CERVEAU, COGNITION ET MATHÉMATIQUES

Luis Radford et Mélanie André

Université Laurentienne, Sudbury, Ontario

Introduction

S'il est vrai qu'on trouve déjà au Moyen Âge des essais pour identifier des régions cérébrales qui seraient à la base de certains processus mentaux complexes, ce n'est qu'au 19e siècle que le problème entre cognition et cerveau a pris une ampleur importante (Kosslyn et Koening, 1992; Luria, 1966, 1973). C'est plus précisément l'année 1861 qui est généralement considérée comme le point initial des recherches modernes sur le cerveau. Cette année-là, l'anatomiste français Paul Broca mettait en évidence, suite à des observations sur un patient présentant des perturbations langagières, une région du cerveau endommagée. Par là, Broca montrait, de façon claire, l'existence d'une relation entre cette partie du cerveau (connue comme le gyrus frontal inférieur) et ce qu'on appelle maintenant l'*aphasie de Broca* —une perte de l'habileté à produire le langage (voir figure 1).

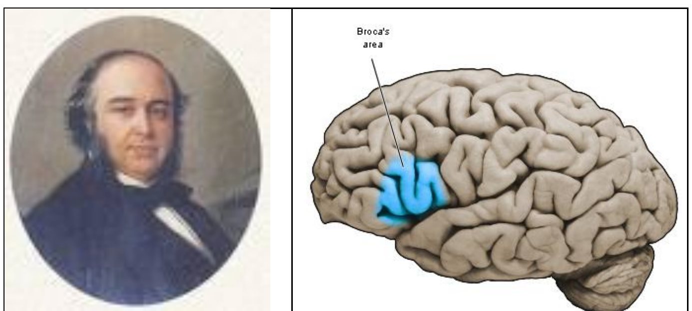


Figure 1. À gauche, l'anatomiste Paul Broca. À droite la région du cerveau souvent associée au traitement du langage et dont des lésions sont reliées à l'aphasie (Photo du cerveau obtenue avec le logiciel SylviusPro, 2004).

Les connaissances sur le fonctionnement du cerveau se sont grandement accrues au long du 20e siècle, suite à une croissante observation systématique auprès des patients ayant subi des lésions cérébrales. Récemment, la mise en place de nouvelles technologies a rendu possible une étude plus fine du cerveau et de sa relation avec la pensée.

Or, il ne faut pas oublier que, malgré ces progrès récents, les études sur le cerveau et la cognition se déroulent dans des laboratoires spécialisés, à l'aide d'un équipement sophistiqué, dans des conditions qui sont loin d'être naturelles. De ce fait, il y a une limitation très importante qui rend difficile l'extrapolation des résultats de laboratoire concernant le fonctionnement du cerveau au domaine de l'apprentissage tel qu'il se déroule dans une salle de classe.

Cette remarque nous invite donc à être prudents quand il s'agit de transposer à la salle de classe les résultats provenant des recherches neurologiques menées dans des environnements hautement contrôlés. Les implications pédagogiques des recherches contemporaines en neurologie sont, en effet, à leur début (Goswami, 2004). Le premier journal scientifique consacré à ce thème vient tout juste de voir le jour : il s'agit du *Brain, Mind, and Education*, dont le premier numéro a paru en 2007. L'un des articles porte un titre qui est très suggestif : How Educational Theories Can Use Neuroscientific Data. Comme les auteurs le soulignent, un des problèmes est la grande différence qui existe entre les méthodes de recherche utilisées en neuroscience et celles utilisées en éducation (Willingham et Lloyd, 2007). Tout effort pour essayer de localiser les parties du cerveau activées lors de problèmes complexes peut s'avérer peu fructueux du fait que dans les situations où les sujets sont confrontés à des problèmes ou à des situations difficiles, pratiquement toutes les parties du cerveau sont à l'œuvre (Willingham et Lloyd, 2007, p. 147). Toutefois, l'information que la neuroscience met à disposition des éducateurs dans la compréhension de problèmes spécifiques, comme celui de la dyslexie, donne lieu à penser qu'au fur et à mesure que la recherche en neuroscience avance, on sera mieux équipé pour faire face à des problèmes en relation avec l'enseignement et l'apprentissage à l'école.

L'une des questions que nous examinerons dans les pages suivantes est celle du cerveau et des mathématiques. Nous nous intéresserons en particulier à la relation entre cerveau, pensée arithmétique et pensée algébrique. Mais avant d'entrer dans les détails, nous ferons un bref rappel des différentes parties du cerveau (section 1) et de son développement au cours de la vie de l'individu (section 2).

1. Un survol sur le cerveau et son évolution

Quelques fonctions cognitives de particulière importance en mathématiques sont l'attention, la planification, le raisonnement spatial et la production de symboles. Ces fonctions sont reliées à ce qu'on appelle les régions corticales du cerveau.

Elles comprennent le néocortex et le cortex cérébral et constituent, historiquement parlant, les dernières parties à s'être formées lors de l'évolution du cerveau chez les espèces animales.

Une des caractéristiques de l'évolution du cerveau humain est précisément le fait que celui-ci porte, dans son anatomie, les traces de son évolution. On peut distinguer, en effet, trois parties qui correspondent à des périodes évolutives très distinctes. Ces parties sont : le *cervelet et la moelle allongée* (figure 2, droite); le *système limbique* (figure 2, centre) et les *régions corticales* (figure 2, gauche).

Le *cervelet* et la *moelle allongée*

La partie cérébrale la plus primitive est le ***système reptilien*** –un système qui contient des parties associées au mouvement, à l'odeur et à la lumière et dont le fonctionnement reste mécanique et inconscient. Son antécédent évolutif remonte à environ 500 millions d'années. Il est constitué du ***cervelet*** et de ***la moelle allongée***. Ses cellules déterminent le niveau d'alerte et la régulation des processus végétatifs du corps (comme la respiration, la pression du sang et le rythme cardiaque).

Le *système limbique* ou *mammifère*

Par la suite, un nouveau système s'est développé sur le précédent : le ***système limbique***. Celui-ci est constitué de plusieurs parties, dont le *thalamus* (qui rend possible la coordination des impressions reçues par la vue, l'odeur et l'ouïe), l'*amygdala* et l'*hippocampe* (qui forment un système élémentaire de mémoire) ainsi que l'*hypothalamus* (une partie impliquée dans des processus reproductifs, homéostatiques et circadiens). Les émotions et les autres impulsions vitales à la survie sont générées dans le système limbique, mais elles restent inconscientes. Pour que des émotions et des expériences conscientes soient possibles, un système nerveux plus complexe que le système limbique, appelé aussi système mammifère, est requis.

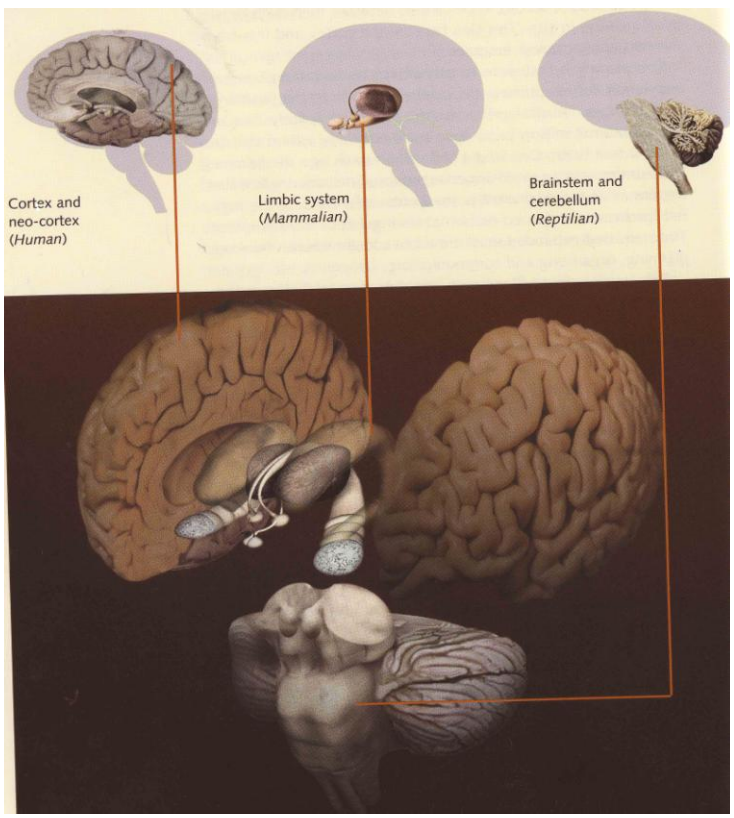


Figure 2. Les trois parties de l'évolution du cerveau
(Photo Carter, 1998, p. 36).

Le *cortex*

Lors de l'évolution du système mammifère, les modules sensoriels (vue, odeur, ouïe, toucher) ont donné lieu à un tissu très fin de cellules qui a rendu possible les connexions neuronales des modules sensoriels. Ce tissu est devenu le *cortex* et c'est justement lors de cette évolution que la conscience a émergé.
Les mammifères qui ont évolué en humains ont développé un cortex d'une taille considérable. Il y a trois millions d'années, l'*australopithecus africanus* avait un cerveau de forme similaire à celle de l'humain, mais sa taille avait seulement un tiers de la taille du cerveau humain. Les régions du cerveau qui se sont développées le plus sont précisément celles reliées à la pensée, à la planification, à l'organisation et à la communication —donc des régions importantes pour l'apparition et le développement de la pensée mathématique. Ces régions sont les lobes frontaux et pariétaux —des lobes sur lesquels nous aurons beaucoup à dire plus loin.

