos niveles, de historia, de epistemología de la matemática y, algunas veces, incluso de didáctica general. En los cursos de formación de docentes en servicio en la escuela secundaria (E) o de los futuros docentes en formación (U) en ddm, se manifiestan, de hecho, deficiencias, a veces notables, en matemática; por lo cual la solicitud de ddm pasa en segundo plano; esto porque, para nosotros, de hecho:

No se puede hablar de la didáctica de X a quien no conoce X.

Esta perentoria afirmación, que implica una elección (para nosotros) razonablemente axiomática, no es compartida por todos, pero queda (para nosotros) la base de la acción didáctica.

El triángulo de la didáctica como esquema de situación

Usamos el muy bien conocido esquema del triángulo de la ddm para describir la nueva situación: didáctica de la ddm; este esquema clásico, sus vértices, sus lados, deben ser interpretados en la situación específica, simplemente generalizando, ampliando o modificando en forma oportuna lo ya descrito en D'Amore y Fandiño Pinilla (2002, 2006):

- Un primer vértice representa el *Saber* que, en este caso, no es la matemática sino la ddm.
- Un segundo vértice representa el *estudiante* que puede pertenecer a las dos tipologías fundamentalmente diferentes, según se trate del caso U o del caso E (debemos examinar separadamente los dos casos).
- Un tercer y último vértice representa al *docente* (del curso de didáctica de la ddm).

Los pasajes más de una vez estudiados: del Saber al saber de enseñar, del saber de enseñar al saber enseñado y de este al saber aprendido (Fandiño Pinilla, 2002, 2006), continúan a valer, aunque con las drásticas modificaciones del caso.

Lo mismo vale en relación con la idea de transposición didáctica e ingeniería didáctica (misma citación de base).

Proponemos una breve indagación preliminar esquemática, por demás ingenua, antes de iniciar el análisis detallado.

- En el clásico triángulo de la ddm, el *Saber* es el saber matemático resultado de la investigación, de los procesos históricos, en el curso de milenios. De éste el *docente* toma referencia en su formación, se supone que lo hizo o que sepa y quiera hacerlo; pero después, con una oportuna transposición didáctica, elige el saber de enseñar al estudiante, y lo enseña con el fin de que los estudiantes lo aprendan. Afortunadamente, existe una especie de acuerdo institucional sobre cuál es el saber matemático que el docente debe enseñar en los diferentes niveles escolares y universitarios, y que, por tanto, el estudiante debe aprender.
- El *estudiante* es un novicio que tiene como objetivo, en ocasiones sólo idealmente, aprender la matemática que el docente le enseña. El objetivo del saber matemático aprendido por los estudiantes es de tipo cultural de base general (saberes matemáticos irrenunciables para futuros ciudadanos, independientemente de la profesión elegida) o específico (saberes necesarios para una determinada actividad o profesión).

En el (nuevo) triángulo de la didáctica de la ddm:

El *Saber* es el saber de la ddm, que ha sido estructurado por la investigación, por la historia, en el curso de los pocos decenios que tiene de existencia la ddm.

Este Saber es la fuente de la formación del *docente* (se supone que sepa y que quiera hacerlo); pero después, con una oportuna transposición didáctica, elige cuál es el saber a enseñar al estudiante, y lo enseña con el fin de que este lo aprenda; no existe, para nada, una especie de acuerdo, ni interpersonal, ni institucional, sobre cuál sea el saber que el docente deba enseñar (a sus estudiantes, docentes en formación inicial o en servicio) y que el estudiante deba aprender; esto podría ser consecuencia del hecho de que todo docente se siente libre de interpretar la dicción "ddm" de forma muy personal, a veces desinteresándose de los contenidos establecidos por la investigación en los años; algunos docentes no le reconocen a la ddm un estatuto disciplinar específico, incluso algunos ignoran su existencia, confundiéndola con: praxis heurística, sentido común, método, pedagogía y quien más tenga, más le agregue.

El *estudiante,* en este caso, no es de hecho un novicio; es, por el contrario, un profesional en formación o en servicio, que ya tiene o debería tener conocimiento matemático, y su ser estudiante está ligado a su profesión, futura o presente; su objetivo ideal es el de aprender la ddm que el docente le enseña; el objetivo del saber de ddm aprendido por estos estudiantes es de tipo aplicativo: estos deberían hacer uso de la ddm aprendida en su profesión de docentes de matemática, enriqueciendo la propia profesionalidad, con el fin de tener mayor éxito en el aprendizaje de sus estudiantes (en matemática). Es decir, existe una enorme diferencia entre el sentido que tiene para un novicio, en el triángulo clásico de la ddm, aprender la matemática, y, para un estudiante docente en formación inicial o en servicio, en el nuevo triángulo de didáctica de la ddm, aprender la ddm. Se debe decir, pero, cómo rebatirlo, que el estudiante futuro docente, en su aprendizaje de la ddm, generalmente considera los contenidos de la ddm no como una herramienta concreta, útil en su futuro profesional, sino como objeto de aprendizaje necesario para superar el examen; ello banaliza en gran medida el esfuerzo del docente más sensible de ddm.

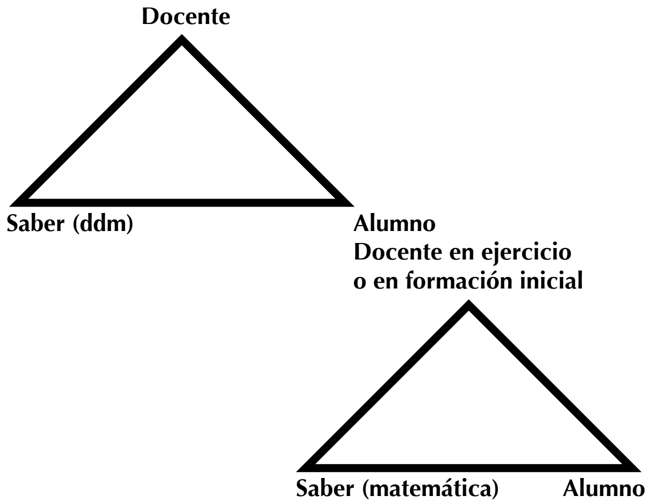


Figura 1. Nuevo (doble) triángulo de la didáctica de la didáctica de la matemática.

El estudiante

Afrontemos la problemática de la tipología de estudiante. Distinguimos *in primis* los dos casos, en orden U y E. En el caso universitario, distinguimos la formación universitaria para futuros docentes de escuela primaria (UP) y la formación universitaria para futuros docentes de escuela secundaria (US).

Formación universitaria de los docentes de escuela primaria

En el caso de estudiantes en formación inicial para futuros docentes de educación básica, debe hacerse la distinción entre dos casos que se presentan como fundamentales (se toma como modelo el caso italiano):

UP_1: estudiantes universitarios que siguen un único curso de ddm dado que es obligatorio.

UP_2: estudiantes universitarios que eligen espontáneamente un curso opcional de ddm; por lo general, se trata de seguir el curso obligatorio y después, escoger un segundo curso de ddm como elección personal; no siempre esta elección se debe a una convicción real, pero lo es en numerosas ocasiones.

Debemos aclarar que, generalmente, por lo menos en Italia, todos estos cursos de ddm están precedidos por un curso de matemática o, como sucede últimamente, en el primer curso obligatorio (60 horas) confluyen las dos disciplinas: matemática y ddm.

Las reacciones son, por lo general, diversas; a pesar de las declaraciones explícitas de interés y, en ocasiones, de sorpresa de los estudiantes que eligen un único curso obligatorio (UP_1), frente a una disciplina que se presenta diferente a cómo la recordaban ellos cuando eran estudiantes pre-universitarios, parece permanecer una cierta difidencia, no tanto en relación con el docente o con la disciplina, sino en relación con sí mismos y en una no muy bien clarificada pero si declarada incapacidad frente a ciertas temáticas. Podríamos entrar en detalles, pero nos limitamos a citar a Zan (2007).

Difícilmente un estudiante que se encuentra en el rango UP_1 cambia idea y pasa al rango UP_2, sólo ocurre en casos esporádicos estadísticamente irrelevantes.

Pero, viceversa, pasar del rango UP_2 al rango UP_1 nunca se presenta. El estudiante que retiene ser capaz en matemática cumple a priori la opción UP_2 sin retornar sobre sus pasos.

El gran número de solicitudes de tesis finales (escritas y con discusión oral en público) en ddm se presentan siempre en el rango UP_2.

La percepción de una personal incapacidad de los estudiantes en relación con la matemática, ampliamente estudiada por Zan (2007), no siempre es apoyada en razones objetivas; así como al contrario: la supuesta capacidad o la supuesta preparación, por lo general muestran que la realidad es muy diferente, e incluso estudiantes del grupo UP_2 deben ser recalificados en matemática, antes de acceder significativamente a la ddm.

Las misconcepciones que se forman en la escuela pre-universitaria en relación con la matemática no siempre son percibidas como tales por quienes las poseen y, por el contrario, son consideradas puntos de fuerza en cuanto aparecen generalmente como normas de comportamiento, reglas o esquemas, generalmente incorrectos pero percibidos como correctos y necesarios ("se debe hacer así, se debe escribir igual, se debe dibujar así, ésta es la regla"...) (Martini & Sbaragli, 2005; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani & Sbaragli, 2008, 2010; Sbaragli, 2012).

En casos de este tipo, muy frecuentes, la metodología de enseñanza tiene una gran importancia: es necesario enfrentar al estudiante del curso UP_2 con sus propias misconcepciones, por ejemplo, a través de trabajos personales de análisis o en grupos con un número reducido de estudiantes que, se sabe, producen sesiones por lo general profundas de análisis de sí mismos en situación (Dozza, 2006; Ellerani, 2012).

Formación universitaria para futuros docentes de escuela secundaria

Diversa es la situación de los cursos para futuros docentes de escuela secundaria, en los diferentes países, y en proceso de redefinición en Italia, en este período. A primera vista, parecería ingenuo poder admitir que estudiantes en formación como docentes de matemática en la escuela secundaria, que obtuvieron el grado en matemática, no deben necesitar una formación matemática. Pero no es así. Por lo general, precisamente los cursos de ddm, por la reflexión crítica y específica a la cual obligan, ponen en discusión convicciones profundas sobre la matemática y sobre sus elementos, sacan a flote vacíos e incertidumbres que deben ser colmados y resueltos antes del ingreso en aula como docentes (D’Amore & Fandiño Pinilla, 2004). Así, los cursos de historia y de epistemología de la matemática que generalmente acompañan aquellos de ddm se revelan de gran eficacia, precisamente para colmar lagunas en matemática (D’Amore, 2004).

Respecto a las instituciones educativas, la formación en servicio, por lo general, no viene solicitada sólo por los docentes de matemática, sino también por docentes de otras disciplinas. Para analizar la situación es necesario partir de las expectativas preliminares, es decir, antes de la realización del curso.

Nuestras indagaciones, del saber concreto e ingenuo y aún no científico, muestran que el docente, por lo general, espera del curso: “recetas” (qué, cuándo y cómo enseñar), sugerencias específicas de actividades, por ejemplo, en el momento de la solicitud se insiste mucho en el hecho de que el curso debe ser “concreto” o con carácter de “laboratorio”. También resaltan la presentación de instrumentos (que van desde los artefactos concretos hasta metodologías de enseñanza), esquemas de comportamiento y de análisis, reglas para la enseñanza, criterios de evaluación –en particular aquellas evaluaciones que hacen referencia a las diferentes pruebas nacionales e internacionales de los últimos años–, organizaciones curriculares … En algunos casos, revelaron que esperaban la denuncia de los errores que los docentes cometen en su actividad didáctica, la panacea para no repetirlos. En otros, esperaban aprender qué *deben* hacer los docentes con los estudiantes, es decir: cómo enseñar las tablas de multiplicar, los algoritmos en columna, cómo escribir cada uno de los pasajes de las operaciones, entre otros (a propósito de recetas y panaceas, señalamos: D’Amore y Fandiño Pinilla, 2015).

Frente a estas expectativas, en nuestra experiencia, las reacciones a nuestro curso son de diversa índole, aunque de tipologías restringidas, menos dispersivas. Sin embargo, para entenderlas, debemos decir inmediatamente que nuestro curso estándar (de esto se hablará más adelante) prevé: elementos de base de didáctica tomados de la teoría de las situaciones de Guy Brousseau (por ejemplo el contrato didáctico), con sus nexos y conexos, imágenes y modelos, modelos intuitivos y cuestiones relativas evidenciadas por Efraim Fischbein; análisis de modelos de las operaciones trayendo a colación los ejemplos de Gerard Vergnaud; misconcepciones, la dificultad en el aprendizaje de la matemática, teoría de los obstáculos; reflexiones sobre la presencia de la semiótica y la dificultad de su gestión por parte de los estudiantes … A todo esto debemos agregar continuas y diferentes reflexiones sobre la matemática más que sobre la didáctica, en particular cuando se habla de aritmética. Por ejemplo, en la escuela primaria, sistema posicional y números racionales (las fracciones constituyen siempre una problemática muy fuerte). También, agregamos reflexiones sobre elementos de geometría de base, probabilidad y estadística (aspectos de la matemática donde el conocimiento es casi nulo), entre otros.

Cuando hay suficiente tiempo, nuestro texto de referencia implícito en ddm es D'Amore, (1999, 2006a). Cuando no hay tiempo, recomendamos el texto mucho más liviano (D'Amore & Sbaragli, 2011). Los textos de matemática a los cuales se hace referencia explícita son variados, pero básicamente nos referimos a los textos de Fandiño Pinilla y Sbaragli (2011), y Fandiño Pinilla (2005, 2009), junto a otros. Más adelante volveremos sobre los contenidos de los cursos de forma mucho más explícita.

La típica reacción a los cursos, la más difusa, es una reacción de agradable estupor y de favorable aceptación; lo concreto de nuestra elección de contenidos es fuertemente advertido.

Lo que nos deja desconcertados es el siguiente hecho: este tipo de cuestiones, el contrato didáctico por ejemplo, se hizo público a mediados de los '60, hace medio siglo. Ha sido objeto de estudio y de investigación desde los '80, fue objeto de revisiones mucho más recientes (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani & Sarrazy, 2010); se han escrito un gran número de artículos, incluso en revistas de gran difusión entre los docentes, ha sido objeto de relaciones en congresos para docentes, se ha tratado en libros que han vendido miles de copias; y, sin embargo, el argumento es del todo nuevo para (casi) la totalidad de los docentes a quienes se les presenta.

Este hecho, interesante y estimulante para una investigación futura, debe ser tomado en seria consideración. ¿Por qué profesionales como médicos, abogados o ingenieros se dan cuenta inmediatamente de los progresos en cada una de sus profesiones, mientras que los profesionales de la educación se quedan relegados a "recetas" que datan de decenas de años y ni siquiera saben de las críticas sin piedad y justas que a estas han hecho expertos y serios investigadores en didáctica? Ningún médico hoy aplicaría sanguijuelas al cuerpo de un paciente anémico, pero esta "cura" siguió adelante por siglos, hasta que fue superada y declarada inútil y dañosa. Mientras que en la acción de enseñanza, algunas "sanguijuelas", que la investigación ha indicado como inútiles y además dañinas, resisten aún hoy y no son abandonadas.

Muchos docentes incluso hoy se empecinan en discutir los "beneficios" de instrumentos artificiales ideados en los años '60 para "enseñar bien", materiales "estructurados", cuando el verdadero problema es el aprendizaje y no tanto la enseñanza. Estos instrumentos, por sí mismos, no son necesariamente negativos, se vuelven tales cuando se convierten en objeto de una exageración acrítica que los interpreta como panacea didáctica en grado de resolver todos los problemas.

Los docentes de otras disciplinas que siguen el curso de ddm llegan, por lo general, prevenidos en relación con la matemática y con todo lo que con esta disciplina se relacione, por tanto son entusiastas de haber entendido el mensaje. Al terminar el curso, en casi todas las ocasiones, son explícitos en reconocer que muchos de los argumentos que han adquirido no son sólo específicos de la ddm sino que pueden ser extendidos o se encuentran presentes en sus disciplinas de enseñanza.

Un caso especial lo encontramos en los cursos de maestría de ddm en las universidades, cursos de postgrado. Es importante mencionar que fuimos y somos docentes en cursos de maestría o magistral en diferentes países: Italia, España, Chipre, Grecia, México, Suiza, Colombia y algunos otros. El estudiante de maestría, por su parte, puede ser un estudiante con el título en matemática que desea tomar la habilitación para la enseñanza de la matemática en la secundaria (Italia, España, Chipre, Grecia, por ejemplo), o es docente de matemática de la escuela secundaria o de universidad e inicia este curso con el fin de alcanzar el título para acceder a grados profesionales más altos, o lo hace simplemente por pasión y seriedad profesional (México y Colombia, por ejemplo).

En cada uno de los dos casos, se trata de una elección personal que connota específicamente al estudiante y que lo lleva a tomar el curso con gran seriedad, lo cual no tiene comparación con otros casos descritos precedentemente. Esto no quita que se hayan manifestado, en muchos casos, lagunas matemáticas. Esto nos llevó a profundizar necesariamente aspectos disciplinares, mucho más que argumentos de ddm. El estudiante en este caso es mucho más receptivo, mucho más disponible a serios esfuerzos, por ejemplo, de estudio personal y de trabajos extras.

El docente

Cursos estricta o vagamente asimilables a aquellos que estamos describiendo son impartidos por una tipología variada de docentes o de expertos, que describimos.

I. Docente experto en ddm así como la presentamos anteriormente (lo que en D'Amore 1999, 2006a, se denomina epistemología del aprendizaje de la matemática y que se refiere a la problemática del aprendizaje por parte del estudiante; esta hace referencia, inicialmente, por motivos cronológicos a la llamada "escuela francesa"). Esta tipología de docente pertenece a la categoría de matemáticos universitarios que, indiscutiblemente, tienen una buena preparación disciplinar y experiencia en cursos para docentes de primaria y secundaria. Por tanto, entienden y toman en seria consideración las solicitudes en ocasiones aparentemente ingenuas, de los estudiantes-docentes (en formación o en servicio).

II. Docente experto en matemática o en ddm pero entendida como *Ars docendi* (D'Amore, 1999, 2006a). Entonces, en la sola problemática de la enseñanza, a veces, aquí matemática debe ser entendida en el sentido de "matemática elemental" o "divulgación de la matemática". Por lo general este tipo de docente no entiende la necesidad real de las solicitudes que presentan los docentes de primaria o de secundaria (en formación o en servicio) que frecuentan el curso, o las califican como banales, subestimándolas. De hecho, la falta de conocimiento en ddm no les ofrece bases científicas para una respuesta seria; si deciden responder, lo hacen con el sentido común o sobre experiencias ligadas a sus hijos o a situaciones análogas. De hecho, los docentes de esta tipología no tratan, en sus cursos, la ddm, aunque el curso lleve esta denominación.

III. Docente experto en matemática que ofrece cursos de matemática, de historia, de lógica, o de matemáticas elementales desde un punto de vista superior, o de complementos de matemática, o de divulgación de la matemática…, a estudiantes docentes de matemática (en formación o en servicio). Normalmente este tipo de docente no tiene la mínima idea de la existencia de una disciplina bien estructurada que se llama ddm. Este es el caso más frecuente.

IV. Docente de primaria o de secundaria no experto ni en matemática ni en ddm, pero con experiencia plurianual como docente. Por ejemplo, forman parte de esta categoría aquellos docentes que han creado, con el fin de enseñar ciertos aspectos de la matemática, instrumentos, artefactos o manufacturas de diversa índole. Normalmente prometen milagros y por lo general, frente a un gran interés inicial, dejan la misma situación que encontraron. Ante las solicitudes de los estudiantes-docentes tienen siempre una respuesta pronta, pero casi nunca sustentada científicamente. Sobre el conocimiento matemático, además, son poco atendibles.

Dada la escasez de docentes del primer tipo en Italia, se tienen cursos de tipo universitario dirigidos por docentes del tipo II o III. Obviamente el estudiante, en cuanto tal, no sabe de la equivocación epistemológica en el cual ha caído y, dado que los cursos tienen todos el mismo nombre (ddm), termina por pensar que el contenido de la ddm corresponde a los contenidos del curso que está siguiendo y no a aquellos contenidos que deberían ser, no obstante la denominación.

Por el mismo motivo, en los cursos del tipo de las instituciones educativas no abundan docentes del tipo I y el estudiante-docente que frecuenta el curso no sabe, al final, que existe una ddm haciendo coincidir lo que está escuchando con los contenidos de la ddm.

A este punto consideramos que sea necesario en el futuro un análisis científico más detallado, porque la confusión reina. Mientras que en un curso universitario de álgebra elemental se sabe con certeza cuál es el contenido que se espera (grupos, anillos, el campo de los números complejos, anillos euclidianos, polinomios, extensiones, o cosas similares), en un curso universitario de ddm domina en absoluto la casualidad, dependiendo de la tipología del docente que lo dirigirá y de sus elecciones a veces no conscientes.

Del todo análoga es la situación de los cursos para docentes de instituciones educativas (E) en servicio, en los cuales, para complicar más las cosas, puede aparecer como docente la tipología IV. Falta, en ocasiones, una conciencia crítica frente a esta situación también entre los directores escolares y no sólo entre los alumnos-docentes, únicamente.

En nuestra experiencia, tomamos desde el inicio la elección de enseñar, tanto en los cursos universitarios destinados a docentes en formación inicial, como en los cursos para docentes en servicio, la ddm delineada en precedencia, aquella que llamamos epistemología del aprendizaje de la matemática, partiendo de la teoría de las situaciones por motivos fundacionales y cronológicos. Distinguimos fuertemente el nivel escolar en el cual los futuros docentes y los docentes en servicio se encuentran o se encontrarán para actuar como profesionales de la educación, y nos centramos siempre en ejemplos concretos de enseñanza-aprendizaje, haciendo referencia a temáticas matemáticas que sabemos llevan en sí dificultades específicas de aprendizaje. En algunos casos preparamos específicamente docentes no universitarios en matemática y en ddm para poder dictar cursos a docentes en servicio y conducir laboratorios en los cursos universitarios para docentes en formación inicial.

El saber

No queremos asumir la responsabilidad de afirmar cuál es el verdadero o el correcto contenido en ddm que pueda ser calificado como base constitutiva del Saber en el triángulo de la didáctica de la ddm; pero, nos parece que existen ejemplos de una tal variabilidad de dar la impresión de ser excesiva. Un acuerdo sobre este punto podría ser oportuno, pero siempre debería ser tomado sobre la base de los resultados de la investigación.

Como ya tuvimos oportunidad de decirlo, el Saber, al cual se está haciendo referencia, según sea el tipo el docente, puede contener lo que sigue.

- *Matemática,* en el mayor número de casos conexa con aquella que el docente (futuro o en ejercicio) deberá enseñar en su propia clase; pero no está dicho, tenemos muchos ejemplos que dicen lo contrario: a veces se enseña en los cursos para docentes una matemática que, aún reconociéndole un interés cultural, nada tiene que ver con las temáticas que constituyen los contenidos de la actividad en aula.

- *Matemática elemental*, es decir un análisis de la matemática en clave histórica y epistemológica, análisis que consideramos muy útil para entender mejor la matemática sin dejar de ser matemática. En esta queremos incluir, forzando un poco las cosas, la divulgación de la matemática (tema a retomar dentro de poco).

- *Problemáticas relacionadas con la enseñanza de la matemática*, revisión o propuestas curriculares, análisis de los contenidos de indicaciones y de programas, instrumentos para la enseñanza, en resumen todo aquello que en D'Amore (1999, 2006) se llama didáctica A, en el sentido de *Ars docendi*.

- *Problemáticas relacionadas con el aprendizaje de la matemática*, a las cuales hicimos referencia precedentemente; la podemos llamar epistemología del aprendizaje de la matemática o, siguiendo D'Amore (1999, 2006a), didáctica B, en el sentido que históricamente siguió a la A, a partir de los años '80.

- *Discursos genéricos* o de carácter general que ni siquiera hacen referencia a la matemática o a su didáctica, según la acepción que nosotros le hemos asignado.

Algunas variaciones que aparecen en los cursos para docentes en formación inicial o en servicio son las siguientes.

- *La divulgación matemática*, en particular en cursos para docentes en servicio de secundaria. Con esta elección se entiende sugerir actividades de enseñanza-aprendizaje que den sentido a la matemática que el estudiante debe (debería) aprender. Por ejemplo, para mostrar donde se encuentra la matemática que los estudiantes estudian, o los ámbitos donde se aplican los argumentos objeto de estudio.

- *Argumentos de cultura matemática pero en contextos extra-matemáticos*, como en el arte figurativo, en la literatura, en la poesía, en el cine, en el teatro, con el fin de ofrecer al docente, en particular al docente de secundaria, algunas ideas que le permitan reconquistar el interés de aquellos estudiantes que se alejan con rencor de nuestra disciplina, no reconociéndole su presencia en aquellas otras que declaran amar mucho más.

- *Argumentos de historia y de epistemología de la matemática* con el fin de explicar el sentido profundo que tiene la matemática, en su evolución histórica-crítica, privilegiando nuevamente la escuela secundaria ya sea por su peculiaridad, ya sea porque las dificultades y el desamor hacía la matemática se desarrollan y se agudizan en la adolescencia (después de los 15 años) y no en la niñez.

Por todo lo condensado en las líneas anteriores, quedamos convencidos de la óptima elección de contenidos que, por lo menos sobre la carta, determinaban en Italia las viejas SSIS (escuelas de especialización para la enseñanza secundaria) para la formación de los docentes de secundaria; naturalmente, siendo un curso de carácter post grado, la tipología del docente podía ser I, II o III.

Determinado el contenido del vértice Saber de nuestro nuevo doble triángulo de la didáctica de la ddm, queda por fijar el significado, en este caso, de la transposición didáctica. Parece ingenuo, pero pensamos, en primera instancia, en que no sea muy diferente del análogo, bien conocido y clásico triángulo de la ddm. Sin embargo, sobre esto se deberá indagar mejor y en forma mucho más científica.

En el caso de los cursos universitarios para la formación de los futuros docentes de escuela primaria, se debe tener en cuenta que, en relación con el saber matemático que ellos tienen a disposición, no se puede confiar en supuestos conocimientos de los estudiantes en matemática, porque la experiencia nos enseña que las cosas no son así. La obsolescencia matemática evidenciada por tantos investigadores afecta al estudiante al final de la escuela secundaria superior: lo que él recuerda, si recuerda algo, es lo que aprendió en la escuela primaria (no siempre de forma correcta); de la secundaria quedan sólo vagas e imprecisas palabras que no tienen sustancia de contenidos. Por esto, aprobamos el hecho de que, en los cursos universitarios de formación de los futuros docentes de escuela primaria, sea previsto un amplio espacio para analizar varias nociones de base de matemática. Esto no quita que esperamos que el docente universitario que tiene la tarea de desarrollar el curso de ddm trate en verdad argumentos de ddm, es decir, cumpla una transposición didáctica del Saber de ddm que la comunidad, la historia, la investigación ha construido, para transformarlo en un saber de enseñar a sus estudiantes, docentes en formación inicial de la escuela primaria.

En el caso de los cursos universitarios para la formación de los futuros docentes de secundaria cambia poco, si no que estos estudiantes tienen el título en matemática o por lo menos han seguido cursos universitarios de matemática, que enseñarán en la escuela secundaria. En lugar de enseñar a hacer operaciones en columna o a calcular áreas de trapecios, deberán enseñar el teorema de Pitágoras, las derivadas, a demostrar los teoremas de Euclides y determinar la ecuación de la parábola. No cambia mucho: se debe verificar la competencia matemática, también gracias a la historia y a la epistemología, pero, después, tener cursos denominados ddm que contengan en verdad contenidos de ddm que, para estos docentes, serán un instrumento útil, irrenunciable, concreto, para tener éxito en el aprendizaje en el aula por parte de sus estudiantes. El docente universitario, a quien se le confió la tarea de tratar el curso de ddm, debería cumplir una transposición didáctica muy eficaz, pensando en un saber de enseñar lleno de referencias reales al aula. De tal forma, al final, el saber (de ddm) adquirido por sus estudiantes constituya un instrumento profesional precioso.

En el caso de los cursos de formación en servicio para docentes de matemática, se debe tener en cuenta el hecho de que son muchos los docentes que conocen (bien) lo que enseñan. Sin embargo, están presentes docentes de primaria que confiesan nunca haber seguido cursos de matemática propiamente dichos durante su preparación docente; y docentes de secundaria que declaran explícitamente haber perdido por el camino los contenidos aprendidos en los cursos universitarios (hecho denunciado por Felix Klein, quien declaraba inútil el "paréntesis universitario" para los futuros docentes de matemática). Algunos docentes de escuela primaria confiesan que su saber de referencia es nada menos que aquel que enseñan. Algunos de ellos, además, declaran no conocer la historia de la disciplina, e ignorar que la matemática tenga una epistemología. Esto lleva a algunos docentes a atrincherarse detrás de mecanismos formales a los cuales reducen la matemática enseñada y pretendida, encontrándose sin armas frente a las solicitudes de los estudiantes en dificultad.

La investigación en aula

El nacimiento de núcleos de investigación didáctica (NRD), dentro de los departamentos de matemática de las universidades italianas en los años '80 y '90, favoreció la relación entre el mundo universitario de la investigación y la actividad en aula, y aclaró al investigador universitario cuáles son las problemáticas más sentidas por los profesores. Además, permitió a varios docentes (de todos los niveles escolares), a los más sensibles y con mejor preparación, el ingreso al mundo de la investigación. Como caso particular, el NRD de la Universidad de Bologna creó en el año 1984 un específico grupo de docentes (grupo de investigación y experimentación en didáctica y divulgación de la matemática, RSDDM) que aunaba a aquellos docentes quienes, más que hacer investigación, buscaban llevar a cabo experimentaciones controladas científicamente, así como aprender el *abc* de la divulgación.

La investigación nacional dio frutos rápidamente en toda Italia, haciendo que en el campo internacional se conociera una particular escuela italiana de investigación en ddm. El papel de los docentes del nivel pre-universitario, en la investigación, se reveló decisivo, para evitar aquello que sucedió en otros países, en los cuales la investigación quedó desvinculada de la realidad escolar. Las experimentaciones, que en muchas ocasiones siguen las investigaciones, condujeron a nuevas convicciones que hoy encontramos en toda la Península creando ejemplos de buenas prácticas (Sbaragli, 2011).

Las publicaciones de investigaciones o de experimentaciones, las revistas, los libros, los congresos, los seminarios, las ocasiones de encuentro y de discusión son centenares durante el año; no cubren la totalidad de las exigencias como lo hemos dicho, pero en honor de la verdad son muchísimas. Lo repetimos: nos sorprende siempre el hecho que, en cursos para docentes en servicio, muchos de los presentes declaren no haber nunca escuchado hablar de todo esto.

Tanto para hacer algunos ejemplos que tienen que ver con nuestro grupo de investigación y de experimentación, como para responder a las solicitudes de los docentes sobre matemática, historia, epistemología, cultura y didáctica, nos dedicamos a la redacción de un proyecto completo de enseñanza y de aprendizaje cuyos autores son, en su mayoría, los mismos docentes de educación básica que pertenecen al grupo (D'Amore, Fandiño Pinilla & Sbaragli, 2011). A este proyecto hacen de corolario decenas de artículos y libros considerados como soporte para los docentes; señalamos sólo D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori (2013) que aborda el siempre complejo tema de la semiótica en aula.

Nuestro sitio (www.dm.unibo.it/rsddm) recibe cada día un gran número de visitas, ya sea por las noticias que se publican, como por el material que puede ser descargado tanto en forma de artículos como en forma de reseñas de experimentación.

Nuestro congreso nacional anual de difusión de los resultados de investigación, *Incontri con la matematica* (Encuentros con la matemática), es uno de los más conocidos y frecuentados (además del sitio precedente, puede visitarse también www.incontriconlamatematica.org y www.incontriconlamatematica.net).

Todo esto demuestra la intensa voluntad de crear puentes entre investigación y la vida cotidiana en el aula y por tanto, en particular, la necesidad de entender siempre mejor cómo funciona la didáctica de la ddm.

Considerar una didáctica de la ddm abre un nuevo campo de investigación

Como vimos, existen fuertes analogías entre los primeros elementos, apenas esbozados y analizados, de la didáctica de la ddm y la ddm; pero también grandes diferencias. Subrayamos algunas reflexiones elementales que, obviamente, en algunos puntos nos obligarán a repetirnos.

Saber. Ciertamente el saber está fuertemente diferenciado; en ddm, una vez fijado el nivel escolar de referencia, más o menos, hechas las debidas pero mínimas excepciones, se sabe cuál es el saber al cual se hace referencia. Existe un saber institucionalizado al cual el docente puede/debe hacer referencia (se puede basar en indicaciones nacionales, programas, tradiciones, acuerdos entre docentes...). Mientras que en didáctica de la ddm, el saber es de diversos tipos. Es más, una discusión entre expertos sobre tales contenidos aún no se ha abordado real y conscientemente.

Estudiante. La tipología de estudiante es numerosa, como lo indicamos en precedencia, y los resultados sorprendentemente diversos. En el triángulo de la ddm el estudiante es un joven aprendiz que no sabe, que se sabe que no sabe, que tiene el derecho de no saber y que está en aula no por una elección personal, sino por una obligación social. Los estudios de los últimos 40 años nos han permitido conocer con mucha nitidez qué es lo que el estudiante hace, qué es lo cree estar haciendo y lo que cree *deber* hacer. Pero en el triángulo de la didáctica de la ddm, cambia todo. El estudiante es un adulto, por lo general es un profesional que, en rigor, debería ya conocer. La relación entre él y el saber cambia. Si en la ddm el estudiante no accede directamente al saber sino sólo a través de la mediación del docente, en la didáctica de la ddm debería haber un acceso directo, pero no siempre lo hay, ¿por qué?

Docente. En el triángulo de la ddm, el docente está más o menos definido, la teoría de las situaciones nos enseñó a definirlo. Sabemos cómo actúa en el aula y cómo debería actuar y funcionar, sabemos cuáles son sus expectativas, su capacidad de interpretar las cosas, los hechos en aula. Desde hace algún tiempo aprendimos a evaluar la influencia que tienen sus convicciones personales sobre su propio proceso de enseñanza y, por tanto, sobre el aprendizaje de sus estudiantes, como muchas investigaciones lo han demostrado (remitimos a D’Amore, 2004, 2006b; D’Amore y Fandiño Pinilla, 2004). Pero en el triángulo de la didáctica de la ddm el docente es un personaje multiforme, aún todo de estudiar.

Transposición didáctica, ingeniería didáctica, diferencia entre saber enseñado y saber aprendido y todos los otros temas de base, aquellos con los cuales se dio inicio a la aventura internacional de investigadores en ddm, aunque algunos tienden erróneamente a olvidarlo (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2013), son de estudiar desde sus raíces gracias a esta nueva hipótesis; deben ser entendidos e interpretados bajo esta nueva interpretación.

El estudiante de educación básica (el objeto de estudio de la ddm) sigue los cursos, llega al añorado suficiente, pero después demuestra olvidar todo lo que ha "aprendido" y que de hecho había aprendido, dado que lo ha usado en contextos diversos y de forma autónoma.

El docente en formación inicial sigue los cursos, incluso se entusiasma, pero después demuestra no desear o no saber aplicar, por ejemplo en las horas de práctica en aula, lo que aprendió en ddm. Por ejemplo: se entusiasma casi siempre con la metodología que ve aplicar durante las horas de práctica de su docente guía, incluso cuando debería advertir que existe una fuerte discrepancia entre lo que aprendió durante las horas de ddm y tal metodología. Lo mismo vale para la matemática y no sólo para la ddm; el estudiante-docente en formación inicial aprendió en el curso de matemática que una cierta imagen es una misconcepción, la ve favorecer en el aula en las horas de práctica y no se da cuenta; la "culpa" del fracaso sucesivo de los estudiantes se atribuye a la incapacidad del estudiante y no al error didáctico y de contenido del docente.

Peor aún, el estudiante-docente en formación inicial que sigue un curso de ddm no logra considerar los contenidos como instrumentos, como útil herramienta metodológica que deberá y podrá usar en el futuro para mejorar su análisis de la situación de aula y favorecer así el aprendizaje de la matemática por parte de sus futuros estudiantes. En cambio, la considera una disciplina, una materia que debe estudiar para superar el relativo examen. Lo cual implica, como ya lo habíamos dicho, la obsolescencia. Cuando este ex docente en formación inicial sea finalmente docente en servicio no recordará ni siquiera cuáles eran los contenidos que aprendió en el curso, así como sucederá para otros cursos que no tenían la intención de ser básicos para su profesión sino sólo culturales.

El docente en servicio, que sigue un curso de formación en ddm, por lo general se entusiasma por los contenidos propuestos porque reconoce que son concretos: los ejemplos propuestos son aquellos mismos que él encuentra, hasta ese momento inexplicables, en el aula y que finalmente encuentran una explicación lógica en términos de "situación de aula", aquella estudiada por la ddm. Pero, al final del curso, parece remover aquello que aprendió y retoma el comportamiento anterior, en su rutina cotidiana como docente. Culpa a los estudiantes de todo aquello que no funciona, de cada diferencia entre sus expectativas personales y las respuestas o comportamientos obtenidos.

Acaso, ¿todos estos comportamientos diversos tienen un mismo origen? o ¿son cuestiones del todo diversas? Nos lo dirá la investigación futura.

En la teoría clásica de las situaciones, la cual estamos tomando como modelo de base de forma explícita, encontramos dos temas fuertes que han dominado la escena de la construcción de la ddm en los '80 y en los '90, la idea de noosfera y la idea de *milieu*. A partir de dos textos clásicos de Brousseau a los cuales se hace siempre referencia (1986a, b), dichos conceptos se han interpretado con el pasar del tiempo de diversas formas por cada uno de los autores que lo han abordado.

A propósito de la *noosfera*, citamos con gran entusiasmo dos autores de prestigio.

Las palabras siguientes son de Yves Chevallard y fueron tomadas de Chevallard (1988):

> *El punto de partida de nuestro análisis (...) puede hacer referencia al siguiente esquema. El objeto del discurso sometido a examen es (aquí) el sistema de enseñanza. El discurso mismo es el resultado, no del sistema de enseñanza interno, sino desde un punto situado en su periferia, en una zona intermedia entre sistema de enseñanza y sociedad, que yo llamo la noosfera ("la esfera en la cual se piensa" - donde se piensa sobre el sistema de enseñanza se entiende). Es un área en la cual se encuentran todos aquellos que "se interesan" en el sistema de enseñanza más allá del estrecho cumplimiento del acto de enseñar mismo: docentes, miembros de los IREM, investigadores de todo tipo (entre los cuales figuran, naturalmente, los estudiosos de didáctica).*

Las siguientes palabras se inspiran en un escrito de Juan Godino (1993). Según este autor, por noosfera se puede entender el lugar de los debates de ideas significativas sobre la enseñanza, las finalidades de la escuela, los objetivos de la formación, las expectativas de la sociedad en relación con la escuela y la cultura (por ejemplo los programas o indicaciones ministeriales). La noosfera es el intermediario entre el sistema escolar, y las elecciones del docente y el ambiente social más externo (externo a la escuela); se podría pensar como "la capa externa que contiene todas las personas que en la sociedad piensan en los contenidos y en los métodos de enseñanza" (Godino, 1993).

Por otra parte se habla de *medio* o *ambiente* (en francés: *milieu*) como de aquel sub-sistema con el cual tiene que actuar directamente el estudiante (materiales, juegos etc.). Este *milieu* es definido al inicio como el conjunto de todo aquello que influye sobre el estudiante y todo aquello sobre lo cual el estudiante actúa (Brousseau, 1977).[1] Se puede pensar la interacción entre estudiante y *milieu*, también en ausencia de una concreta participación del docente. A veces, el *milieu* está definido sobre la base de objetos concretos, a veces se le agrega la intención por la cual estos objetos fueron elegidos, otras veces es considerado como algo estable, en ocasiones es algo que se desarrolla y se modifica junto con el estudiante. Aún, en medio de las variaciones de acepción de este término, como consecuencia del proceso de desarrollo de toda la teoría, aparece muy bien definida la función: este sirve para definir al interior del sistema didáctico aquella parte ligada a usos específicos adidácticos –predispuestos sí–, por el docente y por tanto con objetivos didácticos, pero sin la presencia necesaria y constante de dichos objetivos (por ejemplo, sin la participación directa del docente).