Les observations sur le développement du cerveau confirment l'idée selon laquelle les fonctions spéciales du cerveau humain résultent d'une croissance du nombre de composantes qui sont présentes dans le cerveau des mammifères inférieurs. Wexler remarque que l'agrandissement est particulièrement plus marqué dans les lobes frontaux et pariétaux. Il est intéressant de remarquer que ces lobes sont précisément les régions qui, dans le développement de l'individu, continuent à mûrir et à se développer jusqu'à la troisième décennie de vie. Par contre, indique Wexler, « les structures qui correspondent [aux lobes frontaux et pariétaux humains] dans le cerveau des chimpanzés et d'autres mammifères hautement évolués atteignent des niveaux de maturité comparables au cours de la deuxième et troisième année. » (Wexler, pp. 31–32). Le point important n'est pas que ces structures frontales et pariétales qui servent d'appui aux fonctions psychologiques supérieures, comme la planification, l'attention et la mémoire, aient une croissance lente chez les humains, mais plutôt que cette croissance se caractérise par une forte *plasticité*, c'est-à-dire par une grande capacité à se modifier selon l'environnement où grandit l'individu. Ainsi, dit Wexler, « des niveaux élevés de plasticité … du cerveau persistent pendant des années dans les structures qui distinguent le plus le cerveau humain des autres primates. » (pp. 31-32). [1]

Une des questions importantes est celle de savoir ce qui est à la base du processus évolutif du cerveau. Les données archéologiques suggèrent que des parties spécifiques du cerveau sont apparues et ont subi des changements au cours du temps pour permettre aux individus de mener à bien certaines tâches sociales. À leur tour, ces nouvelles parties cérébrales ont rendu possible l'apparition de nouvelles capacités intellectuelles chez l'espèce, ouvrant ainsi de nouvelles possibilités d'action sur le monde. Évidemment, les habiletés cognitives sont apparues lentement. Ainsi, à l'époque pré-historique, les individus pouvaient vraisemblablement produire plus de réponses associatives que déductives. Comme le suggère le neurologue italien Michael Gazzaniga, une fois que les

[1] Tout au long du rapport, les traductions sont nôtres. Parfois, pour garder le texte aussi simple que possible, des modifications mineures ont été apportées à la traduction. Dans le même ordre d'idées, parfois nous avons ajouté des termes de clarification qui sont indiqués par leur emplacement à l'intérieur de parenthèses carrées.

individus ont pu faire des inférences, l'homme moderne a atteint un nouveau niveau de complexité de vie. La capacité à faire des inférences a débouché sur la création de croyances, non seulement au sujet du comportement propre mais aussi au sujet du comportement passé et futur (Gazzaniga, 1969, p.164).

2. Le développement du cerveau chez l'humain

Le développement neuronique normal entre la conception et la maturité se caractérise, d'une part, par un *processus progressif* qui résulte d'une prolifération neuronique de la migration de cellules et de leur myélinisation et, d'autre part, par un *processus régressif* qui résulte de la mort de cellules et de la perte de connections synaptiques.
Les détails du développement du cerveau n'ont pas tout à fait été élucidés. Il y a beaucoup de questions qui restent sans réponse. Comme le constatent Sowell, Thompson, Holmes, Jernigan et Toga (1999),

> Une compréhension complète du développement du cerveau humain depuis la naissance jusqu'à l'âge adulte, en passant par l'adolescence, est essentielle à notre compréhension du développement cognitif. Toutefois, nous savons très peu de choses sur le murissement du cerveau normal. (p. 859)

Malgré le manque de détails, ce qui est clair, c'est que le développement du cerveau n'est pas constant. Les changements les plus importants dans la morphologie du cerveau ont lieu lors de la période qui précède la naissance et qui va jusqu'à l'enfance. Les travaux en neuroscience suggèrent que le taux de croissance du cerveau est plus prononcé pendant la période fœtale et les premières années de vie (Cantlon, Brannon et Carter, 2006, p. 6).
Or, s'il est vrai que, pendant l'enfance, on observe plusieurs changements importants au niveau des habiletés mentales et de la maturation du cerveau, l'importance de cette maturation ne veut pas dire que le cerveau arrête sa croissance durant l'enfance. Le cerveau de l'adolescent continue à grandir (Sowell et Jernigan, 1998, p. 600), même au-delà de l'adolescence pour terminer sa croissance et atteindre son volume maximal autour de l'âge de vingt-cinq ans (Caviness, Cantlon, Brannon et Carter, 2006, p.4).

Pour étudier précisément certains aspects du développement du cerveau, N. Gogtay et ses collaborateurs ont fait un suivi longitudinal de 10 années auprès de 13 enfants normaux. Dans leur étude, ces chercheurs voulaient tracer la maturation du cerveau par l'entremise du changement de la matière grise dans la région corticale du cerveau (Gogtay, N., Giedd, J., Lusk, L., Hayashi, K., Greenstein, D., Vaituzis, A. et al., 2004). Leurs résultats principaux indiquent que les cortex d'associations d'ordre supérieur murissent après les cortex visuels (rouge pâle) et somatosensoriels (violet pâle) d'ordre inférieur (voir Figure 3). Pour comprendre ces résultats, il convient de rappeler certaines régions du cortex humain telles que les suivantes :

1. Brun et vert = lobe frontal
    - Vert = cortex préfrontal
    - Brun foncé = cortex prémoteur
    - Brun pâle = aire motrice primaire
2. Violet = lobe pariétal

Pâle = aire sensorielle primaire
Foncé = cortex d'association du lobe pariétal

3. Rouge = lobe occipital
   Foncé = cortex d'association du lobe occipital
   Pâle = cortex visuel primaire
4. Bleu et blanc = lobe temporel
   Blanc = cortex auditoire primaire
   Bleu pâle = cortex supérieur temporel
   Bleu foncé = cortex d'association du lobe temporel

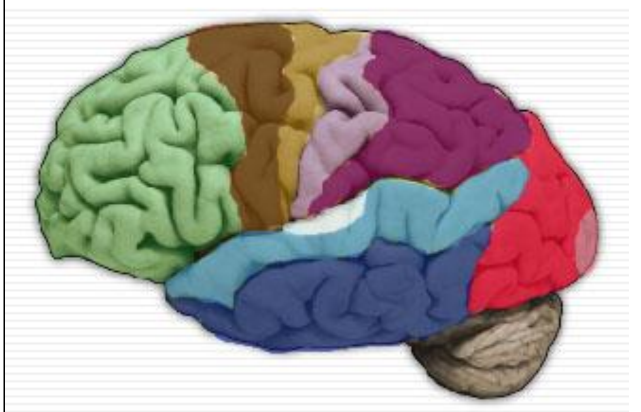


Figure 3. La division du cortex humain en lobes.

Bien qu'il y ait une hétérogénéité dans leurs résultats, on peut discerner un patron dans la trajectoire du développement : les parties du cerveau associées à des fonctions élémentaires telles que les fonctions motrices et sensorielles murissent plus tôt (parties en brun pâle et violet pâle). Le murissement continue ensuite dans les aires impliquées dans l'orientation spatiale, dans la parole et le développement du langage (parties en violet foncé). Les régions qui murissent plus tard sont celles corrélées aux fonctions exécutives et à l'attention (en vert) et à la coordination motrice (en brun foncé) (Gogtay et al., 2004, p. 8177). C'est en effet le cortex supérieur temporel (en bleu pâle) —c'est-à-dire le cortex qui contient des aires d'association qui intègrent l'information provenant de plusieurs modalités sensorielles— qui mûrit en dernier (Gogtay et al., 2004, p.8174). La Figure 4 donne un aperçu du murissement du cerveau, selon les résultats de Gogtay et de ses collaborateurs.

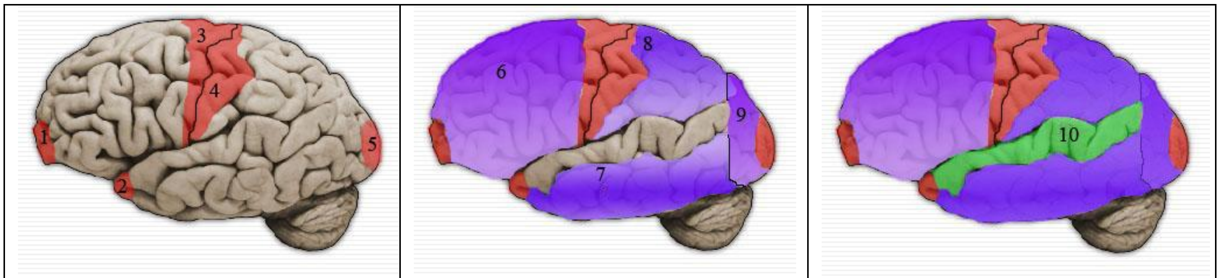


Figure 4. Séquence approximative, selon Gogtay et al. (2004) du murissement du cerveau. À gauche, la partie qui mûrit la première; au milieu, la deuxième; à droite, la partie qui mûrit en dernier. L'intensité du gradient de la couleur indique le murissement (dans une même couleur, plus foncé veut dire plus mûr). Les numéros renvoient aux lobes (voir pp. 5-6)

Ce résultat et d'autres (voir, par exemple, Caviness, Kennedy, Bates, et Makris, 1997). sont intéressants du point de vue de l'enseignement des mathématiques, car il va dans le même sens que certaines théories contemporaines en didactique et en psychologie qui soulignent le rôle important joué par les différentes modalités sensorielles dans l'apprentissage (Lakoff & Nunez, 2000; Arzarello, Bosch, Gascón et Sabena, 2008; Arzarello, Edwards, & Radford, 2008). En effet, le travail de Gogtay et de ses collaborateurs ne se limite pas à retracer la trajectoire du développement du cerveau. Ce travail montre, en plus, que, au cours de cette évolution, les parties qui ont déjà mûri servent de point de départ à la maturation des autres parties et que, lors de leur apparition, celles-ci intègrent les premières (Gogtay, p. 8177). On pourrait traduire cette évolution par la mise en évidence du besoin d'offrir aux élèves des activités qui font appel à des modalités sensorielles variées tout en permettant une intégration de celles-ci à travers des exercices de plus en plus abstraits. On peut conjecturer qu'un enseignement traditionnel ne va pas dans la direction d'une croissance favorable des fonctions exécutives à la base d'une pensée mathématique abstraite. Il ne faut pas oublier que l'adolescence est la période où les blocs cognitifs qui ont commencé à se former durant l'enfance se raffinent et que l'adolescence apparaît ainsi comme une période de transformation cérébrale importante. Il convient de souligner, comme le fait Beatriz Luna, que c'est précisément pendant l'adolescence que

> les exigences académiques augmentent de façon dramatique, car la pensée abstraite et la formation de règles générales deviennent des éléments essentiels pour mener à terme les tâches en mathématiques et en lecture requises par le curriculum. Les fonctions exécutives —fonctions qui reposent sur des habiletés telles que la mémoire de travail et l'inhibition de réponses, fonctions qui nous permettent d'avoir un comportement volontaire et dirigé vers des buts précis— commencent à mûrir à l'adolescence (Luna, 2004, pp. 437-438).

Il y a lieu de penser que, sans une stimulation adéquate et soutenue, la plasticité du cerveau ne sera pas exploitée à bon escient et que les connexions neurologiques d'intégration du cortex temporel supérieur n'atteindront pas leur niveau maximal de développement.

3. Une nouvelle conception de la pensée : la multimodalité

Dans une très large mesure, dans l'enseignement traditionnel des mathématiques, l'élève passe son temps à faire des exercices au papier et au crayon assis devant son pupitre. Ce que nous venons de dire au sujet de la maturation du cerveau nous invite à essayer de concevoir l'enseignement et l'apprentissage d'une manière différente. Quelle pourrait bien être une autre manière d'enseigner et d'apprendre les mathématiques? Les chercheurs Vittorio Gallese de l'Université de Parme en Italie, et George Lakoff de l'Université de Californie à Berkeley aux États-Unis, suggèrent que le savoir conceptuel (mathématique et autre) est un savoir virtuellement incarné (*embodied*), c'est-à-dire un savoir relié de façon intime au fonctionnement de notre système sensori-moteur (Gallese et Lakoff, 2005). Dans cette perspective, le système sensori-moteur n'offre pas seulement la base ou l'infrastructure au contenu conceptuel que l'élève développerait plus tard (comme c'était le cas dans la théorie du développement cognitif chez Piaget). Le système sensori-moteur caractérise de manière profonde le contenu sémantique des concepts « en termes de la manière que nous fonctionnons avec notre corps dans le monde. » (Gallese and Lakoff, 2005, p.456).

Une des conséquences de cette nouvelle approche, qui prend une place de plus en plus prédominante dans les nouvelles théories de l'apprentissage (voir notre rapport sur la recension des écrits sur l'enseignement des mathématiques), est que nous pensons non seulement à l'aide du langage et des symboles, mais aussi à travers nos sens.

Gallese et Lakoff soutiennent que la pensée repose sur une articulation très fine et subtile d'impressions sensorielles, ce qu'ils appellent le caractère *multimodal des concepts*. Cette idée, déjà avancée par le scientifique social Arnold Gehlen (1988) dans les années 1940 (Radford, 2008), peut être exemplifiée à travers le langage. De prime abord, le langage peut sembler une construction conceptuelle éloignée des sens. Cependant, à y voir de plus près, nous pouvons remarquer, comme disent Gallese et Lakoff, que le langage est multimodal dans le sens qu'il intègre plusieurs modalités : la vue, le son, le toucher, les actions motrices, etc. Des termes mathématiques comme « nombre pair » gardent, dans leur étymologie, cet aspect sensoriel qui consiste à pouvoir disposer manuellement le nombre en question en deux rangées égales. On sait, par exemple, que chez les pythagoriciens et leurs prédécesseurs, il était habituel de représenter des nombres par des cailloux (Lefèvre, 1981). Le nombre 8, par exemple, pouvait être représenté par deux rangées de 4 cailloux chacune (voir Figure 5, gauche). Un nombre impair, par contre, ne pouvait pas être divisé en deux rangées égales (voir figure 5, droite)[2].

[2] Pour d'autres exemples sur la relation entre l'expression linguistique de concepts mathématiques et la nature sensorielle de ceux-ci, voir, par exemple, l'étymologie des concepts d'angle, de circonférence dans le dictionnaire étymologique de Schwartzman (1994). Pour le concept de point (qui est une abstraction de la marque kinesthésique laissée sur une surface par un compas), voir Vita (1982). Pour le concept de multiplication en tant qu'effort physique pour transporter des objets d'un endroit à un autre, voir Høyrup (2002).

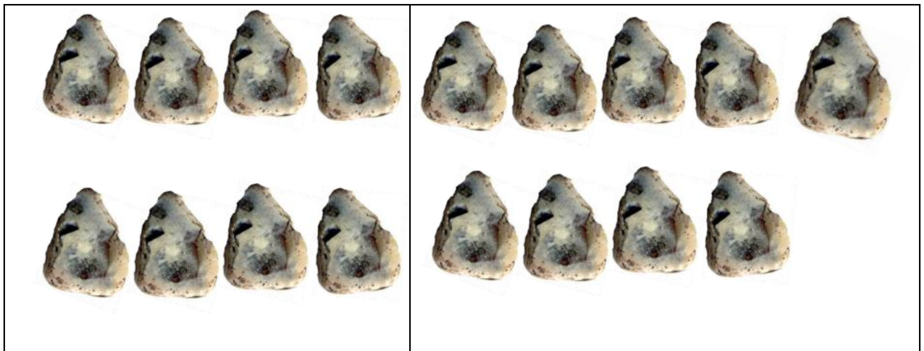


Figure 5. Représentation d'un nombre pair (gauche) et d'un nombre impair (droite)

Il est intéressant de remarquer que la multimodalité de la pensée se retrouve dans des régions cérébrales différentes et, comme le disent Gallese et Lakoff, cela semble être la norme. En d'autres termes, « les modalités sensorielles comme la vision, le toucher, l'ouïe, etc. sont en réalité intégrées mutuellement avec le mouvement moteur et la planification. » (Gallese et Lakoff, 2005, p.459)[3]

Il existe ainsi une collaboration entre les différents sens qui rend possible l'apparition des concepts abstraits (Radford, Bardini et Sabena, 1997). Cette collaboration inter-sensorielle n'est pas propre aux humains. On la note, par exemple, chez les grands singes. Le primatologue Juan Carlos Gómez note que « les représentations visuelles des grands singes sont très tôt coordonnées avec des patrons d'information tactile et kinesthésique, Cela débouche sur des représentations complexes à caractère multimodale d'objets » (Gómez, 2004, p. 33). Cependant, il semble qu'il existe une limite à cette collaboration inter-sensorielle chez les grands singes. Ceux-ci peuvent reconnaitre qu'une corde a plusieurs caractéristiques importantes pour atteindre un objet qui est hors de leur portée, comme la longueur et la transportabilité. Mais, comme les expériences conduites par Köhler (1951) (Figure 6) l'ont montré, les chimpanzés essaient d'atteindre un fruit hors de leur portée à l'aide d'une corde. Les chimpanzés ne réalisent pas que pour atteindre le fruit avec un outil, celui-ci doit posséder la caractéristique de *rigidité*. Or, la rigidité, comme le poids, sont des expériences tactiles et non visuelles. Ainsi, comparés à ceux d'autres primates, les organes sensoriels humains collaborent à des niveaux qui sont propres à l'espèce, de sorte que ce qui est perçu est doué d'une variété de caractéristiques sensorielles.

[3] Pour l'importance de la multimodalité et les régions cérébrales activées, voir aussi Saper, Iversen et Frackowiak (2000).

Figure 6. À gauche, Wolfgang Köhler; à droite, une photo tirée de son fameux livre *The Mentality of Apes* (1951).

Il est clair que cette coordination sensorielle est à l'œuvre dans l'apprentissage de concepts géométriques, tels que le cercle ou le rectangle. En suivant de la main un contour rond, puis un contour anguleux, on *sent* et *voit* une différence. Dans le cas du cercle, cette différence se spécifie plus tard avec le concept d'*objet rond* et devient par la suite encore plus générale en décrivant le cercle par une expression linguistique qui souligne son sens métrique : comme ensemble des points se trouvant à une *même distance*, r, d'un point fixe (son centre), ou encore, à travers un symbolisme algébrique :

$$(x, y) / \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

Peut-être que l'un des problèmes avec l'enseignement traditionnel centré sur le papier et le crayon est qu'il ne permet pas de faire des liens durables avec l'expérience sensorielle vécue par les élèves dans leurs premières années d'école.[4] Ainsi donc, la formule apparaît abstraite, sans fondement et, par là, dépourvue de *sens*.

Bien sûr, ces remarques ne veulent pas dire que nous suggérons un enseignement des mathématiques qui resterait collé aux sensations. On connaît très bien les limites de l'empirisme, tant comme théorie de la connaissance que comme pratique pédagogique. Une des forces des mathématiques réside précisément dans les abstractions que son langage permet de faire. Le problème est que ce langage et les concepts qu'ils expriment risquent de demeurer sans aucun sens, sans une démarche pédagogique qui assure le passage à l'abstrait.

Dans une des leçons modèles élaborées à l'intérieur du projet du passage à l'abstrait, nous avons commencé par demander aux élèves d'une classe de 7e année de résoudre des problèmes algébriques à l'aide d'un matériel de manipulation (Figure 7, gauche). Les élèves ont par la suite résolu des problèmes sans le matériel concret et ont réussi à passer à l'abstrait sans grandes difficultés. Le succès a été assuré par le lien que les élèves ont

[4] Des propos similaires sont tenus par Arzarello, Bosch, Gascón, et Sabena (2008).

réussi à faire entre les actions menées sur des objets concrets et les symboles abstraits du langage symbolique-algébrique.

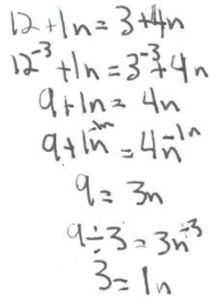
Un des problèmes que les élèves devaient résoudre à l'aide du matériel concret était le suivant :

> La mère de Mario et de Chantal décide de donner un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe.
> Mario avait déjà 12 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe.
> Chantal avait déjà 3 cartes et sa mère lui donne 4 enveloppes.
> Chantal a le même nombre de cartes de hockey que Mario.
> Combien il y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe?

À l'aide de cartes de hockey et d'enveloppes, en petits groupes, les élèves ont modélisé une équation (voir Figure 7).

Figure 7. Sur la première photo, encerclé en vert à droite se trouve le premier côté de l'équation formée par les élèves: 12 cartes et 3 enveloppes. Encerclé à gauche en rouge, se trouve le deuxième côté de l'équation : 3 cartes et 1 enveloppe. Sur la deuxième photo, les élèves simplifient l'équation (voir cercle bleu) en enlevant le même nombre de cartes de chaque côté de l'équation.

Après un petit nombre d'exemples similaires, les élèves ont généralisé la procédure et résolu ces mêmes problèmes (Figure 8, gauche) et d'autres plus complexes (Figure 8, droite) à l'aide du langage algébrique.



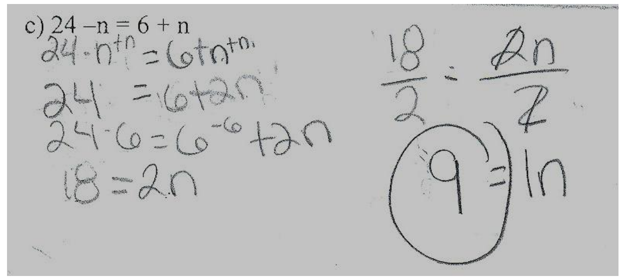


Figure 8. Les élèves ont généralisé la procédure et résolu ensemble des problèmes similaires et d'autres sans contexte, comme l'équation montrée à droite.

Le calcul symbolique garde ici une trace claire de cette dimension multimodale de la pensée. Derrière les symboles abstraits, résonnent encore les actions, l'activité perceptuelle et les mots utilisés par les élèves. En d'autres termes, un élément important dans la réussite de cette activité réside dans l'opportunité qu'elle a offerte aux élèves pour qu'ils déploient une conceptualisation soutenue par une expérience médiatisée par les sens et des artefacts (comme les objets de manipulation).

Le sondage mené auprès des enseignantes et des enseignants de mathématiques de la 7e à la 10e indique une baisse importante de l'utilisation de matériel de manipulation au palier intermédiaire. Toutefois, notre exemple met en évidence l'importance du matériel de manipulation dans l'élaboration, chez l'élève, de concepts abstraits. Notre recherche a mis clairement en évidence que l'on doit conscientiser davantage les enseignantes et les enseignants sur l'importance d'utiliser des objets concrets et de se référer à des situations journalières intéressantes pour les élèves. Bien sûr, le matériel de manipulation n'est pas bon en soi. Son potentiel réside dans l'utilisation optimale qu'on peut en faire. Ce qui le rend pertinent est, en fait, les actions kinesthésiques à travers lesquelles se tisse la pensée abstraite (comme, par exemple, l'action d'enlever le même montant de cartes ou d'enveloppes sur chaque côté de l'équation).
Nous reviendrons sur ce point dans le rapport sur la recension des écrits.