Una descripción de la evolución del concepto de *milieu* se puede encontrar en Perrin-Glorian (1994).

Sobre noosfera y *milieu* se puede hacer referencia a Artigue, Gras, Laborde, Tavignot (1994) y a D'Amore (1999, 2003, 2005, 2006a). Pero aquí, estos objetos los estamos entendiendo en la acepción clásica, es decir, relativa a la ddm. Ahora, ¿cómo re-interpretar estos conceptos para la didáctica de la ddm?, es para nosotros un problema de investigación abierto.

La formación autónoma como investigación sobre la enseñanza-aprendizaje

En Da Ponte (2009) se narra la conformación en Portugal de un grupo de estudio autónomo formado por docentes de matemática de diversos niveles escolares, con el fin de proponer soluciones a problemas de carácter didáctico, contingentes y concretos.

Esta es una vía que cada día encuentra más seguidores en otros países, y que ha sido estudiada en cuanto a sus detalles funcionales a partir de la

1 Entre 1970 y 1973 Guy Brousseau publicó diversos artículos en los cuadernos del IREM de Bordeaux con el nombre de: «Compte-rendu du séminaire de recherches 1971-72 et projets pour 1972-73»; después, estas publicaciones siguieron hasta 1978. Nosotros hacemos referencia aquí a una de estas publicaciones de uso interno, la número 18, en la versión editada en Barcelona en 1977.

prehistoria del llamado "docente-investigador" de Stenhouse (1975), hasta el análisis mucho más detallado de Zeichner y Nofke (2001).

En Italia los ejemplos análogos existen, pero no son muchos. Uno cercano a nuestra experiencia y de gran impacto y eficacia se narra en el artículo de investigación de Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, Sbaragli (2006) y después, en el libro de difusión de Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori (2011).

Dos investigadoras universitarias expertas en ddm fueron contactadas por un grupo de docentes en servicio, constituido espontáneamente con una precisa demanda didáctica (la enseñanza-aprendizaje de las fracciones), y no por un curso genérico. El grupo siguió las indicaciones de las dos investigadoras, en un primer momento, y se hizo un estudio del argumento desde un punto de vista disciplinar (las fracciones en particular y los números racionales en general). Después se analizaron los casos relevantes puestos en evidencia por los mismos miembros del grupo; estos casos llevaron a la necesidad de una confrontación. A continuación se aceptó la sugerencia de estudiar el argumento desde un punto de vista didáctico (entendido en el sentido de la epistemología del aprendizaje de la matemática) para terminar con la organización de un segmento curricular completo, discutido y concordado, sobre dicho argumento (Campolucci, Fandiño Pinilla & Maori, 2011).

Para plasmar y para dar testimonio paso a paso de las fases de la actividad de investigación, las dos investigadoras universitarias convocadas por el grupo solicitaron a los participantes redactar, en un tiempo determinado, a lo largo del curso de la actividad de estudio y de investigación, protocolos de autoanálisis del trabajo desarrollado: un testimonio sobre sus convicciones acerca de los argumentos al momento de iniciar el curso, un testimonio al final, con la puesta en evidencia en primera persona de los cambios encontrados en sus convicciones. Este trabajo, re-redactado por las investigadoras y por dos miembros del grupo, constituye indudablemente un material interesante de investigación, útil para toda la comunidad (Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori & Sbaragli, 2006).

Lamentablemente, este tipo de actividad no es muy difusa, ni en Italia ni en otros países. Más que jugar en primera persona las propias cartas profesionales, muchos docentes prefieren creer y esperar en el curso impartido por otros, como lo manifestamos en precedencia, para después hacer caso omiso. Naturalmente, existen realidades de grupos de estudios autónomos, esporádicos y no siempre intensamente activos; estos nacen, por lo general, después de un curso que tuvo gran interés entre los participantes.

Conclusiones

Consideramos haber enfatizado una problemática concreta y vital, hasta ahora poco estudiada. Sabemos que la ddm es la más avanzada entre las didácticas disciplinares, que ha dado una gran contribución en la creación de una teoría de las didácticas disciplinares (citamos, sólo como ejemplo, un texto en el cual se intenta construir una teoría de las didáctica disciplinarias en general, en oposición a una teoría de la didáctica general: D'Amore, Fandiño Pinilla, 2007) y que ha tendido puentes de gran interés teórico entre la didáctica general y la didáctica disciplinar (D'Amore & Frabboni, 1996, 2005).

Sabemos que la ddm es tomada como modelo para la creación, aún en curso, de otras didácticas disciplinares, algunas de las cuales aún no despegan como ciencias.[2]

Pero nada debe impedir, a quien tiene las alas, de volar. Nuestra ddm está lista para afrontar investigaciones siempre más sofisticadas, cuya realización nos dará siempre más, sobre este complejo y por lo tanto, fascinante mundo.

Referencias

Artigue, M., Gras, R., Laborde, C., & Tavignot, P. (Eds.) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France: Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (*1986a).* La relation didactique: le milieu. *Actes de la IVème école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 54–68). Paris: IREM de Paris 7.

Brousseau, G. (1986b). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Campolucci, L., Fandiño Pinilla, M. I., & Maori, D. (2011). Frazioni. En B. D'Amore, M. I. Fandiño Pinilla, & S. Sbaragli (Eds.), *Progetto "Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere"* (Vol. 8). Bologna: Pitagora.

2 Sobre el significado que hoy se la da a la palabra "ciencia" en esta dirección, se puede ver D'Amore (2007), en el vocablo "ciencia", precisamente.

Campolucci, L., Fandiño Pinilla, M. I., Maori, D., & Sbaragli, S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica*, *20*(3), 353–400.

Chevallard, Y. (1988). *Sur l'analyse didactique: Deux études sur les notions de contrat et de situation*. Marseille: IREM d'Aix-Marseille.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2004). El papel de la epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria, *Epsilon 60*, *20*(3), 413–434.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matematica*. México DF, México: Reverté-Relime. (Trabajo original publicado 2003).

D'Amore, B. (2006a). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio. (Trabajo original publicado 1999).

D'Amore, B. (2006b). Didattica della matematica "C". En S. Sbaragli (Ed.), *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno*. Actas del Congreso Internacional homónimo, Castel San Pietro Terme (BO), 23 septiembre 2006 (pp. 93–96). Roma: Carocci.

D'Amore, B. (2007). "Didattica disciplinare", "Formazione in scienze naturali", "Formazione in matemática", "Scienza". En F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi, & W. Wiater (Eds.), *Le parole della pedagogía: Teorie italiane e tedesche a confronto* (pp. 72–75, 140–142, 145–147, 335-337). Torino: Bollati Boringhieri.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática*, *14*(1), 48–61.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Epsilon 58*, *20*(1), 25–43.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). *Le didattiche disciplinari*. Prefación de Franco Frabboni. Trento: Erickson.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013). El paso más largo: Sobre la necesidad de no tirar por la borda (en el nombre de un modernismo vacío) las teorías de la educación matemática que explican, perfectamente, situaciones reales del aula. *Acta Scientiae: Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *15*(2), 246–256. Recuperado de: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/issue/view/36

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015). Propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de la matemática. Methodological proposals that constituted illusions in the process of teaching of mathematics. *Educacion Matemática* [México DF, México], *27*(3), 7-43.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiotica en la didáctica de la matemática*. Prefacios de Raymond Duval, Luis Radford. Prólogo a la edición en idioma español de Carlos Eduardo Vasco. Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (Eds.) (2011). Progetto "*Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*" (vols. 1-14). [Proyecto de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la escuela primaria en 14 volúmenes]. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matemática: Alcuni effetti del "contratto"*. Prefación y postfación de Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en matemática*. Bogotá: Magisterio. (Trabajo original publicado 2008).

D'Amore, B., & Frabboni, F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano: Angeli.

D'Amore, B., & Frabboni, F. (2005). *Didattica generale e didattica disciplinare*. Milano: Bruno Mondadori.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base di didattica della matematica*. En B. D'Amore, M. I. Fandiño Pinilla, & S. Sbaragli (Eds.), *Progetto "Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere"* (Vol. 2). Bologna: Pitagora.

Da Ponte, J. P. (2009). Far ricerca sulla nostra pratica: una strategia di formazione e di costruzione della conoscenza professionale. *La matematica e la sua didattica*, *23*(2), 157–189.

Dozza, L. (2006). *Relazioni cooperative a scuola: Il lievito e gli ingredienti*. Trento: Erickson.

Ellerani, P. (2012). La sfida della didattica: trasformare le classi in contesti di apprendimento continuo per formare competenze e capitale sociale. En G. Bolondi & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*. Napoli: Edises.

Fandiño Pinilla, M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I. (2005). *Frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I. (2006). *Currículo, evaluación y formación docente en matemática*. Bogotá: Magisterio. (Trabajo original publicado 2002).

Fandiño Pinilla, M. I. (2009). *Las fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio. Prefacio de Athanasios Gagatsis. Prefacio a la edición en idioma español de Carlos Eduardo Vasco Uribe. (Trabajo original publicado 2005).

Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2011). *Matematica di base per insegnare nella scuola primaria*. En B. D'Amore, M. I. Fandiño Pinilla, & S. Sbaragli (Eds.), *Progetto "Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere"* (Vol. 1). Bologna: Pitagora.

Godino, J. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante*, *2*(2), 69–79.

Martini, B., & Sbaragli, S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica*. Napoli: Tecnodid.

Perrin-Glorian, M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France: Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (pp. 97–147). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Sbaragli, S. (Ed.) (2011). *Buone pratiche d'aula*. Bologna: Pitagora.

Sbaragli, S. (2012). Il ruolo delle misconcezione nella didattica della matematica. En G. Bolondi & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*. Napoli: Edises.

Stenhouse, L. (1975). *An introduction to curriculum research and development*. London: Heineman Educational.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica*. Milano: Springer.

Zeichner, K., & Nofke, S. (2001). Practitioner research. En V. Richardson (Eds.), *Handbook of research on teaching* (pp. 298–330). Washington: AERA.

Agradecimientos

Los autores expresan públicamente el agradecimiento a los colegas Giorgio Bolondi y Silvia Sbaragli por la revisión crítica de los contenidos.

Se agradece el director de la revista *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* y presidente del centro de investigación, Ugo Morin, propietario de la revista misma, por el permiso de una nueva publicación en idioma español.

Nota

Una versión reducida en idioma italiano de este artículo fue publicada en Italia en el 2013:

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013). La didattica della didattica della matematica: Esperienze personali e spunti critici di discussione e ricerca. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *36B*(4), 325–353.

Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos: conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética

Bruno D'Amore

Concepto, conceptualización

¿Qué es un concepto?

En D'Amore (1999b, pp. 193-208; 2006c) busqué dar las ideas básicas a través de las cuales se podría dar respuesta a esta pregunta aparentemente ingenua; pero, lo que invariablemente se llega a constatar con una certidumbre absoluta es que la definición se revela, por muchos motivos, de una complejidad inmensa …

Una de las dificultades que presenta definirlo es que en la idea de concepto participan muchos factores y causas; para decirlo brevemente. Por tanto, en modo incompleto, no parece correcto afirmar por ejemplo, que el "concepto de recta" (suponiendo que exista) es aquel que se halla en la mente de los científicos que a este tema han dedicado su vida de estudio y reflexión. En cambio, parece más correcto afirmar que existe un fuerte componente, por así decirlo, antropológico que pone en evidencia la importancia de las relaciones entre $R_I(X,O)$ [relación institucional con tal objeto del saber] y $R(X,O)$ [relación personal con tal objeto del saber] (estoy usando símbolos y términos tomados de Chevallard, 1992). Aquí, obviamente, objeto del saber se entiende como objeto *matemático* del saber, el que Chevallard (1991, p. 8) define como:

> *Un emergente de un sistema de praxis donde se manipulan objetos materiales que se descomponen en diferentes registros semióticos: registro oral, de las palabras o de las expresiones pronunciadas; registro gestual; dominio de las inscripciones, es decir lo que se escribe o se dibuja (gráficas, fórmulas, cálculos…), es decir el registro de la escritura.*

Por lo que, a la "construcción" de un "concepto" participarían tanto la parte institucional, el saber, como la parte personal de cualquiera que tenga acceso a tal saber, por tanto no sólo el científico. Sobre esta posición se han manifestado diferentes autores; aquí me limito a sugerir el trabajo inicial de Godino y Batanero (1994), dado que este artículo es de extraordinaria importancia en el debate en el que trato de insertarme, pues trata precisamente de las relaciones entre significados institucionales y personales de los objetos matemáticos.

Pero entonces, distinguir el concepto de su construcción no es fácil y, quizás, no es ni posible ni deseable: un concepto se encuentra, por así decirlo, continuamente en fase de construcción. En esta misma construcción se encuentra la parte más problemática y por lo tanto más rica de su significado:

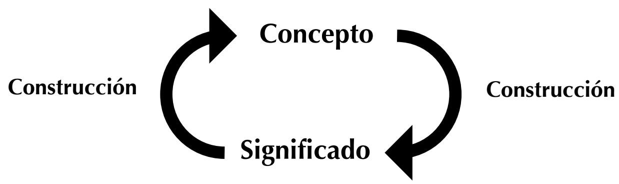


Figura 2. Construcción del concepto y significado.

Como hacen otros autores, podríamos llamar a tal construcción: *conceptualización,* y cuestionarnos qué es y cómo se da. En el intento de dar luz sobre este argumento, muchos estudiosos autorizados han propuesto hipótesis y teorías sobre las cuales no entro en detalles. Para una rápida recapitulación, recomiendo D'Amore (1999b, 2006c). Baste, entonces, recordar las contribuciones -muchas veces en firme oposición entre ellas–, de Vygotsky, de Piaget, de Gal'perin, de Bruner, de Gagné …, sólo para mencionar los más conocidos.

Adentrarse en esta aventura, conduce al menos a notar una cosa: que la segunda pregunta: ¿*qué es*? o ¿cómo se da la conceptualización?, es fundamentalmente un misterio …

Un paso clarificador, muy profundo, fue intentado por Vergnaud (1990) quien unifica en el concepto su misma componente constructiva. Según Vergnaud, el punto decisivo en la conceptualización (y en la Didáctica, pero éste es un tema más específico, que deberé retomar y desarrollar en breve) es el pasaje de los *conceptos-como-instrumento* a los *conceptos-como-objeto* y una operación lingüística esencial en esta transformación es la *nominalización*. Él entiende como "conceptualización", precisamente, esta apropiación consciente, cuando propone la siguiente definición: un concepto C es la terna (S, I, *S*), donde S es el referente, I el significado y *S* el significante.

La idea de Vergnaud podría ser considerada como una posible conclusión de una línea "clásica", la que pasa a través de los tres famosos "triángulos" (bibliografía específica en: D'Amore, 1999b, 2206c):

- El triángulo de Charles Sanders Peirce (1839-1914), publicado en 1883: Interpretante – Representante – Objeto.
- El triángulo de Gottlob Frege (1848-1925), publicado en 1892: Sinn (sentido) – Zeichen (expresión) – Bedeutung (denotación).
- El triángulo de C. K. Ogden e I. A. Richards, que quería ser un compendio de los otros dos, publicado en 1923: Referencia – Símbolo – Referente.

Queda el hecho que de cualquier manera el *apropiarse* de un concepto (independientemente de lo que eso signifique) siempre requiere algo más que *nombrarlo* (la cuestión se origina al menos en la Edad Media)… (D'Amore, 1999b, 2006 c).

Por otro lado, no se trata de intentar una teoría general de estos términos; pero, ciertamente, el caso de la matemática es en este sector, peculiar. Cuando menos por tres motivos:

- Todo concepto matemático remite a "no-objetos"; por lo que la conceptualización no es y no puede basarse sobre significados que se apoyen en la realidad concreta; en otras palabras en matemática no son posibles reenvíos ostensivos.
- Todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de "objetos" para exhibir en su lugar;[3] por lo que la conceptualización debe necesariamente pasar a través de registros representativos que, por varios motivos, sobre todo si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos.
- En matemática se habla más frecuentemente de "objetos matemáticos" que de conceptos matemáticos, en cuanto a que en matemática se estudian preferentemente objetos más que conceptos. "La noción de objeto es una noción que no puede no utilizarse desde el momento en el que nos interrogamos sobre la naturaleza, sobre las condiciones de validez o sobre el valor del conocimiento" (Duval, 1998).

3 Aquí "objeto" debe entenderse en el sentido de "objeto real" o de "cosa". Lo que eso significa se halla bien expresado en la *Metafísica* de Aristóteles, cuando afirma que la cosa, en cuanto parte de lo real, es lo que presenta las tres características siguientes: tridimensionalidad, accesibilidad sensorial múltiple (es decir, más de un sentido por vez) independiente de las representaciones semióticas y posibilidades de separación material y de otras partes de la realidad, de otras "cosas".

Es absolutamente necesario subrayar que el término "concepto" que usaremos en adelante, no se reconduce a las mismas presencias y al mismo uso que hacen de él Piaget, Kant, Vergnaud, Vygotsky, Chevallard, citados anteriormente. En el sendero trazado por Duval, la noción de concepto, preliminar o de cualquier manera prioritaria en casi todos los autores, se vuelve secundaria, mientras que lo que adquiere carácter prioritario es la pareja (*signo, objeto*), como podré evidenciar mejor en el próximo párrafo, cuando haga referencia a la *paradoja cognitiva del pensamiento matemático*, evidenciada precisamente por Duval (1993, p. 38).[4]

En Duval (1996) se cita un pasaje de Vygotsky en el que sustancialmente declara que no existe concepto sin signo:

> *Todas las funciones psíquicas superiores se hallan unidas por una característica común superior, la de ser procesos mediados, es decir el incluir en su estructura, como parte central y esencial del proceso en su conjunto, el empleo del signo como medio fundamental de orientación y de dominio de los procesos psíquicos… La lista central [del proceso de formación de los conceptos] es el uso funcional del signo, o de la palabra, como medio que permite al adolescente de someter a su poder las propias operaciones psíquicas, de dominar el curso de sus propios procesos psíquicos. (…) (Vygotsky, 1962; en la ed. francesa, 1985, págs. 150, 151, 157)*

A propósito de esta cita de Vygotsky o, mejor dicho, aprovechando de ella, es conveniente hacer una rápida consideración respecto de la palabra "signo", consideración que me ha sido sugerida en conversaciones e intercambios de ideas con Raymond Duval, en la medida en la que él afirma que en algunos estudiosos de didáctica se percibe una reducción del *signo* a los *símbolos convencionales* que connotan directa y aisladamente los objetos.

En referencia a De Saussure (1916), a quien Vygotsky conocía bien a causa de su formación de lingüista, no existe ningún signo fuera de un "sistema de signos". Por ejemplo, las palabras tienen significado solo en el interior de un sistema lingüístico (de aquí los problemas de traducción ya bien conocidos). Cuando en Duval, y por lo tanto aquí, se habla de registro de representación semiótica se hace referencia a un sistema de signos que permite llevar a cabo las funciones de comunicación, tratamiento y objetivación. En cambio, no se hace referencia a notaciones convencionales que no forman un sistema. Por ejemplo, la numeración binaria, o decimal forman un sistema, pero no las letras o los símbolos que se utilizan para indicar operaciones algebraicas. Quizás convendría entonces traducir a Vygotsky poniendo en vez de la palabra "signo" la locución "sistema de signos".

4 Sobre esta temática, se vea: D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori & Matteuzzi (2015).

Es de notarse que, desde este punto de vista y contrariamente a la difundida opinión, un sistema semiótico no es un instrumento: constituye el funcionamiento mismo del pensamiento y del conocimiento. Sólo un código que se use para recodificar un mensaje ya expresado, puede considerarse un instrumento.

El caso de la matemática

Me parece que el siguiente esquema es mucho más eficaz que las palabras:

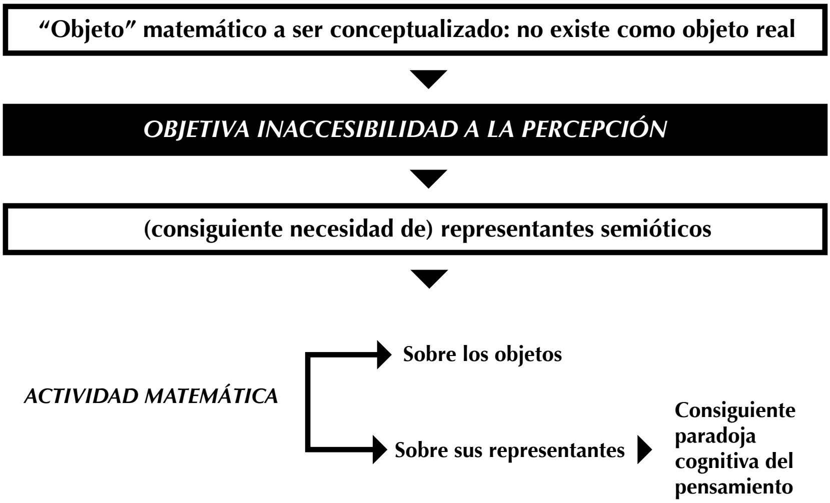


Figura 3. Esquema semiótico en el caso de la matemática.

Veamos en qué consiste esta paradoja cognitiva (Duval, 1993, p. 38; la traducción es mía, concordada con el autor):

> *[…] por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos no pueden más que tener relación sólo con dichas representaciones? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, al contrario, ¿cómo podrían ellos adqui-*

rir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas.

En esta paradoja, tan bien evidenciada por Raymond Duval, ¿se puede esconder una potencial causa de falta de devolución?

Según el docente, según la noosfera y según el mismo estudiante, él (estudiante) está entrando en contacto con un "objeto" matemático, pero de hecho, el estudiante está entrando en contacto en realidad sólo con una representación semiótica particular de ese "objeto". El estudiante no tiene, no puede tener, acceso directo al "objeto" y el docente y la noosfera confunden las dos cosas. El estudiante se queda bloqueado, como inhibido: no puede hacer más que confundir el "objeto" con su representación semiótica porque no se da cuenta, porque no lo sabe. Por tanto, frente a una sucesiva necesidad conceptual que se manifiesta, por ejemplo, con la necesidad de modificar la representación semiótica del mismo "objeto", el estudiante no tiene medios críticos, ni culturales, ni cognitivos. El docente y la noosfera no entienden el por qué y acusan al estudiante, culpándolo de algo que él ni entiende.

En realidad: en esta fase paradójica, ya nadie entiende lo que está sucediendo, puesto que cada uno de los actores de esta aventura tiene una percepción diferente del problema.

Por otra parte, el análisis de las representaciones es un hecho nuevo, en el estudio de los procesos cognitivos. Aunque sí lo es menos desde el punto de vista estrictamente filosófico. Escribe Duval (1998):

El análisis de las representaciones comenzó en el momento en el que nos interrogamos sobre las condiciones de validez del conocimiento y que se descubrió que todo conocimiento es inseparable de una actividad de representación. La tercera de las Meditationes Metaphysicae de Descartes es el primer texto en el que la problemática de un tal análisis se halla desarrollada explícitamente. Ella se halla enteramente centrada en el contenido de las representaciones.

Conocer, saber, sentido, comprensión...

En diversos trabajos de finales de los años ‘80 y ‘90 se declaraba que, mientras el matemático puede no interrogarse sobre el sentido de los objetos matemáticos que usa, o sobre el sentido que tiene el conocimiento matemático, la didáctica de la matemática no puede obviar dichas cuestiones (ver D’Amore, 1999b, pp. 23-28; 2006c). En un trabajo reciente, Radford resume la situación de la manera siguiente:

> *Se puede sobrevivir muy bien haciendo matemática sin adoptar una ontología explícita, esto es, una teoría sobre la naturaleza de los objetos matemáticos. Es por eso que es casi imposible inferir de un artículo técnico en matemática la posición ontológica de su autor. (...) La situación es profundamente diferente cuando hablamos del saber matemático. (…). Cuestiones teóricas acerca del contenido de ese saber y de la manera como dicho contenido es transmitido, adquirido o construido nos ha llevado a un punto en el que no podemos seguir evitando hablar seriamente de ontología. (Radford, 2004, p. 6)*

El debate es antiguo y se puede señalar como punto de partida la Ellade clásica. Como he señalado en trabajos anteriores, dicho debate está enmarcado por una creencia ontológica que parte del *modo* que tienen los seres humanos de *conocer* los conceptos (D’Amore, 2001a,b,c; 2003a,b; 2004). Radford retoma el debate y se detiene, en particular, en el trabajo de Kant quien dice que los individuos tienen un conocimiento conceptual *a priori* gracias a una actividad autónoma de la mente, independiente del mundo concreto (Radford, 2004, pp. 5-7).

Como Radford pone en evidencia, el apriorismo kantiano tiene raíces en la interpretación de la filosofía griega hecha por Agustín de Hipona y su influencia en los pensadores del Renacimiento. Refiriéndose al matemático Pietro Catena (1501-1576), por mucho tiempo profesor en la Universidad de Padua (Italia) y autor de la obra *Universa Loca*, Radford afirma que, para Catena, “los objetos matemáticos eran entidades ideales e innatas” (Radford, 2004, p. 10). El debate se vuelve moderno, en todo el sentido de la palabra, cuando, con Kant, se logra hacer la distinción entre los “conceptos del intelecto” (humano) y los “conceptos de objetos”. Como Radford observa:

> *[Estos] conceptos del intelecto puro no son conceptos de objetos; son más bien esquemas lógicos sin contenido; su función es hacer posible un reagrupamiento o síntesis de las intuiciones. La síntesis es llevada a cabo por aquello que Kant identificó como una de nuestras facultades cognitivas: el entendimiento. (Radford, 2004, p. 15)*

El siguiente gráfico presenta las ideas de *sentido* y de *comprensión* en el lugar adecuado:

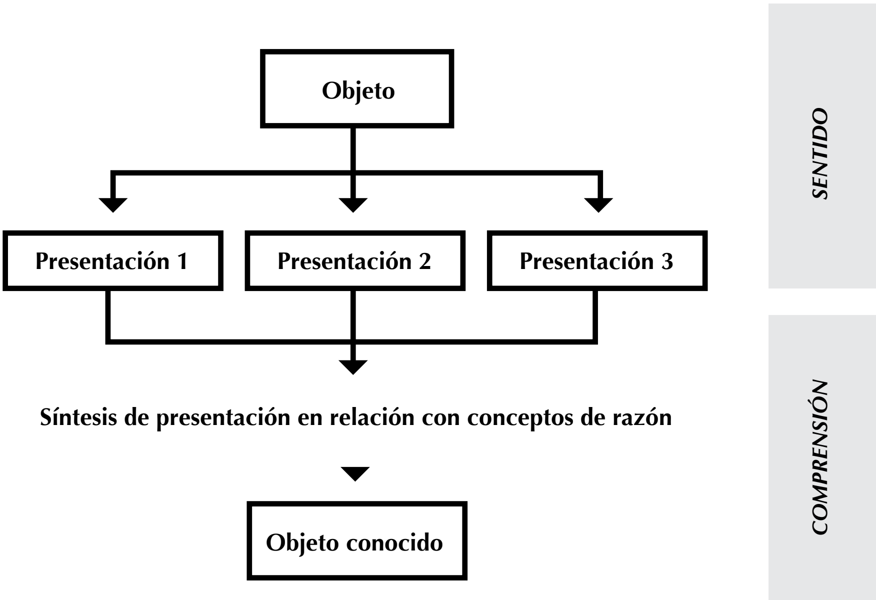


Figura 4. Relación entre los sentidos y la razón en la epistemología Kantiana (tomado de Radford, 2004, p. 15).

Pero deberé afrontar esta cuestión con mucho más detalle y con mucha más especificidad. Para hacer esto, debo afrontar una larga explicación sobre un adjetivo presente en el título.

Aprendizaje, constructivismo, simbolización

¿Por qué en el título me serví del adjetivo “constructivistas”?

Para responder a esta pregunta, debo partir de lejos, inspirándome en Moreno Armella (1999).

En la *Crítica de la razón pura*, Kant postula que el conocimiento es el resultado de un contacto entre un sujeto que aprende y un objeto de conocimiento. Él recurre a una comparación: así como el líquido adopta la forma del recipiente que lo contiene, las impresiones sensoriales adoptan las formas que se le imponen por parte de las estructuras cognitivas. Pero para que eso suceda, y es la bien conocida "hipótesis fuerte" de Kant, se necesitan formas innatas de sensibilidad, como espacio, tiempo, causalidad, permanencia del objeto, permanencia y uso de experiencias precedentes, entre otras.

Por lo que el conocimiento no es más una simple representación de la realidad externa, es, en cambio, el resultado de la interacción entre el sujeto que aprende (sus estructuras cognitivas) y sus "experiencias sensoriales". Además, el sujeto que aprende abandona la típica pasividad (cartesiana o lockiana) y construye, estructura sus experiencias, participando activamente en el proceso de aprendizaje en una verdadera y propia *construcción*. Se trata de una transformación: un objeto de conocimiento, entrando en contacto con un sujeto que aprende, se transforma, reconstruye, gracias a los instrumentos cognitivos que tiene.

Para entender bien la posición kantiana, me serviré de Duval (1998). Es esencial entender que de Descartes a Kant es común la problemática de las relaciones entre representación y objeto: se pasa del contenido de las representaciones del sujeto a los objetos del conocimiento (científico). Si se quieren analizar las representaciones en su relación con los objetos representados, se tienen relaciones en términos de *causalidad*: en Descartes se hace la hipótesis de una correspondencia entre el contenido de una representación y el objeto representado; en Kant se pasa, como quería evidenciar, al análisis de investigaciones sobre la organización interna del sujeto, para pasar del contenido al objeto.

En fin, ¿cuál es la naturaleza de las representaciones?[5] Los procesos de pensamiento son procesos puramente mentales, tanto en Descartes como en Kant, lo que implica una estrecha relación entre las representaciones del sujeto y los objetos.

Todo esto constituye, según Duval (1998), la "primera etapa"; tal posición será superada en una "segunda etapa" de Bolzano al Hilbert del 1904 y después por una "tercera etapa" que va del Hilbert del 1922 a Turing y Von Neumann.

Regresemos a Kant.

5 Puede ser interesante lo que Kant escribe a propósito de la misma palabra representación: «La palabra representación se comprende bien y se emplea con confianza, no obstante su significado no pueda ser jamás explicitado por una definición» (Kant, cit. por Duval, 1998, al inicio del párrafo 1).

¿De dónde provienen precisamente esos instrumentos cognitivos que sirven para transformar las experiencias del sujeto? La epistemología del aprendizaje de Kant, para usar una terminología moderna, se refiere a un aprendiz adulto, por lo que ya se halla dotado de un lenguaje desarrollado, con capacidad de abstracción y de generalización. ¿Es lícito proponerse la siguiente pregunta?: ¿cómo cambia todo esto si hablamos de aprendizaje en ambiente escolar, de aprendices no adultos (niños o adolescentes o jóvenes) a las primeras armas, con lenguajes aún en elaboración?

No es del todo absurdo pensar que la epistemología constructivista se haya originado de la necesidad de dar respuesta precisamente a este problema. Piaget, en 1937, se expresaba así:

> *[…] el conocimiento del mundo exterior comienza por una utilización inmediata de las cosas […] la inteligencia no comienza así ni del conocimiento del yo ni de las cosas en cuanto tales sino de su interacción y, orientándose simultáneamente hacia los dos polos de esta interacción, la inteligencia organiza el mundo, organizándose a sí misma. (Piaget, 1937, p. 39)*

Por lo tanto, el saber adquirido puede verse como el producto de la elaboración de la experiencia con la cual entra en contacto el sujeto que aprende; y esta elaboración consiste en la interacción entre el individuo y su ambiente, y en el modo en el cual el individuo interioriza el mundo externo. Independientemente de las peculiaridades de estas "actividades", el sujeto que aprende debe comprometerse en algo que necesariamente lo lleva a simbolizar. Se trata de una necesidad típicamente humana, ¡la única necesidad sobre la cual todos los autores concuerdan! Se trata de una elaboración (con características internas o sociales o incluso ambas) que se organiza alrededor o en los sistemas semióticos de representación.

Se puede decir más: que el conocimiento *"es"* la intervención y el uso de los signos.

Por lo tanto, el mecanismo de producción y de uso subjetivo e intersubjetivo, de estos signos y de la representación de los "objetos" de la adquisición conceptual, es crucial para el conocimiento.

En este sentido, acepto y hago mío lo que Moreno Armella (1999) enuncia como "un principio que nos parece esencial respetar: *toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos*". El conocimiento depende también y precisamente de aquellos instrumentos de mediación que ponemos en acción para su construcción, y del conjunto y del tipo de significaciones que tales instrumentos reciben del entorno social.

Ahora, todo eso había ya sido previsto en el programa de la epistemología constructivista, y expresado de la siguiente manera:

> *[…] la acción no tiene lugar solo como resultado de los impulsos internos […] En su experiencia, las situaciones que el niño encuentra son generadas por su entorno social y los objetos aparecen situados en contextos que les dan el significado específico. El niño no asimila objetos puros […] asimila las situaciones en las cuales los objetos tienen roles específicos. En la medida en la que su sistema de comunicación se hace más complejo […] eso que podemos llamar experiencia directa de los objetos queda subordinada […] al sistema de interpretaciones suministrado por el entorno social. (Piaget & García, 1983, cap. IX)*

No hay duda de que el conocimiento en la escuela, y su aprendizaje como construcción se hallan condicionados por situaciones específicas de la institución. Por lo tanto el aprender en la escuela ¡no es el aprender *total*! Los problemas del aprendizaje matemático en la escuela, aún antes de ser de orden epistemológico, pertenecen a ese ambiente sociocultural tan específico.[6]

Pero de estas consideraciones que compartimos, nacen algunas reflexiones que se revelan rápidamente necesarias. Si simplemente se transportan, por así decirlo, a la escuela las tesis de la epistemología constructivista, nos hallamos frente a afirmaciones del tipo: "El estudiante construye su propio conocimiento"; o, más radicalmente: "Todo estudiante construye *su propia versión* del conocimiento". Pero, vista la especificidad del ambiente escuela, nacen preguntas cuyas respuestas parecen lejanas; por ejemplo, ¿cómo podemos verificar que las construcciones del saber del estudiante son compatibles con las de sus compañeros?, ¿o con las exigencias de la institución?, ¿o con las expectativas del docente?

Si es verdad, como es verdad, que todo conocimiento (matemático, en particular) refleja al mismo tiempo una dimensión social y una personal, la escuela no es una excepción, sino incluso el lugar donde se institucionaliza esta doble naturaleza.

Durante el aprendizaje de la matemática se introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, tanto conceptual como simbólico (sobre todo representativo). Este mundo no es el fruto de una construcción solitaria, sino el fruto de

6 Esta perspectiva sociocultural tan peculiar ha influenciado notablemente los estudios educativos (Wertsch, 1993).

una verdadera y compleja interacción con los miembros de la microsociedad de la cual el sujeto que aprende forma parte: los propios compañeros y los docentes (y la noosfera, a veces borrosa, a veces evidente) (Chevallard, 1992). Es gracias a un continuo debate social que el sujeto que aprende toma consciencia del conflicto entre "conceptos espontáneos" y "conceptos científicos". Enseñar no consiste sólo en el intento de generalizar, amplificar, volver más crítico el "sentido común" de los estudiantes; se trata de una acción más bien compleja, como nos ha enseñado Vygotskiy en *Pensamiento y Lenguaje* (1962):

> *Como sabemos gracias a las investigaciones sobre el proceso de formación de los conceptos, un concepto es algo más que la suma de ciertos vínculos asociativos formados por la memoria […] es un auténtico y complejo acto de pensamiento que no se puede enseñar mediante la ejercitación y al cual se puede llegar solo cuando el desarrollo mental del niño ha alcanzado el nivel requerido […] El desarrollo de los conceptos, o significados de las palabras, presupone el desarrollo de muchas funciones intelectuales (atención, memoria lógica, abstracción, capacidad de comparación y diferenciación). También la experiencia demuestra que la enseñanza directa de los conceptos es imposible y estéril. Un maestro que intenta hacer esto, normalmente no logrará nada, sino un vacío verbalismo. (Vygotsky, 1962, pp. 119-120)*

Por lo que aprender parece ser una construcción sujeta a la necesidad de "socializar", lo que se da obviamente gracias a un medio de comunicación (que puede ser el lenguaje) y que, en la matemática, cada vez más será condicionado por la elección del mediador simbólico, es decir, por el registro de representación preseleccionado o impuesto, de diversas formas, (incluso solo por las circunstancias).

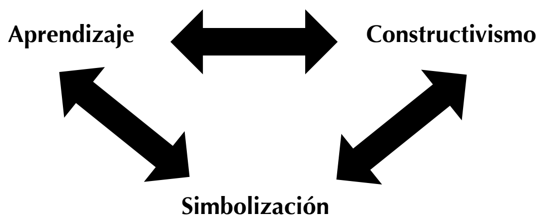


Figura 5. Aprendizaje, constructivismo, simbolización.

Semiótica y noética en el aprendizaje de la matemática

En matemática, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas. Lo dice por primera vez Duval, proponiendo la problemática de los registros, en los célebres artículos de 1988 aparecidos sobre los *Annales* (1988a, 1988b, 1988c). El trabajo del 1993 constituye un primer ensayo de síntesis (Duval, 1993); pero sobre este argumento Duval publica también trabajos en el 1989 y 1990; lo confirman Chevallard (1991), Godino y Batanero (1994).

Por lo que, tomando prestado de Duval: no existe noética sin semiótica.

Sólo por claridad terminológica, pero sin ninguna pretensión de ser completo, dado que no siempre estos términos se usan en el mismo sentido, prefiero explicitar los significados de los que me sirvo:

Semiótica $=_{df}$ adquisición de una representación realizada por signos.

Noética $=_{df}$ adquisición conceptual de un objeto.[7]

Entenderé, de ahora en adelante:

$r^m =_{df}$ registro semiótico m-ésimo (m = 1, 2, 3…).

$R^m_i(A) =_{df}$ representación semiótica i-ésima (i = 1, 2, 3…) de un objeto A en el registro semiótico r^m.

Se puede notar que, con base en estas elecciones, no sólo cambia el registro semiótico también cambia necesariamente la representación semiótica, mientras que no se garantiza lo inverso; es decir, puede cambiar la representación semiótica manteniéndose el mismo registro semiótico.

Una vez más, uso una gráfica para ilustrar la cuestión, porque me parece más incisiva y eficaz:[8]

7 Para Platón, la noética es el acto de concebir a través del pensamiento; para Aristóteles, es el acto mismo de comprensión conceptual.
8 Me refiero una vez más a Duval (1993).

CARACTERÍSTICAS DE LA SEMIÓTICA { **Representación tratamiento conversión** } { **estas tres son actividades cognitivas diferentes** }

Contenido A por representar

Elección de las características distintivas de A

Representación **$R^m{}_i(A)$ en un registro semiótico dado r^m**

Transformación de representación ⬇ ***Tratamiento***

Nueva representación ($i \neq j$) $R^m{}_j(A)$ en el mismo registro semiótico r^m

Transformación de registro ⬇ ***Conversión***

Nueva representación ($h \neq i$, $h \neq j$) $R^n{}_h(A)$ en el mismo registro semiótico r^n ($n \neq m$)

($m, n, i, j, h = 1,2,3...$)

Figura 6. Explicación de un nuevo registro y representación semiótica.

Son de notar las flechas que van, en la primera parte de la gráfica, de abajo hacia arriba. Ellas tienen razón de existir con base en lo siguiente. Los tratos distintivos fijados del objeto A dependen de las capacidades semióticas de representación del registro elegido. Escogiendo un registro diferente se fijarían otros tratos de A. Eso depende del hecho de que dos representaciones del mismo objeto, pero en registros diferentes, tienen contenidos diferentes.

Características de la noética

La adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en dos de sus características "fuertes" (Duval, 1993):

- El uso de más registros de representación semiótica es típico del pensamiento humano.
- La creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos es símbolo (histórico) de progreso del conocimiento.

Estas consideraciones muestran la interdependencia estrecha entre noética y semiótica, cómo se pasa de una a otra: por lo que no sólo no existe noética sin semiótica, sino que la semiótica se adopta como característica necesaria para garantizar el primer paso hacia la noética.