4. Le cerveau mathématique

Dans son célèbre livre *The Mathematical Brain*, Brian Butterworth (1999) rapporte le cas d'un patron italien, Signor Tiziano, qui, suite à une attaque cardiaque, a commencé à avoir des difficultés à faire des calculs arithmétiques simples (voir Figure 9).

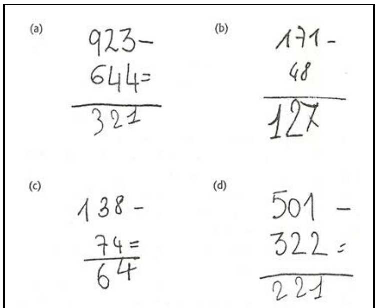


Figure 9. Quelques soustractions du Signor Tizano, après une attaque cardiaque. (Butterworth, 1999, p. 188)

Sigor Tiziano a commencé à faire des erreurs qu'il ne faisait pas avant : il a commencé à enlever systématiquement le chiffre plus petit du plus grand —ce qui est d'ailleurs une erreur fréquente chez les élèves qui commencent à étudier la soustraction. L'attaque cardiaque avait affecté une région du cerveau reconnue comme généralement impliquée dans des tâches numériques : le lobe pariétal gauche, une région du cortex associée à des sensations somatiques et à de nombreuses fonctions complexes, p. ex. la multimodalité sensorielle (visuelle, auditive, et tactile), la compréhension du langage, l'attention et la conscience spatiale (voir Figure 10).

« C'est précisément cette région », dit Butterworth en se référant au lobe pariétal gauche, « qui apparaît presque toujours endommagée dans les cas d'acalculie » (1999, p. 207), c'est-à-dire les cas de non-reconnaissance des chiffres et des symboles arithmétiques, et d'impossibilité à effectuer des opérations élémentaires. Cantlon et ses collaborateurs mentionnent le cas des patients qui ont subi des dommages dans le cortex pariétal et qui ont eu de la difficulté à distinguer lequel des deux nombres présentés sous forme symbolique (par exemple 14 et 18) était le plus grand (Cantlon, Brannon et Carter, 2006, p. 844). Par contre, comme le note Butterworth, des « Patients qui présentent d'autres habiletés cognitives pratiquement détruites mais dont les habiletés numériques sont intactes, semblent avoir le lobe pariétal gauche sain » (Butterworth, pp. 207-208), ce qui montre le rôle indéniable que le lobe pariétal gauche joue dans l'arithmétique.

Le consensus des neurologues à ce sujet a été exprimé récemment par Delazer et ses collaborateurs : « Malgré le fait que des résultats et des interprétations sont parfois hétérogènes à travers les études [neurologiques], tous sont d'accord pour dire que le traitement des nombres et des calculs est soutenu par un réseau distribué où des régions pariétales jouent un rôle crucial. » (Delazer, Domahs, Bartha, Brenneis, Lochy, Trieb et al., 2003, p. 77).

Figure 10. Différentes vues du lobe pariétal. (Photo obtenue de SylviusPro, 2004).

La question suivante est intéressante : pourquoi le lobe pariétal gauche est-il généralement corrélé aux habiletés numériques et non pas à une autre partie du cerveau?

Dans son livre, Butterworth suggère une idée qui est tout à fait cohérente avec ce que nous avons appelé dans la section précédente la *conception multimodale de la pensée*. Butterworth part d'un fait souvent observé chez les individus ayant eu un dommage au lobe pariétal gauche (suite à un accident, à un problème de naissance ou autre). Ces individus présentent souvent non seulement des problèmes avec l'arithmétique, mais aussi avec les trois éléments suivants :

(1) l'orientation dans l'espace,
(2) le contrôle de leurs actions et
(3) la représentation de leur propre corps (particulièrement les doigts).

Ainsi, le Dr. Josef Gerstmann, un neurologue autrichien, a traité une patiente de 52 ans qui ne pouvait pas dire le nom de ses propres doigts et les montrer individuellement. Elle ne pouvait pas non plus distinguer son côté droit de son côté gauche. De plus, ses habiletés numériques étaient très pauvres (voir Butterworth, 1999, p. 249). Similairement, dans leurs recherches sur la dyscalculie, Judy Ta'ir et ses collègues nous rappellent que des problèmes d'habiletés visuelle, tactile et psycho-motrice se trouvaient accompagnés de difficultés numériques élémentaires (Ta'ir, Brezner et Ariel, 1997, p. 186).

Ces exemples ainsi que les nombreux cas constatés chez des patients ayant un problème au lobe pariétal gauche suggèrent l'existence d'un lien entre une anomalie dans les trois éléments indiqués ci-dessus et des problèmes de type numérique. Mais pourquoi ces anomalies seraient-elles en relation avec la dyscalculie?

En harmonie avec la conception multimodale de la pensée mentionnée précédemment, Butterworth (1999, p. 219) remarque que l'émergence du comptage chez les enfants mobilise précisément les trois éléments que nous venons de mentionner (voir Figure 11). En effet, souvent, quand un enfant commence à compter, il va toucher ou indiquer d'un geste indexical les objets comptés. Ces actions ou ces gestes supposent une *orientation*

dans l'espace —orientation sans laquelle le comptage serait perdu. Fréquemment, quand de jeunes enfants sont en train de compter plusieurs objets devant eux, ils « perdent » le compte. Cette perte est une perte d'*orientation spatiale* entre ce qui a été touché ou indiqué par le geste et ce qui reste à prendre en compte. Elle est aussi une perte de *contrôle* de nos actions et de notre position vis-à-vis des objets en train d'être comptés.
Pour Butterworth, le fait que compter est une activité qui repose à ses débuts sur une relation à l'espace, un contrôle de nos actions et la mobilisation des doigts expliquent — en tout cas, jusqu'à un certain point— que des anomalies dans l'orientation spatiale, le comptage et la reconnaissance des doigts se retrouvent en corrélation avec des problèmes dans une même zone cérébrale. D'après lui, ces considérations expliqueraient du même coup, ne serait-ce que partiellement, qu'il y ait une relation très étroite entre la représentation des numérosités que nous formons dans notre cerveau et les représentations que nous formons de nos propres doigts.

Figure 11. Le comptage apparaît médiatisé par des actions et des gestes. Cette activité de comptage met en avant la position corporelle (orientation), un contrôle précis d'actions et le rôle des doigts dans l'accomplissement de ces actions.

En se référant à de nombreux exemples cliniques présentant les anomalies reliées aux points (1), (2) et (3) ci-dessus et à la dyscalculie, Butterworth dit :

> Ces résultats confirment l'idée d'une connexion intime entre la représentation des doigts et la représentation de la numérosité dans le lobe pariétal gauche. Plus que cela, ces résultats suggèrent que, lorsque la représentation des doigts n'arrive pas à se développer normalement, cela peut avoir des effets cumulatifs dans le développement des habiletés numériques. (Butterworth, 1999, p. 244)

Or, la discussion précédente ne devrait pas nous faire croire que l'hémisphère droit ne joue pas de rôle dans la pensée arithmétique et le sens de nombre. Grafman, Kampen, Rosenberg, Salazar et Boller (1989) ont étudié un ancien vétéran de guerre qui avait perdu l'hémisphère gauche. Bien que celui-ci ait perdu la plupart des habiletés arithmétiques, il pouvait néanmoins reconnaître la numérosité d'une collection d'objets; il pouvait aussi reconnaitre des chiffres et comparer la grandeur des nombres —tâches qui étaient donc réalisées par le seul hémisphère disponible, c'est-à-dire l'hémisphère droit.

Il est très vraisemblable que, dans le cas d'un cerveau normal, lors de la résolution de problèmes arithmétiques, selon la tâche, l'information circule entre les deux hémisphères, chacun apportant des informations à l'autre.

Toutefois, l'activation fréquente du lobe inférieur gauche lors de la mise en œuvre de la reconnaissance de nombres et de calculs numériques amène Butterworth à suggérer que le siège de ce qu'il appelle le module numérique (*Number Module*) se trouve dans la partie inférieure du lobe pariétal gauche et probablement dans celle du lobe pariétal droit. D'après lui, ce module numérique serait inné et assurerait ce que les bébés de quelques mois peuvent accomplir, à savoir la reconnaissance rapide (c'est-à-dire purement perceptuelle, sans comptage conscient) de petites numérosités jusqu'à 4 ou 5 tout au plus (Butterworth, 1999, p. 250). De 5 à l'infini, ce serait un développement assuré non pas par l'équipement biologique avec lequel nous arrivons au monde, mais par la culture.

5. Arithmétique concrète et arithmétique abstraite

À l'Université d'Arizona, dans leur laboratoire sur la cognition de l'enfant, Karen Wynn a mené une expérience à laquelle ont participé plus de 30 enfants d'une moyenne d'âge de 5 mois. Les enfants ont été divisés au hasard en deux groupes. Ceux du groupe appelé « 1+1 » ont vu une poupée apparaître dans un espace vide. Un petit écran s'est levé, cachant ainsi la poupée (voir Figure 12). Une deuxième poupée a été ajoutée par l'expérimentateur; cette poupée a été placée derrière le petit écran. L'expérimentateur a ensuite enlevé lentement sa main en s'assurant que l'enfant voyait qu'aucune poupée n'était enlevée. Quand le petit écran tombait, l'expérimentateur s'arrangeait pour que le même enfant voie en alternance soit deux poupées, soit une poupée. Dans le premier cas, l'enfant voyait que le résultat de 1+1 était 2; dans le deuxième, il voyait que le résultat de 1+1 était 1. L'expérience a été répétée 6 fois avec chaque enfant. Wynn a mesuré le temps que l'enfant a passé à regarder le résultat (c'est-à-dire deux poupées ou une poupée). La longueur du temps que l'enfant a passé à voir le résultat a été considéré comme indicateur de l'apparition d'un événement attendu ou inattendu : un temps de regard plus long serait symptôme d'un résultat non-attendu (Wynn, 1992).

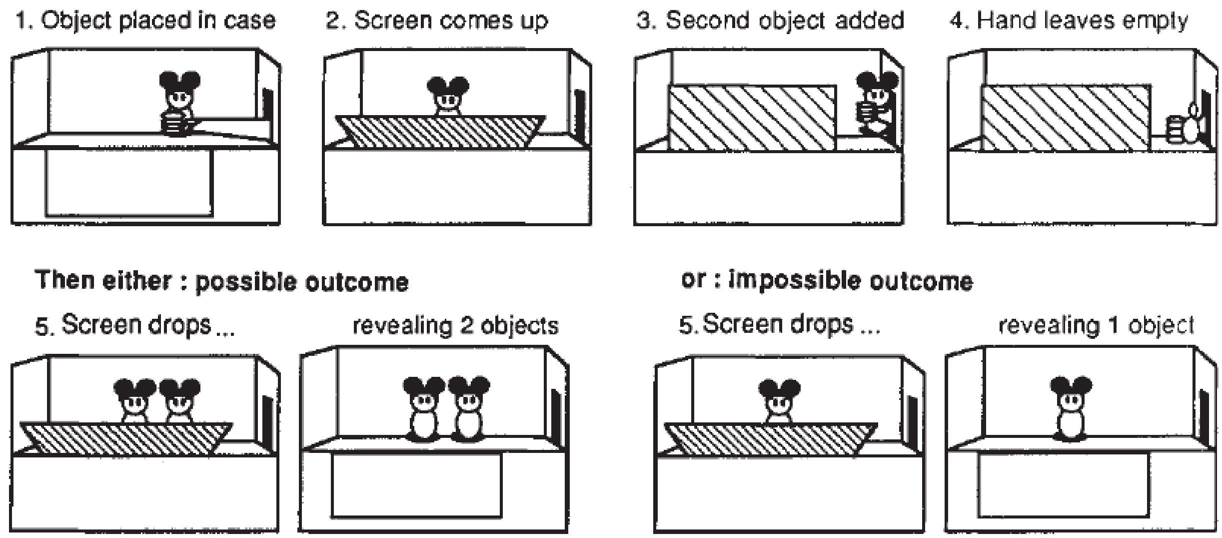


Figure 12. Situation expérimentale pour étudier l'addition 1+1 chez des bébés de 5 mois (Wynn, 1992, p. 749)

Le groupe appelé «2-1 » a participé à une expérience similaire, mais ces enfants voyaient d'entrée un scénario avec deux poupées, on en enlevait une et les résultats possibles étaient une poupée ou deux.
Wynn avait émis la conjecture suivante : le groupe « 2-1 » devrait passer plus de temps que le groupe « 1+1 » à regarder le résultat, quand celui-ci affichait 2 poupées. De même, les enfants dans le groupe « 1+1 » devraient en principe passer plus de temps à voir le résultat quand celui-ci affichait une poupée que lorsqu'il affichait 2 poupées, alors que ceux du groupe « 2-1 » devraient passer à voir plus longtemps le résultat 2 que 1.
Et c'est justement ce qui s'est produit lors de l'expérience.

D'après Wynn, ces résultats —qui ont d'ailleurs été retrouvés dans une expérience avec des bébés de 4 mois— révèlent que nous possédons, dans notre bagage biologique, un système mathématique simple (un *module numérique*, pour utiliser l'expression de Butterworth), qui nous permettrait de distinguer de petites numérosités et de faire des additions et des soustractions très élémentaires (voir aussi l'article de Starkey, Spelke and Gelman, 1990).
Ce *module numérique* ne serait pas exclusivement réservé à l'être humain, mais serait aussi inclus dans le bagage biologique d'autres espèces, dont certains oiseaux et certains singes (Figure 13; voir, par exemple, Devlin, 2005; Gallistel et Gelman, 1992; Savage-Rumbaugh et Lewin, 1994; Tomasello et Call, 1997).

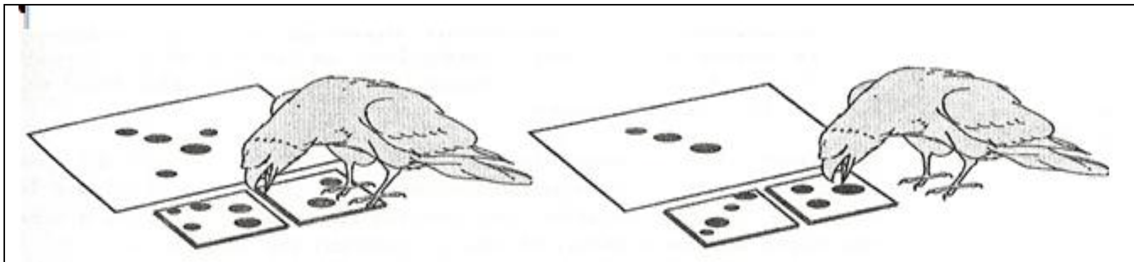


Figure 13. L'éthologiste allemand Otto Koheler a montré à son corbeau Jakob comment identifier des figures présentant la même numérosité (« 5 », à gauche et « 3 » à droite). (Photo dans Butterworth, 1999, p. 151).

L'apparition du langage, d'abord oral, puis écrit, vient transformer radicalement l'arithmétique élémentaire ou innée. Avec l'apparition des mots « un », « deux », « trois », etc. dans le vocabulaire de l'enfant et ensuite de l'arithmétique symbolique (celle basée sur le calcul et la représentation de nombres à l'aide de chiffres, comme 12+25) apparaissent de nouvelles possibilités qui vont au-delà de la comparaison perceptuelle d'objets et de leur calcul limité. Le passage de l'arithmétique « perceptuelle » ou concrète (basée sur des objets) à l'arithmétique abstraite (basée sur le langage et les chiffres) est loin d'être évident et repose probablement sur une activation de parties cérébrales différentes.

Ainsi, Butterworth (1999, p. 203) mentionne le cas d'un patient étudié par Margerete Delazer qui ne pouvait pas effectuer des tâches aussi simples que « 2+2 » ou si on lui lisait le problème (« deux plus deux »). Il pouvait, par contre, faire l'addition si on lui présentait celle-ci de manière concrète, par exemple, à l'aide de cercles. Dans ce cas, il faisait l'addition en comptant tous les cercles.

Peut-être que, en raison de sa complexité, le fonctionnement de la pensée arithmétique abstraite semble devoir faire appel à des parties différentes du cerveau. Dans un exemple mentionné par Butterworth, un patient pouvait lire des nombres écrits à deux chiffres (comme cinquante-quatre), mais il ne pouvait pas lire l'expression symbolique « 54 ». Un autre patient qui avait eu une hémorragie au lobe pariétal gauche montrait, comme le patient précédent, de grandes difficultés à lire des nombres à deux chiffres mais il pouvait les lire s'ils étaient écrits en mots (Butterworth, 1999, p. 203). Il semblerait donc que le traitement cérébral des nombres est différent selon leur modalité symbolique (« 54 ») ou langagière (« cinquante-quatre »).

Des études menées auprès des adultes ont mis en évidence le rôle joué par ce qu'on appelle « le sillon intrapariétal » (*intraparietal sulcus*), IPS en abrégé (voir Figure 13.1).

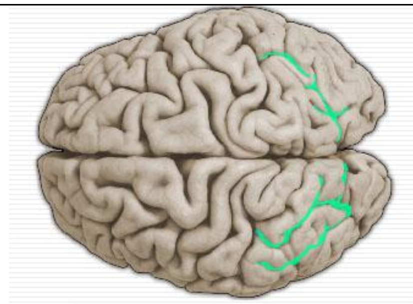


Figure 13. 1. le sillon intrapariétal (IPS) (Photo obtenue de SylviusPro).

Ce sillon apparaît fortement activé quand des adultes font des calculs arithmétiques à l'aide de chiffres. Cantlon et ses collaborateurs ont posé la question du rôle du sillon intrapariétal dans l'arithmétique concrète. Est-ce que ce sillon serait également actif lors des tâches où les nombres sont présentés de façon concrète, par exemple à travers des points ou, par contre, ce sillon serait-il relié seulement au calcul arithmétique abstrait? L'intérêt de la question est expliqué de la façon suivante :

> Une question fondamentale pour l'étude de la cognition numérique est de savoir si les habiletés complexes symboliques des adultes partagent une origine neurologique et de développement avec les habiletés numériques non symboliques. Un corpus croissant d'évidences suggère que, du point de vue de l'évolution, l'habileté à saisir non verbalement des valeurs numériques a été un préalable important des habiletés numériques symboliques chez l'adulte (Cantlon, Brannon, Carter et Pelphrey, 2006, p. 850).

Est-ce que ce sillon intrapariétal serait actif chez l'adulte comme résultat d'un développement cognitif ou serait-il un élément qui assure une continuité entre la pensée arithmétique de l'enfant et celle de l'adulte? Pour répondre à cette question, Cantlon et ses collaborateurs ont mené une recherche comparative à laquelle ont participé des enfants de 4 ans et des adultes. Leurs résultats montrent une activation du sillon interapariétal chez les deux groupes et indiquent que cette partie du cerveau assure un lien neurologique entre la cognition symbolique (ou abstraite) de l'adulte et la cognition non-symbolique (ou concrète) de l'enfant. « Encore plus important, » disent-ils, « nos résultats montrent que l'IPS est mobilisé pour des traitement non symboliques tôt dans le développement, avant que l'éducation formelle scolaire ne commence. » (Cantlon, Brannon, Carter et Pelphrey, 2006, p. 851)

Une autre recherche récente vient jeter une lumière supplémentaire sur le rôle de l'IPS, en indiquant quelques répercussions de différences anatomiques que cette partie du cerveau peut avoir sur les habiletés en calcul. D'après Ansari et ses collaborateurs,

> Des évidences récentes suggèrent qu'il peut y avoir des différences anatomiques dans le IPS gauche entre individus selon qu'ils présentent ou non des déficits en calcul… Ces résultats … suggèrent qu'un développement atypique de cette région peut empêcher un développement mathématique réussi. Il est possible que cette région corticale, au cours du développement, vienne représenter les magnitudes numériques d'une manière de moins en moins approximative, permettant ainsi la construction développementale du traitement exact de nombres, tel que le calcul. (Ansari, Fugelsang, Dhital et Venkatraman, 2006, p. 1825)

Mais comme nous l'avons mentionné précédemment, au fur et à mesure que la pensée arithmétique se complexifie, quand d'autres opérations entrent en jeu, comme la multiplication et la division, d'autres régions cérébrales que l'IPS sont activées. Ainsi, la résolution de problèmes ayant trait à des multiplications vont souvent faire appel au *gyrus angulaire gauche* (voir Figure 13.2) :

> Certains chercheurs ont suggéré que cette région du cerveau [le gyrus angulaire gauche] est importante pour la manipulation explicite de valeurs numériques qui est caractéristique des mathématiques chez l'adulte humain. Ainsi, le développement conceptuel relié aux pratiques numériques culturelles, linguistiques et symboliques pourrait causer des changements dans le réseau des régions du cerveau impliquées dans les mathématiques sophistiquées des adultes. Toutefois, la base neurologique des processus indépendants des notations numériques [l'arithmétique concrète —LR et MA] dans l'IPS pourrait être le noyau de ce réseau mathématique sophistiqué au cours du développement. (Cantlon, Brannon, Carter et Pelphrey, 2006, p. 852)

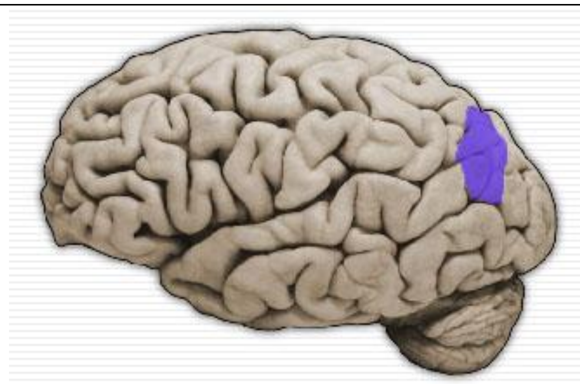


Figure 13.2. Le gyrus angulaire gauche, montré sur la photo, est généralement activé lors des multiplications de nombres.