En este momento es un deber hacer una precisión acerca de la teoría que desde hace dos décadas está desarrollando Raymond Duval. En ella, da a la conversión un lugar central con respecto a las demás funciones, y en particular con respecto a la del tratamiento, considerada por la mayoría como decisiva desde el punto de vista matemático.

¿Por qué? Desde mi punto de vista, por al menos tres razones diferentes.

1. La conversión choca contra los fenómenos de no congruencia que no son para nada conceptuales (en la medida en la que ellos se hallan ligados al sentido mismo de la conversión). Estos fenómenos de no congruencia constituyen el obstáculo más estable que se puede observar en el aprendizaje de la matemática, en todos los niveles y en todos los dominios.
2. La conversión permite definir variables cognitivas independientes, lo que hace posible construir observaciones y experimentaciones relativamente precisas y finas. Ciertamente, una vez validadas por medio de una investigación bastante metódica, después pueden utilizarse como variables didácticas. Por lo que Duval no trabaja en el nivel de la observación de un grupo durante semanas, sino que se comporta como lo hace un biólogo o un médico, cuando desean entender el funcionamiento del cerebro.
3. La conversión, en casos de no congruencia, presupone una coordinación de los dos registros de representación puestos en marcha, coordinación que no se da automáticamente y que no se construye espontáneamente basándose sólo en el hecho de que se promuevan actividades matemáticas didácticamente interesantes. Lo que se llama la "conceptualización" comienza realmente sólo cuando se pone en acción, incluso sólo bosquejándola, la coordinación de dos diferentes registros de representación.

La teoría de los registros debe ser valorada basándose en los aportes relativos a la riqueza, a las novedades de las observaciones, así como a las novedades de las actividades de aprendizaje que las variables cognitivas permiten definir. No en relación a las decisiones a priori acerca de qué es la matemática, o con base en consideraciones globalizadoras no controlables por medio de metodologías precisas.

Cada estudiante aprende por su cuenta, y nadie puede aprender (o comprender) ¡en el lugar de otro! Además, el éxito de una acción didáctica no se juzga inmediatamente, sino sólo algunos años más tarde: existen muchos casos de éxito inmediato que se revelan un fracaso después de un cierto tiempo…

Ésta es la razón por la cual Duval insiste en el carácter central de la conversión; éste es el punto decisivo, el que verdaderamente diferencia su teoría de los registros, con respecto a todo lo que se puede decir y se usa decir acerca de los signos y la semiótica, o acerca de lo cognitivo.

En años recientes los estudios sobre las características de la transformación de tratamiento han tomado mucha fuerza investigativa, pues se mostró que muchos estudiantes y profesores le cambian de sentido a dos representaciones semióticas que se obtuvieron con tratamientos (D'Amore, 2006a, b, 2007a, b, 2011; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007a, b; 2008a, b, c; Santi, 2010, 2011; Rojas, 2014).

Un resumen extremo se puede leer como sigue:

- existe un objeto matemático O_1 por representar;
- se le da un *sentido* derivado de la experiencia que se piensa aceptada, en una práctica social construida en cuanto compartida en el aula;
- se elige un registro semiótico r^m y en éste se representa O_1: $R^m_i(O_1)$;
- se realiza un tratamiento: $R^m_i(O_1) \rightarrow R^m_j(O_1)$ $(i \neq j)$;
- se realiza una conversión: $R^m_i(O_1) \rightarrow R^n_h(O_1)$ $(n \neq m)$.
- se interpreta $R^m_j(O_1)$ reconociendo en esto el objeto (significado) matemático O_2;
- se interpreta $R^n_h(O_1)$ reconociendo en esto el objeto (significado) matemático O_3.

¿Qué relación existe entre O_2, O_3 y O_1?

Se puede reconocer identidad; y esto significa, entonces, que existe un conocimiento previo, en la base sobre la cual la identidad puede ser establecida.

De hecho, se puede no reconocer la identidad, en el sentido de que la "interpretación" es o parece ser diferente, y entonces se pierde el *sentido* del objeto de partida O_1.

Un esquema como el siguiente puede resumir lo que ha sucedido en el aula desde un punto de vista complejo, que pone en juego los elementos que se desea poner en conexión entre ellos: objetos, significados, representaciones semióticas y sentido:

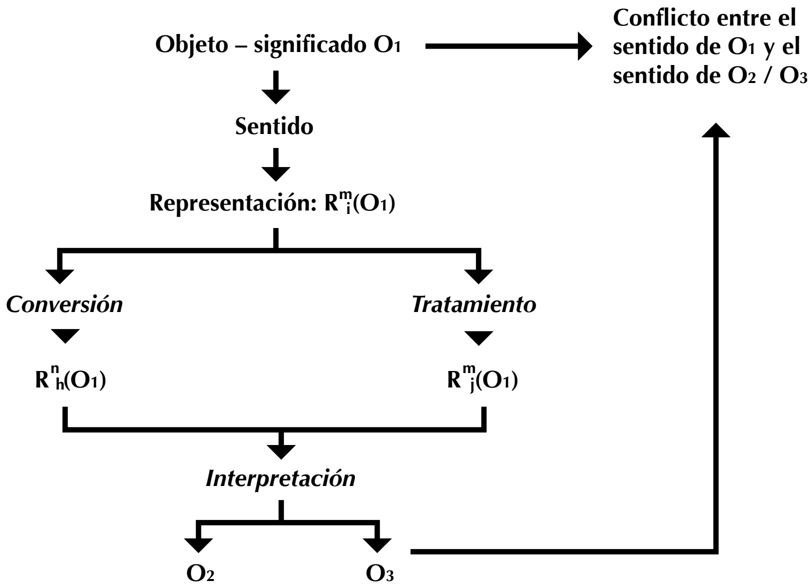


Figura 7. Esquema de transformación del tratamiento en el aula (juego de las ternas).

Esto hecho nuevo representa un interesante camino en la investigación.

Un intento de definición de construcción

Aceptamos que la construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de esos conceptos:

- De *representarlos* en un registro dado.
- De *tratar* tales representaciones al interior de un mismo registro.
- De *convertir* tales representaciones de un dado registro a otro.

El conjunto de estos tres elementos y las consideraciones de los precedentes párrafos evidencian la profunda relación que existe entre noética y esta visión del constructivismo que se podría llamar analítico: ¿qué quiere decir "construcción del conocimiento en matemática" si no precisamente la unión de esas tres "acciones" sobre los conceptos, es decir la expresión misma de la capacidad de *representar* los conceptos, de *tratar* las representaciones obtenidas al interior de un registro establecido y de *convertir* las representaciones de un registro a otro?

Es como si se estuvieran especificando las operaciones base que, en su conjunto, definen esa "construcción" que, de otra manera, queda como un término misterioso y ambiguo, disponible a cualquier tipo de interpretación, incluso metafísica.[9]

Es de notarse que, desde un punto de vista cognitivo, se debe dar la misma importancia al punto 3 (la conversión) que al punto 2 (el tratamiento), porque eso permite la definición de las variables independientes tanto para la observación como para la enseñanza. Pero desde un punto de vista matemático se usa asignar más importancia al tratamiento, más que a la conversión. Es por eso que en la historia los matemáticos han desarrollado registros específicos que han permitido diferentes formas de cálculo (aritmético, algebraico, analítico, lógico…).

El fenómeno de la escolarización y la falta de noética

Pongo ahora la reflexión y la terminología dentro de la clásica teoría de las situaciones; la renuncia del estudiante a la devolución (obviamente inconsciente), la incapacidad del estudiante para implicarse (como consecuencia de resultados negativos en los diferentes intentos), asumiéndose la carga directa y personal de la responsabilidad de la construcción del conocimiento, en el ambiente escolar, se hallan ligadas a la incapacidad (a veces solo supuesta) o de representar, o de tratar o de convertir, por falta de una didáctica específica.

El docente podría, en efecto, no preocuparse de los componentes individuales de la construcción a causa de una supuesta identidad entre semiótica y noética (Duval, 1993). Esta identidad se halla bastante difundida en el pensamiento de los docentes, particularmente en aquellos que no tienen jamás la oportunidad de reflexionar sobre esta cuestión, o que la consideran superflua.[10] (Sugiero, al lector interesado, la tesis doctoral de Maura Iori, 2015). Eso podría llevar a la elección de la renuncia por parte del estudiante y por lo tanto, a la escolarización de los saberes (D'Amore, 1999a).[11]

---

9 Naturalmente esta observación, todo el párrafo, pero incluso todo este texto, son específicos para la matemática; no se valora cuánto se puedan extender a una teoría de los conceptos o, incluso, a una gnoseología.

10 Lo que nos reconduce a una discusión mucho más general, aquella sobre las creencias implícitas del maestro, afrontado de manera profunda, sistemática y recurrente, en (Speranza, 1997).

11 «Con el término "escolarización del saber" pienso referirme aquí al acto en larga medida inconsciente, a través del cual el alumno, en un cierto punto de su vida social y escolar (pero casi siempre durante la escuela elemental), delega a la escuela (como institución) y al maestro de la escuela (como representante de la institución) la tarea de *seleccionar*

En cambio, es necesario reflexionar sobre el hecho de que en el aprendizaje conceptual no puede existir noética si no existe semiótica, en cuanto la adquisición de un objeto matemático C es de hecho la adquisición de una representación semiótica $R^m_i(C)$ en un registro semiótico dado r^m; en efecto, sólo a través de C se “manifiesta” y se vuelve disponible para la construcción del aprendizaje en el sentido señalado.[12]

Pero hay más: cualquiera que sea $R^m_i(C)$ en r^m, eso no da todas las referencias (semióticas) de C en r^m (la representación semiótica de un objeto no es unívoca jamás); existirán otras representaciones semióticas $R^m_h(C)$ $(h \neq i)$ de C en r^m (se pasa de una a otra con una transformación de tratamiento).

Se puede entonces hablar de C^m: objeto C representado en r^m, “limitado” es decir a su aspecto “relativo” al registro semiótico r^m.

C^m se puede “aprender” en r^m pero lo que se obtiene es por lo tanto sólo una aproximación parcial a C, digamos: una “construcción” parcial.

Para alcanzar la comprensión de C se necesita apoderarse de la conversión que lleva de $R^m_i(C^m)$ en r^m a $R^n_j(C^n)$ en r^n, para toda m y n: eso vuelve posible la elección de un registro en lugar de otro frente a cualquier situación relativa a C.

Lo tratado aquí es el punto central de toda la argumentación, lo que nos lleva a confirmar y reforzar la frase muchas veces recurrente y que constituye el perno fundamental de todo el aparato que estoy describiendo: *no existe noética sin semiótica*.

Para reforzar el “juego de las ternas” (representación, tratamiento, conversión), se puede ver el resultado de la investigación descrita en D’Amore (1998). En ella el mismo mensaje, relativo a una situación que tiene que ver con un ejemplo de relación binaria (se daban nombres de ciudades y nombres de países y la relación binaria era: “está en”), se proponía a estudiantes de varios niveles escolares en diferentes registros semióticos y con diferentes

para él los saberes significativos (aquellos que lo son socialmente, por status reconocido y legitimado por la noosfera), renunciando a hacerse cargo directamente de su elección en base a cualquier forma de criterio personal (gusto, interés, motivación,…). Dado que esta escolarización comporta el reconocimiento del maestro como depositario de los saberes que cuentan socialmente, es también obvio que existe, más o menos contemporáneamente, una escolarización de las relaciones interpersonales (entre estudiante y maestro y entre estudiante y compañeros) y de la relación entre el estudiante y el saber: es lo que (…) se llama “escolarización de las relaciones”» (D’Amore, 1999a).

12 Desde mi punto de vista, este es un punto esencial por tratar en los cursos para la formación de los docentes, enriqueciéndolo con ejemplos significativos.

representaciones semióticas, con la solicitud de reconocer que se trataba, precisamente, del *mismo mensaje*, de la *misma información*.

El resultado de la investigación muestra precisamente las enormes dificultades que tienen los estudiantes

- Para llegar a partir de una representación, hasta al contenido representado.
- Para verificar que entre dos representaciones en un registro semiótico dado se ha llevado a cabo simplemente una transformación de representación de tipo tratamiento.
- Para verificar que entre dos representaciones semióticas en dos diferentes registros semióticos se ha dado una transformación de representación de tipo conversión.

Ante la ausencia de claves de lectura y ante la dificultad de "leer" las situaciones, los estudiantes dan "sentido" al mensaje creando informaciones de diferentes tipo (a las que en algunos casos he llamado "informaciones parásitas") incluso lejanas de cualquier intención comunicativa del autor. También, buscan asideros de tratamiento o conversión en aspectos del todo marginales, como la forma de los gráficos, el tipo de figuras casualmente presentes etc., que para el adulto son insignificantes.

Algunas notas críticas

Antes de entrar en detalle en algunos ejemplos, se hacen necesarias algunas notas precautorias.

Una primera nota se refiere a la lengua natural como registro.

Incluso aceptando que la lengua natural sea un registro, debemos precisar de manera explícita que se trata de un registro más complejo de los otros que serán recordados. En primer lugar, este registro permite funcionamientos discursivos (y por lo tanto tratamientos) muy heterogéneos. Existe así un funcionamiento espontáneo que es el de las conversaciones, narrativo, de las discusiones; y existe un funcionamiento especializado que se halla, por ejemplo, en el razonamiento deductivo de las matemáticas, y que es del todo diferente.

Es por esto que Duval (1995, p. 91 y siguientes) distingue cuatro funciones discursivas que caracterizan todo registro que se llame "lengua":

- Función referencial de designación de objetos.
- Función apofántica de expresión de enunciados completos.
- Función de expansión discursiva de un enunciado completo.
- Función de reflexividad discursiva.

Una lengua, en sustancia, a diferencia de los otros registros, es plurifuncional (Duval, 1996, parte III).

Una segunda nota se refiere al hecho de si es o no menos lícito considerar los signos y las representaciones aisladamente.

Si bien en los ejemplos sucesivos, sólo con intenciones ilustrativas, se propone esto, en realidad se debería siempre tender a presentar el sistema o los sistemas que las representaciones forman y en las cuales funcionan como representaciones. Eso es fácil para el sistema de escritura de los números, para las figuras geométricas; pero lo es menos para las escrituras algebraica y lógica. La razón de esta diferencia es la siguiente: el interés de un sistema semiótico en matemática es, más que nada, el poder permitir un tratamiento (matemático) de las representaciones. Por lo que se requiere presentarlo, cuando sea posible, con respecto al juego de transformaciones internas que ellas permiten. Desde este punto de vista, la lengua y las figuras geométricas no son del todo registros "técnicos". Esto corresponde a la distinción entre dos estructuras de significado: ternario (lenguas y formas) y binarias (para las cuales los "triángulos" evocados en el recuadro del párrafo 1 son esquemas falsos).

Otros ejemplos claves pueden tomarse de la teoría ingenua o elemental de los conjuntos, en la cual el mismo conjunto puede ser representado en varios registros semióticos y, al interior de cada uno de ellos, usando varias representaciones semióticas. Así, existen otros mil en el recorrido escolar.

Falta de devolución, interrupción de la implicación

En caso de fracaso en la administración de esta enorme masa de representaciones y transformaciones es demasiado trivial y simplista el limitarse a la sola constatación, como parece ser que muchas veces hace el docente desilusionado de la falta de aprendizaje de sus estudiantes.

¿Dónde se anida el motivo de tal fracaso? Ya este aspecto es mucho más interesante y un análisis de los diferentes fracasos podría revelar mucho.

Pero aquí me interesa la problemática de la falta de devolución, de la interrupción de una implicación personal.

Tengo en mente la figura de un estudiante, incluso bueno, consciente, sensible, que se limita, quizás precisamente por esa sensibilidad no satisfecha o por incapacidad introspectiva de la cual no tiene la culpa, a observar y constatar su propio fracaso en el intento de hacer frente a la complejidad de la llamada en causa de la terna "representación, tratamiento, conversión". El estudiante podría decidir (aunque de manera del todo inconsciente), limitar los daños aceptando el formalismo vacío, la superficie de cuanto se le pide, adecuándose a escolarizar su propio saber y su propio comportamiento, es decir aceptando la total mediación del docente hacia el objeto del saber, aceptando sus elecciones y también sus gustos (D'Amore, 1999a). Un análisis muy apretado de las varias componentes, es decir la capacidad de puntualizar los varios aspectos en los que se configura la construcción del conocimiento podría ayudar al docente a entender cuál fue el momento exacto de la rendición, de la falta de devolución, de la interrupción de la implicación personal del estudiante en tal construcción.

Existe una enorme diferencia entre la institucionalización del conocimiento por parte del docente como representante de la institución que ha decidido cuál es el saber que cuenta; y la escolarización, la aceptación servil y sin búsqueda de sentido de las elecciones del docente.

En el primer caso el docente funge de mediador entre estudiante y saber y hace que el primero sea activo: consagra las elecciones y los "descubrimientos" del estudiante reconociéndole un estatuto institucional de consumo y un permiso oficial de uso; el fundamento de todo esto se halla en el hecho que fue el estudiante el que construyó.

En el segundo caso el docente funge de mediador totalitario y hace que el estudiante sea un sujeto pasivo: le pide fe ciega, fe ciega en la institución a cambio de promesas acerca de capacidades y habilidades futuras, que nadie garantiza que lleguen algún día o que no podrían jamás ser consumidas. El estudiante cesa de construir, es decir cesa de aprender.

Creo que el estudio preciso de la terna (representación, tratamiento, conversión) puede aplicarse al análisis de las situaciones de renuncia a la implicación personal, para evidenciar el motivo que desencadena la renuncia, el motivo de la escolarización.

Nota: Un muy significativo estudio relativo a los temas de este capítulo se encuentra en Iori (2017).

Referencias

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Actes du* séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique (année 1990-1991, n. 122) (pp. 103–117). Grenoble: LSD-I-MAG, Université Joseph Fourier.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73–111.

D'Amore, B. (1998). Objetos relacionales y registros representativos distintos: Dificultades cognitivas y obstáculos. *Uno*, 15, 63-78.

D'Amore, B. (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*, *22A*(3), 247–276.

D'Amore, B. (1999b). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2001a). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, *15*(2), 150–173.

D'Amore, B. (2001b). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 4–30.

D'Amore, B. (2001c). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno,* 27, 51–78.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, 35, 90–106. (Trabajo original publicado 2001).

D'Amore, B. (2006a). Oggetti matematici e senso: Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, *20*(4), 557–583.

D'Amore, B. (2006b). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical*

Thinking [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 177-195.

D'Amore, B. (2006c). *Didáctica de la matemática*. Con una carta de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Luis Rico. Bogotá: Editorial Magisterio. (Trabajo original publicado en 1999).

D'Amore, B. (2007a). How the treatment or conversion changes the sense of mathematical objects. En E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education*. Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education) (pp. 77–82). Athens: New Technologies Publications.

D'Amore, B. (2007b). Mathematical objects and sense: How semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, *7*, 23–45.

D'Amore, B. (2011). La ricerca in didattica della matematica: un esempio di ricerca. Oggetti matematici, trasformazioni semiotiche e senso. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *34AB*(3), 255–266.

D'Amore, B., & Fandiño, M. I. (2007a). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*, *21*(1), 87–92.

D'Amore, B., & Fandiño, M. I. (2007b). Relationships between area and perimeter: Beliefs of teachers. En E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education*. Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education) (pp. 383–396). Athens: New Technologies Publications.

D'Amore, B., & Fandiño, M. I. (2008a). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations: How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. Roma, *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI*, Marzo 2008. WG5: *The evolution of theoretical framework in mathematics education*. Recuperado de: www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008

D'Amore, B., & Fandiño, M. I. (2008b). The phenomenon of change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations: How other disciplines can be useful to the analysis. En A. Gagatsis (Ed.), *Research in Mathematics Education*. Proceedings of Conference of five cities: Nicosia, Rhodes, Bologna, Palermo, Locarno (pp. 13–22). Nicosia, Cyprus: University of Cyprus.

D'Amore, B., & Fandiño, M. I. (2008c). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. En M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi & F. Arzarello (Eds.), *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008)*. Reflecting and shaping the world of mathematics education. Actas del homónimo Congreso (pp. 304-305). Roma: Instituto de la Enciclopedia Italiana. Colección Scienza e Filosofia.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(2), 177–212. doi: 10.12802/relime.13.1822

De Saussure, F. (1915). *Cours de linguistique générale* (5ª ed., 1960). Paris: Payot.

Duval, R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*(1), 7–25.

Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*(1), 57–74.

Duval, R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*(1), 235–253.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349–382.

Duval, R. (1998). Signe et object (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*(1), 139–163.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica*. (Tesis de Doctorado, Universidad de Palermo, Italia). Recuperado de: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Iori.htm

Iori, M. (2017). Objects, signs and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics. A Duvalian perspective. *Educational studies in mathematics*, *94*(3), 275-291. doi: 10. 1007 / s 10649-016-9726-3.

Moreno Armella, L. (1999). Epistemologia ed Educazione Matematica. *La matematica e la sua didattica*, *13*(1), 43–59.

Perrin Glorian, M. J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France: Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (pp. 97–148). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Piaget, J. (1937). *La construction du réel chez l'enfant.* Neuchâtel-Paris: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J., & García, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris: Flammarion.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*, *22*(2), 14–23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4–23.

Rojas, P. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas: Bogotá (Colombia).

Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspectives* (Tesis Doctoral), Universidad de Palermo (Italia).

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational studies in mathematics, 77* (2-3), 285-311.

Speranza, F. (1997). *Scritti di epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2-3), 133–170.

Vygotsky, L. (1962). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press.

Wertsch, J. (1993). *Voces de la mente*. Madrid: Visor.

Agradecimientos:

Expreso mi gratitud más sincera a Raymond Duval, paciente lector de precedentes versiones de este artículo, quien me sugirió diferentes modificaciones e integraciones, me aconsejó algunos textos que ahora aparecen en la bibliografía y quien, más en general, me dirigió y guió en este tipo de estudios.

Nota

Trabajo desarrollado en el ámbito del Programa de Investigación de relevante interés nacional de la Universidad de Bologna, Departamento de Matemática (financiación: 60% Universidad de Bologna, 40% Ministero dell'Università e della Ricerca): "Investigaciones acerca del funcionamiento del sistema alumno-maestro-saber: motivaciones de la falta de devolución".

La presente versión del texto reúne varios párrafos, cada uno ya publicados en diferentes artículos o informes de investigación, publicados en varios idiomas.

Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación

Luis Radford

Introducción

La teoría de la objetivación (Radford, 2006a, 2014) se basa en la idea fundamental de que el aprendizaje es tanto *conocer* como *devenir*. En otras palabras, el aprendizaje no puede ser limitado al eje del *conocimiento* sino que debe abordar también el eje del *ser*: el eje de los sujetos. La teoría de la objetivación considera la meta de la educación matemática como un esfuerzo dinámico, político, social, histórico y cultural que busca la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en discursos y prácticas matemáticas que se constituyen histórica y culturalmente, discursos y prácticas que están en permanente evolución. Los fundamentos filosóficos de la teoría giran alrededor del trabajo del filósofo alemán Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1977, 2009) y su posterior desarrollo en los trabajos filosóficos de Karl Marx (1973, 1998) y la tradición dialéctica—Ilyenkov (1977), Mikhailov (1980), y Vygotsky (1987-1999), entre otros.

Este capítulo está dedicado a los conceptos de saber y conocimiento.[13] El capítulo prepara el terreno para abordar, en el próximo capítulo, el concepto de aprendizaje. Aunque una discusión sobre el saber y el conocimiento pudiera parecer esotérica y fútil, sostengo que si las teorías de educación matemática pretenden ofrecer explicaciones adecuadas del aprendizaje, tienen que aclarar primero lo que entienden por saber y conocimiento. En efecto, el aprendizaje es siempre relativo a algo (p.e. aprendizaje de la probabilidad, de las propiedades geométricas de las figuras, etc.). Como resultado, no podemos entender el aprendizaje si no logramos dar una explicación satisfactoria del *objeto* del aprendizaje y de la naturaleza de ese objeto. La siguiente sección comienza con una discusión sobre el saber, tal y como ha sido comprendida en general en la educación matemática recientemente,

13 El término ‘conocimiento’ no es el más afortunado. Conocimiento hace referencia, en efecto, a un resultado o efecto: el efecto de conocer. Quizás mejor sería un gerundio, para acentuar su calidad de proceso, guardando así su dimensión dinámica. No usaremos “conociendo”, pues éste término lo reservamos para otra idea. Para no hacer violencia a la lengua de Miguel de Cervantes, de Pablo Neruda y de Miguel Angel Asturias, hemos decidido utilizar ‘conocimiento’, esperando que el lector tendrá siempre en mente que los conceptos claves discutidos en este capítulo y los siguientes tienen, como todos los conceptos de la teoría de la objetivación, un sentido dinámico: estos son procesos, no productos.

esto es, como *construcción,* seguida de una discusión sobre el saber como se entiende en la teoría de la objetivación.

Saber

Saber como construcción

Influída por la tradicón anglosajona, la educación matemática no hace prácticamente hoy en día distinción entre saber y conocimiento. Es, en este contexto, muy común hablar sobre el saber/conocimiento como algo que uno *hace* o que uno *construye.* Saber o conocer es construir.

La metáfora fundamental detrás de esta idea es que el saber/conocimiento es algo similar a los objetos concretos del mundo. Uno construye, ensambla el conocimiento, tal como construye o ensambla las partes de una silla. Esta idea de saber/conocimiento como construcción es relativamente reciente. Surgió paulatinamente durante los siglos XVI y XVII, cuando la fabricación y la producción comercial de objetos se convirtió en la principal forma de producción humana en Europa. Hanna Arendt resume esta concepción del saber/conocimiento de la siguiente manera: "conozco algo cuando comprendo cómo llegó a ser" (Arendt, 1958, p. 585). La visión general de los siglos XVI y XVII, de un mundo de manufacturas, es donde se concibió por primera vez el conocimiento también como una forma de manufactura. Una exposición clarísima de este punto de vista apareció a finales del siglo XVIII en la *Crítica de la Razón Pura* de Kant. En este libro monumental, cuya influencia no ha terminado de afectarnos, Kant presenta las matemáticas como la forma de conocimiento más evolucionada y nos dice que "Sólo las matemáticas [...] derivan su conocimiento no de conceptos sino de la construcción de los mismos" (Kant, 2003, p. 590 [A 734/ B 762]).

Esta concepción de conocimiento como construcción (y sobre la cual regresaremos con más detenimiento en el capítulo 6) fue asumida por Piaget en su epistemología genética y fue adoptada ampliamente en educación matemática al hacer énfasis en la dimensión *personal* de la construcción del saber: usted y sólo usted construye su propio saber. Pero, en esta visión, el saber no es alguna cosa que alguien pueda construir y pasar a otro; lo que usted sabe es el resultado de su propia experiencia.

Como muchos académicos han señalado, este punto de vista del conocimiento es problemático por muchas razones. Por ejemplo, reduce la producción del conocimiento a la pura actividad subjetiva del individuo; deja poco espacio para dar cuenta del rol importante de los otros y de la cultura en la manera como conocemos; conduce a una visión simplista de la cognición, la interacción, la intersubjetividad y la dimensión ética; elimina el rol crucial de las instituciones sociales y los valores y tensiones que estas transmiten. Y como si fuera poco, des-historiza el conocimiento (ver p.e. Campbell, 2002; Lerman, 1996; Otte, 1998; Roth, 2011; Valero, 2004; Zevenbergen, 1996).

Como veremos en la siguiente subsección, hay otras maneras de considerar el conocimiento y la relación de los estudiantes con él.

Enfoques socioculturales

¿Cómo conciben el conocimiento los enfoques socioculturales? Tenemos que tener en cuenta que, al igual que los enfoques constructivistas, los enfoques socioculturales se alejan de la transmisión de conocimiento como modelo de aprendizaje (los enfoques socioculturales y constructivistas divergen ampliamente pero con respecto a este punto convergen). En los enfoques socioculturales y constructivistas, concebir el aprendizaje como la transmisión y recepción de conocimiento es una clase de conductismo. Los perros aprenden a reaccionar con éxito a determinados estímulos; los ratones aprenden cómo salir de un laberinto por medio de *inputs* determinados. La mente humana, por el contrario, es mucho más compleja; el modelo conductista de estímulo-respuesta es definitivamente insuficiente. En una frase, ahora famosa, Vygotsky y Luria sostienen que la cultura material y espiritual median el comportamiento humano y sugieren remplazar el segmento estímulo respuesta (S-R) por un triángulo (Figura 8) que, a pesar de su aparente simplicidad, añade un nivel inimaginable de complejidad al estudio de la psique humana.

Los humanos realizan operaciones por medio de signos que alteran de manera fundamental la forma como pensamos y actuamos. Vygotsky y Luria dicen: "con la transición a operaciones con signos no sólo procedemos a procesos psicológicos de altísima complejidad, sino que dejamos el campo de la historia natural de la psique y entramos en el campo de la formación histórica del comportamiento" (Vygotsky y Luria, 1994, p. 144).

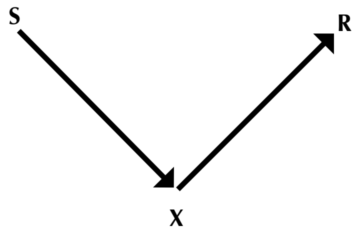


Figura 8. Famoso triángulo de Vygostki. Los signos externos y otros componentes de la cultura material y espiritual, X, alteran la historia natural de la mente humana. (Vygotsky y Luria, 1994, p. 144)

Ahora bien, si el conocimiento no es algo que uno construye subjetivamente ni algo que se transmite, ¿qué es? ¿Cuál es su diferencia con el saber? Me gustaría desarrollar aquí una concepción histórico-cultural del saber y del conocimiento. En una sola frase, la idea es considerar el saber no como objeto que se construye o se transmite, sino como *posibilidad*, es decir, algo potencial que emerge de la actividad humana y que se imbrica en un proceso de movimiento —de *devenir,* para ser más precisos— para *materializarse* o *expresarse* en conocimiento.

Saber como labor codificada

Quizás la mejor manera de abordar el problema del saber es regresar a Aristóteles y su distinción entre *potencialidad* y *actualidad*. Potencialidad (δύναμις*, dunamis*) para Aristóteles, designa la fuente del movimiento. Como su nombre lo sugiere, la potencialidad es un concepto dinámico. La potencialidad es una *capacidad* de poder hacer algo. Es sinónimo de poder o disposición. Los entes vivos y los artefactos poseen potencialidad. Un instrumento de música, por ejemplo, tiene la capacidad de producir sonidos. Un pez tiene la capacidad de moverse en el agua. La actualidad (ἐνέργεια, *energía*) es la ocurrencia o el despliegue concreto de eso que, hasta antes de ponerse en movimiento, hasta antes de actualizarse, no era sino simple potencialidad. Es por ello que Sachs (2015, p. 3) dice que la actualidad es el ser-en-presencia (*being-at-work*), algo que ocurre frente a nosotros, como el sonido concreto emitido por el instrumento de música o el trayecto específico seguido por el pez en el agua.

La potencialidad es, pues, pura posibilidad; algo indefinido, sin forma, como el sonido *antes de ser producido* o como la *disposición* del pez para desplazarse en el agua: algo puramente potencial que, a través del movimiento, deviene materializado o actualizado como el sonido preciso emitido por el instrumento o la trayectoria precisa seguida por el pez.

Ahora bien, la potencialidad de la que gozan los seres vivos y artefactos puede ser natural o adquirida. El pez está biológicametne equipado para moverse en el agua. Otras potencialidades o disposiciones son, como indica Aristóteles (1998) en el Libro Theta 5 de la *Metafísica* (1048a), adquiridas (ver también Hegel, 2009). Ese es el caso del saber. El saber es eso: *potencialidad*. El saber algebraico, por ejemplo, es una potencialidad incrustada en la cultura: posibilidades que se ofrecen a los individuos para pensar, reflexionar, plantear y resolver problemas *de cierta manera*. Si hubiésemos nacido en la época de Diofanto, en la Alejandría de fines de la antigüedad, el saber algebraico se hubiese constituido en posibilidades de pensar en términos de aritmos y números naturales y en términos de soluciones de problemas diferentes a las que se presentaron a los escribas sumerianos o a las que se presentan a los estudiantes hoy en día.

No habría que pensar, sin embargo, que la idea que estamos esbozando del saber se coloca en una línea platonista. El hecho de que cuando cada uno de nosotros nació y se encontró frente a una serie de saberes científicos, éticos, estéticos, legales y otros ya constituídos histórica y culturalmente, no significa que esos saberes son formas plátonicas universales y atemporales independientes del trabajo humano. Al contrario, son los propios individuos los que constituyen el saber en potencialidad a través de su propia labor —a través de sus acciones, de sus reflexiones, sus sufrimientos y sus esperanzas.

Para precisar mejor estas ideas, definamos el saber como sigue. *El saber es un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente*.[14] En el caso de la aritmética estos procesos podrían ser de reflexión, de expresión, y de acción que emergieron en Mesopotamia de actividades humanas específicas, tales como contar ganado o granos, o medir los campos. En el caso de la música, el saber podía ser un proceso de expresión estética y sonora que emergió en las antiguas civilizaciones de actividades específicas, tales como las ceremonias matrimoniales, para transmitir significados e intenciones.

Los adjetivos *corpóreos, sensibles y materiales* mencionados en la definición anterior significan que los procesos de acción a los que hacemos referencia no son cogitaciones mentales ocurriendo dentro de la cabeza, sino acciones

14 Para caracterizar el saber, en trabajos anteriores he usado el término *conjunto*. Agradezco a Rodolfo Vergel la sugerencia de utilizar el término *sistema*, el cual enfatiza mejor la idea de movimiento.

de individuos concretos que actúan y viven en el mundo social y cultural. Dichas acciones se constituyen a través del cuerpo, de los sentidos humanos y del uso de objetos físicos y artefactos culturales.

Para desarrollar con algún detalle la idea del *saber como un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente*, me gustaría recurrir a un ejemplo simple: romper nueces en los chimpancés.

Romper nueces para un chimpancé no es un proceso obvio. Como señalan los primatólogos, romper nueces comprende las siguientes etapas:

(1) El chimpancé recoge una nuez,

(2) la pone en una superficie particular: un yunque de piedra,

(3) escoge y sostiene otra piedra (la piedra martillo),

(4) golpea la nuez en el yunque de piedra con el martillo de piedra, y

(5) se come el núcleo de la nuez partida (ver figura 9).

Figura 9. Yo rompe una nuez mientras dos jóvenes chimpancés siguen atentamente el proceso. (De Matsuzawa, Biro, Humle, Inoue-Nakamura, Tonooka, & Yamakoshi, 2001, p. 570).

Estudios realizados en la selva sugieren que son necesarios 3 a 7 años para que los jóvenes chimpancés aprendan el proceso de romper las nueces. Los jóvenes no necesariamente comienzan a usar la piedra martillo y la piedra yunque. La atención adecuada a los objetos, su selección (tamaño, dureza, etc.), y luego la coordinación espacial y temporal de los tres objetos (nueces, yunque y martillo), es un proceso largo. A menudo los jóvenes chimpancés de medio año manipulan únicamente un objeto (una nuez o una piedra). Pueden coger una nuez y pararse sobre ella. A medida que crecen, pueden pasar a los tres objetos, pero no en la secuencia correcta, resultando en intentos fallidos. Un aspecto clave del proceso es la aparición de habilidades adecuadas, por ejemplo "aplicar suficiente presión a una nuez para romperla" (Hirata, Morimura, & Houki, 2009, p. 98).

Los chimpancés aprenden a romper nueces como un proceso social. Los jóvenes, que normalmente permanecen con su madre hasta la edad de 4 o 5 años, observan atentamente cómo su madre rompe nueces y luego tratan de hacerlo ellos mismos, aún sin que aparentemente hayan comprendido la meta de ese proceso.[15]

No todos los grupos de chimpancés rompen nueces, y entre los grupos que lo hacen, no todos rompen las mismas clases de nueces. Los primatólogos creen que la habilidad de romper nueces se desarrolló en alguna parte de Africa occidental y luego se transmitió socialmente de una generación a la siguiente. La práctica de romper nueces pudo difundirse dentro de grupos vecinos como resultado de las migraciones de chimpancés (Hirata et al., 2009, p. 88; Matsuzawa et al., 2001, pp. 569-70).

Propongo concebir el "saber"—en este caso saber cómo romper una nuez—, como un *sistema de acciones codificadas culturalmente*. Que el saber sea una codificación cultural de maneras de actuar y hacer significa que es algo *general*: no puede reducirse a esta o aquella secuencia particular de acciones coordinadas con *estas* o *aquellas* piedras. Otra manera de decir esto es que el saber es *labor cristalizada*.[16] Podemos pensar en el saber como una *forma ideal* de acciones, en oposición a las acciones mismas. El saber como labor cristalizada o forma ideal va más allá de cada una de sus instancias o realizaciones concretas. El romper nueces como forma ideal conlleva la generalidad de cada una de sus realizaciones específicas.

Como lo mencioné anteriormente, el saber (en este caso, *saber cómo romper nueces*) no tiene nada que ver con las formas platónicas. En lugar de considerar el romper nueces de la comunidad de chimpancés que vive en

15 Por ejemplo, juegan con las piedras; ver https://www.youtube.com/watch?v=5Cp7_In7f88

16 Decir que el saber es labor cristalizada no significa que no es suceptible de ser modificado. Al contrario, la cristalización siempre es relativa, siempre está abierta a transformaciones. Ya regresaremos sobre este punto más adelante.

las selvas montañosas del monte Nimba, en la República de Guinea, como formas platónicas o cosas-en-sí-mismas (*things-in-themselves*) kantianas, podemos considerarlo como proceso de reflexión y acción corporeal y material constituido cultural e históricamente. La "forma ideal" de romper nueces debe entenderse como una manera *prototípica general* de hacer las cosas. En lugar de estar ubicada en un reino de ideas eternas, esta forma ideal se codifica en la memoria cultural como un patrón o secuencia de acciones. Al contrario de las formas platónicas, que se supone existen independientemente de lo que las especies hacen en la tierra, el saber es una forma ideal que no puede existir si no se realiza en la práctica.

El ejemplo de saber que acabo de discutir tiene, me parece, una virtud pedagógica. Es un ejemplo simple, en cuanto que no hace intervenir el lenguaje u otros sistemas semióticos complejos, como es en general el caso de los saberes humanos. El saber romper nueces es, como los saberes de los chimpancés (por ejemplo, lavar papas con agua o sacar hormigas con ramas de arbustos), kinestésico. Valdría la pena detenernos ahora en un ejemplo de saber matemático y preparar así de mejor manera nuestra discusión sobre el conocimiento, tal y como es concebido en la teoría de la objetivación. Abordemos el caso de la generalización de secuencias (*pattern generalization* o generalización de patrones).

Como muchos de mis colegas, en mi investigación en el salón de clase he utilizado la generalización de patrones para introducir a los estudiantes al álgebra. La idea fundamental es presentar a los estudiantes secuencias geométricas o numéricas simples (normalmente secuencias aritméticas que pueden expresarse de forma lineal: y=ax+b). Le damos a los estudiantes unos cuantos términos (ver figura 10) y luego les pedimos que encuentren una o varias formas para calcular el número de objetos en términos "lejanos" (p.e., los términos 10, 25, 100).

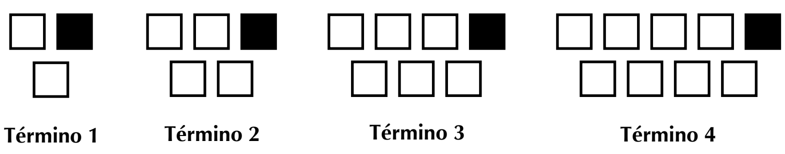


Figura 10. Los primeros términos de una secuencia que estudiantes de grado dos investigan en una lección de álgebra.

Cuando hacemos esto, esperamos que los estudiantes entren en relación con una forma de saber sobre secuencias aritméticas, históricamente constituido. Específicamente, esperamos que los estudiantes tomen conciencia de una forma algebraica de percibir, reflexionar e investigar secuencias, que se remonta a tiempos antiguos. De hecho, la investigación de secuencias aritméticas apareció en las civilizaciones antiguas (por ejemplo Mesopotamia) y era un tema muy popular en la Antigüedad Tardía, en los círculos neo-pitagóricos (Lawlor & Lawlor, 1979; Nicomaco de Gerasa, 1938; Tarán, 1969). Los neo-pitagóricos se interesaban particularmente en los números poligonales —números representados con pequeñas piedras dispuestas con forma de polígono regular. Por ejemplo, los primeros números triangulares son 1, 3, 6, 10; los primeros números cuadrados son 1, 4, 9, 16; los primeros números pentagonales son 1, 5, 12, 22; (ver Figura 11).