La recherche de Cantlon et de ses collaborateurs ainsi que celle d'Ansari et de ses co-équipiers sont très récentes. Comme ses auteurs l'indiquent, celle de Cantlon est la première à s'attaquer au problème des bases neurologiques du développement de la pensée arithmétique. Il faudra attendre d'autres recherches pour avoir une idée plus précise de ce problème fort complexe et intéressant.

6. Pensée algébrique et cerveau

Alors qu'il y a un nombre important d'études portant sur la relation entre le cerveau et la compréhension orale et écrite de nombres ainsi que sur le cerveau et les calculs arithmétiques élémentaires (addition, soustraction, multiplication et division), il y a, par contre, très peu d'études consacrées au cerveau et à la pensée mathématique avancée. Nous avons consulté de nombreuses bases de données pour trouver des articles sur l'algèbre et le cerveau et nos efforts n'ont donné que peu de fruits.

Il faut dire que les premiers travaux neurologiques où les individus étudiés ont eu affaire à l'algèbre n'avaient pas comme but la recherche des corrélations entre algèbre et cerveau. Ces travaux étaient plutôt centrés sur l'étude des problèmes d'accès et de récupération d'informations —donc, des problèmes reliés au fonctionnement de la mémoire. La première série de travaux est celle réalisée par Anderson, Reder et Leniere (1996) et Blessing et Anderson (1996), suivie d'un intermède avec une publication d'Anderson, Qin, Sohn, Stenger et Carter en 2003 et d'une deuxième série d'études — celles de Luna (2004) et Qin, Carter, Silk, Stenger, Fissell et Goode (2004). [5]

Ces travaux donnent un aperçu des régions cérébrales activées lors de la résolution d'équations. Ils suggèrent quelques éléments de réponse à la question du temps optimal pour l'apprentissage de l'algèbre. Dans ce qui suit, nous donnons un aperçu des résultats trouvés.

La première série

Supposons qu'on vous demande de retenir en mémoire une série de quatre chiffres (par exemple, 2 4 8 1). Par la suite on vous demande de réaliser une certaine tâche qui exige une attention particulière (tâche non nécessairement en relation avec la série de chiffres que vous essayez de garder en mémoire). Une fois la tâche complétée, vous devez reproduire la série de chiffres en question.

En principe, la rétention en mémoire de la série de chiffres devrait être meilleure lorsque vous faites face à une tâche simple plutôt qu'à une tâche complexe. On peut aussi penser que l'effort que vous faites pour garder la série de chiffres en mémoire va avoir une répercussion sur la manière dont vous vous acquittez de la tâche. Vous pourriez être amené à faire plus d'erreurs pendant l'accomplissement de la tâche quand la série de chiffres à retenir augmente, disons, de quatre à six chiffres.

C'est justement ce problème du rôle de la *mémoire de travail* en rapport avec la complexité d'une tâche que les chercheurs Anderson, Reder et Leniere, de l'Université Carnegie Mellon ont étudié au milieu des années 1990.

Anderson et ses collaborateurs ont mené deux études consécutives avec 15 et 20 sujets, respectivement. Les sujets étaient des étudiantes et des étudiants ou des membres du personnel de leur université. Ils voulaient avoir une meilleure idée des causes d'erreurs dont la fréquence semblait augmenter au fur et à mesure que la complexité des tâches augmentait. Dans leurs travaux précédents, ils avaient observé que la deuxième erreur

[5] Un troisième article, celui de Tweed, Haslwanter et Happe (1999), ne porte pas vraiment sur la relation cerveau algèbre, mais sur l'existence de circuits neuronaux non-commutatifs.

dans l'équation à fractions ci-dessous était plus fréquente que l'erreur effectuée dans l'équation à nombres entiers.

$$x + 6 = 9 \rightarrow x = 9 + 6$$

$$x + 6/5 = 9/4 \rightarrow x = 9/4 + 6/5$$

D'après eux, même si les deux équations sont formellement identiques, la fréquence plus élevée d'erreurs dans la deuxième équation pourrait s'expliquer par une charge majeure au niveau de la mémoire de travail nécessaire à la représentation de fractions (Anderson, Reder et Leniere, 1996, p. 222).

En se basant sur des travaux qui ont été réalisés à la fin des années 1980, ces chercheurs ont émis l'hypothèse que le fonctionnement de la mémoire de travail est limité par le degré d'*attention* qu'on peut porter sur plusieurs objets ciblés (Anderson, Reder et Leniere, 1996, p. 225).
Dans leur expérience, ils ont présenté aux sujets des séries de 2, 4 ou 6 chiffres. D'abord, une série de nombres apparaissait sur l'écran d'un ordinateur pendant quelques secondes. La série disparaissait de l'écran et était remplacée par une équation semblable à celles montrées dans le Tableau 1 ci-dessous.

$x/3 = 6$	$x/a = b$
$3x - 2 = 7$	$ax - 2 = b$
$x/3 - 2 = 7$	$x/3 - a = b$

Tableau 1. À gauche, trois exemples d'équations sans substitution. À droite, trois exemples avec substitution (Anderson, Reder et Leniere, 1996, p. 228). La première équation sur chaque ligne est appelée équation à une étape alors que les autres équations sont appelées équations à deux étapes, en raison des étapes nécessaires pour les résoudre.

Devant une équation sans substitution, le sujet était appelé à résoudre mentalement l'équation, puis à écrire, à l'aide du clavier de l'ordinateur, la solution de l'équation ainsi que la série de chiffres gardée en mémoire. Devant une équation avec substitution, le sujet devait substituer les lettres *a* et *b* par les deux premiers chiffres de la série retenue en mémoire et affichée sur l'écran au début de l'expérience (ainsi, si la suite de chiffres était « 2 4 8 1 », le sujet devait remplacer *a* par 2 et *b* par 4 dans l'équation et ensuite la résoudre).

Comme prévu, il était plus difficile de se rappeler exactement de la série de chiffres dans le cas où il fallait se rappeler des séries à 6 chiffres et résoudre des équations à deux étapes que dans la situation où l'on devait se rappeler des séries à 2 chiffres et résoudre des équations à une étape. Par contre, le fait d'avoir à résoudre une équation avec ou sans substitution n'a pas provoqué de différences significatives.

De la même façon, la capacité de bien résoudre une équation s'est vue affectée par la taille de la série à garder en mémoire. Le fait de devoir retenir une série à 6 chiffres a été accompagné du plus petit taux de réussite (voir Figure 14).

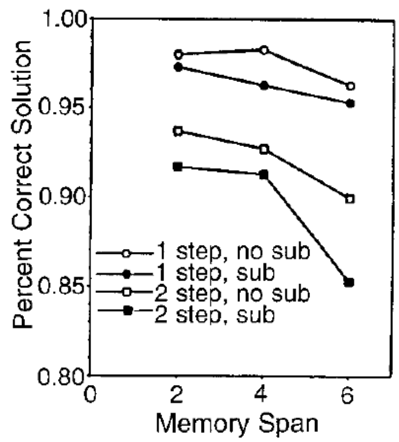


Figure 14. Pourcentage de solutions correctes dans une équation, selon la taille de la série de chiffres à retenir en mémoire (2, 4 ou 6 chiffres) que l'on appelle sur la figure « Memory Span » et le type d'équation (une ou deux étapes; avec ou sans substitution) qu'on appelle sur la figure « 1 step, 2 step, no sub, sub ». (Anderson, Reder et Leniere, 1996, p. 230).

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la question de recherche d'Anderson, Reder et Leniere portait sur la mémoire (plus particulièrement, la mémoire de travail et la façon dont celle-ci est affectée par la solution d'un problème complexe). On s'aperçoit en particulier que leur question principale n'a pas pour but de donner des réponses aux problèmes que pose l'apprentissage de l'algèbre. L'algèbre n'est pas encore objet d'étude. Il y a encore moins un intérêt pour détecter les régions cérébrales activées lors de la résolution d'équations. En effet, il n'est pas question encore du cerveau dans cette recherche. Il faudra attendre le développement des nouvelles technologies pour poser le problème de la relation entre algèbre et cerveau.

Un intermède

En 2003, le même John Anderson et d'autres collaborateurs à l'Université Carnegie Mellon et des collègues en Pennsylvanie ont publié un article qui utilise essentiellement la même méthodologie (séries de chiffres à retenir mentalement pendant la résolution d'équations à une ou deux étapes, avec ou sans substitution)[6]. Toutefois, cette fois-ci, le centre d'intérêt n'était plus la mémoire (Anderson, Qin, Sohn, Stenger et Carter, 2003). Dans cet article, il s'agissait d'explorer les processus qui passent inaperçus pendant la résolution de problèmes et de raffiner le modèle mathématico-cognitif mis sur pied lors de leurs recherches précédentes (ce qu'Anderson et son groupe appellent le modèle ACT-R 5.0). « Cet article », disent-ils dans l'introduction de leur publication de 2003, « va démontrer le potentiel des données provenant de l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf) » dans la compréhension des processus de résolution de problèmes complexes (Anderson, Qin, Sohn, Stenger et Carter, 2003, p. 241).[7]

---

[6] John Anderson est né en 1947 à Vancouver, BC. Il a obtenu un diplôme en 1968 de l'Université de la Colombie Britannique et a intégré l'Université Carnegie Mellon en 1978.

[7] La technique IRMf consiste à enregistrer des changements reliés aux fonctions propres des tissus cérébraux. Elle est basée sur les propriétés magnétiques des tissus et permet d'obtenir des informations sur

Quelles sont les régions corticales qui pourraient être activées lors de la résolution de problèmes? Puisque la question est trop ample, ils se sont contentés de s'arrêter sur les *équations*. Cette simplification réduit les possibles régions corticales concernées. Ils en ont retenu trois :

- Le *cortex préfrontal,* souvent associé à l'accès à l'information et aux opérations de détermination des objectifs (le *quoi faire?* dans un problème).
- Ils ont retenu également des régions du cerveau qui pourraient soutenir l'imagerie nécessaire à la représentation visuelle de manipulation lors de la résolution d'une équation. Des travaux en neuroscience sur l'imagerie spatiale avaient montré que le *cortex pariétal postérieur* est généralement activé dans des situations d'imagerie spatiale. Anderson et son équipe ont donc décidé d'étudier cette région cérébrale.
- Enfin, puisque les sujets devaient donner leur réponse en utilisant leur index droit, des parties habituellement associées au mouvement moteur devraient être en principe activées. Anderson et son équipe se sont donc intéressés également au *cortex moteur*.