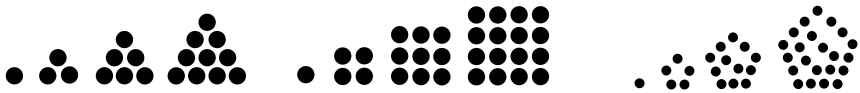


Figura 11. Los primeros números triangulares, cuadrados y pentagonales.

Hasta donde yo sé, la investigación de propiedades teóricas de secuencias aritméticas apareció primero en un texto de Hypsikles conocido como *Anaphorikos* (ver Radford, 2006b)[17]. La proposición 1 dice lo siguiente:

> *Si se considera un número cualquiera de términos de manera que <comenzando desde el más grande> cada dos números sucesivos tienen la misma diferencia, [si el número de los términos] es par, entonces la diferencia entre [la suma de] la mitad de los números [empezando por el más grande] y [la suma de] los que quedan, es igual al múltiplo de la diferencia común por el cuadrado de la mitad del número de términos (Manitius, 1888, p. 2)*

En simbolismo moderno, la proposición afirma que si un número de $2n$ *términos*, , son tales que $a_1>a_2>\ldots>a_{2n}$, $a_i - a_{i+1} = d$ para $i = 1, \ldots 2n - 1$, entonces:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}) = n^2 \times d$$

La proposición de Hypsikles afirma una *propiedad* de lo que ahora llamamos una secuencia aritmética. Diophantus (ca. 250 AD), en su corto texto *sobre los números poligonales* (Ver Eeck, 1959), presenta una fórmula para calcular cualquier número poligonal, S_n, cuando el lado, *n,* del número poligonal y el ángulo *a* son conocidos. La fórmula es:

17 Hypsikles vivió en Alejandría. Los historiadores no saben mucho de su vida, pero piensan que vivió entre los siglos 2 antes de Cristo y 2 después de Cristo.

$$S_n = \frac{[(2n-1)(a-2)+2]^2 - (a-4)^2}{8\,(a-2)}$$

Supongamos que deseamos calcular el tercer término del número pentagonal. En este caso, y .

$$S_n = \frac{[(2 \times 3 - 1)(5-2)+2]^2 - (5-4)^2}{8\,(5-2)}$$

lo que da $S_3=12$

Naturalmente, Diofanto no expresó esa fórmula utilizando el simbolismo moderno. Lo que nos dice es:

> *Tome el doble del lado del número poligonal, quítele una unidad; multiplique el resultado por el número de ángulos menos 2; añada 2 unidades. Tome el cuadrado del resultado. A éste quítele el cuadrado del número de ángulos menos 4. Divida el resultado por 8 veces el número de ángulos menos 2 unidades. Esto da el número poligonal que estamos buscando. (Basado en la traducción de Ver Eecke, 1959, pp. 290-291)*

Tal como el romper nueces para los chimpancés, las formas algebraicas de reflexionar, percibir y tratar las secuencias son formas codificadas de pensar y hacer. Y, como en el caso de los chimpancés y su historia cultural, estas formas de pensar y hacer se han codificado y refinado en la historia cultural humana. Basados en registros históricos, los historiadores piensan que la investigación de secuencias se realizaba al comienzo con pequeñas piedras (Lefevre, 1981).

Desde una perspectiva Hegeliana, el saber resultante fue luego transformado en algo más específico (p.e. una investigación *analítica* de propiedades teóricas de las secuencias aritméticas, como la de Hypsikles), pasando así de algo abstracto a algo más determinado o más concreto. Esto es lo que la dialéctica hegeliana llama la *ascensión de lo abstracto a lo concreto*. Este ascenso a lo concreto ocurre por un proceso de *determinaciones*. Las nuevas *determinaciones* del saber no reemplazan simplemente las antiguas, sino que vehiculan, de manera condensada, los significados de las formaciones teóricas previas. La aparición del simbolismo alfanumérico con Vieta y Descartes permite efectuar nuevas determinaciones; los significados previos quedan inmersos en los nuevos significados. Los significados previos se asientan o sedimentan. Como lo dice Marx, "lo concreto es concreto porque es la concentración de muchas determinaciones, y por lo tanto es unidad de lo diverso. Aparece en el proceso de pensamiento, por consiguiente, como un proceso de concentración, como resultado, no como punto de partida" (1973, p. 101). No es lo concreto el punto de partida, sino lo potencial.

Dentro de la concepción del saber que estoy presentando, la evolución cultural del saber, su ascenso de lo abstracto a lo concreto, no debe considerarse como algo que ocurre como si fuera realizado por una mano invisible o por la propia lógica del saber racional. La evolución del saber debe concebirse no como un fenómeno natural sino como un fenómeno cultural. Así como el capital sólo puede comprenderse como una concreción histórica de conceptos abstractos tales como la división del trabajo, la moneda, el valor, entre otros, el saber matemático sólo puede entenderse como concreción de formas abstractas previas de pensamiento y acción matemáticos, que son lingüísticas, perceptivas, artefactuales y corporales.

Mi ejemplo de saber sobre las secuencias aritméticas no contiene nada especial. Ejemplos similares pueden encontrarse sobre cualquier tópico de las matemáticas. Lo importante es, entonces, que el saber matemático se ha expresado de diferentes maneras, por un largo proceso de refinamientos y concreciones (lenguaje natural, simbolismo alfanumérico, gráficas, etc.) y ha sido codificado en la memoria y las prácticas culturales, y ahora está presente en muchos currículos en todo el mundo. Es este saber el que los alumnos encuentran en la escuela y que podría conducirlos a ver que el término 100 de la secuencia de la figura 3, por ejemplo, tiene 1 + 2x100 cuadrados.

Ahora estamos listos para definir el concepto de *conocimiento.*

Conocimiento

Saber, como he argumentado, es labor cristalizada —formas de hacer, pensar y reflexionar codificadas culturalmente. Conocimiento es *la actualización* o *materialización* del saber.

Ahora bien, cuando digo que el conocimiento es la actualización o materialización de algo que ya existe, corro un gran riesgo de ser malinterpretado. El conocimiento puede parecer una simple repetición. Por supuesto, eso no es cierto. Si el conocimiento fuera simplemente una repetición, sería algo estático. No habría la más mínima oportunidad de que el conocimiento evolucionara. Pero como lo muestra el ejemplo de Hypsikles y Diofanto, el último no repitió simplemente al primero. Así que, cuando sugiero que el conocimiento es una actualización o materialización del saber, hay que distinguir:

1. El saber como una entidad *general*.
2. El *proceso* gracias al cual el saber se actualiza o materializa.
3. El conocimiento como *actualización* o *materializaición* del saber.

El saber como una entidad general

Para comprender esos tres aspectos interrelacionados del saber y el conocimiento, debemos tener en cuenta que afirmar que el saber es algo *general* quiere decir que el saber no puede identificarse con ninguna de sus materializaciones o actualizaciones. Es afirmar lo que hemos dicho anteriormente: que el saber es pura *posibilidad*. La posibilidad de romper esta o aquella nuez; la posibilidad de encontrar una propiedad de las secuencias aritméticas o el término 100 en una secuencia dada. Esta posibilidad *en cuanto* posibilidad es simplemente algo *inexistente,* pura *potencialidad* que "aún no ha surgido a la existencia" (Hegel, 2001, p. 36), como la potencialidad del instrumento de música. Para que surja a la existencia, el saber tiene que *materializarse* a través de un *proceso de actualización*.

El proceso de la actualización del saber

El término actualización evoca la temporalidad que le es propia. Hay ya algo allí, pero que es simplemente potencialidad (δύναμις*, dunamis*), que todavía no ha surgido a la existencia y que, para surgir, debe ponerse en movimiento y *aparecer*: tiene que convertirse en un *actual*; tiene que *actualizarse*.

El nombre de ese *proceso* a través del cual se actualiza el saber es actividad: para que pueda materializarse, el saber tiene que mostrarse en sí mismo en la actividad a través de la cual éste adquiere su contenido. "Es solamente por esta actividad que las características abstractas de lo general son realizadas, actualizadas. Por sí mismo [lo general] no tienen poder" (Hegel, 2001, p. 36). En otras palabras, lo general (el saber) no tiene el poder de aparecer por sí mismo.

Quisiera notar que la *actividad* no es un simple canal a través del cual el saber hace su aparición. Como sugiere Ilyenkov (1977), la actividad *imprime su marca* en la actualización del saber. Regresaremos más adelante a este concepto de actividad, que es central en el materialismo dialéctico. Por el momento, detengámosnos en la idea de actualización.

La actualización

La actualización del saber es, como hemos dicho anteriormente, el *conocimiento*. En otras palabras, el conocimiento es el contenido conceptual concreto en el que se manifiesta o actualiza o materializa o encarna el saber. Su contenido conceptual concreto aparece y puede aparecer únicamente en una actividad —la actividad que media el saber y el conocimiento. *El conocimiento es resultado de una mediación*. No existe el conocimiento inmediato: todo conocimiento es mediado. El significado de esa mediación es el siguiente: *el conocimiento lleva la huella o impresión de la actividad que lo media* (Ilyenkov, 1977). En otras palabras, la actividad demarca la manera en la que el saber se manifiesta en el conocimiento. En términos aún más simples, la manera en que se llega a conocer algo (por ejemplo cómo resolver ecuaciones) es consustancial de las especificidades del proceso de conocimiento. La actividad mediadora ejerce su mediación por medio de artefactos, formas de uso de artefactos y también por medio de formas y modos de interacción humana, que son históricos y culturales (Mikhailov, 1980).

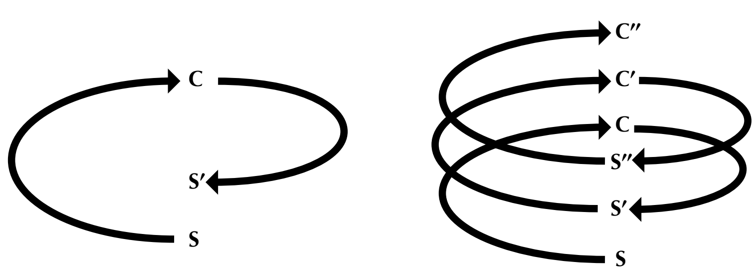
La actividad es, pues, el proceso a través del cual el saber se materializa en el conocimiento. Esta actividad actualiza el saber, lo trae a la vida —como la actividad de tocar el violín trae a la vida la nota musical.

Podemos resumir la relación entre saber, actividad y conocimiento de la siguiente manera: el conocimiento es un modo del saber: una de sus formas *singulares* desarrolladas. Esta forma desarrollada que la actividad mediadora hace posible, pone al saber en movimiento y lo actualiza o materializa. El saber (algebraico, geométrico, etc.) no es un ente sensible en sí. ¿Podemos acaso sentir, percibir o pensar el álgebra *en sí*? No. No podemos. Pensar algebraicamente es ya algo que occurre en ese proceso que hemos llamado hace un momento *actividad*. Y lo que se está revelando a la conciencia en el curso de esa actividad no es el saber algebraico entero, sino una forma singular desarrollada: su materialización o actualización, esto es, el conocimiento. Solamente como tal, como conocimiento, el saber puede ser un objeto sensible de pensamiento y como tal ser modificado y ampliado.

La dialéctica entre saber y el conocimiento

Permítanme dar un ejemplo histórico para ilustrar esta última idea. Algunas tablillas de arcilla de Babilonia muestran problemas sobre objetos de medición. Son vestigios de actividades al interior de las cuales algunas formas codificadas de medición se materializaron o actualizaron. Una de las unidades metrológicas de longitud es el *pie*. Aunque el pie pudo ser una unidad útil para medir algunos objetos en el mundo, seguramente los escribas babilonios se dieron cuenta rápidamente de que, en ocasiones, sumar pies no era suficiente. No se podía atribuir una medida a objetos que medían entre, digamos, dos y tres pies. Las formas codificadas de medida aparecieron en el mundo concreto y tuvieron que expandirse para medir esos objetos "difíciles". Las subdivisiones del pie en "fracciones" del mismo pueden concebirse en el mundo concreto únicamente por medio de la actualización del saber. La inclusión de fracciones condujo a nuevas formas de medir, que, a través de la actividad, fueron codificadas, constituyendo así una *modificación* del saber previo. La nueva práctica de medición se convirtió en nuevo saber. Sin la posibilidad de actualización, el saber permanecería general y por lo tanto sería imposible modificarlo.

Las Figuras 12a y 12b tratan de capturar la relación entre el saber (S), la actividad (A) y el conocimiento (C). Desde un punto de vista filogenético, en cierto momento del desarrollo de una cultura, el saber S (ver Figura 12a) es puesto en movimiento por la actividad humana (simbolizada por las flechas) y, al actualizarse o materializarse, se revela a la conciencia de los sujetos concretos en el conocimiento C. A través de la actividad, que es siempre movimiento y que es afectada por S y por el emergente C, los individuos concretos pueden ahora refinar, ajustar, expandir, transformar el saber S, dando como resultado un nuevo saber S′. El nuevo saber S′, convertido en nueva potencialidad, puede, a través de la mediación de otras actividades (las flechas en la Figura 12b), revelarse o actualizarse en otro conocimiento C′, etc. (ver Figura 12b).



Figuras 12a (a la izquierda) y 12b (a la derecha). La actividad efectúa la mediación del saber que permite su actualización o materialización como conocimiento.

El conocimiento es el contenido conceptual concreto del saber—como el sonido preciso del violín es el contenido aureo del potencial de éste. El conocimiento matemático es el contenido del saber matemático que se muestra en una reflexión teórica o práctica sensible; la manera en que lo general tiene actualidad (Maybee, 2009). La manera en que el contenido cobra vigencia o actualidad —la manera en que suena el violín o se da la reflexión teórica matemática sensible—, depende de la actividad que lo media. Esta mediación es fundamental: ella subraya la naturaleza mediada del conocer.[18]

Cuando mis estudiantes de grado 6 resuelven la ecuación que muestra la primera línea de la Figura 13, actualizan una forma cultural de acción y reflexión (un saber, una *posibilidad* pura) que se materializa a través de una actividad de clase irrepetible que incluye el recurso a símbolos y a artefactos, al lenguaje, al cuerpo, etc. Se trata de una actividad práctico-sensible de actuar y reflexionar sobre lo que se necesita para resolver la mencionada ecuación. Esta *reflexión* y *acción* sensual y material sobre una ecuación específica es *el conocimiento*.

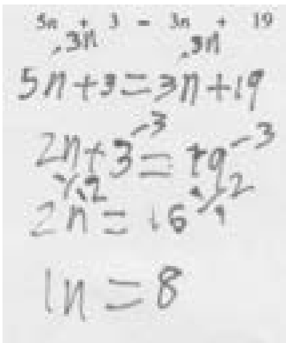


Figura 13. Estudiantes de grado 6 actualizan una forma codificada algebraica de pensar (un saber) a través de una reflexión y acción singular de una ecuación mediada por una actividad de aula.

Nótese, sin embargo, que como la actualización del general es siempre un singular desarrollado, la actualización no puede capturar el saber en su globalidad. En el ejemplo de la Figura 13, en la actualización del saber aparecen

18 Me gustaría aprovechar esta discusión para señalar las diferencias teóricas entre, por un lado, teorías de la actividad que se derivan de la filosofía de Hegel y el materialismo dialéctico (la teoría de la objetivación, por ejemplo) y, por otro lado, algunas teorías contemporáneas de la acción. Como se muestra en la Figura 12a, la actividad es considerada una actividad conjunta que toma su forma de las formas materiales, espirituales, históricas y culturales de producción y modos de interacción social. No es solamente una secuencia de acciones individuales que ocurren durante la interacción.

sustracciones de incógnitas y números positivos; no se incluyen reflexiones sobre fracciones o coeficientes negativos. En ese sentido, el conocimiento es siempre *déficit*. Pero, al mismo tiempo, el conocimiento es *exceso*: dada su materialidad sensible, el conocimiento supera la potencialidad y abre la brecha para plantear nuevos problemas y para crear nuevas líneas de reflexión e investigación. Por lo tanto, al encarnar al saber, el conocimiento lo afirma; y al mismo tiempo, como exceso, lo niega. El principio dialéctico del saber y del conocimiento no es de identidad, sino de diferencia.

Referencias

Arendt, H. (1958). The modem concept of history. *The Review of Politics,* 20(4), 570-590. doi:10.1017/S0034670500034227.

Aristotle. (1998). *Metaphysics.* (H. Lawson-Tancred, Trans.). London: Penguin Books.

Campbell, S. (2002). Constructivism and the limits of reason: Revisiting the Kantian problematic. *Studies in Philosophy and Education, 21,*421-445.

Hegel, G. W. F. (1977). *Phenomenology of spirit.* Oxford: Oxford University Press (First edition, 1807).

Hegel, G. (2001). *The philosophy of history.* Kitchener, ON: Batoche Books. (Original work published 1837)

Hegel, G. (2009). *Logic.* (W. Wallace, Trans.). Pacifica, CA: MIA. (Original work published 1830)

Hirata, S., Morimura, N., & Houki, C. (2009). How to crack nuts: Acquisition process in captive chimpanzees (pan troglodytes) observing a model. *Animal Cognition, 12,* 87-101. doi: 10.1007/s10071-009-0275-3

Ilyenkov, E. V. (1977). *Dialectical logic.* Moscow: Progress Publishers.

Kant, I. (2003). *Critique of pure reason.* (N. K. Smith, Trans.) New York: St. Marin's Press. (Original work published 1787)

Lawlor, R., & Lawlor, D. (1979). *Theon of Smirna: Mathematics useful for understanding Plato.* San Diego: Wizards Bookshelf.

Lefevre, W. (1981). Rechenstein und sprache [computing stones and language]. In P. Damerow & W. Lefevre (Eds.), *Rechenstein, experiment, sprache. Historische fallstudien zur entstehung der exakten wissenschaften* [Computing stones, experiment, language. Historical case studies on the emergence of the exact sciences] (pp. 115-169). Stuttgart: Klett-Cotta.

Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education,* 27(2), 133-150.

Manitius, K. (1888). *Des hypsikles schrift anaphorikos nach iiberlieferung und inhalt kritisch behandelt* [Hypsikles' text "anaphorikos" according to transmission and content dealt with in a critical way]. Dresden: Lehmannsche Buchdruckerei.

Marx, K. (1973). Grundrisse: Introduction to the critique of political economy. *Baltimore: Penguin Books.*

Marx, K. (1998). The German ideology. New York: Prometheus Books.

Matsuzawa, T., Biro, D., Humle, T., Inoue-Nakamura, N., Tonooka, R., & Yamakoshi, G. (2001). Emergence of culture in wild chimpanzees: Education by master-apprenticeship. In T. Matsuzawa (Ed.), *Primate origins of human cognition and behavior* (pp. 557-574). Tokyo: Springer.

Maybee, J. (2009). *Picturing Hegel.* Lanham, MD: Lexington Books.

Mikhailov, F. T. (1980). *The riddle of the self.* Moscow: Progress Publishers.

Nicomachus of Gerasa. (1938). *Introduction to arithmetic*. (M. L. D'Ooge, Trans.). Ann Arbor: University of Michigan Press.

Otte, M. (1998). Limits of constructivism : Kant, Piaget and Peirce. *Science & Education, 7, 425-450.*

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 103-129 (available at: http://luisradford.ca)

Radford, L. (2006b). Variables, unknowns, and parameters of mathematical generality. In *Mini-Workshop on studying original sources in mathematics education*. Oberwolfach, April 30th-May 6th, 2006. Report No. 22/2006, 16-17.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132-150.

Roth, W.-M. (2011). Possibility: At the limits of the constructivist metaphor. *New York: Springer.*

Sachs, J. (2015). Aristotle: Motion and its place in nature. In The internet encyclopedia of philosophy. http://www .iep.utm.edu/ (Accessed on April 9 2015).

Tarán, L. (1 969). *Asclepius of Tralles: Commentary to Nichomacus' Introduction to arithmetic* (Vol. 59, part 4). Transactions of the American Philosophical Society.

Valero, M. (2004). Postmodernism as an attitude of critique to dominant mathematics education research. In P. Walshaw (Ed.), *Mathematics education within the postmodern* (pp. 35-54). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Ver Eecke, P. (1959). *Diopante d'Alexandrie. Les six livres arithmetiques et le livre des nombres polygones* [Diophantus of Alexandria: The six books on arithmetic and the book on polygonal numbers]. Liege: Desclee de Brower. (Original work published 1926).

Vygotsky, L. S. (1987-1999). *Collected works*. New York: Plenum Press.

Vygotsky, L. S., & Luria, A. (1994). Tool and symbol in child development. In R. van der Veer & J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky reader* (pp. 99-174). Oxford: Blackwell Publishers.

Zevenbergen, R. (1996). Constructivism as a liberal bourgeois discourse. *Educational Studies in Mathematics, 31,* 95-113.

Reconocimientos:

Este capítulo retoma ideas presentadas previamente en mi artículo *Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning*, publicado en la revista abierta (open journal) *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(1), 7-44, 2013. Este capítulo está basado en las traducciones al español realizadas por Rodolfo Vergel Causado y Martín Eduardo Acosta Gempeler, a quienes agradezco profundamente su ayuda. También agradezco a Alfonso Ulises Salinas Hernández por su relectura y comentarios.

Aprendizaje desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación

Luis Radford

1. Introducción

En el capítulo anterior se han presentado los conceptos de saber y conocimiento tal y como se conciben en la teoría de la objetivación. Este capítulo está centrado alrededor del concepto de aprendizaje.

En las teorías socioculturales que acuden a la participación para explicar el aprendizaje, la idea fundamental es que los individuos llegan a conocer cuando participan en prácticas sociales. Hay una intención explícita de ir más allá de las concepciones individualistas de la psicología y filosofía, en las que el individuo es la unidad de análisis y el foco de investigación.

La idea de participación fue desarrollada por Rogoff (1990), Lave (1988), y Lave & Wenger (1991), entre otros. Rogoff, por ejemplo, concibe el conocer como *aprendizaje*[19] en un contexto de participación guiada. Rogoff dice: "El concepto de participación guiada trata de mantener los roles del individuo y del contexto sociocultural en foco" (Rogoff, 1990, p. 18). Luego afirma que ella usa la analogía del aprendizaje "para enfocarme en cómo el desarrollo de habilidades implica aprendices activos que observan y participan en actividades culturales organizadas con la guía y el desafío de otras personas" (Rogoff, 1990, p. 19).

Para hablar del aprendizaje y el pensamiento como aprendizaje, Rogoff muestra cómo niños y padres realizan procesos sutiles de atención com-

19 N. del T. (Martín Eduardo Acosta Gempeler). Los términos *learning* y *apprenticeship* significan ambos aprendizaje. Pero learning se refiere al aprender en sentido general, mientras que apprenticeship se refiere a la relación entre un aprendiz y un maestro de un oficio determinado. En la edad media los oficios estaban organizados por gremios, y dentro de cada gremio (carpinteros, talladores de piedra, constructores…) existían los profesionales, los aprendices y los maestros. Quienes querían volverse profesionales conseguían un maestro que los contrataba para hacer las tareas más duras, y se comprometía a cambio a mostrarles el oficio en la práctica: esa es la relación de aprendizaje (apprenticeship). En algunos países europeos aún perdura esta costumbre, de manera que los jóvenes que terminan la escolaridad obligatoria (noveno grado), pueden elegir entre seguir estudiando en un colegio para luego entrar a la universidad, o comenzar un aprendizaje (apprenticeship), durante el cual son empleados de un maestro en el oficio mientras aprenden de él. Para distinguir en español estos dos términos, utilizaremos la palabra aprendizaje en su acepción general, y cuando nos refiramos al apprenticeship utilizaremos una palabra subrayada: aprendizaje.

partida, y cómo con la ayuda de los adultos, los niños logran *insights* en las referencias sociales y las maneras de resolver problemas y responder a solicitudes sociales. El aprendizaje, sin embargo, sigue siendo finalmente un proceso cuya meta es adaptarse a las prácticas sociales.

A pesar de la gran variedad de nuevos conceptos que conlleva el enfoque de la participación, el aprendizaje parece como una clase de adaptación, al estilo de Piaget en el fondo. La diferencia está en que mientras para Piaget la adaptación se realiza por medio de mecanismos cognitivos generales (universales) y el entorno se concibe como algo "natural", en el paradigma de participación el aprendizaje es la adaptación por medio de mecanismos sociales a un mundo de prácticas culturales. La intersubjetividad no es más que una relación basada en la comunicación, significados compartidos y atención conjunta. En la teoría de la objetivación, la intersubjetividad y el aprendizaje están íntimamente relacionados; la comunicación, los significados compartidos y la atención conjunta tienen un rol crucial. Pero, como lo veremos enseguida, el concepto crucial es la *conciencia* en un sentido Hegeliano-Marxista-Vygotskyano. Pero antes de hablar de esto, debemos hacer un comentario acerca de la idea de aprendizaje como interiorización.

2. Interiorización

La idea de interiorización o internalización fue elaborada por psicólogos como Pierre Janet (1929) y Vygotsky (1929) en la primera mitad del siglo 20. Es un constructo teórico para describir la relación entre el individuo y su entorno. Janet, por ejemplo, lo articuló en sus investigaciones sobre la personalidad y sostuvo que todas las leyes psicológicas tienen dos aspectos: uno exterior (que trata con otras personas) y uno interior (que trata con uno mismo). Casi siempre, dice, "este último es posterior al primero" (Janet, 1929, p. 288).

La interiorización constituye una de las ideas centrales de la teoría histórico-cultural de Vygotsky, formulada en los años 30 —aunque pueden encontrarse versiones implícitas en artículos anteriores, como el de 1929 "El desarrollo cultural del niño" (Vygotsky, 1929). La interiorización está íntimamente relacionada con el concepto de Vygotsky sobre el desarrollo humano y el rol que tienen los signos en este desarrollo. La interiorización hace operacional otro constructo teórico clave de la teoría histórico-cultural, la "ley genética de desarrollo cultural". Vygotsky enunció esta ley de la siguiente manera: "Cada función [psíquica] aparece en el desarrollo cultural del niño dos veces: primero, en el nivel social, y luego en el nivel individual" (Vygotsky, 1978, p. 57).

La idea de interiorización tiene sus propios problemas. Al caracterizar la relación entre el individuo y su contexto en términos de interiorización puede decirse que aún hay trazas de una forma de pensamiento dualista, que no puede resolver la famosa dicotomía entre lo interno y lo externo. Como pregunta Veresov, "¿Dónde está la diferencia o incluso el límite entre externo e interno?" (Veresov, 1999, p. 225).

Debemos recordar que la teoría de Vygotsky se desarrolló como un intento de superar las investigaciones reflexológicas e idealistas de su tiempo. Vygotsky se quejaba con frecuencia de que la psicología inspirada en la reflexología era una psicología del comportamiento sin mente, y que la psicología inspirada en el idealismo subjetivo (introspección, por ejemplo) era una teoría de la mente sin comportamiento. Siguiendo los pasos de Spinoza (1989), Vygotsky trataba de superar las teorías dualistas (teorías basadas en dos sistemas, el interno y el externo) y formular una teoría monista de la conciencia. Pero su esfuerzo no está excento de contradicciones. Veresov —considerado como uno de los especialistas contemporáneos más importantes de Vygotsky— dijo:

> *¿Qué significa esencialmente abandonar el postulado de dos sistemas de existencia y a qué conclusiones y efectos lógicos conduce esto? Esto conduce lógicamente a un rechazo total de la idea de existencia de lo interno y lo externo y en consecuencia al rechazo radical del concepto de interiorización como mecanismo de origen de las estructuras internas de la conciencia. De hecho, el concepto de interiorización pierde todo sentido.* (Veresov, 1999, p. 226)

Los últimos trabajos de Vygotsky muestran su esfuerzo por superar esas dificultades (en particular su búsqueda de una definición amplia de significado). No voy a discutir esas ideas aquí, pues mi intención es únicamente mostrar que la teoría de Vygotsky, basada en la idea de interiorización, no está excenta de dificultades teóricas que tienen implicaciones en nuestras concepciones de aprendizaje.

3. Objetivación

Si concebimos el saber como *potencialidad* tal como lo sugerí anteriormente —como una secuencia de acciones codificadas histórica y culturalmente que se materializan continuamente en la práctica social—, el saber no puede ser algo que se "posee" o se "alcanza". El saber es más bien algo diferente de nosotros, algo que *encontramos*, que nos *objeta* (es decir, se nos opone). La *objetivación* es precisamente el proceso de reconocimiento de lo que nos objeta —sistemas de ideas, significados culturales, formas de pensamiento, etc.[20]

La objetivación, como podemos ver, enfatiza la idea de *alteridad* —la cualidad de no ser nosotros. En oposición a la definición estándar de ideas, según la cual estas nacen en nosotros y son parte de nuestra vida mental, para la teoría de la objetivación las ideas y formas de pensamiento existen independientemente de cada uno de nosotros. Desde un punto de vista filogenético, "El conocimiento, las destrezas y habilidades", dice Mikhailov, "existen sin mi" (1980, p. 200). Los encontramos en el curso de nuestra vida como objetos externos.

En la *Lógica Sucinta*, Hegel dice:

> *Es un error imaginar que los objetos que forman el contenido de nuestras ideas mentales vienen primero… Más bien el concepto es primero; y las cosas son lo que son por medio de la acción del concepto inmanente en ellas.* (Hegel, 2009, p. 329)

El encuentro y reconocimiento de sistemas de pensamiento, significados culturales, etc.—su objetivación—, no es un proceso simple. En la Figura 9 vemos un chimpancé adulto llamado Yo rompiendo nueces de Coula. Con su mano derecha Yo coloca la nuez sobre el yunque y al mismo tiempo sostiene la piedra martillo con su mano izquierda, mientras los jóvenes chimpancés a derecha e izquierda lo miran atentamente. Los jóvenes chimpancés aún no dominan las habilidades motoras y conceptuales relativamente sofisticadas que se requieren para romper la nuez. Esas habilidades *ya existen en su cultura* y se convertirán en parte del repertorio de acción y reflexión de los jóvenes chimpancés después de un largo período de observación y práctica intensa.

De igual manera, mis estudiantes de segundo grado no necesariamente dominan las habilidades motoras y conceptuales, relativamente sofisticadas, necesarias para extender las secuencias aritméticas. Por ejemplo, un matemático identificaría sin dificultad los aspectos de los términos de la Figura 10 (ver capítulo anterior) que son relevantes para la tarea de generalización: probablemente vería los términos como divididos en dos filas y notaría rápidamente la relación *funcional* entre el número del término y el número de cuadrados en cada una de las filas. La percepción de esas relaciones

20 Más adelante daré una definición más operacional de la objetivación, después de introducir los conceptos necesarios.

variacionales normalmente es tan rápida que el matemático ni siquiera se da cuenta del trabajo complejo que hay tras ella. Nuestro matemático también extendería sin dificultad la propiedad identificada a otros términos que no están presentes en el campo perceptivo, como el término 100, y concluiría que ese término tiene 100+101 cuadrados, es decir 201 (ver Figura 14). O aún mejor, que el número de cuadrados de cualquier término, por ejemplo n, es 2n+1.

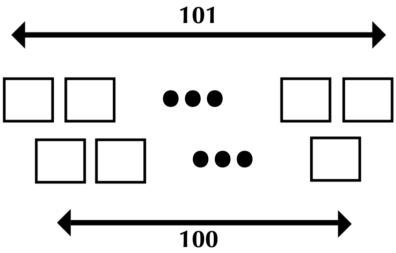


Figura 14. Imaginación rápida del término 100, para ojos entrenados, reportada con frecuencia.

El ojo novato no necesariamente ve la secuencia de esa manera. La Figura 15 muestra un ejemplo de cómo un estudiante de segundo grado extiende la secuencia más allá de los cuatro términos dados.

Figura 15. Términos 5 y 6 dibujados por un estudiante de grado 2.

El estudiante se enfoca en la *numerosidad* de los cuadrados, dejando en la periferia la *espacialidad* de los términos (Radford, 2011). No podemos decir que la respuesta del estudiante en la Figura 15 sea errónea. La respuesta tiene sentido para el estudiante, aunque probablemente es cierto que, al enfocarse en la numerosidad de los términos de la secuencia, puede resultar más difícil llegar a una fórmula general como 2n+1. Esto es lo que hemos observado una y otra vez en nuestras investigaciones con estudiantes menores de escuela primaria y con estudiantes mayores (13-17 años). Los estudiantes tienden a utilizar métodos de ensayo y error que no son algebraicos, sino aritméticos (Radford, 2008, 2010).

El problema no radica en que los estudiantes no *ven* las dos filas de términos. En la Figura 16 a continuación, vemos un estudiante de segundo grado enfrentado por primera vez a una tarea de generalización del tipo dado en la Figura 10 (capítulo anterior); en la Figura 16 vemos al estudiante señalando con su bolígrafo la fila de arriba, luego la fila de abajo, después de mover el bolígrafo entre las filas para distinguirlas. Sin embargo, cuando el estudiante dibuja el término 5, la dimensión *espacial* de los términos es relegada a un segundo plano y no tiene un rol organizador en el dibujo del término. Dibuja una *hilera* de rectángulos. El problema radica más bien en la no identificación de que la espacialidad de los términos nos da claves interesantes desde el punto de vista algebraico.

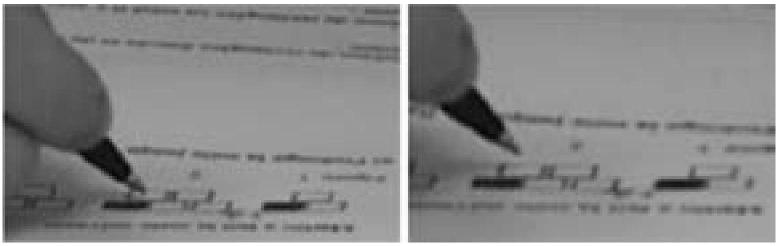


Figura 16. Un estudiante investigando la secuencia; pensando en voz alta, señala corporealmente la fila de arriba (izquierda) y la fila de abajo (derecha) del término 2.

Las formas de acción y reflexión codificadas culturalmente no son invocadas naturalmente por los estudiantes. Estas formas existen potencialmente, pero para los estudiantes estas permanecen irreconocibles y no identificadas. Son posibilidad sin actualización.

El aprendizaje consistirá precisamente en encontrar esas formas y "agarrarlas" como sugiere la etimología. En efecto, aprender viene de latín *apprehendere*, compuesto de dos prefijos: *ad*, que quiere decir *hacia*, y *prae-,* que quiere decir *antes*, y el verbo *hendere*, que quiere decir *atrapar*, *agarrar*. El aprendizaje es el encuentro con el saber y su transformación subjetiva en algo que aparece a la conciencia. Esta transformación es lo que llamo *objetivación*.

Hegel utiliza dos expresiones que pueden ayudar a aclarar el concepto de objetivación. El filósofo alemán usa la expresión "en sí" para referirse a algo puramente *potencial*. Se trata de las formas ideales que mencioné anteriormente. Son lo que son: pura posibilidad de acción y reflexión en un determinado punto histórico y cultural. Pueden ser las formas de acción y reflexión codificadas del matemático o las formas codificadas del chimpancé para romper nueces. Cuando encontramos y tomamos conciencia del saber "en sí", nuestra conciencia se transforma y "captura" el saber "en sí" como algo determinado desde el punto de vista de la conciencia del sujeto concreto, como algo significante desde su punto de vista subjetivo. Lo "en sí" se vuelve actualidad, un "ser para la conciencia", y esto es lo que Hegel llama "ser para sí" (Hegel, 2009).

En el proceso de aprendizaje, la forma ideal (lo "*en sí*") se actualiza. El "para sí" se convierte en la la materialización subjetiva del "en sí". El "para sí" aparece como la forma desarrollada del "en sí", y en donde el primero encuentra y se reconoce en el segundo y el segundo en el primero (Gardener, n. d.). Esta transformación del "en sí" en "para sí" en el acto de aprendizaje no significa, sin embargo, un acto de sumisión o de subordinación. Su autenticidad legítima exige, en efecto, un espacio de disidencia. *El aprendizaje es el reconocimiento del saber "en sí", no su adopción incondicional*. Es por eso que, desde la perspectiva crítica que proponemos aquí, el aprendizaje y la enseñanza son vistos como procesos subversivos.

En la próxima sección trataré de dar una definición más operativa de objetivación.

4. Aprendizaje como objetivación

En la teoría de la objetivación, el aprendizaje se teoriza como *procesos de objetivación*, es decir, aquellos procesos sociales de volverse, progresivamente y críticamente, consciente de una forma codificada de pensamiento y de acción —algo que notamos gradualmente y al mismo tiempo adquiere significado. Son procesos de objetivación aquellos actos de notar significativamente algo que se revela a la conciencia por medio de nuestra actividad corpórea, sensorial y artefactual. Es el *notar* o *percibir* algo (lo "en sí") que se revela en la intención emergente proyectada en los signos o en el movimiento kinestésico, en el curso de la actividad práctica concreta —la revelación del "en sí" que se convierte en "para sí" en el curso de su aparición y por lo tanto se transforma en conocimiento *para nosotros*.

Pero en el curso de esta transformación del "en sí" en "para sí", también se transforma la conciencia. Por eso, para la teoría de la objetivación, el aprendizaje no sólo se refiere al conocer, sino también al devenir. Aprender no es una simple imitación o participación consistente con una práctica preestablecida. Aprender no es la *integración* del sujeto a un mundo que le es exterior y extraño, como sugieren las corrientes socioculturales que adoptan el punto de vista de la enculturación. Aprender tampoco es un proceso de inserción del mundo en la interioridad del sujeto, como sugiere el concepto vygotskiano de interiorización. Para la teoría de la objetivación, aprender es más bien la fusión entre modos culturales de reflexionar y actuar y una conciencia que trata de percibirlos (Radford, 2007, pp. 1790-91). Aprender es un encuentro continuo y tenso de transformación dialéctica mutua entre un mundo objetivo (es decir que transciende al individuo como individuo único) e individuos únicos que lo encuentran. En el curso de esa fusión, el mundo que encuentra la conciencia y la conciencia que surge de ese encuentro se transforman continuamente. Es por ello que los procesos de objetivación están imbricados en *procesos de subjetivación* –procesos de creación de un sí particular (y único).[21]

El lector habrá notado que, subyacente al concepto de aprendizaje que propone la teoría de la objetivación, hay un concepto particular de *conciencia*. La conciencia no es considerada en la teoría de la objetivación como un constructo metafísico oculto en alguna parte en una presunta interioridad con la que todos habríamos nacido. Esta metáfora de la interioridad fue inventada a finales de la Antigüedad. Fue desarrollada por Agustín en un contexto religioso y articulada posteriormente por Descartes y su famosa visión dicotómica del mundo: el interior (mente, ideas, conciencia, etc.) y el exterior (el mundo concreto) (Taylor, 1989).

Para la teoría de la objetivación, la conciencia es una reflexión subjetiva y posicionamiento propio sobre el mundo externo. La conciencia es el proceso subjetivo emocional, afectivo, por medio del cual cada uno de nosotros como individuo reflexiona sobre el mundo y se orienta en él. Esta reflexión no es contemplativa. La conciencia individual es una forma específicamente humana de reflexión subjetiva sobre la realidad concreta, durante la cual formamos sensibilidades culturales para ponderar, reflexionar, comprender, disentir, objetar y sentir a los otros, a nosotros mismos y a nuestro mundo. La conciencia sólo puede entenderse como el producto de relaciones y mediaciones histórico-culturales emergentes y contingentes, que no son dadas, sino que “surgen durante el establecimiento y el desarrollo de la sociedad” (Leont’ev, 1978, p. 79) Desde este punto de vista, la conciencia aparece en la vida concreta, no como su origen, sino como su resultado.