L'article en question présente les résultats de deux expériences. Dans la première, on a montré à chacun des individus (8 au total, 4 hommes et 4 femmes) âgés entre 19 et 23 ans (moyenne de 21,5 ans), dans des séances individuelles, une série de trois chiffres qui étaient affichée pendant 3 secondes sur un écran d'ordinateur. Ensuite, la série a disparu pour céder la place à une équation, laquelle était présentée pendant 7,5 secondes. Pendant ce temps, les sujets devaient trouver mentalement la solution et l'indiquer. Si une solution n'était pas fournie pendant les 7,5 secondes, l'essai était jugé incorrect. Ensuite, l'équation était remplacée par un astérisque qui restait sur l'écran pendant 7,5 secondes (qui était une période de repos). Après, l'astérisque était remplacé par un signe « + » qui s'affichait pendant 3 secondes pour indiquer la proximité de l'essai suivant. Durant chaque essai (c'est-à-dire chaque répétition de l'expérience de résolution d'une équation), les expérimentateurs ont pris 14 scanographies d'une durée de 1,5 secondes chacune.

Comme prévu, les chercheurs ont trouvé une activation importante dans les trois régions mentionnées ci-dessus (ces régions sont montrées sur la Figure 15).

---

la structure et la fonction du cerveau. L'IRMf est sensible à l'augmentation de sang associée à l'activation neurologique. Quand les neurones sont activées, le débit de sang de la région activée augmente.

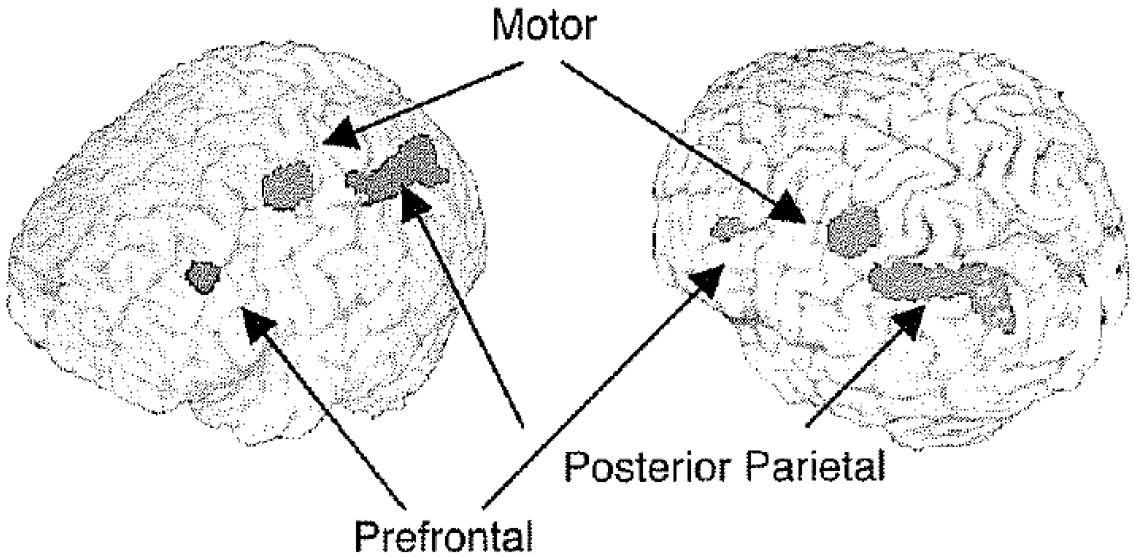


Figure 15. Secteurs des régions préfrontale, pariétale et motrice significativement activées lors de la résolution d'équations. (Anderson, Qin, Sohn, Stenger et Carter, 2003, p. 247).

Mais est-ce que ce patron d'activation est propre à la résolution d'équations que l'on rencontre dans l'algèbre scolaire? Dans la deuxième expérience, qui a été menée avec 8 participants d'un âge moyen de 20,6 ans, les chercheurs ont changé les équations algébriques scolaires par des équations encore plus abstraites (ce sont des équations dont les opérateurs sont définis de façon arbitraire, comme on fait dans l'algèbre abstraite). Les résultats ont montré une activation similaire dans les secteurs appartenant aux cortex préfrontal, pariétal et moteur.

Dans les conclusions, les auteurs avancent une hypothèse intéressante qui fait intervenir l'effet de la pratique de résolution d'équations sur le cerveau : avec la pratique, les étapes d'accès et de récupération de l'information devraient devenir plus évidentes et faciles à réussir. L'activité dans les régions cérébrales associées à l'accès à l'information (donc la région préfrontale) devrait alors, en principe, décroître. Par contre, l'activation de la région pariétale associée à l'imagerie visuelle qui se met en place lors de la simplification des équations devrait rester à peu près constante (Anderson, Qin, Sohn, Stenger et Carter, 2003, p. 260).

Cette hypothèse a donné lieu à la question de l'âge optimal pour apprendre l'algèbre. C'est cette question qui est à la base des travaux dirigés par un des collaborateurs d'Anderson : Yulin Qin.

La deuxième série

Qin, Carter, Silk, Stenger, Fissell, Goode, et al. (2004) ont placé une petite annonce dans un journal local à Pittsburgh pour inviter des élèves n'ayant pas encore suivi de cours d'algèbre à participer à une recherche. Ils ont réussi à recruter dix sujets. Ces sujets étaient de langue maternelle anglophone, âgés entre 12 et 15 ans (âge moyen de 13,1 ans), et fréquentaient des classes de la 6^e à la 8^e année. La distribution en termes de genre était de trois filles et sept garçons. L'expérience a duré cinq jours. Des scanographies du cerveau (IRMf) ont été prises la première et la cinquième journée.

Les résultats de Qin et de son équipe concordent parfaitement avec ceux obtenus par Anderson et ses collaborateurs en 2003. Les parties activées du cerveau des jeunes sujets correspondaient bien aux parties activées lors des tâches similaires effectuées par des adultes, c'est-à-dire des secteurs localisés dans la région préfrontale, la région pariétale gauche et les régions motrice et sensorielle gauches.
Quand Qin et ses collaborateurs ont comparé le taux de succès dans la résolution d'équations chez les adultes et les adolescents, ils n'ont pas trouvé de différence. Ils ont également noté que tant chez les adultes que chez les adolescents, l'activité dans la région préfrontale avait diminué après quatre jours de pratique. Mais ils ont trouvé une différence remarquable —ce qu'ils appellent un résultat « intrigant ». À la différence des adultes, les jeunes, après une pratique dans la résolution d'équations, montrent une diminution de leur *activité cérébrale pariétale*.
Puisque les secteurs pariétaux activés sont ceux généralement corrélés à l'élaboration mentale de l'image de l'équation —image qui est vitale pour la simplification de celle-ci, surtout au début de l'apprentissage de l'algèbre— ces résultats suggèrent que, avec la pratique, les adolescents seraient en train d'avoir moins de recours à l'élaboration d'une image de l'équation. Le processus de résolution reposerait davantage sur un calcul plutôt mécanique d'opérations successives. En d'autres termes, les adolescents seraient en train d'accéder plus facilement que les adultes à des niveaux d'abstraction algébrique.

Dans leurs conclusions, Qin et ses collaborateurs soulignent le point suivant: « la réceptivité plus grande du cerveau des adolescents à la pratique suggère que cette période [l'adolescence] serait une période plus appropriée pour l'enseignement de l'algèbre. » (Qin et al., 2004, p. 5691)

Beatriz Luna commente ces résultats de la façon suivante :

> Les résultats IMRf [c'est-à-dire de l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle] indiquent qu'il y a chez les adolescents une décroissance dans leur dépendance vis-à-vis du module imagier/pariétal après avoir pratiqué (« appris ») les équations algébriques, alors que les adultes dépendent encore de ce module même après la pratique. Ces résultats sont très intrigants car ils semblent suggérer que, comme adultes, nous serions limités dans notre habileté à « apprendre » les opérations mentales qui sous-tendent ce niveau de résolution de problèmes. (Luna, 2004, p.438).[8]

[8] Notons, toutefois, que Luna offre une deuxième interprétation d'après laquelle la différence mise en évidence par Qin et son équipe, pourrait être causée par le fait que le cerveau adolescent est encore en croissance et que la diminution d'activité pariétale serait le résultat d'une sorte de compensation pour les limites du cortex pariétal des jeunes (Luna, Algebra and brain, p.438). Bien que plausible, cette hypothèse

Telle que discutée dans une section précédente, notre recherche en salle de classe montre bien que, si les activités d'introduction à l'algèbre sont bien choisies, les élèves de 7e année peuvent commencer à utiliser, sans grandes difficultés, le langage algébrique symbolique pour résoudre des équations et des problèmes de généralisation de patrons (modélisation). Actuellement, la résolution d'équations par les méthodes algébriques ne commence qu'en 9e année. Il y a donc lieu de se poser la question de la pertinence d'attendre si longtemps pour introduire l'algèbre avec des lettres aux élèves. Les résultats expérimentaux en salle de classe et les travaux en neuroscience sur le cerveau suggèrent qu'on introduise plus tôt cette matière pourtant réputée difficile. Sa difficulté ne proviendrait pas d'un manque de maturité cognitive ou cérébrale, mais d'une inadéquation des méthodes d'enseignement utilisées.

7. Conclusions

Du point de vue éducatif, la question incontournable, c'est de savoir ce qu'on peut tirer des résultats des recherches neurologiques. Comme nous l'avons dit au début de ce rapport, on commence à peine véritablement à se pencher sur cette question. Il n'y a pas de réponse précise. Une des raisons est que la neurologie moderne est, historiquement parlant, une science récente, dont le progrès dépend étroitement des progrès technologiques. Mais au-delà de la dimension technologique, on peut penser qu'une application des résultats neurologiques en éducation devra passer par un dialogue soutenu (et probablement par des recherches conjointes) entre éducateurs et neurologues. Cela ne fait que commencer.[9]

Il nous semble, toutefois, qu'on peut déjà en tirer quelques résultats provisoires. Nous en discuterons trois.[10]

1. La nature du cerveau

Le premier résultat, de caractère plutôt général, concerne l'information que la neuroscience apporte au sujet de la *nature* du cerveau. Il relance le débat entre cerveau et pensée, en le positionnant cependant sous un éclairage nouveau. Est-ce que la pensée n'est au fond qu'une connexion neurologique? Ou bien, le cerveau n'est-il que le substrat de la pensée, un des éléments qui, avec d'autres artefacts culturels, la médiatisent?