Resumiendo, en esta sección y la anterior introduje el concepto de objetivación. Comencé presentándolo como una forma de *encuentro* con sistemas de pensamiento y sus significados culturales, sistemas y significados que

21 Hablaremos con mucho más detenimiento de los procesos de subjetivación en el próximo capítulo.

anteceden nuestra aparición en el mundo. Luego, refiné el concepto como la transformación del saber "en sí" en un saber "para sí" (en la terminología propuesta, el saber "para sí" es otro término para designar el conocimiento) y observé que esta transformación equivale a la creación y el crecimiento continuo de la conciencia del individuo: la objetivación es un proceso social a través del cual el individuo progresivamente se hace críticamente consciente de las formas codificadas de pensar y hacer; durante dicho proceso se forma y se transforma la conciencia. En la siguiente sección me centraré en algunos aspectos de la investigación práctica y metodológica de la objetivación.

5. Investigar la objetivación

La investigación de la objetivación se enfoca en la manera en que las formas cultural e históricamente codificadas de pensamiento y acción se convierten en objetos de reconocimiento u objetos de conciencia. Dado el rol mediador que tiene la actividad entre el saber y el conocimiento, la actividad es un componente clave de la investigación del proceso de objetivación. La actividad no puede reducirse a la cultura material. Los materiales y artefactos concretos no pueden revelar la conceptualidad que el trabajo humano ha depositado en ellos. La cultura material (artefactos, símbolos, etc.) tiene que integrarse en una *actividad* para hacer aparente la conceptualidad de la cual la cultura material es portadora.

Por ejemplo, en grado 4, dimos a los estudiantes (9-10 años) fichas de bingo para abordar un problema en el que tenían que tratar una secuencia aritmética. El problema se planteó así:

> *Para su cumpleaños, Marc recibió una alcancía con un dólar. Cada semana ahorra dos dólares. Al final de la primera semana tiene tres dólares; al final de la segunda semana tiene cinco dólares y así sucesivamente.*

Les dimos a los estudiantes fichas de bingo de dos colores (azul y rojo) y vasos de plástico numerados que representan la alcancía en la semana 1, 2, etc., para que los estudiantes pudieran modelar el proceso de ahorro hasta la semana 5. Luego se les pidió que generalizaran: tenían que responder preguntas sobre la cantidad de dinero ahorrado en las semanas 10, 15 y 25.

Los estudiantes comenzaron modelando el proceso de ahorro a la manera de la "situación real": colocaron fichas en los vasos (tres fichas en el vaso de la semana 1, etc.). Aunque el modelo era plausible, resultó de poca utilidad para responder las preguntas sobre la cantidad de dinero ahorrado en semanas lejanas (como la 25). De hecho, las fichas se revolvían en los vasos, dificultando la identificación de una estructura matemática posible. La atención de los estudiantes se dirigió a las acciones aditivas secuenciales (añadir dos fichas) que permanecieron no sintetizadas en una estructura multiplicativa más abstracta. Los artefactos eran insuficientes para ayudar a los estudiantes a revelar la conceptualidad general que estábamos buscando. Los artefactos eran portadores de un contenido conceptual cotidiano distante del contenido teórico-algebraico. En cierto momento, los estudiantes terminaron poniendo las fichas en los vasos sin notar ninguna estructura algebraica; el profesor estaba en el proceso de hablar a otro grupo en otro punto del salón. Yo me quité los audífonos, dejé la cámara con la que estaba grabando estos tres estudiantes y me acerqué a ellos. El grupo estaba formado por Albert (el alumno con el brazo estirado en la Figura 17 a la derecha), Krysta (en medio) y Manuel (izquierda). Les sugerí que pusieran las fichas frente a los vasos. Los estudiantes aceptaron mi sugerencia y comenzaron a apilarlas sin distinguir los colores. Luego, les propuse que usaran una ficha azul para representar el dólar inicial en la alcancía. Al seguir esta sugerencia los tres estudiantes crearon un modelo del proceso de ahorro (ver Figura 17).

Figura 17. Modelado de una secuencia aritmética con fichas.

La nueva disposición del material concreto ayudó a los estudiantes a comprender mejor el proceso de ahorro. Sin embargo, no identificaron una fórmula para calcular el ahorro en semanas remotas (como la 15 o la 25) (ver Radford & Roth, 2011). El saber algebraico no apareció revelado a la conciencia de los estudiantes.

El problema es que las formas codificadas de pensamiento (en este ejemplo las formas algebraicas de pensar codificadas culturalmente y relativas a secuencias numéricas) no pueden materializarse o actualizarse directamente. La actualización del saber algebraico está mediada por una actividad (es lo que afirma el diagrama de la Figura 12 del capítulo anterior). El único camino para revelar el saber algebraico es a través de las características de la *actividad* en la que aparece el saber en una forma desarrollada actual. Claro, podríamos recurrir a la actividad que subyace a la enseñanza tradicional: el profesor podría simplemente decir a los alumnos cómo resolver el problema. Aunque posible, esta actividad es muy pobre. No incluye al alumno, más que como observador pasivo. El tipo de toma de conciencia que se desprende de una actividad de ese género es, en consecuencia, también muy pobre. No es ese el género de actividad al que nos queremos referir aquí.

El concepto de actividad que queremos privilegiar abarca mucho más que personas interactuando entre ellas. Es más que un *milieu* de interacción con personas y artefactos. Es una forma de vida, algo orgánico y sistémico, un evento creado por una *búsqueda común* —es decir una búsqueda con otros—de la solución a un problema planteado, búsqueda que es al mismo tiempo cognitiva, emocional y ética. Para que ocurra aprendizaje, el ámbito de lo posible o potencial tiene que aparecer en una manifestación concreta en la conciencia de los estudiantes. Esto requiere una actividad específica que hace que ese saber algebraico aparezca en el mundo concreto, para que el saber quede dotado de un contenido conceptual particular (ver Figura 12). Se trata de una actividad que requiere que el profesor *y* los estudiantes se impliquen en algún tipo de reflexión y acción que presente el contenido conceptual algebraico que se busca, de manera que la potencialidad se materialice de manera conceptualmente fuerte. Para investigar la objetivación, debemos pues investigar la actividad en la que ésta se encuentra subsumida.

En la próxima sección voy a presentar la estructura de la actividad.

6. La estructura de la actividad

La componente Φ (o componente didáctica)

La actividad que ocurre en el aula de matemáticas tiene un *objeto*. Dicho objeto es identificado, a priori, por el proyecto didáctico del profesor. Este objeto puede ser, por ejemplo, el encuentro de los estudiantes con formas culturalmente codificadas de pensar algebraicamente sobre secuencias. Puede ser también el encuentro con formas culturalmente codificadas de pensar matemáticamente sobre el movimiento, sobre las fracciones, etc. En todos los casos, mientras el saber es pura posibilidad, la actividad que lo media es un paso hacia la concreción de ese saber. La actividad (que es *sistema en movimiento*) se mueve hacia su *objeto*.

Para que la actividad se despliegue en la dirección de su objeto, conviene identificar una o más *metas*. Estas metas pueden ser, si continuamos con nuestro ejemplo de álgebra, resolver problemas sobre secuencias de manera algebraica. Para alcanzar las metas de la actividad, conviene que se conciban *tareas* específicas. Éstas pueden aparecer como una secuencia de problemas relacionados de dificultad conceptual creciente.

La estructura *objeto-meta-tarea* corresponde a la componente Φ que podemos añadir a nuestra Figura 12a del capítulo anterior y que da como resultado la Figura 18. La relación Φ está relacionada con la intención pedagógica de la actividad de clase. En el caso de la teoría de la objetivación, esta componente implica un análisis epistemológico del contenido matemático que complementamos con un *análisis a priori* (Artigue, 1995, 2009).

La actividad propiamente dicha

La actividad propiamente dicha es el proceso que *actualiza* la potencialidad en una actualización que es siempre individual o singular. Expresémosla con la letra griega Θ en la Figura 18.

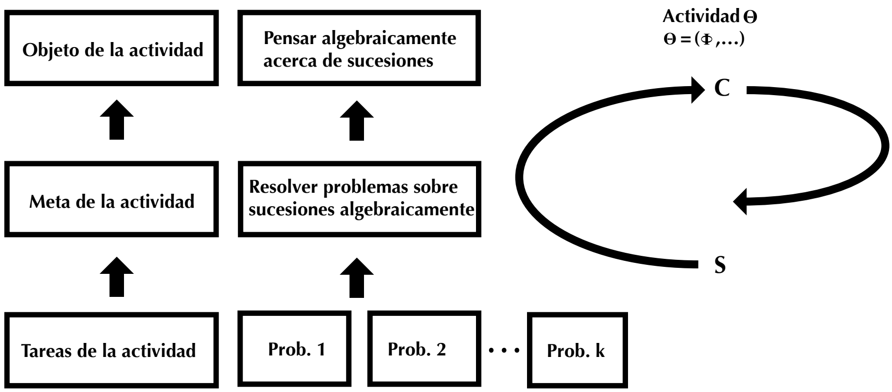


Figura 18. La estructura de la actividad: la actividad Θ es función del proyecto didáctico **Φ** y otras variables.

Miremos en mayor detalle la actividad Θ. La actividad Θ que actualiza el saber S en un conocimiento, C, es un proceso sujeto a cambio: es lo que la discontinuidad de las flechas sugiere. En otras palabras, si bien es cierto que la actividad media S y C, S y C median también a la actividad. Esta mediación recíproca es precisamente el significado de la naturaleza de los elementos en un proceso dialéctico.

La actividad es un proceso situado en el espacio y el tiempo que, aunque afectado por el proyecto didáctico Φ, no puede determinarse por anticipado. Los profesores e investigadores pueden tener una idea, pero el proceso no es mecánico ni determinístico. Depende de cómo los estudiantes y profesores se implican en la actividad, de cómo responden unos a otros, de sus relaciones dinámicas al saber en general y a las instituciones, etc.

En el caso de la teoría de la objetivación, normalmente identificamos ‘momentos’ en la actividad. En general, dividimos la clase en pequeños grupos de dos, tres o cuatro estudiantes. El primer ‘momento’ es una presentación de la actividad por parte del profesor (ver Figura 19). Luego, los estudiantes trabajan en grupos pequeños. Luego, el profesor visita los grupos y hace preguntas a los estudiantes, les da retroalimentación, etc. (ver “discusión profesor-estudiantes” en la Figura 19). En determinado momento, el profesor puede invitar a la clase a una discusión general en la que los grupos pueden presentar sus ideas y otros grupos pueden interpelarlos críticamente o hacer sugerencias para mejorar o generalizar (ver “discusión general” en la Figura 19). La clase puede terminar allí o continuar nuevamente en grupos pequeños, etc.[22]

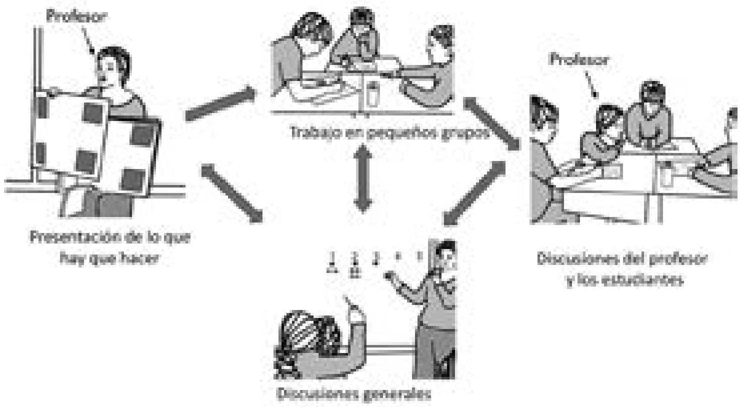


Figura 19. La actividad Θ y algunos de sus ‘momentos’.

La objetivación ocurre cuando los estudiantes y el profesor, a través de su actividad práctica conjunta, revelan el saber, es decir lo transforman de saber “en sí” en conocimiento, es decir, en saber “para sí”. En otras palabras, cuando hacen aparecer en el singular que lo materializa la conceptualidad buscada del saber. Aquí la objetivación ocurre cuando el singular —es decir,

22 Otro momento puede incluir discusiones entre grupos, como sugerimos al final del capítulo 6.

eso que se revela a la conciencia— actualiza una forma algebraica de mirar la secuencia de ahorro. En nuestro ejemplo, después de que los estudiantes terminaron de modelar las fichas de bingo como se muestra en la Figura 17, enfrentaron la pregunta del ahorro en la semana 10. Los estudiantes sugirieron doblar los ahorros de la semana 5 y retirar una de las fichas azules (ver Figura 20).

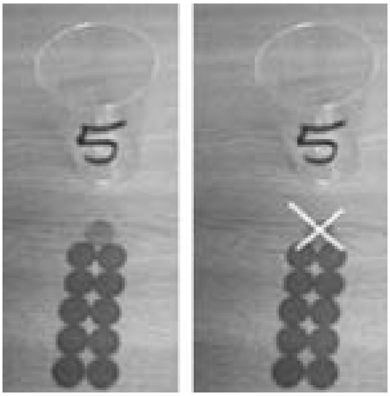


Figura 20. La estrategia de los estudiantes para calcular los ahorros en la semana 10.

Así que, en lugar de la expresión esperada 10x2 + 1, los estudiantes sugieren 11+10. Cuando la profesora Giroux intervino en el grupo, Krysta estaba ayudando a Manuel quien estaba escribiendo en la guía de la actividad. La profesora Giroux tomó el quinto vaso (imagen 1 en la Figura 21; nótese que no aparece el primer vaso) y le dijo a Albert:

1. Profesora Giroux: ¿qué hicieron aquí? 5… (*señalando las fichas rojas; ver imagen 2 en la Figura 21*) ¿veces…?
2. Albert: …2
3. Profesora Giroux: (*Señalando la ficha azul; ver imagen 3*) ¿más?
4. Albert: 1

Luego la Profesora Giroux tomó el vaso de la semana 5, lo movió a su izquierda a un lugar donde se esperaría que estuviera el de la semana 10 si se hubiera extendido materialmente la secuencia y preguntó:

Profesora Giroux: ¿Qué harían para la semana 10, si estuviera aquí? (*ver imagen 4*).

Albert no dijo la expresión esperada. Tanto el profesor como el estudiante estaban muy tensos en ese momento (ver imagen 5). La Profesora Giroux recomienza:

5. Profesora Giroux: (*tomando de nuevo el vaso de la semana 5*) ¿Qué hicieron aquí? (imagen 6).
6. Albert: (*toma una larga inspiración y golpea el escritorio con el bolígrafo, mientras la Profesora Giroux sostiene el vaso de la semana 5; ver imagen 7*) Ok.
7. Profesora Giroux: (*aún sostiene el vaso, pronuncia suavemente*) 5…
8. Albert: (*en sincronía con el gesto de la Profesora Giroux que señala al lado de las fichas rojas; ver imagen 8*) veces 2…
9. Krysta: (*que ha estado siguiendo la discusión*) veces 2 igual…
10. Profesora Giroux: (*Señala ahora la ficha azul; ver imagen 9*) más 1.
11. Albert: (*Casi al mismo tiempo*) más 1.
12. Profesora Giroux: (*Señalando ahora un espacio vacío donde iría la semana 10; ver imagen 10*) ¿10?
13. Albert: (*la Profesora Giroux señala en silencio el lugar donde deberían estar las fichas rojas; imagen 11*) veces 2.
14. Krysta: (*al mismo tiempo*) veces 2.
15. Profesora Giroux: (*señala en silencio el lugar donde debería estar la ficha azul; ver imagen 12*)
16. Krysta: más 1.
17. Albert: (*mira a la profesora*) ¿menos 1?, ¿veces 2, menos 1?, ¿más 1?

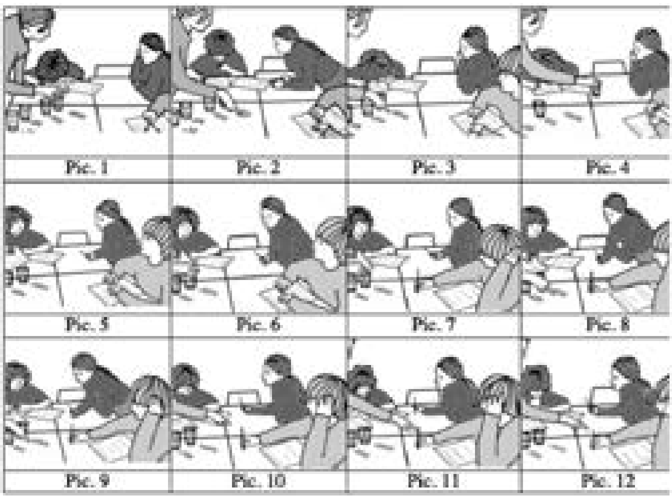


Figura 21. Imágenes 1-12 La profesora Giroux y Albert trabajando juntos.

En el número 5 la profesora invita a Albert a buscar de nuevo la fórmula o secuencia de cálculos para el ahorro. Pregunta: "¿qué hicieron aquí?" (frase 5, imagen 6). Albert demuestra aceptación de la invitación de la profesora con todo su cuerpo: Toma una profunda inspiración y golpea el escritorio con su bolígrafo (imagen 7). La manera como la profesora plantea sus preguntas anima: da a entender que Albert puede resolver el problema pero no se ha fijado lo suficiente en lo que marca la configuración de las fichas y no ha notado lo que se espera que vea —es decir, la estructura matemática desde un punto de vista algebraico.

Está implícito que la profesora conoce esa estructura algebraica. Pero no basta con saberla. No basta porque la profesora no puede inyectar esa estructura en la conciencia del estudiante. Para que el saber aparezca en lo que llamamos en el capítulo anterior una forma singular desarrollada, *tanto el estudiante como el profesor tienen que trabajar juntos*. El profesor y el estudiante deben implicarse en un proceso de objetivación. Sucederá cuando el saber buscado, encarnado en la forma singular desarrollada, abandone el ámbito de la atención latente, deje de ser saber "en sí", y cruce la frontera de la atención explícita en la conciencia de Albert para convertirse en conocimiento (es decir, en un saber "para sí"). Pero Albert y la profesora no han llegado allí.

A pesar del resultado no concluyente de la interacción en las líneas 4-5 del diálogo, en 5 la profesora comienza de nuevo una acción conjunta con una palabra invitadora: "cinco", que pronuncia mientras sostiene el quinto vaso. Sin hablar, mueve la mano para señalar las fichas rojas (ver imagen 8). La voz de Albert llena el espacio del silencio de la profesora. Dice "veces dos". La profesora apunta entonces a la ficha azul (imagen 9) y dice, casi al mismo tiempo que Albert, "más 1". Luego mueve su mano al punto donde debería estar el modelo de la semana 10 (imagen 10) y dice suavemente "¿10?" Sin hablar señala la posición imaginaria de las fichas rojas (imagen 11), mientras Albert mira la mano dice "veces 2" (ver imagen 13). La profesora mueve la mano en silencio para señalar la posición imaginaria de la ficha azul (ver imagen 12) y Albert dice "¿menos 1? ¿Veces 2 menos 1? ¿Más 1?".

En este punto de la actividad, el encuentro de Albert con el saber algebraico casi se ha dado. Albert aún tiene que controlar mejor los diferentes elementos de la fórmula. No le tomará mucho tiempo. Unos minutos más tarde la profesora organizó una discusión general. Invitó a varios estudiantes a presentar sus ideas. En cierto momento le pidió a Albert que explicara los cálculos para determinar la cantidad de dinero al final de la semana 2. A este punto, la profesora no está segura que Albert haya ya tomado nota de todos los elementos de la formula buscada. Albert tampoco. Pero acepta la invitación y responde con cierta vacilación:

18. Albert: *(refiriéndose a la segunda semana)* es 2, la segunda semana, es dos veces porque se añadieron 2 eh, dólares…
19. Profesora Giroux: Bien…
20. Albert: y uno, más uno, como uno.
21. Profesora Giroux: bien… haz lo mismo para la semana 4. La misma idea, 4.
22. Albert: 4 veces 2…
23. Profesora Giroux: 4 veces 2 porque es el doble…
24. Albert: más uno, 4 veces 2 más uno igual… 9.

La clase terminó en ese momento. Al día siguiente, los estudiantes de esta clase trabajaron sobre un problema isomorfo. Esta vez la alcancía tenía 6 dólares cuando Marianne la recibió y ahorró $3 por semana, de manera que al final de la primera semana tenía $9, al final de la segunda semana tenía $12, y así sucesivamente. Mientras hablaba con sus compañeros sobre cómo calcular el ahorro al final de la semana 10, Albert dijo: "añade 3 dólares cada semana. Así que lo haremos así, 3 veces 10 es 30 [más 6] es 36. Sí, es 36".

En un largo proceso de objetivación, Albert reconoció progresivamente la estructura matemática general subyacente al proceso de ahorro. Albert fue capaz de extender la forma culturalmente codificada de conocimiento, que era la meta de esas clases de matemáticas, a nuevas situaciones durante una evaluación que se realizó a toda la clase más de una semana después de terminadas las clases de álgebra. En la evaluación se pedía encontrar una expresión para el término 25 de la secuencia de la Figura 22.

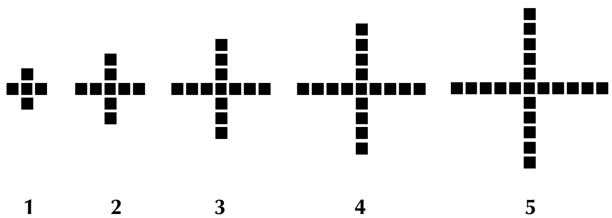


Figura 22. Una secuencia en una evaluación que se hizo a los estudiantes más de una semana después.

La respuesta de Albert fue: 25*4 + 1. Incluso hizo algo más, pues sugirió la siguiente fórmula para cualquier término de la secuencia:

__*4 +1=___

En sus palabras, la primera línea "es para poner el número del término". El número 4 significa "el número de cuadrados que se añaden cada vez. El número 1 es el primero con el que se empezó". La segunda línea "es la respuesta".

Se produjo aprendizaje. El saber cultural "en sí" se transformó en saber "para sí", transformándose al mismo tiempo en conocimiento *para Albert*. Esta transformación conlleva una nueva forma de percibir, hablar, y tratar conceptualmente con secuencias— una nueva forma de conciencia cuyo contenido emocional aparece claramente en la duda que expresa Albert en la línea 17 del diálogo anterior y que luego se remplaza por una manera segura de calcular. La objetivación, o la transformación del saber "en sí" en un objeto de conciencia, no es el resultado de acciones individuales, ni el resultado de una contemplación. La transformación es el resultado de una actividad sensible, material y conjunta—una actividad a la que se arriesgaron Albert y la Profesora Giroux. Aprender siempre es un esfuerzo riesgoso, pues requiere que dejemos la comodidad de nuestro propio nicho solipsista para dirigirnos a algo que no es nosotros, una región desconocida donde sin embargo podemos hacer nuestro hogar.

Por supuesto, aún hay muchas cosas por aprender, pues aprender no es un estado sino un proceso. Por eso hablamos de la objetivación como un momento en la constitución de la conciencia, no como un "estado".

7. Síntesis

En este capítulo he presentado un concepto clave de la teoría de la objetivación: el concepto de aprendizaje. Sostuve que el saber es una forma de reflexión cultural e históricamente codificada. Estas formas codificadas se nos presentan como simples potencialidades. A través de su actualización, esas formas codificadas, generales, adquieren un contenido conceptual. Este contenido conceptual actualizado o materializado es el conocimiento. Pero el contenido conceptual no es algo no mediado. Para ganar actualidad, para ser real, el contenido conceptual debe aparecer en una *actividad*. En otras palabras, la forma como llegamos a conocer está determinada (no de manera causal, sino dialéctica) por la actividad por medio de la cual se materializa el saber. Esta consustancialidad del conocimiento y la actividad se refleja en la manera en que las formas y modos de interacción social, culturales, materiales e ideales, que están a la base de la actividad, imprimen su marca en el contenido conceptual actualizado. Ésta es una de las ideas centrales expuestas aquí y que son distintivas de la teoría de la actividad en general (Leont'ev, 1978) y de la teoría de la objetivación en particular.

Pero a causa de la naturaleza mediada inherente al conocimiento, conocer no es un proceso directo. Aquí es donde entra en escena el aprendizaje. Conocer necesita aprendizaje. En la teoría de la objetivación, el aprendizaje se concibe como el encuentro consciente y deliberado con formas histórica y culturalmente codificadas de pensamiento y acción. Más precisamente, el aprendizaje se describe como procesos de objetivación. Dichos procesos se definen como procesos de actividad por medio de los cuales el saber "en sí" adquiere una forma particular desarrollada —la única manera de convertirse en objeto de conciencia, y por lo tanto en conocimiento para nosotros (saber "para sí").

El ejemplo discutido en la última sección ilustra estas ideas. Presentamos a estudiantes de grado 4 una serie de tareas (de ahorro) de dificultad creciente, cuya meta era la actualización de una forma codificada de pensar que reconocemos como algebraica. Esta forma de pensar es pura potencialidad. No puede aparecer de la nada. Sólo puede actualizarse, es decir, llenarse con contenido teórico, por medio de una actividad Θ que la materializa. Nuestro diseño didáctico favoreció un contenido teórico en el que se buscaba una fórmula generalizada por medio de la mediación de vasos, fichas, papel, bolígrafo y formas elaboradas de interacción social—nuestra componente Φ (ver Figura 18).

Los extractos presentados muestran que la forma codificada de pensamiento, al comienzo pasó desapercibida para los alumnos, que recurrieron a formas aritméticas de generalización. Para que pudieran notar las formas de pensamiento algebraico, la actividad de clase tiene que evolucionar de manera que las formas algebraicas de pensar se conviertan en objetos de conciencia, es decir sean *reconocidas*. Primero, esto conlleva la superación de la diferencia, en el devenir conjunto del "Yo" y el "eso". Según Heidegger, "Reconocer es *re-conocer*= *difer*enciar, es decir, algo como eso y eso, y por lo tanto entender *eso* como "*eso* mismo" (Heidegger, 2004, p. 16; cursiva en el original).

Ese "eso" que aún-no-es-nosotros aparece tímidamente en las frases 5 y 6, cuando Albert comienza a notar que puede haber una manera diferente de *ver* las fichas. Empieza una diferenciación, es decir un reconocimiento. El siguiente intercambio intensivo entre la Profesora Giroux y Albert, en el que realmente trabajan juntos, condujo a una materialización de la forma codificada de pensamiento. Por medio de un proceso conjunto de objetivación en el que las fichas de bingo y otros objetos materiales, los gestos de la profesora y las palabras de Albert aparecen juntos y forman una *unidad*, la forma codificada de pensamiento algebraico aparece en la conciencia dotada de un contenido teórico específico. Este contenido teórico singular no se aplica solamente a este o aquel problema de alcancía, de la misma manera en que el saber romper nueces no se aplica a esta o aquella nuez. Albert es capaz de aplicarlo también a otros problemas, como el problema abordado durante la evaluación, que no tiene nada que ver con ahorro. La forma singular desarrollada que encarna al general es en realidad una *totalidad*. Y cuando es totalidad ocurre el aprendizaje.

Referencias

Artigue, M. (1995). The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics education. In Y. M. Pothier (Ed.), *Proceedings of the 1995 annual meeting of the Canadian mathematics education study group* (pp. 7-21). University of Western Ontario.

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winslow (Ed.), *Nordic research in mathematics education. Proceedings ofNORMA08.* Rotterdam: Sense Publishers.

Gardener, S. (n.d.). Hegel: Glossary. Retrieved from http://philosophyfaculty.ucsd.edu/faculty/ewatkins/Hegel-Glossary.pdf.

Hegel, G. (2009). *Logic.* (W. Wallace, Trans.). Pacifica, CA: MIA. (Original work published 1830)

Heidegger, M. (2004). *On the essence of language.* New York: SUNY. (Original work published 1999)

Janet, P. (1929). *L'evolution psychologique de la personnalite* [The psychological evolution of personality]. Paris: Masson.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Mikhailov, F. T. (1980). *The riddle of the self.* Moscow: Progress Publishers.

Radford, L. (2007). Towards a cultural theory of learning. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the fifth congress of the european society for research in mathematics education (CERME-5)* (pp. 1782-1797). Lamaca, Cyprus.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - the International Journal on Mathematics Education, 40{* 1), 83-96. Doi:10.1007/sll858-007-0061-0

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12(1),* 1-19. Doi: 10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In *Proceedings of the 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara: PME.

Radford, L., & Roth, W.-M. (2011). Intercorporeality and ethical commitment: An activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2-3), 227-245. Doi: 10.1007/s10649-010-9282-1

Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking.* Oxford: Oxford University Press.

Spinoza, B. (1989). *Ethics including the improvement of the understanding.* (R. Elwes, Trans.). Buffalo: Prometheus. (Original work published 1667)

Taylor, C. (1989). *Sources of the self.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Veresov, N. (1999). *Undiscovered Vygotsky. Etudes on the pre-history of cultural-historical psychology.* Frankfurt: Peter Lang.

Vygotsky, L. (1929). The problem of the cultural development of the child. *Journal of Genetic Psychology, 36,* 415-434.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society.* Cambridge, Ma: Harvard University Press.

Agradecimientos

Este capítulo retoma ideas presentadas previamente en mi artículo *Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning*, publicado en la revista abierta (open journal) *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(1), 7-44, 2013. Este capítulo está basado en las traducciones al español realizadas por Rodolfo Vergel Causado y Martín Eduardo Acosta Gempeler, a quienes agradezco profundamente su ayuda. También agradezco a Alfonso Ulises Salinas Hernández por su relectura y comentarios.

Ser, Subjetividad y Alienación

Luis Radford

1. Introducción

Un domingo de septiembre de 2004, me encontraba almorzando con Guy Brousseau. Ambos fuimos invitados por Bruno D'Amore a la *Convención de didáctica de la matemática* que Bruno y Gianfranco Arrigo organizaron en la Alta Escuela Pedagógica en Locarno, Suiza. En esa época estaba trabajando en el primer borrador de la teoría de la objetivación (Radford, 2006) y tenía la impresión que existían importantes diferencias entre lo que yo estaba tratando de articular y la muy profunda e inspiradora teoría de Guy —la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1997). Pasamos discutiendo todo el almuerzo. Recuerdo haberle preguntado a Guy sobre la postura ontólogica de la teoría de situaciones didácticas. ¿Se trata de una teoría de tipo realista? Es decir, ¿acaso la teoría supone que las matemáticas, a través de su arsenal conceptual, describen un mundo externo, independiente de la actividad humana? Luego de comentar que, en efecto, no es ese tipo de preguntas el que se discute generalmente en los artículos didácticos, Guy explicó que la teoría de situaciones no sería realista en ese sentido, aduciendo que hay, por debajo de los conceptos matemáticos que formamos, mecanismos humanos conceptuales de comprehensión del mundo.

Luego vino mi turno de dar respuesta a la pregunta que yo mismo había formulado. Era claro que llegábamos a conclusiones similares, aunque, en mis razones tenían más que ver con argumentos respecto a la cultura. "¿Ves?" —observó Guy— "Estamos de acuerdo." Las diferencias no se presentaron sino hasta llegar a la hora del postre, cuando abordamos la cuestión de la relación entre el profesor y los estudiantes. Para la teoría de las situaciones didácticas, no existe tal cosa como que el profesor y los estudiantes trabajen de manera *conjunta* en la solución de un problema —ciertamente no en el sentido en que lo hemos concebido en la teoría de la objetivación (ver el ejemplo de la profesora Giroux y Albert, discutido en el capítulo anterior).

En un artículo en el que mi colega Michael-Wolff Roth y yo nos empeñamos en explorar otras maneras de conceptualizar la relación entre el docente y el estudiante sugerimos la idea de "*togethering*" (Radford y Roth, 2011). *Togethering* es un término que no existe en inglés. Es la unión del adverbio "together" que quiere decir "juntos" y del sufijo "-ing", que añade la idea de acción. Podríamos intentar traducir "togethering" como "haciendo o trabajando juntos, en la misma dirección, hombro con hombro." "Togethering" supone que no hay línea de demarcación entre el docente y el estudiante. Aunque el docente no está al mismo nivel que el estudiante en cuanto a su familiarización con los saberes matemáticos, los dos trabajan *juntos* hacia la revelación o actualización del saber matemático.

Es por ello que "togethering" no podría incorporarse a la teoría de situaciones didácticas. De hecho, en la teoría de las situaciones didácticas, uno de los papeles del docente es asegurarse de que el estudiante acepte la responsabilidad de resolver el problema por su propia cuenta, lo cual en esa teoría es llamado *devolución*. La cuestión es que existe, y siempre debe existir, una brecha entre el profesor y el estudiante. Profesores y estudiantes son conceptualizados aquí como individuos que obedecen a una división de trabajo implícitamente formulada en un contrato didáctico. De acuerdo a este contrato didáctico, la solución matemática tiene que efectuarla el estudiante, no el docente. En palabras de Brousseau, "Entre el momento en que el estudiante acepta el problema como si fuera suyo [es decir, el momento de la devolución —LR] y el momento en el que el estudiante produce su respuesta, el profesor se abstiene de interferir y sugerir el saber que se quiere ver aparecer" (Brouseau, 1997, p. 30).

Poco a poco empezamos a darnos cuenta que Guy y yo no estábamos conceptualizando al estudiante y al maestro de la misma manera. Poco a poco, mientras comíamos el postre, empezamos a darnos cuenta de que hay un abismo teórico entre lo que él propone y lo que yo sugiero. Naturalmente, se trata de una diferencia sumamente importante. Durante nuestra discusión mencioné a Guy que, en su teorización, él se estaba apoyando en el concepto de individuo que propuso la filosofía de la ilustración en el siglo XVIII, en particular a través de la obra de Kant y su idea del sujeto autónomo. En investigaciones socioculturales, en particular en aquellas que se basan en los trabajos de Vygotsky, la autonomía no es una condición necesaria para que ocurra el aprendizaje. La Autonomía es su *resultado*. Es suficiente pensar en el concepto de *zona de desarrollo próximo* de Vygotsky. Una de las diferencias entre la zona de desarrollo actual y la zona de desarrollo próximo es, en efecto, la autonomía del alumno.

Dice Vygotsky:

> *la diferencia entre … el nivel de desarrollo actual, que está determinado por los problemas resueltos de manera autónoma y el nivel que alcanza el niño cuando resuelve problemas ya no solo, sino que en colaboración, determina precisamente la zona de desarrollo próximo. (Vygotsky, 1985, p. 270; 1987, p. 209)*

Guy tomó nota de nuestro desacuerdo. Escribió algo en un grueso y elegante cuaderno que sacó de su maletín, mientras que yo escribía algunas notas en un cuadernillo que había tomado de la mesa de noche del hotel. Guy me miró con una sonrisa amistosa, mientras que recogía el último pedazo de postre sobre su platillo. Entendimos que nuestras concepciones sobre este punto crucial de la educación eran definitivamente diferentes.

La cuestión de la autonomía en el aprendizaje es tan central para la teoría de las situaciones didácticas que un cambio en torno a ella podría comprometer la teoría. Otras cosas podrían eventualmente ser cambiadas, pero ciertamente no la cuestión de la autonomía. De hecho, toda una serie de conceptos de la teoría de las situaciones didácticas está orgánicamente ligada a esa idea del alumno autónomo —por ejemplo, devolución, la cual ya he mencionado, pero también la diferencia entre situaciones didácticas y adidácticas, así como el "Efecto Topaz". La idea de autonomía subyace evidentemente al diseño y comportamiento del *milieu* (es decir, el medio), etc. En todas estas nociones, es el estudiante quien debe tomar la responsabilidad de resolver el problema que se le propone y producir así el saber en cuestión. Por eso dice Brousseau que si el maestro le enseña (explícitamente o implícitamente) al estudiante cómo resolver el problema, el estudiante no ha aprendido matemáticas (Brouseau, 1997, pp. 41-42). No ha aprendido, porque la solución al problema no es del alumno, sino del maestro. En la teoría de situaciones didácticas el estudiante produce su aprendizaje.

La discusión con Guy volvió a mi mente varios años más tarde. Sucedió en Sao Paulo a finales de Octubre del 2008, un viernes en la tarde en una conferencia sobre la teoría de la objetivación. Para ilustrar la idea de objetivación mostré un video clip en el que se observa la interaccion de la profesora Giroux y Albert que discutí en el capítulo anterior. Cuando finalicé mi presentación, un participante levantó la mano y dijo: "ese es un claro ejemplo del Efecto Topaz". De hecho, el efecto Topaz hace referencia a casos en los cuales el profesor busca que el estudiante diga la respuesta; para lograr esto el profesor da pistas al alumno. El profesor sugiere, a diferentes niveles de explicitud, la codiciada respuesta

> *[…] disimulándola bajo códigos didácticos cada vez más transparentes. El problema es cambiado completamente, el profesor pide del estudiante adhesión y negocia un precio inferior de condiciones bajo las cuales los estudiantes acabarán dando la respuesta esperada; [para eso] el profesor termina asumiendo la responsabilidad de la parte esencial del trabajo. (Brousseau, 2003, p. 7)*

Así que en la interacción estudiante-profesor que se halla dentro de la categoría del Efecto Topaz el profesor "guía" las respuestas del estudiante y en consecuencia lo que vemos no es un aprendizaje genuino. El aprendizaje no es genuino porque la respuesta no viene del estudiante. A través de una serie de acciones, sugerencias y pistas, el estudiante es empujado a dar la respuesta esperada. Vistos a través de estos lentes, los gestos y las preguntas de la profesora Giroux podrían ser considerados inapropiados en cuanto que podrían estar sugiriendo la respuesta. La profesora Giroux podría estar poniendo en riesgo la autonomía de Albert en su aprendizaje y, de hecho, impedirla.

Como argumenté en mi respuesta al participante de la conferencia que veía un ejemplo del Efecto Topaz en las acciones de la profesora Giroux, en la teoría de la objetivación, la relación entre el profesor y los estudiantes no es vista a través de los lentes de un contrato didáctico implícito firmado entre dos partes individuales —un contrato que mantiene ambas partes a cierta distancia una de la otra, tratando de maximizar los resultados de su "asociación" contractual. Tampoco la teoría de la objetivación concibe el aprendizaje como algo que tiene que emanar del estudiante. En la teoría de la objetivación la relación docente-estudiante está enmarcada por la idea de actividad o *labor conjunta* y es de naturaleza ética.

La interacción entre individuos (docentes y estudiantes) hace parte de la actividad o labor conjunta en el sentido explicado en el capítulo anterior. Ya que no hay línea divisoría entre "yo" y "el otro," hay espacio para un compromiso verdadero entre los participantes de la actividad. La relación ética que la teoría de la objetivación aporta, borra la separación entre docentes y estudiantes que la teoría de las situaciones didácticas se esfuerza por mantener. Operando sobre formas específicas no egoistas (como la responsabilidad inter-subjectiva) sobre las que regresaré más adelante, tal relación ética permite considerar interacciones tales como las de la profesora Giroux y Albert como propicias para el aprendizaje genuino.

Por supuesto la relación ética basada en una orientación genuina no egoista hacia los otros es algo que tenemos que fomentar. Abandonados a su suerte, nuestros estudiantes continuarán comportándose de acuerdo con los patrones individualistas que permean la mayoría de nuestras sociedades capitalistas contemporáneas y que tienen convertidas nuestras escuelas en instituciones similares a bancos (Freire, 2004): espacios sociales donde los estudiantes llegan a obtener créditos y credenciales que les pueda garantizar un avance personal en la sociedad.

Esta empobrecida versión de la escuela es lo que Baldino & Cabral (1998) y Pais (2011) llaman la escuela como “sistema crediticio”. La situación deplorable en la que se encuentra la escuela hoy en día, situación que resulta de su transformación en un apéndice de la economía política, no significa, empero, que la educación haya perdido toda esperanza emancipadora. La educación tiene un papel muy importante que jugar hoy en día. Su importancia radica precisamente en su potencia para *transformar* el mundo y a los individuos que lo habitan. Es allí donde la educación encuentra su justificación. Si cuando aprendemos algo, seguimos siendo los mismos seres humanos, entonces realmente no hemos aprendido nada. Seguimos siendo sujetos sometidos a las formas predominantes capitalistas de producción y sus formas individualistas de interacción (Radford, 2012). Aprender no es simplemente adquirir un conocimiento, sino transformarse como sujeto humano.

Si consideramos la educación matemática como una especie de apéndice de las matemáticas, es decir como la búsqueda de métodos pedagógicos eficientes para transmitir el saber matemático a los estudiantes, entonces es claro que las discusiones de este tipo no son de interés. La educación matemática podría ser concebida como un apéndice matemático de técnicas sin necesidad de discusiones éticas y preguntas de subjetivación. Pero si consideramos la educación matemática como lo he sugerido en el capítulo 4, es decir, como una práctica social, cultural, política e histórica de creación de nuevos individuos capaces de reflexionar críticamente de manera matemática sobre las cuestiones urgentes de sus comunidades y su mundo, entonces esta discusión cobra mayor importancia (Radford, 2013, 2014).

Para avanzar en esta práctica necesitamos reflexionar acerca de las formas de producción de saber y los modos de interacción social que podemos motivar en las escuelas. No creo que sea una exageración decir que, en la actualidad, lo que la mayoría de los estudiantes encuentran en la clase de matemáticas es alienación. Estar en la clase de matemáticas, es encontrarse en un espacio en el que el estudiante no se reconoce; es estar en un espacio ajeno. En Ontario, muchos estudiantes dejan de seguir los cursos de matemáticas tan pronto como les sea posible. Esto sucede al final de grado 10, a la edad de 15-16 años. Podría dar muchos más ejemplos, pero éste no es mi punto. El punto más bien es cómo parar esto —cómo hacer para que la escuela pare de producir alienación y sujetos alienados.

Este capítulo está organizado de la manera siguiente. En la sección 2 introduzco los conceptos de ser y subjetividad tal y como son concebidos en la teoría de la objetivación. Los lectores notarán una simetría conceptual con los conceptos de saber y conocimiento discutidos en el capítulo 4. En la sección 3 se definen los procesos de subjetivación y se discute su relación con los procesos de objetivación en la escuela. En la sección 4 se aborda el problema de la alienación, que vemos como una enfermedad endémica de la escuela contemporánea. El foco central de la sección 5 es la forma que puede tomar una lucha contra la alienación; arguyo que es necesario repensar las formas de producción de saberes y de cooperación humana en el aula. En la sección 6 presento un ejemplo concreto de nuestro trabajo con maestros.

2. Ser y subjetividad

El concepto de ser que ofrece la teoría de la objetivación está sustentado en lo que podríamos llamar su naturaleza cultural. Lo que esto quiere decir es que nuestra idea de lo que es un individuo, su individualidad (*self*), su "identidad" (para decirlo en términos modernos) y su poder de acción y voluntad (*agency*), son relativos a su momento histórico. Si hubiésemos nacido en la Grecia antigua o en otro período histórico, nos hubiésemos concebido y comportado socialmente de una manera muy distinta de la manera en que lo hacemos hoy en día. Nuestro sentido de lo que es un individuo y de su individualidad hubiése sido muy diferente. En la Atenas de Platón, por ejemplo, en medio de una sociedad articulada alrededor de una distinción entre ciudadanos libres y esclavos, con una valencia negativa al trabajo manual y una valencia positiva al trabajo intelectual, con una obsesión por la diferencia entre opinión y verdad, entre mito y filosofía, nos hubiésemos encontrado con un sentido de individualidad definido por un criterio político-geográfico de inclusión/exclusión (Cambiano, 1993, p. 124) definido, en el ámbito del quehacer cotidiano, alrededor de la oposición entre pasión y temperancia. En esa época, el individuo se define en términos de la lucha por el *control de sí mismo*: la batalla que se gana contra la pasión. Refiriédose al sentido de individualidad (*self*) del tiempo de Platón, dice Taylor:

> *lo que se gana a través de la razón es el control de sí mismo (self-mastery). El buen hombre es 'maestro de sí mismo'… Ser maestro de sí mismo es hacer que la parte superior del alma se imponga a la parte baja del alma, lo que significa que la razón gobierna a los deseos. (Taylor, 1989, p. 115)*

Muy diferente es el concepto contemporáneo de individuo, definido más bien como propietario privado, un sujeto individualista, arrastrado no por la lucha griega de la razón y el orden contra el deseo y el caos, sino por una ética de consumismo y gratificación instantánea, un sujeto urgido socialmente —como lo sugiere Illouz (1997, p. 35)— a expresarse de manera "creativa y auténtica".

Estos ejemplos muestran que la cultura ofrece la "materia prima" a partir de la cual los sujetos forman sus ideas de lo que son (su sentido, su identidad, su poder de acción, etc.). Evidentemente la relación entre esa "materia prima" y los tipos de individuos que resultan no puede verse como una relación lógica, causal o mécanica. La relación es, de hecho, *dialéctica*. Conviene, por consiguiente, distinguir los elementos de la relación dialéctica y empezar por distinguir conceptualmente entre lo que queremos decir por "ser" y lo que llamaremos "subjetividades."

Para dar cuenta de la naturaleza cultural del ser proponemos la definición siguiente. El ser es una categoría general, cultural, ontológica, constituída de formas históricamente codificadas de concepción acerca de los individuos y de las maneras en que estos éstos son llamados a presentarse al mundo y a relacionarse con otros individuos. De manera más precisa, el ser está constituído de formas culturales de estar y vivir en el mundo: formas de concebirse, y de que nos conciban; formas de posicionarse y que nos posicionen; formas del yo y de la alteridad (esto es, de relaciones consigo mismo y con otros). Como el saber, el ser es *potencialidad* (δύναμις, *dunamis*) en el sentido discutido en el capítulo 4.

¿Qué entendemos por subjetividad? Subjetividad es la actualización o *materialización siempre en curso* del ser. La actualización o materialización siempre en curso es un sujeto único, concreto, cuya especificidad resulta del hecho de que ese sujeto es sujeto reflexivo que siente y actúa, siempre en *devenir*: un *proyecto* inacabado e inacabable de vida.

El nombre de ese proceso a través del cual el ser produce subjetividades es la *actividad* humana. Es, en efecto, a través de la actividad humana que nos ponemos en devenir y nos convertimos en individuos inacabados, en flujo constante, y que nos producimos a nosotros mismos con, y a través, de otros, dentro de las posibilidades y límites que ofrece la cultura (Radford, 2008).

La Figura 23a muestra la actividad humana como entidad mediadora que, partiendo del ser (es decir, de formas culturalmente codificadas de *estando-presente-en-el-mundo*), va produciendo subjetividades (individuos inacabados en flujo constante), Sb.

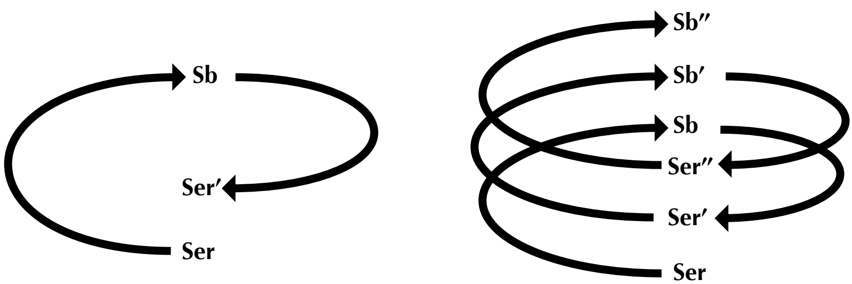
Conviene insistir que la subjetividad no es una "marca" o "copia" del ser. Tales ideas resultan a menudo de:

1. Una concepción estrecha de la cultura (Radford, 2014), según la cual la cultura impone las formas de subjetividad.
2. Una concepción reducida del ser humano, y
3. Una concepción inadecuada de la actividad humana.

Hay que recordar que la actividad no es un mecanismo causal entre ser y subjetividad. Tal y como la concebimos aquí, siguiendo las pautas del materialismo dialéctico, la actividad humana es un **sistema** en constante desarrollo, afectada incesantemente por las entidades que ésta media. También hay que recordar que, en nuestra aproximación, el sujeto humano no es concebido como simple receptor pasivo de influencias externas con una estructura innata propia (Leont'ev, 1974, p. 5). Dice Leont'ev:

> *La actividad es una unidad molar, no una unidad aditiva de la vida física, material del sujeto. . . la actividad no es ni una reacción ni una totalidad de reacciones, sino un sistema que tiene estructura, sus propias transiciones y transformaciones internas, su propio desarrollo. (Leont'ev, 2009, p. 84)*

Volvamos ahora a nuestro sistema dialéctico ser-actividad-subjetividad, mostrado en la Figura 23. Desde el punto de vista del desarrollo cultural, las formas concretas de subjetividad pueden ser culturalmente codificadas, dando por resultado una transformación de la categoría del ser. Pasamos del *ser* al *ser'*. Eso es lo que muestra la Figura 23a.



Figuras 23a (a la izquierda) y 23b (a la derecha). La actividad humana efectúa la mediación del ser que permite su instanciación o materialización como subjetividad.

Demos un ejemplo histórico. Con la expansión de la manufactura a fines del medioevo, aparece una nueva forma de subjetividad: mercaderes, banqueros, cambistas, prestamistas, etc., cuyas acciones se posicionan alrededor de la ganancia monetaria y el interés propio —una subjetividad de tipo muy diferente de la del mundo rural. Poco a poco, se produce una codificación cultural de esas subjetividades que, primero condenadas por la iglesia, pasan a ser toleradas, para terminar, en el curso de muchos años, por ser aceptadas socialmente.

"A partir de 1074," dice Le Goff en su excelente libro *Mercaderes y banqueros en la Edad Media*, "el Papa Gregorio VII ordena a Felipe I, rey de Francia, restituir a los mercaderes italianos que se fueron a su tierra, la mercadería que les había confiscado" (Le Goff, 1956, p. 75). Guillaume Durand declarará un poco más tarde que "Los comerciantes trabajan para el beneficio de todos y hacen obra de utilidad pública trayendo y llevando mercaderías a las ferias" (Le Goff, 1956, p. 80). A través de la actividad humana, que parte de una categoría del ser, son no solamente producidos tipos de subjetividades ya codificadas (y por tanto reconocibles), sino también nuevas subjetividades que, codificadas a su vez dentro de contextos históricos y económicos precisos y sus correspondientes luchas de poder, dan lugar a una categoría aumentada o transformada que hemos designado *Ser′* en la Figura 23a. Aparece así, por ejemplo, una nueva forma de *estando-presente-en-el-mundo*, que valora lo que los mercaderes italianos de fines del medioevo llamaban la *ragione*, es decir, una aproximación reflexiva al mundo que calcula meticulosamente pérdidas y ganancias, que organiza la acción humana de acuerdo a una nueva razón metódica. La Figura 23b muestra la dialéctica de producción de seres, como categorías generales, y de subjetividades, como categorías concretas.

Dentro de este marco general de la concepción cultural del ser y de las subjetividades vemos, pues, que la actividad humana juega un papel importante en la producción de subjetividades. Podemos preguntar: ¿Cómo es la actividad humana que, en la escuela, produce a los maestros y a los alumnos? ¿Cuál es su especificidad? En la próxima sección retomaremos las ideas desarrolladas en esta sección e introduciremos el concepto de proceso de subjetivación y su relación con el proceso de objetivación en el ámbito de la escuela.

3. Procesos de objetivación y de subjetivación en la escuela

La actividad escolar no produce solamente saberes. También produce subjetividades. Es por ello que el aprendizaje es a la vez conocimiento y devenir.

En efecto, el estudiante no es un autómata que aprende a resolver problemas. La escuela de educación matemática crítica ha insistido en que el estudiante no es simplemente un sujeto cognitivo (ver, por ejemplo, Valero, 2004). Al aprender, también *sentimos*. En vez de ser puramente fisiológico, ese sentir está cargado culturalmente de concepciones a través de las cuales nos concebimos de una manera u otra —por ejemplo, como buen resolutor de problemas, como incapaz de comprender las matemáticas, etc. (Radford, 2015). Sin embargo, nuestra larga tradición racionalista Occidental presenta a menudo las matemáticas como un puro esfuerzo intelectual o cognitivo. La realidad es que no sólo pensamos matemáticamente, también sentimos matemáticamente. Hay toda una dimensión afectiva en el aprendizaje que incluye las emociones de manera crucial. Esas emociones no son simples entidades biológicas, ellas se desarrollan socialmente. Tal y como lo advierte Vygotsky:

> *Al igual que las otras funciones mentales, las emociones no permanecen en la conexión dada en virtud de la organización biológica de la mente. En los procesos de la vida social, los sentimientos se desarrollan y las formas y conexiones precedentes se desintegran; las emociones aparecen con nuevas relaciones con otros elementos de la vida mental, nuevos sistemas se desarrollan, aparecen nuevas aleaciones de funciones y unidades de un orden superior en las que los patrones especiales, interdependencias, formas especiales de conexión y movimiento son dominantes. (Vygotsky, 1999, p. 244)*

En el ejemplo discutido en el capítulo 5, hemos visto cómo la profesora Giroux y Albert trabajan juntos en la búsqueda de una forma algebráica de resolver el problema sobre la secuencia numérica. El primer intento falla. Este intento va de la línea 1 a la línea 4, que reproducimos a continuación:

25. Profesora Giroux: ¿qué hicieron aquí? 5… (*señalando las fichas rojas; ver imagen 2 en la Figura 21*) ¿veces…?
26. Albert: … 2
27. Profesora Giroux: (*Señalando la ficha azul; imagen 3*) ¿más?
28. Albert: 1

En ese momento, la interacción profesora/estudiante está a punto de romperse. Pero, como anotamos en el capítulo 5, la profesora relanza la invitación a Albert para seguir trabajando juntos. La tensión aparece en el silencio que queda luego del intento fallido y aparece también en la tensión en los cuerpos de la profesora y del estudiante. Con un tono suave pero tenso, la profesora retoma el vaso que representa la semana 5 y relanza la invitación a Albert diciendo: “¿Qué hicieron aquí?” Albert acepta la invitación, buscando desentensarse con un gran respiro, acercando el cuerpo de nuevo a la mesa y a las fichas de bingo y golpeando, probablemente inconcientemente, la mesa con su bolígrafo (ver imagen 2, Figura 24).

Figura 24. La invitación de la profesora (imagen izquierda). La aceptación de Albert (imagen derecha).

Reconocemos aquí un proceso de objetivación en la medida en que hay un saber en juego que está por convertirse en objeto de conciencia: una estructura algebraica que aparecerá progresivamente, entre un juego de gestos, preguntas y respuestas. Pero reconocemos también un *proceso de subjetivación*. Por proceso de subjetivación entendemos el proceso a través del cual nos *afirmamos* como proyectos únicos de vida, como subjetividades en curso (*subjects in the making*). En el pasaje mencionado arriba, Albert se está *afirmando* como estudiante; de manera más específica, Albert se está afirmando como sujeto de la educación. Albert se está también *posicionando* en una práctica matemática donde las cosas son pensadas de cierta manera, y a las cuales se hace referencia a través de un lenguaje (formal y no formal) matemático propio, práctica que conlleva sus formas de percibir objetos, signos y diagramas. Albert no está simplemente observando; Albert está profundamente implicado tratando de comprender y de colaborar con la profesora. No menos importante es la respuesta de Albert a la invitación de la profesora a proseguir intentando ver lo que no aparece claramente a la conciencia todavía (es decir, la estructura algebraica, la manera algebraica de contar las fichas de bingo). Ese segmento de la interacción revela ese proyecto de vida en curso que llamamos *Albert*: una subjetividad en devenir, tratando de luchar a brazo partido con la profesora para entender una lógica matemática cuya comprensión todavía le escapa; una subjetividad que no obstante los problemas y a través de esos problemas y dificultades, se muestra, se afirma y se posiciona en la actividad concreta.

Y al mismo tiempo, la profesora Giroux hace parte de ese proceso de subjetivación. Albert y la profesora Giroux se están co-produciento mutuamente como sujetividades al interior de las concepciones histórico-culturales del ser (ser alumno y ser profesor) que vehícula la escuela. La profesora Giroux, al asumir su papel de profesora, también se *muestra* y se *afirma* como sujeto de la educación. Luego del intento fallido del primer conteo (líneas 1 a 4), la profesora tiene una necesidad inconmensurable de la respuesta de Albert. Su invitación a recomenzar el conteo es un *llamado existencial* (Lévinas, 1982). Albert puede o no *responder* al llamado que ella le ha hecho, a la invitación que ella le ha formulado. Ese silencio breve —brevísimo—que transcurre entre el momento en que Albert se da cuenta que no ha contado las fichas de bingo como se esperaba y la invitación de la maestra de recomenzar el conteo que empieza con el suave pero tendido "¿qué hicieron aquí?" (frase 5, Figura 21, imagen 6), ese silencio breve, parece decir: ¡Sigamos probando, Albert! ¡No nos demos por vencidos!

¡Qué desastre sería que Albert se tornara hacia otro lado y le diera la espalda a la profesora! ¡Qué desastre sería que Albert rehusara la invitación y dijera que él no va a entender jamás las matemáticas! ¡Qué desastre sería que la profesora se dijese que es mejor parar de intentar allí, pues Albert no va entender! No. Ella no lo va a hacer. La profesora tiene que afirmarse. Y para afirmarse como una buena profesora, ella tiene una necesidad infinita que Albert acepte la invitación. La tensión se suaviza en la aceptación de Albert en responder a la urgente súplica de la profesora. Responder al llamado del otro es parte de la *responsabilidad*. En su libro "Éthique et infini", Lévinas nota que la responsabilidad es la estructura esencial, primera, de la subjetividad . . . "Es en la ética, comprendida como responsabilidad, que se amarra el nudo mismo de lo subjetivo" (1982, p. 91). Y explica más adelante:

> *La responsabilidad no es simplemente un atributo de la subjetividad, como si ésta existiera ya en ella misma, antes de la relación ética. La subjetividad no es un 'por sí-mismo'. Ésta es inicialmente 'para otro'… Es una estructura que no se parece para nada a la relación intencional que nos vincula, en el conocimiento, al objeto —humano u otro. (Lévinas, 1982, pp. 92-93; traducción libre)*

La invitación de la profesora y la aceptación de Albert se encuentran en una *actitud ética* de confianza mutua. Hay una entrega del uno al otro y del otro al uno. "Me pongo en tus brazos". Hay una entrega mutua (*a mutual surrender*).

De lo anterior se desprende que una *misma* actividad puede contener procesos de objetivación y subjetivación. Implicados en la misma actividad, los proceos de objetivación y subjetivación no corren separadamente. Si nosotros hablamos de ellos como cosas distintas es simplemente por comodidad de análisis. Lo que esto quiere decir es que si hiciéramos un zoom a la actividad, veríamos adentro, por decirlo así, entrelazados, los procesos de objetivación y subjetivación (ver Figura 25).

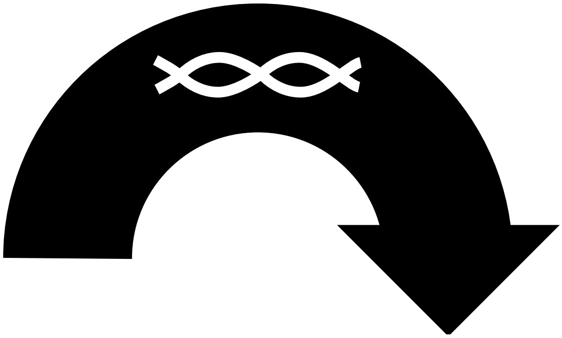


Figura 25. Procesos de objetivación y de subjetivación dentro de la actividad que media a la vez Saber/Conocimiento y Ser/Subjetividad.

El ejemplo de actividad que acabamos de analizar ilustra brevemente, aún si es solamente de manera muy general, cómo se co-producen subjetividades en la aula de matemáticas y cómo, bajo ciertas condiciones, los sujetos se afirman *de cierta manera*. El ejemplo muestra en particular una actividad en la que la producción de saberes se concibe como producción conjunta profesora-estudiante y la cooperación humana se nutre de una ética de responsabilidad. A una actividad de aula sentada en una ética diferente de colaboración humana y en formas diferentes de producción de saberes corresponderían maneras distintas de afirmarse y tipos diferentes de subjetividades.

Muy distinta es, por ejemplo, la actividad de aula de la enseñanza tradicional, en la cual el producto de la actividad aparece a los estudiantes como algo extraño, como algo alejado de ellos. Los estudiantes no reconocen en el resultado de la actividad sus labores intelectuales y afectivas. Esto es lo que sucede también muy a menudo cuando la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se plantean como algo puramente técnico. Muchos estudiantes no se posicionan dentro de los discursos y prácticas de las matemáticas, y como resultado, terminan con sentimientos negativos respecto a las matemáticas. Actividades alienantes producen sujetos alienados.

En la próxima sección me centro sobre el problema de la alienación en el aula.

4. Alienación

Como se mencionó en la introducción, mi desacuerdo con Guy Brousseau deriva de nuestros diferentes puntos de vista sobre la relación entre el docente y el estudiante. A su vez, esta diferencia está relacionada con nuestras diferentes concepciones sobre la producción y reproducción del saber y las formas de cooperación humana que deberíamos fomentar en el aula. Muchas teorías contemporáneas de la educación suponen que en el proceso de aprendizaje, el saber emana de, y es producido por, el estudiante. Este es el punto de partida del constructivismo norteamericano en todas sus variantes. En el capítulo anterior hemos sugerido conceptualizar el aprendizaje como un proceso social (un proceso de objetivación) en el que, a través de la labor conjunta, las matemáticas se revelan a la conciencia de los alumnos.

Ahora bien, ¿de dónde viene esta idea según la cual el saber debe emanar del estudiante? Como lo indicamos en el capítulo 4, la idea viene de nuevas concepciones acerca del conocimiento que surgieron en el siglo XVI. Ya hemos dicho que, a finales del siglo XVI, hubo un cambio epistemológico que va del "qué" al "cómo". Es decir, hubo en esa época un giro en el que el foco de atención no fue más el objeto de estudio en sí mismo (el objeto geométrico, por ejemplo, como había sido el caso en los griegos de la antiguedad). El foco de atención pasó a ser los *procesos de producción* de los objetos. Como señala Arendt, "el énfasis se desplaza del interés en las cosas al interés en los procesos" (p. 585).

En este contexto, a finales del siglo XVI, la posibilidad de conocer algo no reposó ni en el descubrimiento de razones cósmicas ocultas, ni en la tradición —como fue el caso de la Edad Media— sino en la posibilidad de entender el proceso de la producción del objeto: "Yo sé algo siempre que entienda cómo ese algo ha llegado a ser" (Arendt, 1958, p. 585). El filósofo del siglo XVII, Benedicto Spinoza, dice muy claramente en su texto de 1667 llamado *"De Intellectus Emendatione"* (De la reforma del entendimiento), que una verdadera idea "muestra cómo y por qué algo es o ha sido hecho" (Spinoza, 1989, p. 29). Es en los siglos XVI y XVII, es decir, en el mundo que empieza a girar cada vez más alrededor de la manufactura, que el saber llega a ser concebido también como una forma de fabricación.

Una nueva forma de subjetividad

Arendt (1958, p. 585) hace una breve pero brillante formulación de la epistemología moderna ("Yo sé algo siempre que entienda cómo ese algo ha llegado a ser") indicando no sólo una nueva forma de conocer, sino también una nueva forma de subjetividad. Ésta consiste en hacer enfásis, con una fuerza sin precedentes, en los individuos en su acto de hacer, conocer y comprender. El individuo ya no es un receptor de conocimiento, sino un constructor del mismo.

Estas ideas encuentran su articulación en el trabajo de Vico y Kant. Estos filósofos plasmaron con fuerza y claridad la visión social del sujeto burgués de su tiempo, en particular la idea de un sujeto autonómo —visión que, históricamente refinada, se convirtió en la piedra angular de la epistemología genética de Piaget (véase Radford, 2012 para más detalles). Dentro de esta visión, el saber llegó a ser considerado no como algo que otra persona crea y pasa a otra persona. Es el individuo y sólo el individuo el que construye su propio saber. Desde este punto de vista, el saber es lo que resulta de la propia experiencia del individuo.

Interesante como podría llegar a ser, tal punto de vista plantea al individuo como un sujeto soberano: el individuo es el centro del significado, de la conceptualización y de la intencionalidad. Todo emana de él. Esta es la postura teórica que toma el constructivismo norteamericano en su versión radical (Glasersfeld, 1995), pero también en otras versiones que tratan de incorporar una dimensión social, como el socio-constructivismo (Cobb & Yackel, 1996).[23] El precio a pagar por asumir dicha postura extremadamente subjetivista, sin embargo, es muy alto, ya que el individuo termina encerrado en sus propias cavilaciones y aislado del mundo. Para decirlo brevemente, el individuo termina *alienado,* es decir, alejado del mundo concreto e histórico. El sujeto aparece como un ser confinado: las únicas cosas que puede entender son aquellas que provienen del sujeto mismo. En esta concepción, el individuo es monológico y tautológico.

El sujeto alienado

Y aquí llegamos a una tensión capaz de sacudir el famoso Arco del Triunfo en París: por un lado, tenemos a nuestro estudiante concebido como constructor de su propio saber. Por otro lado, no podemos ocultar el hecho de que, el saber que el estudiante supone construido en la escuela, ya ha sido construido históricamente y está ya allí, a su alrededor.

Tomemos el concepto de número, por ejemplo. Los números y lo que pensamos acerca de ellos (su categorización en números pares e impares, o en números primos y no primos, irracionales, algebraicos, etc.) se han codificado históricamente, apareciendo hoy en día en el currículo, en libros de texto, en

23 Aparece aquí una ruptura entre el constructivismo norteamericano y la teoría de situaciones, que considera tal posición imposible de defender. El problema, cabría resaltar, no es que el sujeto construya él mismo su propio conocimiento, sino el hecho que el constructivismo radical no incluye una fase de institucionalización, es decir una fase en la que el profesor asume su rol institucional y asegura el reconocimiento y validez social, cultural e histórica del conocimiento construido por el estudiante: «La institucionalización no didáctica de un conocimiento no puede determinar a priori su propio valor científico y su alcance a partir de un proceso personal y local. Esta observación condena al constructivismo radical como modelo didáctico» (Brousseau, 2003, p. 5).

libros especializados, etc. ¿Cómo podemos hablar acerca de la construcción por el estudiante de algo que que ya existe y fue construído anteriormente?

Por supuesto, se podría argumentar que, estrictamente hablando, los estudiantes no construyen el saber; se podría argumentar que, en sus esfuerzos constructivos, los estudianes *re*construyen el saber cultural codificado en el currículo. Si vemos con detenimiento, sin embargo, no existe nada que de fé de una cosa así. Pensar que los estudiantes reinventan el saber matemático requeriría la adopción de una hipotesis muy fuerte: que el desarrollo ontogenético termina ineluctablemente coincidiendo con el desarrollo histórico. Esta hipótesis afirma que la ontogénesis recapitula la filogénesis.

Mi colega Fulvia Furinghetti de la Universidad de Génova y yo escribimos un largo capítulo para mostrar que esa hipótesis, formulada primero en el ámbito de la evolución biológica, no puede ser extrapolada a la educación y a la historia de las ideas (Furinghetti & Radford, 2008). La hipótesis de la recapitulación significaría que la cultura no es consubstancial del saber y del conocimiento. En efecto, independiente de la cultura, el desarrollo del individuo estaría simplemente siguiendo el desarrollo histórico. Vemos, pues, cuán problemática es la idea de la reconstrucción del conocimiento.

A nivel de la evolución histórica del saber, dicha idea, también implicaría que el saber matemático tiene su propia finalidad, es decir, tiene su propio *telos*. Esto equivaldría a pensar que el saber matemático está dotado de alguna manera con una línea propia de desarrollo. Esto equivaldría a pensar que si nos aplicáramos concienzudamente, todos terminaríamos pensando matemáticamente de la misma manera. Esta es una hipótesis muy racionalista —que Piaget (1973) adoptó. Sin embargo, un sinnúmero de datos de investigación antropológica y etnomatemática simplemente echa al suelo tal hipótesis (Lancy, 1983; Lizcano, 2009; Owens, 2001; Pumuge, 1975). Las antiguas matemáticas griegas son substancialmente diferentes de las antiguas matemáticas chinas, por ejemplo. Ambas matemáticas se desarrollaron en diferentes direcciones y bajo diferentes supuestos teóricos. Las Matemáticas no tienen un significado cultural invariable, ni se desarrollan en el mismo sentido y en una sola dirección.

La tensión de la que estaba hablando hace un momento —la tensión que hace temblar al Arco del Triunfo— aparece al tratar de conciliar el lado subjetivo del saber como construcción personal, y el saber históricamente constituido codificado en libros de texto, documentos curriculares, etc. La tensión resulta de las contradicciones inherentes a las formas culturales de producción material y conceptual. Marx (1988) resumió estas contradicciones en sus *Manuscritos económico-filosóficos* cuando estuvo reflexionando sobre el trabajo, los trabajadores y los productos de los trabajadores. El trabajador produce algo, un producto. Como resultado de su trabajo, ese producto lleva consigo la realización subjetiva del trabajador: su *expresión humana* (Fischbach, 2012). El objeto producido, sin embargo, entra a un mundo de productos con su implacable lógica comercial que transciende al trabajador y que lo deja, no sin el objeto producido, sino sin los medios de plasmar en él su subjetividad, su dimensión humana. Sin esta posibilidad de expresión, el trabajador termina en la alienación (Radford, 2016).

Dentro de estas formas de producción mercantiles hay una brecha inevitable entre, por un lado, las construcciones individuales, su sentido personal, su valor subjetivo, y, por el otro lado, el sistema económico que lo envuelve. Hay una distancia que no existía en la antiguedad o en la Edad Media. Este fenómeno, que fue inevitablemente producido por las formas modernas de producción a partir del capitalismo manufacturero en el siglo XVI (Beaud, 2004), ocurre también con el saber. Cuando concebimos el saber como una construcción personal, hacemos una transposición de formas de producción material a formas de producción del saber. Y al hacerlo, importamos la contradicción inherente de las formas de producción al ámbito epistemológico.

El objeto conceptual que la labor del estudiante produce, su producto conceptual, se opone al saber cultural que (inscrito en el currículo y en los libros de texto) es visto como un poder independiente del estudiante. La única posible conciliación aquí es adoptar, como hizo Piaget, una postura racionalista, y esperar que las construcciones personales de los estudiantes, impulsados y guiados por una misteriosa mano, convergan con el saber existente en su cultura.

A decir verdad, existe otra posible solución: renunciar a la idea de conciliación y afirmar que nuestras construcciones conceptuales son ideas personales viables que permanecen, en virtud de la experiencia personal que las hacen posibles, inconmesurables de estudiante a estudiante —como en el constructivismo radical y sus otras versiones más sociales (ver, por ejemplo, Thompson, 2014). Sin embargo, nótese que, en este caso, la tensión no está resuelta: es desplazada. De una u otra forma, todavía podemos escuchar el arco del triunfo temblar.

Me parece que es Popkewitz (2004) quien ha expuesto de la manera más clara posible la tensión que surge de las premisas epistemológicas que consideran el saber como una construcción personal. Como Popkewitz advierte, el currículo y los libros de texto transmiten visiones conceptuales ineludibles y elementos normativos de las matemáticas y sus expertos. El resultado es que el niño no es realmente libre de escoger y construir su propio saber. La libertad del niño para efectuar sus propias construcciones conceptuales es tan solo el efecto de una ilusión. Verdad y técnicas no provienen del niño, sino de las matemáticas:

> *El niño es un agente que utiliza las fórmulas y aplicaciones adecuadas de las técnicas de modelado de las matemáticas para probar y dar fé de lo que aparece en el mundo exterior. La resolución de problemas se convierte en una estrategia para poner de manifiesto la pericia y habilidad de la ciencia como el árbitro de la verdad y la falsedad. (Popkewitz, 2004, pp. 21-22)*

Popkewitz continúa su análisis diciendo que a través de nuestras estructuras pedagógicas de clase dirigimos "la atención de los niños a propuestas que ya han sido confirmadas en el mundo a priori de la escuela y la investigación en educación matemática. Las Matemáticas son una herramienta para probar y confirmar un mundo empírico" (Popkewitz, 2004, p. 21). Resulta, pues, que a través de nuestras decisiones y diseños pedagógicos en las aulas de clase, sin quererlo, empujamos a los estudiantes hacia actividades intelectuales y conceptualizaciones matemáticas establecidas de antemano. Sin quererlo, creamos un formidable Efecto *Topaz y* pensamos ingenuamente que los estudiantes están produciendo su propio saber.

5. Una lucha contra la alienación

En las secciones anteriores he argüido que la escuela de la sociedad capitalista contemporánea crea una tensión irresoluble entre el polo subjetivo (el polo del sujeto) y el polo objetivo (el polo de la cultura). Dicha tensión resulta de las formas actuales de producción individualista del saber que fomenta la escuela, formas que terminan en la producción de la alienación. ¿Cómo podemos luchar contra esta situación?

La manera en la que los individuos occidentales llegaron a concebirse a partir del siglo XVI se ha convertido, desde hace algunos años, en uno de los temas recurrentes en las discusiones filosóficas y antropológicas (ver, por ejemplo, Cassirer, 1963; Shweder & LeVine, 1984; Todorov, 2000). Ha habido una toma de conciencia que la concepción del individuo como un ser soberano autor de su propio destino ha sido acompañada de una pérdida vital de conexión con el mundo y con los otros individuos (Taylor, 1989).

Encontramos en el filósofo alemán Edmund Husserl el ejemplo de un esfuerzo por repensar las relaciones entre los individuos y su mundo. Mientras que en sus *Meditaciones Cartesianas de 1929* (Husserl, 1982) Husserl se interesa por la manera en la cual las cosas del mundo externo se presentan a la conciencia de un ser vivo encerrado en sí mismo, en su obra monumental de 1930, *Crisis de las Ciencias Europeas y la Fenomenología Transcendental* (Husserl, 1970), Husserl toma otro rumbo. En la *Crisis*, Husserl introduce una perspectiva histórica que hace énfasis en el mundo de la vida comunitaria compartida y la participación de los individuos en ella. La cuestión ya no es cómo una conciencia solitaria reconoce un mundo frente a ella a través de actos individuales de percepción y cognición.

La cuestión se torna en cómo la conciencia entra en contacto con un mundo público que antecede al movimiento mismo de la conciencia. Hegel había ya formulado el encuentro de la conciencia con el mundo que la antecede en términos de un *reconocimiento* del mundo que aparece primero como mundo "en sí mismo" pero que, en el curso de ese reconocimiento, se transforma para llegar a ser un "mundo para nosotros," un reconocimiento que he teorizado en el capítulo anterior como un proceso de objetivación. Sin embargo, como ya he mencionado antes, en la toma de conciencia de este mundo público y sus formas de pensar y de hacer, ocurre una subjetivación: no sólo *reconocemos* el mundo. Nos *posicionamos* en él.

En otras palabras, la objetivación no es un proceso en frío, sino un proceso emocional, afectivo, que tiene que ver con la manera en la cual llegamos a ser, no pura materia biológica, sino *subjetividades —proyectos de vida sin terminar*, siempre en movimiento y evolución: entidades en procesos inacabados del devenir. Nunca somos un específico y acabado "yo". Decir que somos proyectos de vida, quiere decir que estamos siempre en proyección, proyectándonos en un mundo que está allí, frente a nosostros, y que en el curso de la proyección, en el curso de las actividades sociales en que participamos, nos inscribimos en él. Decir que somos proyectos de vida, quiere decir que en esa proyección hay siempre un excedente: no podemos coincidir o aterrizar en el yo. Es por eso que nuesta ecuación de vida no es de igualdad, sino de desigualdad. Somos a la vez más y menos; somos yo ≠ yo.[24]

Aunque nuestras escuelas y sistemas de educación en general están subsumidos dentro de un proyecto de sociedad político y económico —en nuestros tiempos, un proyecto neo-liberal que enfatiza sin tregua las formas capitalistas de producción que siguen promoviendo la alienación— sigo pensando que, como educadores, no podemos simplemente darnos por vencidos.

24 Decir "soy" es, precisamente, hacer un acto de violencia al proyecto de vida que somos. Es por eso que, cuando nos referimos a nostros mismos, no hay verbo más violento que el verbo ser. El verbo ser (por ejemplo, en la expresión "soy X"), aniquila el proceso de devenir en el que nos encontramos siempre. No hay momento más incómodo y engorroso que aquél en el que nos presentamos a otros como "soy fulano de tal".

Desde el punto de vista histórico-cultural de la educación matemática en que se basa la teoría de la objetivación, una de las cuestiones que debemos plantearnos es: cómo encontrar aquéllas acciones que puedan garantizar que la educación matemática incluya una dimensión transformadora de los estudiantes que vaya más alla del ámbito puramente matemático e incluya explícitamente la transformación de la dimensión humana. Habría que ver al estudiante como mucho más que un simple resolutor de problemas matemáticos. Dada la compleja trama política y social en la que está inmersa la escuela (Valero, 2009), no creo que exista una sola línea de acción que permita esta transformación. Sólo en los cuentos de hadas puede existir una cosa así. Probablemente existen varias posibilidades que necesitan ser relacionadas unas con otras (por ejemplo las posibilidades que surgen de la consideración de la equidad, la inclusión y la conciencia política).

Creo que, desde una perspectiva educativa, la lucha contra la alienación no puede llevarse a cabo sin repensar las formas de producción del saber e imaginar nuevos modos de cooperación humana en la escuela (Radford, 2012). En particular, necesitamos alejarnos de formas individualistas de interacción social en el aula. Un punto de partida podría ser la idea de *actividad* o *labor conjunta* desarrollada en los capítulos 4 y 5. Como ya lo he mencionado anteriormente, la actividad no debe ser vista como una simple cooperación entre individuos para lograr algo (que es una concepción funcionalista de la actividad), ni debe ser vista como un simple *medio* (que es una concepción pragmática de la actividad). La actividad es más bien un *sistema* en constante desarrollo (Leont'ev, 2009).

Habría que pensar que es en la actividad, vista como *sistema en movimiento*, que ocurre la *realización* del sujeto. En un pasaje de los *Manuscritos económico-filosóficos* de 1844 Marx (2007, p. 121) pregunta: "¿qué es la vida?" y responde inmediatamente: "la actividad". La actividad debe ser vista como una fuente de vida; una *labor conjunta* en la que llegamos a actuar, pensar y sentir *juntos*, en la realización de lo que Hegel (2001) llamaba "la obra común". Mi tesis, para decirlo brevemente, es que debemos concebir la actividad como labor conjunta, y la labor conjunta como una labor de estudiantes, y de docentes y estudiantes que trabajan hombro con hombro, amparados en formas no individualistas de cooperación humana y formas comunitarias de producción de saberes.

Para poder seguir adelante en esta conceptualización, debemos precisar aún más las características de la labor conjunta. Una línea de acción que hemos propuesto en la teoría de la objetivación parte de una idea de labor conjunta que implica un *"togethering"* subsumido en una dimensión ética.

Dicha dimensión busca asegurar la creación de posibilidades de crecimiento humano en el aula de matemáticas.

6. Ser y subjetividades en la teoría de la objetivación

El ser en el que hacemos énfasis en la teoría de la objetivación gira en torno a una ética comunitaria que está dirigida por la responsabilidad, por el compromiso hacia los demás y el cuidado del otro. Estos tres vectores vienen a configurar la estructura esencial de la subjetividad. Ya hemos hecho referencia a la *responsabilidad* como unión, nexo, vinculación, conexión y enlace con el prójimo, que se expresa en la respuesta que hacemos al llamado del otro, llamado que proviene no necesariamente de una formulación lingüística o semiótica, sino de la mera presencia de lo que no somos nosotros mismos (Lévinas habla del "rostro" del otro). Como no se trata de una responsabilidad formal o pragmática, sino ontológica, es decir de una responsabilidad que es constitutiva de subjetividades, que en nuestra respuesta no podamos hacer efectivamente algo por el otro, no es de importancia. La responsabilidad es un acto de darse o de entregarse (act of surrender).

Para asegurar la estructura de la subjetividad, aparece inmediatamente el *compromiso,* que es la promesa de hacer todo lo posible y lo imposible, en el transcurso de la actividad conjunta en la realización de la "obra común." El *cuidado* es la preocupación por alguien. La puesta en movimiento del cuidado requiere el reconocimiento de la necesidad del otro y la acción solidaria intersubjetiva correspondiente. Lejos de ser un acto de condescendencia, el cuidado es la posibilidad de vernos a nosostros mismos en el otro; de reconocer nuestra vulnerabilidad en la vulnerabilidad del otro. A través del cuidado del otro, hay un reconocimiento de nosotros mismos que el simple reflejo que nos proporciona el espejo no logra hacer: cuando nos vemos frente a un espejo, siempre hay una distancia entre nosotros y el espejo ("Estoy frente al espejo y no en él" (Bakhtin, 1990, p. 32)). El cuidado del otro nos jala, nos arrastra poderosamente hacia el mundo y, a través de la necesidad y vulnerabilidad del otro, nos coloca en medio de ese mundo de sufrimientos y esperanzas.

Estos tres elementos principales de nuestra ética comunitaria conducen a una actitud general hacia el mundo que no es cognitiva o racional. Dichos elementos se materializan en una participación en aula, la cual imaginamos como un espacio público de debates, lo que los antiguos griegos llamaban la *polis.* En este espacio, los estudiantes son alentados a demostrar abiertamente a los demás la solidaridad y la conciencia crítica.

Dado que el trabajo conjunto y la ética comunitaria no son algo que van a aparecer en el aula de manera natural o por arte de magia, tenemos que crear las condiciones para su aparición. La ética que subyace al trabajo conjunto entre la profesora Giroux y Albert que hemos discutido anteriormente no ha surgido de la nada. Ésta ha sido cultivada a lo largo de meses, culminando en una confianza mutua.

Una línea de acción que hemos propuesto en la teoría de la objetivación y que hemos puesto en práctica con las clases de matemáticas con que hemos trabajado, se refiere a una redefinición de las formas de colaboración humana, basadas en la ética comunitaria descrita arriba. En este proyecto ético, alentamos a los estudiantes a discutir ideas matemáticas entre sus propios grupos y con otros grupos del aula. Veamos rápidamente un ejemplo de niños de 8-9 años de edad de tercer grado alrededor del álgebra.

En el primer paso los estudiantes trabajaron en grupos pequeños (2-3 estudiantes por grupo) en la producción de un texto que debía incluir: una historia de su invención, la traducción de esta historia a una ecuación algebraica, y la solución de la ecuación (ver Figura 26, cuadro 1 y 2), (para más detalles, ver Radford, 2012). Cada grupo tenía asignado otro grupo "correspondiente" con el cual un intercambio en fases consecutivas ocurría. El "correspondiente" grupo fue determinado en un proceso que llamamos el "emparejamiento de los grupos"; en ocasiones los grupos decidieron sus correspondientes grupos, en ocasiones el docente tomó la decisión, y algunas veces el proceso fue decidido al azar. En el segundo paso, un texto es dirigido al grupo correspondiente y viceversa. Cada grupo procede a leer y a evaluar las producciones del otro grupo (ver Figura 26, cuadro 3). Pedimos a los estudiantes que evaluaran el texto del grupo correspondiente con base a varios elementos, tales como:

1. ¿Es claro el texto?
2. ¿Encuentran que la respuesta dada es correcta?
3. ¿Encuentran la solución convincente?
4. ¿Encuentran la solución hermosa?

Una vez que han terminado de revisar críticamente el texto del otro grupo, los dos grupos se reúnen (ver Figura 26, cuadro 4). Los grupos se turnan para presentar sus resultados, haciendo énfasis en lo que les gustó de cada texto y en la manera de mejorarlo. Los equipos reaccionan a la crítica. El profesor también toma parte en el intercambio (ver Figura 26, cuadro 5). Despúes de haber examinado los textos de los grupos, como un último paso, los grupos trabajan juntos para tratar de llegar a un texto mucho mejor que el presentado inicialmente. También son animados a compartir el texto final con otros grupos (ver Figura 26, cuadro 6).

La cuestión, por supuesto, no es simplemente cómo llegar a una mejor solución matemática. Aunque esto es importante, lo es también el hecho de que a través de este proceso, los estudiantes tienen una oportunidad de comprender a los otros. Esta comprensión no es simplemente cognitiva. La comprensión de otros, dice Heidegger: “no es es una conocida derivación del saber sobre ellos, sino primordialmente una clase existencial de Ser, el cual, más que cualquier otra cosa, hace posible tanto el saber como lo conocido” (1962, p. 161).

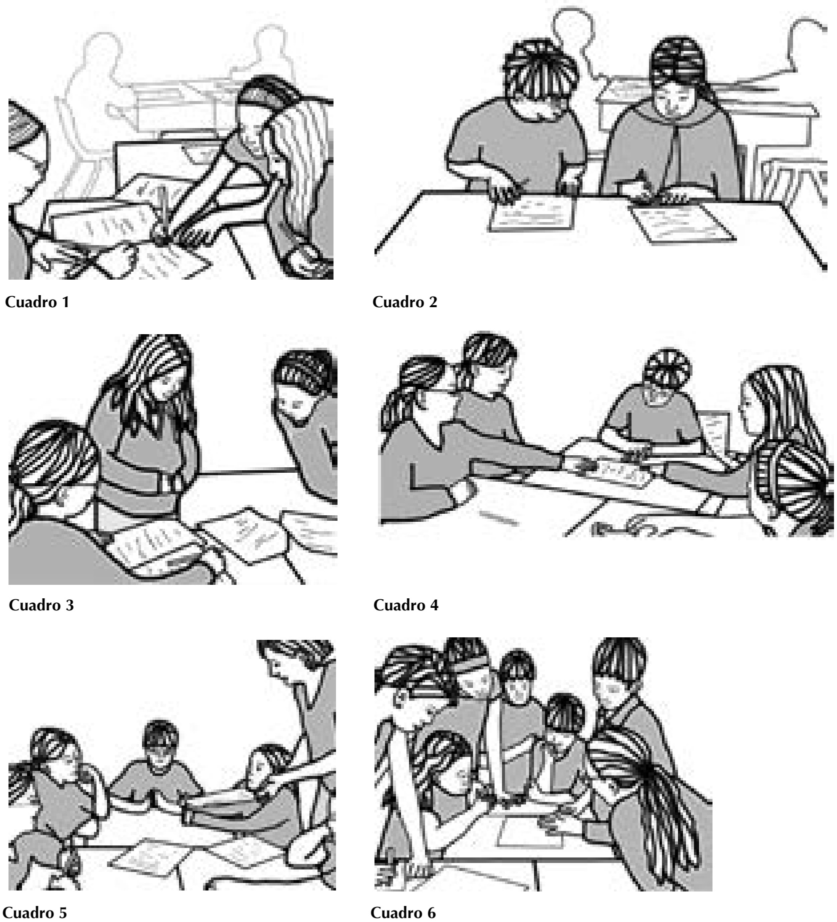


Figura 26. Las diversas partes en las cuales fue organizada una discusión entre grupos.

A través de este proceso, los estudiantes dirigen su producción matemática a alguien más, responden de manera responsable a la producción de alguien más, se vuelven críticos (por ejemplo, ellos aprenden a defender las ideas del grupo, las amplían y reflexionan sobre lo que se puede hacer a continuación), y son capaces de tomar la posición de alguien (por ejemplo, durante el segundo paso, el docente tiene la oportunidad de hacer preguntas tales como: "¿por qué ustedes piensan que el otro grupo escribió eso?").

7. Resumen

La teoría de la objetivación plantea la educación matemática como parte de un proyecto educativo donde no se considera el aprendizaje como el aprendizaje de un determinado contenido conceptual. Para la teoría de la objetivación, el aprendizaje se trata de conocer y devenir (ver Figura 27). En este capítulo discutí la cuestión del ser, la subjetividad y la alienación.

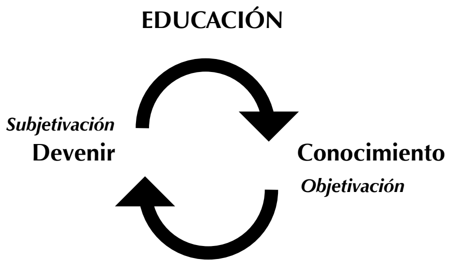


Figura 27. Educación como un proyecto de conocimiento y devenir.

Argumenté que el conocimiento y el devenir son procesos simultáneos. Mientras la objetivación se centra en los procesos de conocimiento, el devenir se centra en los procesos de subjetivación.

Las estructuras ontológicas del conocimiento y del devenir son similares: el conocimiento es la instanciación del saber, en el mismo sentido que la subjetividad es la instanciación del ser. Ambos ocurren en la labor conjunta.

El tipo de ser que enfatizamos en la teoría de la objetivación se basa en elementos éticos constituidos histórica y culturalmente, que la teoría valora y que nosotros nos esforzamos en promover a través de nuestras actividades en el aula. Ellos constituyen el fundamento de una ética comunitaria de responsabilidad, compromiso y cuidado del otro. Estos tres atributos dan forma a la labor conjunta en la cual ocurre el aprendizaje. Ellos delinean una forma de ser que intenta oponerse a la forma utilitaria en que es promovido el individuo en formas capitalistas de producción transpuestas a la escuela, las cuales conciben al estudiante como un propietario privado y productor de su propio saber.

Argumenté que esas formas individualistas del ser están inherentemente alienadas. La perspectiva que he esbozado aquí abre posibilidades para repensar el aula y sus habitantes —el docente y sus estudiantes. Se abren posibilidades para superar la visión solipsista del estudiante como fuente y medio de sus propias concepciones. Por supuesto, todavía tenemos que entender la mejor manera de alentar nuevas formas de relaciones sociales, sus complejidades y resultados.

Para terminar, permítaseme señalar que la idea del salón de clase como *polis*, es decir como espacio público donde los estudiantes se expresan y se posicionan en discursos científicos, donde diferentes voces y perspectivas se encuentran, no es una idea romántica. Por el contrario, la labor conjunta, como la concebimos aquí, no es necesariamente una actividad pacífica. Ésta está llena de tensiones y diferencias. Pero en lugar de considerar estas diferencias como algo inevitable que hay que aceptar con compasión y con empatía, como nos piden los discursos neoliberales, hay que verlas como parte constitutiva de la labor conjunta. El objetivo no es, pues, remover o despejar esas tensiones; el objetivo es examinar críticamente esas diferencias para comprender los mecanismos que las sustentan. Quizás así tendremos una oportunidad de cambiar el mundo y a nosotros mismos.

Referencias

Arendt, H. (1958). The modern concept of history. *The Review of Politics*, *20*(4), 570-590.

Baldino, R., & Cabral, T. (1998). Lacan and the school's credit system. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 22, pp. 56-63). Stellenbosch, South Africa. University of Stellenbosch: PME.

Bakhtin, M. (1990). *Art and answerability.* Austin: University of Texas Press.

Beaud, M. (2004). *A history of capitalism.* Delhi: Aakar Books.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G. (2003). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques* [Glossary of some concepts of the theory of didactic situations in mathematics]. *Retrieved on January 20, 2007, From* http://dipmat.math.unipa.it/~grim/Gloss_fr_Brousseau.pdf.

Cambiano, G. (1993). Devenir homme. In J. Vernant (Ed.), *L'homme grec* (pp. 171-215). Paris: Éditions du Seuil.

Cassirer, E. (1963). *The individual and the cosmos in renaissance philosophy*. (Original work published in 1927). New York: Harper Torchbooks.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31*(3/4), 175-190.

Fischbach, F. (2012). *Sans objet. Capitalisme, subjectivité, alienation [Sin objeto. Capitalismo, subjetividad, alienación].* Paris: Vrin.

Freire, P. (2004). *Pedagogy of indignation*. Boulder, Colorado: Paradigm Publishers.

Furinghetti, F., & Radford, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education (2nd edition)* (pp. 626 - 655). New York: Taylor and Francis.

Glasersfeld von, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London: The Falmer Press.

Hegel, G. (2001). *The philosophy of history*. Kitchener, ON: Batoche Books. (Original work published 1837)

Heidegger, M. (1962). *Being and time*. (Translated by J. Macquarrie & E. Robinson). New York: Harper.

Husserl, E. (1970). *The crisis of the European science*. Evanston: Northwestern University Press.

Husserl, E. (1982). *Cartesian meditations: An introduction to phenomenology*. (D. Cairns, Trans.). The Hague: Martinus Nijhoff Publishers.

Illouz, E. (1997). *Consuming the romantic utopia: Love and the cultural contradictions of capitalism.* London: The University of California Press.

Lancy, D. F. (1983). Cross-cultural studies in cognition and mathematics. New York: Academic Press.

Le Goff, J. (1956). *Marchands et banquiers du moyen age.* (7th updated edition, 1986). Paris: Presses Universitaires de France.

Leont'ev, A. N. (1974). The problem of activity in psychology. *Soviet Psychology*, *13*(2), 4-33.

Leont'ev [or Leontyev], A. N. (2009). *Activity and consciousness.* Pacifica, CA: MIA. Retrieved August 29, 2009, from http://www.marxists.org/archive/leontev/works/activity-consciousness.pdf.

Lévinas, E. (1982). *Éthique et infini.* Paris: Fayard.

Lizcano, E. (2009). *Imaginario colectivo y creación matemática.* Madrid: Gedisa.

Marx, K. (1988). *Economic and philosophic manuscripts of 1844.* Amherst, New York: Prometheus Books. (Original work published 1932).

Marx, K. (2007). *Manuscrits économico-philosophiques de 1844 [Manuscritos económico-filosóficos de 1844].* (F. Fischbach, Trans.). Paris: Vrin. (Original work published 1932)

Owens, K. (2001). Indigenous mathematics: a rich diversity. Mathematics: Shaping Australia. Proceedings of the Eighteenth Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers, 151–167. Retrieved Feburary 17, 2006, from: http://www.aamt.edu.au/ICSIMAN/resources/papers/owens.pdf.

Pais, A. (2011). *Mathematics education and the political: An ideology critique of an educational research field.* Ph. D. Dissertation. Aalborg, Denmark: Department of Learning and Philosophy. Aalborg University.

Piaget, J. (1973). *To understand is to invent. The future of education.* New York: Grossman.

Popkewitz, T. (2004). The alchemy of the mathematics curriculum: Inscriptions and the fabrication of the child. *American Educational Research Journal*, *41*(1), 3-34.

Pumuge, H. M. (1975). The counting system of the pekai-alue tribe of the topopul village in the ialibu sub-district in the southern highlands district, papua new guinea. *Science in New Guinea*, *3*(1), 19-25.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación [Elements of a cultural theory of objectification]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103-129 (available at: http://www.laurentian.ca/educ/lradford/).

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2012). Education and the illusions of emancipation. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1), 101-118.

Radford, L. (2013). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. In A. Ramirez y Y. Morales (Eds). Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. Santo Domingo, República Dominicana, November 6-8, 2013 (disponible en la página: http://luisradford.ca)

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación [on the theory of objectification]. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132-150.

Radford, L. (2015). Of love, frustration, and mathematics: A cultural-historical approach to emotions in mathematics teaching and learning. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education* (pp. 25-49). New York: Springer.

Radford, L. (2016). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research, 79,* 258-266. http://dx.doi.org/10.1016/j.ijer.2016.04.001.

Radford, L., & Roth, W. -M. (2011). Intercorporeality and ethical commitment: An activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2-3), 227-245.

Shweder, R., & LeVine, R. (1984). *Culture theory. Essays on mind, self, and emotion.* Cambridge: Cambridge University Press.

Spinoza, B. (1989). *Ethics including the improvement of the understanding* . (R. Elwes, Trans.). Buffalo: Prometheus. (Original work published 1667)

Taylor, C. (1989). *Sources of the self*. Cambridge, Ma: Harvard University Press.

Thompson, P. (2014). Constructivism in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 96-100). New York: Springer.

Todorov, T. (2000). *Éloge de l›individu [Elogio del individuo]*. Paris: Adam Biro.

Valero, M. (2004). Postmodernism as an attitude of critique to dominant mathematics education research. In P. Walshaw (Ed.), *Mathematics education within the postmodern* (pp. 35-54). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Valero, P. (2009). Mathematics education as a network of social practices. In *Proceedings of the 6th conference of European research in mathematics education (CERME 6)*. Lyon, France, Jan. 28th - Feb. 1, 2009. (Retrieved on December 10 2010 from) http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/plenary2-valero.pdf).

Vygotski, L. (1985). *Pensée et langage*. Paris: Messidor.

Vygotsky, L. S. (1987). *Collected works* (Vol. 1). R. W. Rieber and A. S. Carton (Eds.). New York: Plenum.

Vygotsky, L. S. (1999). *Collected works (vol. 6)*. R. W. Rieber (Ed.). New York: Plenum.

Reconocimientos

Este capítulo está basado en notas preparadas para el taller que di en la Universidad Nacional de Seúl, Corea del Sur, en 2012. La traduccion al español fue realizada por Rodolfo Vergel Causado, a quien agradezco profundamente su ayuda. También agradezco a Alfonso Ulises Salinas Hernández por su relectura y comentarios.

Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática

(En homenaje a G. T. Bagni)

Bruno D`Amore - Luis Radford - Giorgio T. Bagni

Introducción

El considerar a un concepto matemático por medio de su evolución histórica y epistemológica requiere asumir posiciones comprometidas y significativas. Además, son problemas relevantes los relacionados con la interpretación, inevitablemente conducida a la luz de nuestros paradigmas culturales actuales mediante los cuales se ponen en contacto culturas "diferentes pero no inconmensurables" (Radford, Boero &Vasco, 2000, p. 165).

La actualidad didáctica del argumento introducido es evidente: los procesos de enseñanza- aprendizaje de la matemática están influenciados por las concepciones de los docentes sobre la naturaleza del conocimiento científico y de su evolución (Brickhouse, 1990; Hashweb, 1996) y de los cambios de convicciones ocurridos luego de la maduración alcanzada con reflexiones personales o, mejor, por ocasiones de fuerte confrontación teórica (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2004; Bagni, 2006).

Una evolución histórica didácticamente propuesta desde un punto de vista moderno permitiría, tal vez, presentar a los estudiantes los 'obstáculos espistemológicos' principales y aclarar algunas posiciones históricas, cuya debilidad fue revelada sucesivamente; pero, por otro lado, un planteamiento que pretenda hacer seguir al desarrollo cognitivo un recorrido modelado en base a la evolución histórica,[25] encontraría notables dificultades teóricas (Werner, 1984; Radford, 1997).

La presentación de elementos históricos con referencia al propio contexto cultural ofrece la posibilidad de una profundización orgánica e induce reflexiones fundamentales sobre la génesis de un concepto (Bagni & D'Amore, 2005): la elección de una historia "interna", que da cuenta de un desarrollo

25 Pensemos en el paralelismo entre ontogénesis y filogénesis, expresado por E. Hackel en el lejano 1874, y a la conocida tesis en: Piaget & Garcia, 1983; vease : Furinghetti & Radford, 2002.

aislado de la matemática, resulta problemática (Grugnetti & Rogers, 2000) y difícilmente sostenible desde el punto de vista epistemológico.

Varios agentes clasificados en los años '70-'80 por Guy Brousseau (1976, 1983, 1989) contrastan la formación de los conceptos que actúan como obstáculos.

Analizaremos en este escrito la formulación teórica de Luis Radford, a propósito de la interpretación que daremos a la idea de "obstáculo epistemológico" (Bachelard, 1938), sobre la cual pueda fundamentarse una conexión de la historia a la didáctica, a través de la epistemología. Realizaremos tal profundización proponiendo la relatoría de una conversación entre tres, con Luis Radford y Bruno D'Amore que responderán a algunas preguntas propuestas por Giorgio Tommaso Bagni.

Historia de la matemática y didáctica

Bagni: *Ludwig Wittgenstein (1956, IV, 52) escribió: "Incluso quinientos años atrás podía existir una filosofía de la matemática; una filosofía de aquello que era la matemática en ese entonces". ¿Eso significa que la reflexión sobre la matemática y sobre la didáctica tiene que ser historizada?*

Radford: Aquí Wittgenstein distingue el trabajo del matemático del trabajo del filósofo. El filósofo, dice Wittgenstein, no hace matemática: juzga la matemática. Como todos los juicios, el del filósofo se ubica en un período histórico; por lo tanto, el filósofo juzga la matemática desde su propio tiempo. En este sentido, una filosofía de la matemática era posible hace 500 años y es posible aún ahora. El punto notable de la idea de Wittgenstein es el subrayar la distancia entre el filósofo y el matemático. Es esta distancia la que hace posible diferenciar un juego lingüístico (la matemática) del otro (la filosofía de la matemática). Ambos juegos lingüísticos son históricos, Wittgenstein nos lo dice. Y las relaciones entre éstos también lo son. Aunque yo no sea un apasionado de la idea de los juegos lingüísticos, por razones que surgirán en el curso de nuestra conversación, consideraré, para responder la pregunta, la didáctica de la matemática como un juego lingüístico. Así como la filosofía, la didáctica ofrece una nueva luz sobre la naturaleza de la matemática. Se trata de una luz diferente de aquella aportada por el filósofo, dado que el rol del didacta no es el de *juzgar* la matemática.

Algunos están más interesados en el problema del desarrollo conceptual del pensamiento matemático (cfr., por ejemplo, el Capítulo 5 del ICMI Study sobre la historia y la didáctica de la matemática: Fauvel & van Maanen, 2000). Este problema nos lleva a considerar otros problemas, como la relación entre filogénesis y ontogénesis. Podemos entonces crear un juego lingüístico –que es, como todos los juegos lingüísticos, cultural e históricamente situado– que, sin llevar a un juicio, pueda proporcionar elementos de comprensión de la naturaleza de la matemática. No obstante, el problema es mucho más complicado de lo que puede parecer a primera vista. En efecto, dicho juego no puede jugarse sin comprometerse necesariamente con alguna conceptualización del desarrollo de la matemática y de las metodologías apropiadas para llevar a cabo el estudio de dicho desarrollo. Por ejemplo, muchos epistemólogos no aceptan la epistemología genética de Piaget; para estos epistemólogos la naturaleza y el desarrollo de la matemática no pueden ser esclarecidos con el estudio del pensamiento infantil. Nos enfrentamos aquí con la clásica oposición entre psicología y epistemología que fue parte del debate sobre los fundamentos de la matemática en los albores del siglo XX, un debate en el cual Wittgenstein decididamente tomó partido en contra de la psicología de su tiempo.

D'Amore: Cuando cualquier reflexión humana adquiere la denominación de "disciplina", significa que se está historizando, es decir, que está asumiendo una dimensión de desarrollo que tiene como eje de apoyo al eje temporal. Primero, existen tantas teorías como practicantes; luego, se forman un vocabulario y unas prácticas comunes (Romberg, 1988). Cuando existe una práctica suficientemente compartida, nace una meta-práctica y nace una reflexión sobre aquello que la disciplina permite construir. Esta reflexión, en un inicio, está hecha por los mismos seres humanos que desarrollaron las prácticas, luego puede ser realizada por otros. Una reflexión sobre la disciplina es ineludible y acompaña a cada disciplina, también a la matemática.

En general, las didácticas se mantienen a la par de las disciplinas, pero el caso de la matemática es especial, en mi opinión. Parece implícita en la misma creación matemática la necesidad de comunicarla, y éste es el primer paso hacia su didáctica. Esto no significa que la matemática y la didáctica *tengan* que ser historizadas, sino que de hecho lo son. Sobre ambas, sin embargo, se pueden expresar juicios y valoraciones, y esto nos lleva a la frase de Wittgenstein. Existirán juicios y valoraciones sobre la matemática y existirán sobre la didáctica de la matemática; refiriéndose a temas diversos, a prácticas humanas diferentes, lenguas diferentes, objetivos diferentes; y sin embargo tendrán en común un sustrato que a ambas alimenta. La "historización" ocurre entonces separadamente, según la acepción de Feyerabend (2003, 120): la totalidad del conocimiento humano «es un *proceso histórico* complejo y heterogéneo que contiene anticipaciones todavía vagas e incoherentes de futuras ideologías junto a sistemas teóricos muy sofisticados y a formas de pensamiento antiguas y fosilizadas. Algunos de sus elementos están disponibles en la forma de aserciones, escritas en forma clara y precisa, mientras otros están ocultos y adquieren notoriedad sólo por contraste, por comparación con opiniones nuevas e insólitas» (Feyerabend, 2003, p. 120). Para la matemática, el pasaje descrito por Feyerabend ocurrió siglos atrás; para la didáctica, en mi opinión, está en curso.

***Bagni**: Parece importante, incluso fundamental, que un profesor de matemática, en cada nivel escolar, dialogue con la historia y la epistemología de la propia disciplina y logre emplear las referencias históricas concientemente y coherentemente con las propias concepciones epistemológicas. Pero, ¿Cómo es posible, para un profesor, acercarse a la historia?, ¿mediante fuentes secundarias? Y, ¿qué rol se sugiere reservar a la lectura de los textos originales? En particular, ¿cómo se pueden tener correctamente en cuenta (Barbin, 1994) las concepciones de los estudiosos que, en los diferentes períodos históricos, se han encargado de las ediciones de las obras matemáticas consideradas?*

***Radford**:* Una de las principales características de la aproximación histórico-cultural al pensamiento matemático que he descrito en años pasados es la componente histórica. Esto significa, entre otras cosas, que aquello que conocemos y el modo con el cual llegamos a conocerlo deben enmarcarse no sólo por medio de *aquello* que hacemos ahora y *cómo* lo hacemos, sino también por una inteligencia histórica que reposa en prácticas sociales, instituciones, lenguajes, artefactos, libros, monumentos, etc. No debemos perder de vista que el conocimiento y el conocer son ambos sostenidos por esta inteligencia histórica que hemos heredado de las generaciones pasadas. Este es el motivo por el cual los profesores, a mi parecer, deberían conocer al menos algo de la historia de la matemática. Pero esta afirmación mía no refleja sólo una posición "humanista" que contrasta con la agonía de un mundo post-industrial que lleva a la despersonalización. Ésta sostiene el estímulo político de hacernos conscientes del hecho de que no somos ni el producto exclusivo de nuestras actividades, ni el producto irrevocable de nuestras prácticas discursivas. La historia de la matemática (concebida no como una simple secuencia de eventos heroicos, con nombres y fechas) es un medio para comprendernos a nosotros mismos como seres históricos y comprender nuestra responsabilidad de educadores. Hasta qué punto y cómo los profesores tienen que adquirir familiaridad con la historia de la matemática es, indudablemente, una buena pregunta que no tiene una única respuesta.

***D'Amore**:* Existen fuentes "secundarias" de óptimo nivel, que inducen el gusto por las lecturas directas (algunas las hemos recogido en: D'Amore & Speranza, 1989, 1992, 1995). A mi me sucedió, décadas atrás. No creo que un profesor deba necesariamente transformarse en un historiador de la matemática. Me parece fundamental que el profesor advierta la fuerte presencia de la transformación histórica de las teorías que enseña, que no las conciba como inmanentes, inmutables, definitivas. Debe además hacerse conciente del hecho de que las teorías se desarrollan y evolucionan sobre todo a causa de las prácticas humanas compartidas; que cada teoría es el resultado de aportes sociales, a pesar de que circula ampliamente la tendencia a hacer aparecer frecuentemente al individuo como un creador aislado, libre de condicionamientos (Godino & Batanero,1994; Radford, 1997, 2003b). A mi parecer es esencial que el profesor conozca a fondo, así sea a través estudios de fuentes de carácter indirecto, siempre que sean acreditadas, la historia y la epistemología de aquello que enseña, al menos por dos razones profesionales: a) enriquecimiento cultural, y b) entrar en contacto con las razones objetivas de la existencia de obstáculos epistemológicos (D'Amore, 2004).

Entre los grandes beneficios didácticos concretos que advierto: una diversa evaluación de la acción del alumno (errores, misconcepciones, por ejemplo), una valoración diferente de la idea de rigor, un comportamiento diferente respecto a la comunicación matemática... Me parece, además, fundamental una aproximación sociológica a estos aspectos epistemológicos conceptuales, que restituyan a nuestra disciplina aquél ser suyo, que se originaba en las actividades humanas, ese ser compartido, discutido, comunicado, transmitido, usado en contextos culturales diversos, en situaciones diacrónicas y sincrónicas.

Bagni*: De acuerdo con la aproximación socio-cultural, el conocimiento está relacionado con las actividades de las cuales los sujetos se ocupan (Radford, 1997, 2003a, 2003b) y esto debe ser considerado en relación con las instituciones culturales del contexto que se esté estudiando. Desde este punto de vista, ¿cómo consideran, hoy, los obstáculos epistemológicos?*

D'Amore*:* Substancialmente, no creo que la base histórica de la idea de obstáculo epistemológico enunciada en los años '70 por Brousseau sea debilitada en sus fundamentos por estas consideraciones de Radford que, de otro lado, comparto del todo. Precisamente, para discutir sobre este punto los invité a ambos a Suiza en el 2004 y el resultado del coloquio entre los tres me ha convencido profundamente. Ciertamente, la concepción de obstáculo epistemológico cada vez parece más un constructo teórico al cual hacer referencia, que un medio de análisis para intervenciones didácticas; éste ya no parece aislado de otras formas de explicación objetiva de los resultados de los procesos de enseñanza-aprendizaje, como lo era en los años '80 (D'Amore, 2003b). El obstáculo epistemológico ya no sólo resulta fuertemente vinculado a factores conceptuales sino a factores sociales, en los cuales la historia "pura" de la matemática entra en contacto con las historias de las prácticas humanas (D'Amore, 2005a). Lo que continúa gustándome mucho de la presentación clásica de Brousseau sobre el obstáculo epistemológico, es el ser expresión de conocimiento y no de ausencia de conocimiento. Este punto, no sólo me ha fascinado y convencido siempre, sino que me ha sido muy útil en las investigaciones de micro-didáctica en el aula. Me ha servido además como base de apoyo para reflexiones arriesgadas, como aquella revisión semántica del término "misconcepción" (D'Amore & Sbaragli, 2005). Ciertamente, relacionar la idea de obstáculo epistemológico con factores provenientes de las prácticas sociales, conlleva hoy a una revisión de aquello que ayer fundamentó toda la *teoría de los obstáculos*; pero de otro lado, *toda* teoría, primero o después, debe ser revisada.

Radford: La idea de obstáculo epistemológico fue importada a la didáctica de la matemática en los tardíos años setenta, hace más de veinte años (cfr. Perrin – Glorian, 1994, 112). Era un período en el cual se prestaba poca atención al rol del contexto cultural en la actividad cognitiva. Cuando los aspectos sociales o culturales fueron tomados en consideración, se abordaron como algo de no mucha importancia. Lakatos, por ejemplo, dividió el desarrollo de la matemática en dos historias, una externa y una interna. La externa incluye el contexto cultural que, para él, tiene solamente un rol periférico: buenas condiciones culturales pueden acelerar el desarrollo de las ideas pero no pueden en ningún caso influir sobre las ideas mismas. Desde este punto de vista, determinadas condiciones buenas o malas son parte de algo ajeno a la matemática. Al contrario, la evolución de las ideas matemáticas propiamente dichas se refiere a la historia interna, la única "verdadera" según Lakatos. Esta aproximación, naturalmente, es terriblemente racionalista.

Ahora, según la teoría de los obstáculos epistemológicos, aquello que hace que un obstáculo sea epistemológico es su presunta naturaleza no-cultural, no-didáctica, no-ontogenética. Un obstáculo es epistemológico por su presunta naturaleza epistémica intrínseca. Con esta premisa, la naturaleza epistémica de la cultura está excluida desde el inicio. De acuerdo con dicha idea, el "milieu"[26] (como es considerado en la *Teoría de las Situaciones*, de Brousseau) es concebido frecuentemente como una cosa que se opone al individuo. Más precisamente, la relación entre el individuo y su milieu es antagónica. Cada uno está involucrado en un juego racional, buscando obtener el máximo del otro –en un juego de suma cero. He analizado este punto en un artículo publicado hace casi 8 años (Radford, 1997). Escuchando a D'Amore decir que "el obstáculo epistemológico resulta fuertemente vinculado a factores sociales", me pregunto qué tan fuerte realmente puede ser este vínculo en dicha teoría. Pienso que no puede ser tan fuerte, de otro modo la base de la

26 Se asume con la idea de medio. N. d. T.

idea de obstáculo epistemológico resultaría destruida y la notable tipología de obstáculos (ontogenético, didáctico, cultural y epistemológico) ya no tendría sentido. Prefiero analizar teóricamente el problema del pensamiento matemático siguiendo una línea distinta. Creo que el pensamiento y el conocimiento están *imbricados* definitivamente en sus contextos culturales. Recuerdo una discusión que tuvimos en Francia en 1998, durante el encuentro de preparación del ICMI Study sobre Historia que condujo al libro editado por Favuel et van Maanen. La discusión se dio a raíz de una intervención en la que yo insistía (siguiendo a Feyerabend, Foucault, D'Ambrosio y otros) en la importancia de poner atención a los contextos culturales. Algunos colegas percibieron mi enfoque cultural al pensamiento matemático como algo sin relación con la epistemología de las matemáticas; para ellos mi enfoque no tenía nada que ver con la episemología sino ¡con la sociología del conocimiento! Si observamos la reciente literatura en didáctica de la matemática, las cosas parecen haber cambiado un poco desde ese entonces, aunque, naturalmente, en algunos países más que en otros.

Bagni*: El vínculo entre entorno cultural y matemática en esta elaboración no se limita a una estimulante coincidencia (Wartofsky, 1979); respecto a eso se puede citar a Radford: «La configuración y el contenido del conocimiento matemático está propia e íntimamente definido por la cultura en la cual ésta se desarrolla» (Radford, 1997, 32). Profundicemos en este punto esencial.*

Radford*:* En efecto, lo que sugiero es que la cultura es mucho más que un estímulo y mucho más que un obstáculo para el conocimiento. Lo que afirmo es que el conocimiento está estrechamente enraizado en su contexto cultural o, en otras palabras, que la cultura es consustancial al conocimiento. Pero aquí debemos ser cautelosos. Mientras hace unos años la cultura era considerada desprovista de un rol *fundamental* en el conocimiento y en la actividad cognitiva, ahora parece que la cultura tiene un rol *omnipresente*. Hoy, incluso los Platonistas conceden que la matemática conlleva un aspecto humano y cultural, en la medida en que, para descubrir las verdades eternas de las cuales se supone que la matemática está constituida, se requiere de un ser humano (un descubridor) que necesariamente vive y respira en un contexto cultural. Por esta puerta los platonistas piensan que han penetrado en el campo de la cultura y reclaman la compatibilidad de su ontología con las premisas de las aproximaciones culturales. Por lo tanto, si no somos más precisos a propósito del vínculo entre cultura y mente, entre cultura y saber, terminaremos por cerrarnos en una postura más bien ingenua.

Sobre la base de epistemólogos como Wartofsky e Ilyenkov, he sugerido que el conocimiento es un producto de un tipo específico de actividad humana -precisamente, de una actividad humana muy específica: el *pensamiento*.

Pensar es un género de praxis social, una forma de reflexión sobre el mundo, que responde a categorías conceptuales éticas, estéticas y otras categorías culturales (Radford, 2006a). El pensamiento griego del período clásico estaba conformado por la distinción eleática entre ser y no ser. Dicha distinción ha operado como una categoría conceptual general que ha sostenido la episteme griega y sus varias manifestaciones, entre ellas el pensamiento matemático. La episteme china estaba conformada por categorías conceptuales diferentes, en particular por la oposición *yin-yang*. Esta distinción hizo concebible, en el campo matemático, una cosa similar a lo que nosotros hoy llamamos "números negativos", números que eran inconcebibles en el período griego clásico.

El pensamiento occidental tuvo que enfrentar profundas transformaciones para crecer con el germen de nuestro concepto contemporáneo de números negativos. En efecto, los números negativos se volvieron concebibles en el contexto del naciente Capitalismo del siglo XV y XVI, con la nueva división del trabajo en actividades humanas y un conjunto de nuevas categorías conceptuales culturales concomitantes, en particular el "valor" como abstracción cultural, y la "eficiencia" en el sentido tecnológico renacentista (Radford, 2006c). En resumen, nos encontramos completamente de acuerdo sobre este punto –el vínculo entre cultura y matemática no puede ser considerado como una pura coincidencia. Hay una conexión profunda entre éstas, y la razón es que las matemáticas (en plural) son formas culturales de reflexión sobre el mundo, formas culturales de dar sentido a éste.

D'Amore: La matemática es el producto de la acción recíproca, relacional, de individuos, al interior de una sociedad a la cual ellos pertenecen; tales individuos, quieran o no, ponen en acto estrategias de pertenencia a dicha sociedad (a veces son "prácticas", a veces "meta prácticas") (Godino & Batanero, 1994; D'Amore, 2005a). Su comportamiento está bien explicado por los análisis de carácter sociológico. Al interior de tal sociedad, el lenguaje compartido adquiere un rol determinante. Éste no es sólo vehículo de comunicación, ya que a causa de las interacciones sociales a las cuales puede contribuir, el lenguaje se hace modalidad de creación. En la matemática, la creación y la comunicación de sus contenidos son frecuentemente considerados como uno sólo (McClain & Cobb, 1997).

La cultura no es otra cosa que la adhesión a un esquema preestablecido que identifica a la sociedad de pertenencia, aún incluso cuando parezca contradecirla (Bauersfeld, 1995); es el órgano propulsor, motivante. Por lo tanto, es impensable un conocimiento matemático cuyo contenido no sea absolutamente expresión de la cultura de la sociedad en el seno de la cual se desarrolla. Toda la historia de la matemática muestra cómo el desarrollo de prácticas determina la aceptación de ideas: el constante nacimiento de algoritmos nuevos, la creación de un álgebra simbólica, la idea misma de geometría analítica, el uso de números enteros (relativos)... No logro decidirme a hablar de más, es decir que las ideas sean incluso el resultado de prácticas o de necesidades, porque tengo muchos contraejemplos. Creo que el pensamiento humano se desarrolla hacia conquistas culturales que se afirman como ideas, que en torno a ellas se elabora un estatuto conceptual siempre más compartido y que un acto importante de ese compartir es la necesidad de *usarlas* para un propósito humano no sólo en potencia, sino en acto. Considero que un discurso del todo análogo se puede hacer para lo que concierne a la didáctica de la matemática. Sólo para proponer un ejemplo, ¿quién hoy, conociéndolos, renunciaría a los instrumentos conceptuales que la investigación en didáctica de la matemática ha creado, para regresar a hipótesis didácticas ilusorias, como aquellas de los años '70, basados en instrumentos artificiales pre-confeccionados?

Bagni*: En lo concerniente a la importancia del lenguaje, en las modernas reflexiones en didáctica, es necesaria una delicada y juiciosa reflexión a propósito de su rol en la formación misma de los conceptos: «En los últimos años [...] encontramos una clara tendencia a considerar el lenguaje y el discurso como productores de conocimiento y de ideas. No obstante esto, estamos autorizados a hacernos la siguiente pregunta: ¿podemos realmente atribuir al lenguaje este poder de crear los objetos teóricos del mundo de los individuos?» (Radford, 2003a, p. 124). ¿Qué respuesta dar a tal pregunta?*

D'Amore: Creo que se debe distinguir dos tipologías de objetos en el ámbito de la creación de la competencia matemática (aprendizaje matemático): el objeto matemático en sí mismo y el objeto lingüístico que lo expresa. Sostengo que el aprendizaje matemático de un objeto O por parte de un individuo I al interior de la sociedad S no es otra cosa que la adhesión de I a las prácticas que los otros miembros de S desarrollan en torno al objeto dado O. ¿Cómo se expresa tal adhesión? Con la aceptación de prácticas que son, además, lingüísticas. Entonces, aunque considero que existe una diferencia entre los objetos de la matemática y los objetos lingüísticos que los expresan, creo necesario admitir que tal adhesión ocurre sobre las modalidades de intercambio lingüístico, dado que son éstas, sobretodo, las que determinan las "prácticas" de las cuales tanto se habla. Por lo tanto, a pesar de que no es el lenguaje el que crea objetos, los objetos son creados junto al lenguaje al interior del cual son expresados. A su vez, los objetos "expresiones lingüísticas" son objetos. Acepto de hecho la idea de Blumer (1982, p. 8), según la cual un objeto es "todo aquello que puede ser indicado, todo aquello que puede ser señalado o al cual se puede hacer referencia". Qué tan útil sea esta escogencia, ha sido ampliamente mostrado por Godino en su ontosemiótica del conocimiento matemático (Godino, 2002; sobre este tema, vease también D'Amore y Godino, 2006). Sin embargo, yo personalmente encuentro dificultades con este tema y no tengo reservas en admitirlo (D'Amore, 2001a, b, 2003c, d).

Creo en la paradoja de Duval y en que la única vía de acceso a la noética sea la semiótica, al menos en matemática. Sin embargo, reconozco en el lenguaje, en los lenguajes, una fuerza que pertenece a las reflexiones del pasado, de los años '80. El lenguaje es mediador entre prácticas y pensamiento, pero también entre quién realiza dichas prácticas y quién solicita que se comunique a los otros el propio pensamiento. Son los seres humanos los que adoptan y explicitan prácticas, pero es el lenguaje compartido, son los lenguajes compartidos, los que producen y realizan el puente comunicativo. En la matemática, a veces, es difícil distinguir los dos aspectos. Frecuentemente nosotros pensamos el lenguaje por como lo expresamos en su forma más visible, oral, escrita, formal, pictográfica, figuras, esquemas, dibujos... Pero, en un cierto sentido, pertenecen a las formas del lenguaje las expresiones a través de las cuales las prácticas humanas se realizan, la música, las obras de arte, las manufacturas, los gestos, el juego, las construcciones (*en sentido amplio)* de cualquier género. La presencia de estos géneros expresivos abunda en matemática. Si pensamos en el lenguaje sólo como un artefacto comunicativo, su versatilidad todavía sorprende. Las limitaciones intrínsecas a su realización pueden constituir obstáculos a la explicitación total del pensamiento. Así que, lagunas del uno se identifican con deficiencias del otro. En la matemática y en su historia este punto es evidente; en la didáctica de la matemática está continuamente presente a los ojos de cualquier observador. Me entusiasma pensar el lenguaje como un producto del conocimiento del ser humano pensante, como uno de los productos posibles. En espera de organizar las ideas, por ahora esta aproximación me permite distinguir al lenguaje de quien lo usa, al conocimiento de sus formas explicitas de ostensión por parte de los individuos.

Radford: Me considero entre quienes aprecian la importancia epistémica del lenguaje. Pero sostengo que –epistemológicamente hablando- los modos de conceptualizar, conocer y pensar no pueden ser adecuadamente descritos solamente en términos de prácticas discursivas. Busco explicarme y responder a la pregunta recogiendo lo que le ocurrió a una antropóloga que partió a México, hace algunos años, a estudiar una comunidad específica –los Mazahua. La antropóloga quería saber cómo los padres instruían a sus hijos. Escogió algunos padres y les preguntó: "¿cómo instruyen ustedes a sus hijos?". Todos los interpelados se sorprendieron con la pregunta. En el curso de las intervenciones, ellos afirmaron que no educaban a sus hijos, sino que los niños se limitaban a aprender. Posteriores observaciones etnográficas precisas, esclarecieron que, para aprender, los niños se integraban a sofisticadas prácticas sociales con sus padres, prácticas en las cuales era esencial observar a los padres en el trabajo, y de esta manera unirse a ellos en dicho trabajo, luego empezar a actuar bajo la supervisión de los padres, evaluar las acciones, corregirlas si es necesario, etc. He aquí un ejemplo (de Haan, 1999, 96) de una madre (M) que responde a las preguntas de la entrevistadora (I) a propósito de cómo M enseña a sembrar a su hijo de 10 años:

I: (…) por ejemplo, sembrar, [él] ¿lo sabe?

M: Sembrar, sí.

I: ¿Y cómo lo aprendió?

M: (en voz baja) Con un hombre.

I: ¿Y cómo? (Tanto la madre como la hija presentes en la entrevista ríen, obviamente encuentran extraña mi pregunta)

M: Le dijo algo como de ir a sembrar.

I: Sólo así…

M: Sí.

I: ¿Pero él inició inmediatamente a sembrar?

M: Sí… (Ríe)

I: […] Dices: bien, vamos a sembrar.

M: Sí.

I: ¿No lo había hecho nunca, antes, digamos?

M: No.

I: ¿Y cómo… por qué la primera vez es difícil de hacer, y cómo…?

M: Si, pues, como sembramos también nosotros, sólo en el momento de la siembra, la cosecha, sembramos…

Figura 28. Siembra de semillas de maíz en una comunidad Mazahua. Tirado de Haan, 1999).

Como el análisis antropológico sugiere, en los procesos de enseñanza-aprendizaje Mazahua, donde difícilmente encontraremos una "trasposición didáctica" en el sentido de Chevallard, el aprendizaje del niño está amalgamado con su implicación en las prácticas sociales de la comunidad (figura 28). Los Mazahua usan el lenguaje, naturalmente, pero más que estar confinado en un género de discurso teórico, el lenguaje es utilizado como parte de la práctica social, para sostener y regular las acciones, por ejemplo, en forma de índice para hablar de líneas rectas y de espacio, como es sugerido por el próximo ejemplo que se refiere al arado (*op.cit.*104):

M: [...] Cuándo se muestra ehh, cómo arar, decía.

I: Hmm.

M: Y entonces debe hacerlo, es un trabajo que tiene que hacer como lo haría un adulto.

I: Hmm.

M: Porque es una cosa, bueno, cuando es así (indicando una cosa que no es una línea recta).

I: Sí.

M: Eh no.

I: No.

M: En conclusión, tienen que estar derechas. Finalmente, esto es lo que tiene que aprender, como se lo hará ver (probablemente refiriéndose al padre).

Como comenta de Haan "al niño no le está permitido hacer las cosas de manera diferente, en cuanto a que ciertos estándares [culturales, científicos] tienen que ser alcanzados; el niño debe hacer las cosas como le han sido mostradas".

He querido recordar este ejemplo porque creo que muestra una práctica social que escasamente puede ser llamada discursiva. Se trata de una práctica de acciones, donde el lenguaje está presente, pero de manera diferente. Temo que nuestra contemporánea fijación a propósito del lenguaje —detrás de la cual el espectro de Aristóteles parece todavía obsesionarnos— sea realmente otra forma de racionalismo, o quizás uno de sus últimos residuos. Es una obsesión en la cual las prácticas humanas son sustituidas por palabras, y el actuar humano se pierde en una jungla de palabras y de signos. Prefiero decir que el lenguaje es mediador de las actividades humanas. En calidad de mediador, sostiene, en larga medida, nuestra historia cultural, como hacen los artefactos, los monumentos, las pinturas, etc. Pero el lenguaje no tiene un poder creativo, en cuanto que el lenguaje no piensa. Quienes piensan son los individuos que usan el lenguaje. Pensando, es decir, reflexionando sobre el propio mundo, los individuos usan el lenguaje, los artefactos, etc., y haciendo esto producen los propios objetos de conocimiento.

El Aula de clase como sociedad

***Bagni**: Según la perspectiva socio-cultural, la aproximación al hecho histórico no está centrada en una presunta existencia objetiva de éste en el seno del desarrollo de la matemática, independiente de factores sociales, actividades humanas, procesos semióticos y simbólicos. Entonces, ¿la referencia a las prácticas del comportamiento humano al interior de una sociedad, que expresa necesidades y condicionamientos culturales, impide la objetivación de los progresos del camino de la ciencia?*

D'Amore: Son problemas distintos. En todo caso, aquí me interesa examinar la creación de la matemática entendiéndola como aprendizaje, que asumo como adhesión a una práctica social compartida (D'Amore, 2005a). El comportamiento humano al interior de una sociedad determina dos tipos de actividades personales. Actividades de adhesión a la sociedad, según las normas pre-establecidas que definen los objetivos de ella (por ejemplo, se está en el aula, en la sociedad clase, teniendo como norma preestablecida para esta sociedad el aprendizaje de la matemática); meta-actividades de adhesión a la sociedad, buscando obtener el reconocimiento de positivo funcionamiento a través de la conquista directa de los fines (prosiguiendo con el ejemplo, si el reconocimiento de funcionamiento que da la sociedad-clase es interpretado como el hecho de recibir una evaluación positiva, seria posible no aprender matemática y meta-funcionar de modo tal que igualmente se obtenga la evaluación positiva) (Bagni & D'Amore, 2005; D'Amore, 2005a). Considero que es inútil, tal vez imposible, el pretender interpretar el aprendizaje en una sociedad con la ilusión de que se trata de hechos individuales aislados. El aprendizaje es entonces la creación de competencia matemática y no puede hacerse independiente de los factores sociales contingentes, de las actividades humanas, sobre todo de los procesos semióticos, que son determinantes.

Radford: Yo considero las dimensiones sociales y culturales del conocimiento no como cosas que obstaculizan el progreso, sino, al contrario, como cosas que proporcionan las condiciones para su existencia y desarrollo. Dado que el conocimiento es el resultado del pensar, y el pensar es una praxis social cognitiva, el progreso de la ciencia no puede ser descrito en términos generales. Puede sólo ser descrito atendiendo a aquellas necesidades y preguntas que el conocimiento práctico y teórico pretende resolver, en un cierto período histórico y cuyas soluciones y métodos quedan sujetos a las normas a las que D'Amore se refiere. Sólo deseo agregar que es importante no lamentarse sobre el hecho de que aquellas normas están impresas en grandes complejos sociales. Entre otras cosas, éstas involucran cuestiones de legitimidad y de poder. Las normas que constituyen y dan forma a las prácticas sociales en las cuales estamos inmersos (sea en la escuela o afuera de ésta), son en realidad altamente políticas. Tal vez tendré ocasión de volver sobre este punto más tarde.

Bagni*: La aproximación ecológica (Hardesty, 1977) permite analizar los aspectos culturales y las prácticas compartidas (Godino & Batanero, 1994) en el contexto del ambiente social global en el cual una sociedad está inserta (D'Amore, 1999). La sociedad "clase" vive en el aula, pero ésta no está aislada del contexto "escuela", y es influenciada por los contextos "sociedad" y "familia". Las prácticas de los individuos pertenecientes a la sociedad están relacionadas con las expectativas y limitaciones determinadas por el ambiente en el cual viven y las posibilidades que éste ofrece. Por lo tanto, las prácticas no son libres, sino condicionadas por el ambiente, sistémicamente entendido (Bagni & D'Amore, 2005). Desde este punto de vista, ¿Las prácticas que se ejercen en el aula pueden entrar en un sistema de adaptación de los individuos (los estudiantes) a la sociedad, bajo la dirección de otro individuo que la institución social ha reconocido como su representante (el profesor)?*

D'Amore: Este punto ya ha sido tratado en esta conversación. Sería ilusorio pretender interpretar por completo el comportamiento del individuo I al interior de una sociedad S en base a los objetivos, a los propósitos que son determinantes para la identificación de S. Se sabe que existen metaprácticas de adaptación de I a S, propósitos que se diferencian de aquellos compartidos, tentativas de eludir aquellos propósitos para llegar a aquello que es identificado como el verdadero resultado por alcanzar (Bagni & D'Amore, 2005; D'Amore, 2005a). Yo creo que, por ejemplo, el contrato didáctico de Brousseau, una de las piedras angulares sobre las cuales se ha fundado históricamente nuestra disciplina en los años '70, se puede explicar en estos términos: ¿quién o qué cosa condiciona la elección de I, entre adherir a los propósitos que determinan S y el poner en acto las metaprácticas?

Desde luego, como tú dices, las interpretaciones que de S y de sus propósitos dan la noósfera y todas las otras sociedades que rodean a I. La finalidad del profesor, guía, tutor, acompañante, organizador etc., dependiendo de las varias versiones que fueron dadas en 30 años por las teorías de la enseñanza-aprendizaje, adhiere en todo caso al modelo que le fue asignado por la teoría de las situaciones, institucionalizador de conocimientos construidos personalmente en S y luego compartidos. Esto determina un rol diferente del profesor, reconocido por I y hecho propio por S, no siempre compartido por las realidades sociales que circundan S e influencian a I (D'Amore, 2005a). Las divergencias entre los comportamientos de I esperados por el profesor o por la institución, son frecuentemente ocasionados por la ausencia de competencia (matemática, epistemológica y didáctica) de quién debe juzgar el comportamiento de I (vease mi ejemplo sobre la demostración en el aula, D'Amore, 2005b; el profesor está esperando deduciones de tipo aristotélico, el alumno basa su deducción, sin obviamente saberlo, en la nyaya indue). Es obvio que, cambiando los parámetros de referencia, todo se acomoda a éstos; las elecciones epistemológicas de base, o las referencias a diferentes teorías del aprendizaje, o ambas (como frecuentemente sucede), determinan verdaderas revoluciones en las interpretaciones de los hechos que suceden en el aula. Bastaría pensar en dos grandes corrientes en conflicto, cada una de las cuales es múltiple: el realismo y el pragmatismo (D'Amore, 2003b). Devolviéndome a los juegos lingüísticos implícitos en la primera pregunta, aceptando esta idea, queda excluida toda interpretación realista, pero se abre camino a interpretaciones a la Chevallard (antropológicas), a la Godino (ontosemiótica) (D'Amore & Godino, 2006). En fin, ¿Cómo no tener siempre en mente que todo intento del individuo de permanecer anclado a una sociedad, no es más que una adhesión al modelo implícito en los "otros", que se reconocen como pertenecientes a aquella sociedad?

Radford: Mi respuesta a la pregunta formulada es sí: las prácticas del aula pueden ser consideradas como sistemas de adaptación de los estudiantes a la sociedad. Pero ¿cómo podemos describir esta "adaptación"? Y ¿cuál es el rol que juegan en ella los profesores y los estudiantes? Aquí las respuestas pueden variar, particularmente gracias a las premisas epistemológicas. Así, el socio-constructivismo responde a esta pregunta en un modo que, pienso, es muy diferente de aquel de la Teoría de las Situaciones a la cual D'Amore se refiere en su respuesta, y de la aproximación histórico-cultural de la cual he hablado antes.

Dado que el socio-constructivismo está cimentado en la idea de que el conocimiento procede a través de un proceso de negociación de significados, y en cuanto éste concibe al aula como una suerte de espacio comercial o de negocios, el profesor es concebido casi desprovisto del poder de imprimir una determinada dirección a las negociaciones. Virtualmente, es un negociador a la par de cada uno de sus estudiantes. Naturalmente tal premisa lleva a numerosas e interesantes paradojas, pero no es esto de lo que nos estamos ocupando. Lo que queremos subrayar es que la idea de "adaptación" puede asumir diferentes formas, según la cultura en la cual es considerada, en tanto toda visión del aula como un sistema de adaptación está ya inmersa en categorías culturales, algunas de las cuales son parte de aquella zona confusa que Castoriadis (1987) llama "imaginario colectivo".

Si pensamos que el propósito último de la educación es la autonomía del individuo, como sugería Kant, sintetizando una de las ideas claves de la filosofía europea del '700 (el Iluminismo), la negociación del significado es una vía "natural" para la adaptación del aula a la sociedad. Para el iluminismo, el derecho a escoger el significado de nuestros conceptos predomina como parte de nuestro camino hacia la autonomía. La idea kantiana de adaptación se funda sobre una particular concepción del hombre mismo –sobre la idea de sí mismo como un individuo racional y autosuficiente. Es éste el fundamento del pensamiento político contemporáneo neo-kantiano. Si, por el contrario, el fin último de la educación es considerado el volverse miembro de una comunidad, donde pertenecer significa ser-con-los-otros (Radford, 2006c), entonces el término "adaptación" asume un significado diferente. La clase no es considerada como un conjunto de individuos que se enfrentan por la propia autonomía, sino como un grupo que apunta a un realizable modo de vida comunitario.

Bagni: *Es emblemático que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática se juegue al interior de la escuela; tal término, que en griego antiguo significa "libre uso de las fuerzas espirituales", hoy significa "institución regulada por normas específicas al interior de un recorrido de instrucción". En el primer caso, las prácticas prefiguradas eran las de cultivar el intelecto propio, hacia actividades con un fin en sí mismas; en el segundo, la comunidad es regulada por normas que sancionan las actividades, los tiempos, las modalidades, los propósitos, las metas. En el primer caso no hay obstáculos; en el segundo, se crean incluso donde no existirían (Bagni & D'Amore, 2005). ¿Se puede vincular este punto a la tradicional clasificación de los obstáculos?*

D'Amore: Desde cundo la escuela es lo que hoy todos nosotros conocemos, está vigente la segunda de las interpretaciones que tú presentas; la historia no nos dice mucho sobre la primera y de todos modos se nos escapa. Ciertamente, la clasificación de los obstáculos ha sido hecha por comodidad conceptual y para orientar los estudios. Sobre esto he discutido ampliamente de manera personal con Brousseau, y en un trabajo mío (D'Amore, 2003b) presento una "explicación" de la terna (obstáculos ontogenéticos, didácticos, epistemológicos) fundada sobre el triángulo de la didáctica (en el mismo orden: estudiante, profesor, saber). Según Brousseau, en esta explicación, por un lado funcional y por el otro conceptualmente organizativa, queda oculta la función, tan importante en la teoría de las situaciones, de su *milieu*. Desafortunadamente no tengo nada escrito, tratándose sólo de conversaciones. Sin embargo, nuestro amigo en común, al cual todos reconocemos una importancia histórica determinante para la disciplina, ha aceptado escribir un bello prefacio a aquella obra, convencido de poder adherir entonces a esta visión que busca acomodar dos puntos de vista.

Yo creo que, más allá de esta cómoda modelación, no se puede pensar que la tradicional clasificación de los obstáculos sea con intersección vacía, como he buscado evidenciar en diferentes trabajos, míos o de mis varios alumnos; en éstos, se parte frecuentemente de obstáculos epistemológicos para mostrar que la verdadera causa evidente de las situaciones de una fallida construcción de conocimiento reside en obstáculos didácticos. Por hacerla breve, la clasificación "histórica" de los obstáculos provee sólo un modelo.

Como ya sé que Radford encontrará motivos para confutar esta cuestión, podría anticiparme ya a sus objeciones. Me dirá que la clasificación de los obstáculos y la naturaleza teórica de éstos dependen de las elecciones que nosotros operemos sobre la cultura y sobre el conocimiento. ¿Cómo no compartir esta manera de pensar? Pero éste es cuesta arriba, mientras la pregunta es, por decirlo así, cuesta abajo. Si queremos derribar todo, entonces aceptemos que el obstáculo no siempre es un obstáculo, sino que es un… compañero de viaje con el cual debemos ajustar las cuentas, que a veces es extremadamente difícil distinguir un obstáculo ontogenético de uno didáctico; en efecto, tengo ejemplos de obstáculos extraídos de la vida real del aula de clase que son todos los tres obstáculos puestos juntos. ¿Qué cosa quiere decir *realmente* construir conocimiento? ¿Qué cosa es *realmente* el conocimiento? Las respuestas a estas preguntas determinan la naturaleza misma de las escogencias sobre las cuales se basan definiciones y connotaciones. Son demasiadas variables en juego para emitir sentencias unívocas.

Radford: El modo en el cual la cuestión está expuesta podría sugerir que todos los esfuerzos que apuntan al "libre uso de las fuerzas espirituales" no encontrarán obstáculos, mientras en el segundo caso los obstáculos serán inevitables. No estoy seguro de estar de acuerdo. Tal vez, el punto que encuentro problemático es el significado del término *obstáculo*. Si con el término obstáculo epistemológico nos referimos a un tipo de conocimiento parcial (por ejemplo, un conocimiento puesto en alguna parte del recorrido del desarrollo conceptual que sirve para resolver ciertos problemas y que comienza a ser causa de errores en el momento en que es aplicado, por fuera de este tipo de problemas), la cuestión fundamental para mí consiste en explicar la *naturaleza* del camino que se supone es recorrido por todos nosotros durante el desarrollo conceptual, prescindiendo de nuestro contexto temporal y cultural. Precisamente en cuanto su naturaleza es considerada más allá de la cultura y del tiempo, tal recorrido parece ser un recorrido *universal* de desarrollo conceptual. Ahora, dado que para mí la cultura y el conocimiento tienen la misma sustancia, considero que la precedente concepción de obstáculo es demasiado ambiciosa. Pero, por amor a la claridad, continuemos con la respuesta a la pregunta.

Se puede pensar que los obstáculos aparecerán cuando las prácticas socioculturales sean efectuadas. Este modo de entender la cuestión de los obstáculos en el aprendizaje es muy difuso. Antes que una suerte de potenciamiento, la cultura es vista como un impedimento. Creo, sin embargo, que ésta sea una concepción muy restrictiva de la cultura. No tengo aquí el espacio para entrar en los detalles (me he ocupado de este problema en: Radford, 2006c), pero quisiera recordar brevemente el caso de un "niño salvaje" (*wild child*), que creció sin ningún contacto con la cultura (Newton, 2002).

Dicho niño fue encontrado en Rhodez, una ciudad entre Montpellier y Tolouse, en el 1800. El niño, de aproximadamente doce años, era más un animal que un hombre. Pierre-Joseph Bonnaterre –un profesor de historia natural– estudió al niño e intentó enseñarle algunas cosas, pero el niño no aprendió a hablar y no comprendía muchos hechos socio-culturales esenciales. Transcurrió su vida sin lenguaje, involucrándose solamente en prácticas cotidianas extremadamente sencillas. Era ya demasiado tarde, para él, para intentar un ingreso en el lenguaje y en la sociedad. No había podido obtener beneficios de la inteligencia histórica depositada en el lenguaje y en las prácticas sociales y, por lo que podemos saber, tuvo una vida muy simple, principalmente regulada en base al instinto. Permitir a este niño un "libre uso de las fuerzas espirituales" lo mantuvo lejano de la cultura, llevándolo a ser un proto-ser humano que pasaba el tiempo subiéndose a los árboles y corriendo detrás de las mariposas. Considero que este ejemplo muestra la dimensión del potenciamiento de la cultura.

Naturalmente, existe otro aspecto concerniente a la cultura y a sus prácticas. Existen buenos modos de enseñar y malos modos de enseñar. Pero, como sugiere mi observación previa, la distinción entre bueno/malo depende de la concepción cultural del conocimiento y del rol con el cual profesores y estudiantes son dotados en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Este es el motivo por el cual un profesor puede ser bueno en un determinado país y malo en otro.

No pretendo pasar a la siguiente pregunta sin ocuparme directamente del punto central de la pregunta actualmente en discusión –el problema de la clasificación de los obstáculos. Existe un punto de vista según el cual, independientemente de la cultura y de la fase de crecimiento conceptual del niño, la trayectoria de A a B (para proseguir a considerar la metafórica trayectoria espacial) está atravesada por obstáculos intrínsecos que están bajo la única jurisdicción del saber. Quienquiera que camine sobre la ruta de A a B los encontrará. D'Amore dice, respondiendo a la presente pregunta, que la conocida clasificación de obstáculos (ontogenéticos, didácticos y epistemológicos) podría ser considerada una "comodidad conceptual". En mi opinión, el problema es que una distinción tal es mucho más que una "comodidad conceptual". Nuestras elecciones epistemológicas no son inocentes. Son licencias a particulares concepciones del conocimiento y del conocer, y la respuesta a la pregunta de si los obstáculos puedan ser clasificados de un modo o bien de otro depende de estas elecciones.

D'Amore: Haciendo referencia a la idea de "comodidad conceptual", de ninguna manera se excluye una no-neutralidad de las elecciones epistemológicas; puedo incluso ser más drástico que tú, sin ningún temor a la incoherencia, ¡es más!, afirmando que cada elección epistemológica es no-neutra, "no-inocente", como tú dices; incluso lo son, en mi opinión, las escogencias epistemológicas implícitas, aquellas no dichas y algunas veces ni siquiera reconocidas por quien las practica.

Bagni*: Uno de los miembros de la microsociedad clase tiene la autoridad (socialmente reconocida por la noósfera y por los otros miembros) para establecer si una práctica individual es divergente o coincide con las expectativas; tal miembro es el profesor. ¿Podemos suponer que la desviación de la práctica esperada testifica la existencia de un obstáculo que se ha interpuesto entre la invitación a participar de una práctica social, hecha por el profesor, y la práctica privada puesta en juego por un estudiante, miembro de la microsociedad? La investigación sociológica sería entonces el instrumento para reconocer la existencia de un obstáculo que impide la actuación de prácticas, en una microsociedad que comparte problemas, usos y, justamente, prácticas.*

D'Amore*:* Sí, en mi opinión es así. La tarea personal del estudiante E al interior de la sociedad S es la de inscribirse en las prácticas lingüísticas de condición conceptual de los objetos O establecidos como competencias por alcanzar (D'Amore, 2003e, 2005). La imitación (de una práctica sobretodo lingüística, más en general semiótica) es, desde este punto de vista, la forma más difusa de esta inscripción, que es la que el profesor debe evaluar como una comunión alcanzada con las prácticas (Sierpinska & Lerman, 1996). Desde este punto de vista, el profesor tiene un rol determinante, decisivo, y desde un punto de vista sociológico, este rol se le ha reconocido por estatus.

El hecho que un estudiante E se desvíe de la práctica esperada como compartida es en realidad un reconocimiento fallido de práctica: el profesor no reconoce en la actividad de E aquella propia, tomada como modelo o propuesta a imitar (D'Amore 2005b; pero es sólo un ejemplo). Por lo tanto, todo se reduce a una confrontación entre prácticas de seres humanos al interior de la sociedad S, sólo que uno de ellos tiene un rol específico, reconocido, único. Creo que la investigación sociológica es el instrumento para indagar expectativas, adhesiones, fugas, desviaciones. Muchos estudios, no solo míos, intentan mostrar cómo también la teoría de las situaciones didácticas se podría interpretar en este sentido (Godino & Llinares, 2000).

Sin embargo, implícita en tu pregunta hay cuestiones enormes, las cuales me inquieta afrontar. En algunos trabajos de etnomatemática (D'Amore, 2003a; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2001, 2005; pero también D'Amore, 2005b) hemos mostrado cómo la hipótesis de la construcción de *diversas* culturas comparables es real, en lugares lejanos de nosotros o en nuestras mismas aulas. Específicamente, en (2005b) he mostrado cómo la idea misma de demostración al estilo euclideano (aristotélica), considerada fundamental por muchos realistas para *la* cultura matemática universal, es interpretada en la realidad escolar por jóvenes estudiantes, en un estilo del todo diferente (en términos nyaya).[27] De esto nace una cosa que me gusta llamar *relatividad de la cultura,* incluso matemática.

Esta diversidad de culturas, de interpretaciones, de sugestiones, es de una profunda riqueza que, demasiado frecuentemente, es desconocida en nombre de una universalidad que, simplemente, no existe como hecho cultural, es reductiva, es falsa.

Por tres años he tenido ocasión de hacer viajes frecuentes a Luxemburgo y frente a mis propuestas de interpretación de la didáctica, los profesores me decían: Pero nuestro problema no es la didáctica, nuestro problema es la variedad de lenguas puestas en juego por los estudiantes; ya no sabemos en qué lengua dirigirnos a ellos. Este era un modo perfecto para observar mejor, sobre una base concreta, por más parcial que sea, la *babel semiótica* de cada clase, considerando como contribución cada estímulo personal. He apreciado mucho el trabajo de Radford (2004b) y he seguido palabra por palabra aquello que en éste observaba y sugería. Creo que este trabajo suyo, y el mío (2005b), desde este punto de vista se apartan un poco de la mayor parte de los bienpensantes (no es una causalidad que, antes de publicar el mío, haya sometido a su consideración toda la reflexión). Para terminar, creo que permitir una libertad expresiva también en matemática es un bien preciado para el aprendizaje de la matemática, aun sí requiere profesores preparados y cultos.

27 "Nyaya" significa "lógica" en idioma indú antiguo.

Radford: La cuestión de los problemas concernientes a *la desviación* respecto a una práctica bien establecida es un problema delicado en la educación, sobre todo hoy, en la medida en que nuestras aulas están volviéndose cada vez más multiculturales. Siempre he sostenido que es un error concebir la cultura como una camisa de fuerza. He planteado aquí que las culturas tienen una dimensión de potenciamiento. Pero las culturas son variadas. Transmiten valores y aptitudes diferentes (por ejemplo, las aptitudes al aprendizaje y a la matemática), etc.

Este punto ha sido claramente expuesto por Anna Sfard en su reciente conferencia plenaria en la 2005 PME Conference en Australia (Sfard & Prusak, 2005). La pregunta de fondo es la siguiente: ¿cómo nos ocuparemos de la cuestión de la *diferencia*? Quiero hacer aquí referencia al trabajo de Judith Bernhard (1995). En su artículo, Bernhard distingue cuatro momentos en los cuales la diferencia ha sido considerada en el pasado: (1) diferencia cómo déficit; (2) diferencia como desventaja / privación; (3) diferencia como diferencia no sustancial; y (4) diferencia como heterogeneidad fundamental. Las primeras tres, afirma Bernhard, corresponden aproximadamente a las perspectivas dominantes, en los sucesivos períodos históricos de la corriente principal del pensamiento psicológico. En la primera, en particular, existe la fe en la "universalidad de las normas occidentales y en el hecho de que las prácticas de las otras culturas representan una divergencia o bien una forma menos desarrollada respecto al ideal. Las diferencias han sido frecuentemente vistas como signos de capacidades innatas". Parece que las cosas han cambiado un poco y que hoy existe la disposición para entender a la diversidad como heterogeneidad fundamental.

La historia de la matemática y de la etnomatemática puede ser aquí de gran utilidad. Puede aportar importantes sugerencias sobre cómo comprender la diversidad. Debemos entender que pertenecemos a una tradición intelectual centrada en los textos -pertenecemos de hecho a una fuerte "tradición escrita", para usar términos de Jack Goody. Los textos matemáticos deben ser expresados a través de signos escritos. De acuerdo, pero existen otros tipos de expresión, como muestra la tradición oral. Existen otros modos de reflexionar sobre el mundo que pueden ser llamados "matemáticos". En (Radford, 2004b) he planteado la necesidad de repensar nuestro concepto de "texto matemático", y de ampliarlo de forma tal que incluya otros signos, como palabras pronunciadas, gestos, acciones, etc. En mis investigaciones en el aula he encontrado frecuentemente estudiantes (no necesariamente provenientes de otras culturas) deseosos –y además felices– de hacer matemática teniendo la posibilidad de expresarse en medios diferentes de la escritura. La pregunta es: ¿sería todavía "nuestra" matemática? Pienso que la respuesta es no. El punto central, sin embargo, es que yo no afirmo que eso constituiría una pérdida. Es más, pienso que sería una *ganancia*. Naturalmente debo todavía convencer de esto a un ejército de colegas e imagino que eso no será fácil, especialmente cuando intente convencer a aquellos provenientes de la formación racionalista.

Referencias

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: VRIN.

Bagni, G. T. (2005). The historical roots of the limit notion: Cognitive development and development of representation registers. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *5*(4), 453–468.

Bagni, G. T. (2006). Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory. *Educational Studies in Mathematics, 62*(3), 259–280. Doi: 10.1007/s10649-006-8545-3

Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*, *19*(1), 73–89.

Balacheff, N. (1988). Le contrat et la coutume: deux registres des interactions didactiques. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp. 15–26). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Barbin, E. (1994). Sur la conception des savoirs géométriques dans les Éléments de géométrie. *Cahiers de didactique des Mathématiques*, *14-15*, 135–158. (http://smf4.emath.fr/Publications/RevueHistoireMath/20/html/smf_rhm_20_253-302.php)

Bauersfeld, H. (1995). "Language game" in the mathematics classroom: Their function and their effects. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 271–292). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bernhard, J. (1995). Child development, cultural diversity, and the professional training of early childhood educators. *Canadian Journal of Education*, *20*(4), 415–436.

Brickhouse, N. (1990). Teachers' beliefs about the nature of science and their relationship to classroom practice. *Journal of teacher education*, *41*(3), 53–62.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En W. Vanhamme & J. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement des mathématiques*, Actes de la XXVIIIème rencontre CIEAEM (pp. 101-117). Louvain la Neuve.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques. *Reserches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165–198.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), *Constructions des savoirs, obstacles et conflits* (pp. 41–64). Montreal: Agence d'Arc.

Castoriadis, C. (1987). *The imaginary institution of society*. Cambridge, Mass.: The MIT Press.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2001a). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *38*(1), 17–46.

D'Amore, B. (2001b). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *38*(2), 143–168.

D'Amore, B. (2003a). Matemática em algumas culturas da America do Sul: Uma contribuição à Etnomatemática. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, 19, 73–89.

D'Amore, B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2003c). The noetic in mathematics. *Scientia Pedagogica Experimentalis*, *39*(1), 75–82.

D'Amore, B. (2003d). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*, *23*(1), 47–51.

D'Amore, B. (2003e). La complejidad de la educación y de la construcción del saber. *Suma*, 43, 23–30.

D'Amore, B. (2004). Il ruolo dell'epistemologia nella formazione degli insegnanti di matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*, *18*(4), 4–30.

D'Amore, B. (2005a). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società: Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, *19*(3), 325–336.

D'Amore, B. (2005b). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the learning of mathematics*, *25*(2), 26–32.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2001). Matemática de la cotidianidad. *Paradigma*, *22*(1), 59–72.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*, *18*(3), 27–50.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2005). Storia ed epistemologia della matematica basi etiche. *La matematica e la sua didattica*, *19*(4), 503–515.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(1), 9–38.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 139–163.

D'Amore, B., & Speranza, F. (Eds.) (1989). *Lo sviluppo storico della matematica: Spunti didattici* (Vol. 1). Roma: Armando.

D'Amore, B., & Speranza, F. (Eds.) (1992). *Lo sviluppo storico della matematica: Spunti didattici* (Vol. 2). Roma: Armando.

D'Amore, B., & Speranza, F. (Eds.) (1995). *La matematica e la sua storia: Alcuni esempi per spunti didattici*. Milano: Angeli.

de Haan, M. (1999). *Learning as a cultural practice*. Amsterdam: Thela Thelis.

Eco, U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.

Enriques, F. (1942). L'errore nelle matematiche. *Periodico di matematiche*, serie IV, *22*, 57-65. [Bajo el pseudonimo A. Giovannini].

Fauvel, J., & Maanen, J. (2000). *History in mathematics education: The ICMI study.* Dordrecht - Boston, London: Kluwer.

Feyerabend, P. K. (2003). *Contro il metodo*. Milano: Feltrinelli. (Trabajo original publicado 1975).

Furinghetti, F., & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: From philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 631–654). Hillsdale: Erlbaum.

Gadamer, H.-G. (1975). *Truth and method* (2nd ed., 1989). New York: Crossroad.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2-3), 237–284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactiques des mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D., & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico *en* educación matemática. *Educación Matemática*, *12*(1), 70–92.

Grugnetti, L., & Rogers, L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. En J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 39–62). Dodrecht: Kluwer.

Habermas, J. (2003). *Truth and justification* (trad. B. Fultner). Cambridge, MA: The MIT Press. (Trabajo original publicado 1999).

Hardesty, D. (1977). *Ecological anthropology*. New York: Wiley.

Hashweb, M. Z. (1996). Effects of science teachers' epistemological beliefs in teaching. *Journal of Research in Science Teaching*, *33*(1), 47–63.

Ilyenkov, E. (1977). The concept of the ideal. *Philosophy in the USSR: Problems of dialectical materialism*. Moscow: Progress Publishers.

Leontiev, A. A. (1981a). Sign and activity. En J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 241–255). New York: Sharpe.

Leontiev, A. A. (1981b). The problem of activity in psychology. En J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 37–71). New York: Sharpe.

McClain, K., & Cobb P. (1997). An analysis of the teacher's role in guiding the evolution of sociomathematical norms. En E. Pekhonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference* (Vol. 3, pp. 224–231). Lahti: University of Helsinki.

Newton, M. (2002). *Savage girls and wild boys: A history of feral children*. London: Faber & Faber.

Piaget, J., & Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris: Flammarion.

Perrin-Glorian, M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France: Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (pp. 97–147). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26–33.

Radford, L. (2003a). On the epistemological limits of language: Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(2), 123–150. doi: 10.1023/A:1024029808871

Radford, L. (2003b). On culture and mind: A post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, & V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49–79). Ottawa: Legas Publishing.

Radford, L. (2004b). Syntax and meaning. En M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 161–166). Norway: Bergen University College.

Radford, L. (2006a). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 9–65. doi: 10.1007/s10649-006-7136-7

Radford, L. (2006b). The cultural-epistemological conditions of the emergence of algebraic symbolism. En S. Kaijser, C. Tzanakis, & F. Furringhetti (Eds.), *Proceedings of the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference & ESU4* (pp. 509-524). Uppsala, Sweden. Recuperado de: http://laurentian.ca/educ/lradford/PUBLIC.HTML

Radford, L. (2006c). Semiótica cultural y cognición. En R. Cantoral Uriza, O. Covián Chávez, R. M. Farfán, J. Lezama Andalón, & A. Romo Vázquez (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano* (pp. 669–689). Mexico: Diaz de Santos.

Radford, L., Boero, P., & Vasco, C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. En J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 162–167). Dordrecht: Kluwer.

Robertson, I. (1977). *Sociobiology*. New York: Worth Publishers Inc.

Romberg, T. (1988). Necessary ingredients for a theory of mathematics education. En H. G. Steiner & A. Vermandel (Eds.), *Foundations and methodology of the discipline Mathematics Education*. Proceedings of the 2nd TME (pp. 97–112). Bielefeld, Antwerpen: IDM Publications.

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Identity that makes a difference: Substantial learning as closing the gap between actual and designated identities. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 37–52). Melbourne: PME.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 827–876). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wartofsky, M. (1979). *Models, representation and the scientific understanding*. Dordrecht: Reidel.

Werner, H. (1948). *Comparative psychology of mental development*. New York: International University Press.

Wittgenstein, L. (1956), *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Oxford: Blackwell.

Nota:

Este texto ya fue publicado:

D’Amore, B., Radford, L. & Bagni, GT. (2007). *Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática*. Coleción “Cuadernos del Seminario en educación”. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Agradecemos al director de la colección por el permiso de nueva publicación.

Bruno D'Amore, full professor por 42 años en el Departamento de Matemática de la Universidad de Bologna, Italia, colaboró como profesor catedrático y director de tesis en el Programa de Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis Educación Matemática, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia. Sus intereses de investigación incluyen varias temáticas relacionadas con el aprendizaje matemático, la incidencia de la semiótica en este proceso y la integración entre diferentes teorías de Educación Matemática. Fundador y director de la revista internacional La matemática e la sua didattica (año 25 en el 2017) y del congreso anual Incontri con la matematica (31ª edición en el 2017). Autor de más de 200 artículos científicos y de 700 artículos de divulgación. Recibió el Doctorado Honoris Causa en Social Sciences and Education otorgado por la University de Chypre y varios premios nacionales e internacionales. Dedicaron varios congresos internacionales a su nombre, el último en el 2016, en la Universidad de Bologna.

Luis Radford es profesor titular de Laurentian University, Ontario, Canadá. Durante el período julio 2012 - julio 2016, fue presidente del Grupo Internacional de Estudio sobre las Relaciones entre la Historia y la Pedagogía de las Matemáticas (HPM). HPM es un grupo afiliado a la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI). Actualmente el profesor Radford es vicepresidente del ICMI. Lleva a cabo investigación en el aula con los maestros de jardín de infancia hasta el grado 12. Sus intereses de investigación incluyen el desarrollo del pensamiento algebraico, la relación entre cultura y pensamiento, la epistemología y ontología de las matemáticas y la semiótica. Se encuentra trabajando en el desarrollo de una teoría histórico-cultural de la enseñanza y el aprendizaje: la teoría de la objetivación. Editor asociado de la prestigiosa revista *Educational Studies in Mathematics* y autor de más de 200 artículos científicos, Luis Radford recibió en 2005 el premio de investigación de Laurentian University y la medalla 2011 Hans Freudenthal, otorgada por ICMI.

En este libro, Bruno D'Amore y Luis Radford ponen en evidencia, a la luz de nuevos enfoques –sobre todo socioculturales–, que progresivamente se han venido imponiendo en el campo de la educación matemática, la necesidad de repensar hoy en día algunas nociones centrales de la didáctica, como aquellas del saber, del conocimiento y del aprendizaje. . . Lo que une [a los autores], y que yo percibo de forma particular al interior de la reflexión que ellos conducen, es la importancia que ambos conceden a la dimensión epistemológica y semiótica.

Michèle Artigue

El libro de Bruno D´Amore y Luis Radford aporta valiosos elementos teóricos y prácticos. . . En su último capítulo, el libro imagina un diálogo entre tres, los dos autores y el recordado Giorgio Bagni, quien plantea a los dos primeros varias preguntas sobre el tema de los obstáculos epistemológicos. La discusión sobre este tema pone en evidencia las posiciones muy originales con las cuales Bruno D´Amore y Luis Radford afrontan el análisis de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y muestra cómo la reflexión filosófica y epistemológica puede proporcionar instrumentos de lectura eficaces, incluso a las aparentemente simples acciones que se presentan en nuestras clases.

Ferdinando Arzarello

9 789585 434479

UD Editorial

Universidad Distrital Francisco José de Caldas