2. Le cerveau et le développement conceptuel

Le deuxième résultat concerne la *relation* du cerveau avec le développement conceptuel du savoir et le développement conceptuel des élèves.
Les études sur l'évolution historique du cerveau (sa phylogenèse) et sur son développement au cours de la vie de l'individu (l'ontogenèse du cerveau) peuvent venir

---

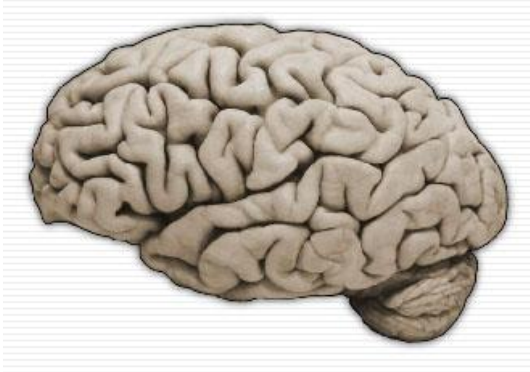
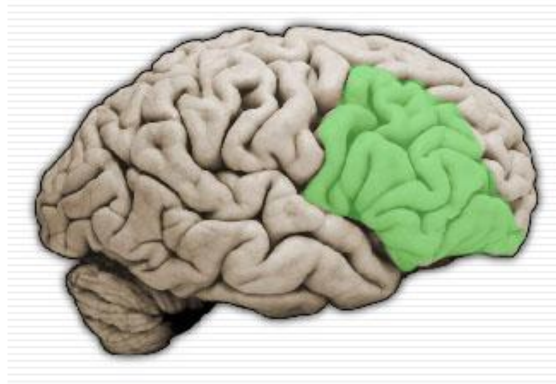
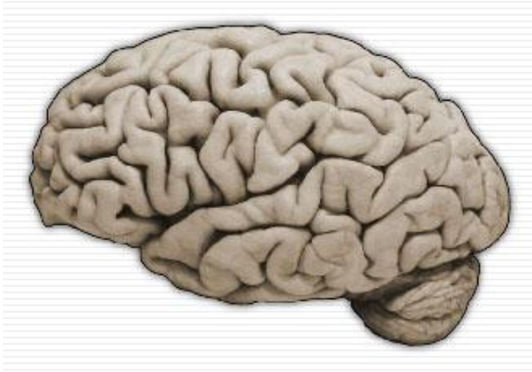
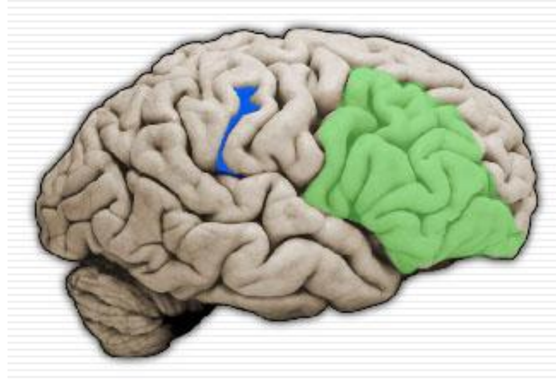
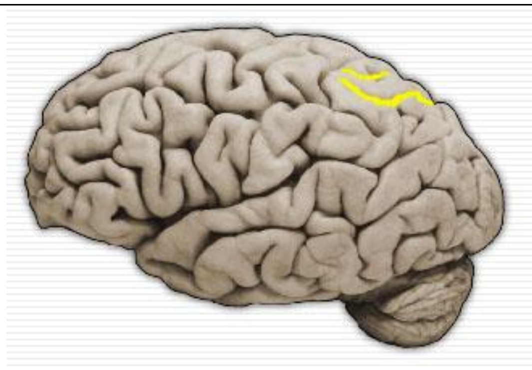
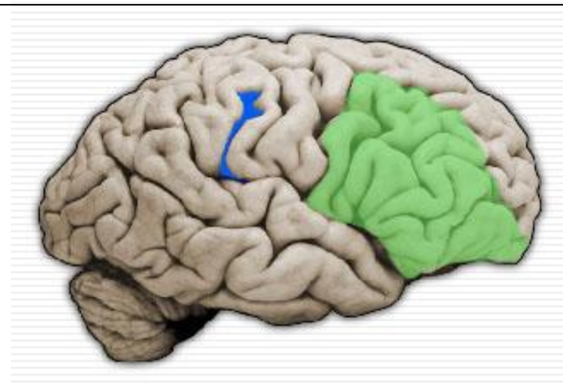
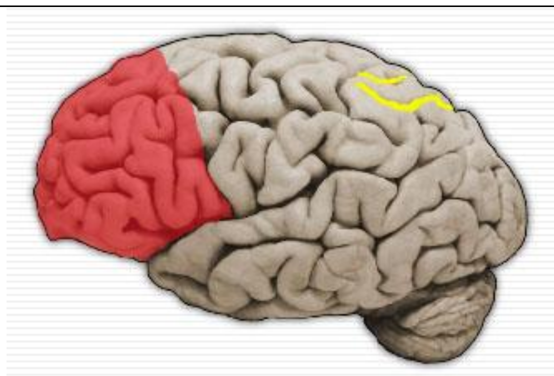
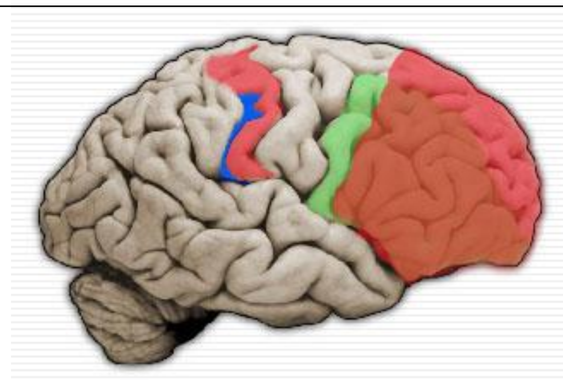
ne nous semble pas convaincante, car si elle était vraie, on trouverait chez les jeunes peu d'activité pariétale dès le départ.

[9] Mentionnons, dans cet ordre d'idées, l'Engrammetron—un laboratoire dirigé par Stephen Campbell, mis sur pied récemment à l'Université Simon Fraser. Ce laboratoire se trouve à l'intersection des sciences neurologiques et de la recherche en éducation (Campbell, 2007).

[10] Les trois résultats dont il sera question ne concernent pas le cas bien connu de l'utilisation des données neurologiques pour la compréhension de problèmes comme la dyslexie, l'aphasie, etc., cas pour lesquels une justification ou une explication ne semble pas nécessaire.

enrichir les données sur le développement des concepts au cours du temps (l'épistémologie historique du savoir), ainsi que les données psychologiques et socio-psychologiques de la recherche sur l'apprentissage. Pour ne mentionner qu'un exemple, Chochon, Cohen, Van de Moortele et Dehaene (1999) ont demandé à des individus de nommer, de comparer, de multiplier et de soustraire des nombres. Ils voulaient étudier les régions corticales qui sont activées lors de ces tâches. Leurs résultats montrent une activation emboîtée de certaines régions corticales. Ainsi, ces chercheurs ont observé que quand les individus comparent des nombres, il y a une activation dans la profondeur de la scissure post-centrale droite qui vient s'ajouter aux parties déjà activées dans la tâche de nommer des nombres. De manière similaire, en plus des parties déjà activées lors de la comparaison de nombres, la multiplication a causé une forte activation additionnelle de la scissure interpariétale gauche. Enfin, ils ont observé que, en plus des parties déjà activées lors de la multiplication, la soustraction a produit une plus grande activation dans le lobe préfrontal, plus spéficiquement bilatéralement dans le gyrus frontal inférieur et dans le gyrus dorsolatéral préfrontal droit ainsi que dans la région antérieure du sillon interpariétal droit. Ainsi, chaque tâche a montré une activation additionnelle dans certaines régions par rapport à celles déjà activées lors des tâches précédentes (voir Figure 16).

Du point de vue conceptuel, il n'est pas tout à fait étonnant que l'activation ait été majeure lorsque les sujets devaient comparer des nombres que lorsqu'ils devaient nommer les nombres présentés. Comparer des nombres exige la prise en compte de *deux* objets et la prise de décision par rapport à leur *numérosité*. Par contre, plusieurs éducateurs pourraient être surpris du fait que, neurologiquement parlant, la soustraction semble être plus complexe que la multiplication. On peut aussi poser la question du point de vue historique. Est-ce que, dans l'histoire des idées mathématiques, la soustraction a été développée après la multiplication?
On peut résumer ces questions de la façon suivante : est-ce que la complexité neurologique implique une complexité conceptuelle? Voilà un exemple de résultat produit par la recherche neurologique qui nous amène à une question d'ordre psychologique, épistémologique et didactique. Même si nous n'avons pas de réponse, nous avons une bonne question!

Tâche	Hémisphère gauche	Hémisphère droit
Nommer		
Comparer		
Multiplier		
Soustraire		
Figure 16. Quelques régions importantes activées lors d'une tâche numérique, selon Chochon et al. (1999).		

3. La plasticité du cerveau

Le troisième résultat général qu'on peut tirer des résultats neurologiques est l'information qu'ils apportent au sujet de la *plasticité* du cerveau, c'est-à-dire de sa capacité à évoluer en étroite relation avec son environnement. Au quatrième mois de gestation, on voit chez le fœtus une différenciation de cellules en régions séparées. Pendant cette période, des neurones et des cellules gliales sont produites à un taux très important.[11] Une migration permet à ces cellules cérébrales de former les premières régions qui assureront les fonctions les plus élémentaires, comme le mouvement réflexe, les conduites physiques et l'équilibre. Plus tard apparaissent les relais en charge des stimuli sensoriels, la mémoire et les émotions. Ces structures neurologiques basiques resteront peu souples, comparées à celles beaucoup plus *plastiques* ou *malléables*, qui viendront se former sur les premières, à savoir le néocortex et le cortex (Prochiantz, 1989), ce dernier étant la partie du cerveau reliée à des activités cognitives supérieures comme l'attention, la synthèse, la planification, le raisonnement, l'imagination spatiale et le langage.
La plasticité du cortex humain est sans doute un de ses traits les plus distinctifs : il témoigne justement de cette capacité de notre espèce à faire face à des environnements très variés et à notre capacité d'adaptation (Healy, 1991). Cette plasticité se manifeste également par la capacité relative de certaines régions à assumer des fonctions qui, en principe, seraient prises en charge par des régions devenues non fonctionnelles à cause de dommages relativement peu importants. Comme dit Luria (1973, p. 221), « des lésions comparativement petites dans le lobe préfrontal peuvent être compensées par des régions avoisinantes ». Sur le plan du développement, la plasticité du cerveau peut s'exprimer dans les termes suivants : l'évolution du cortex au cours de la vie de l'individu dépend de la manière dont l'individu utilisera son cerveau à différents moments de sa croissance.

Un des problèmes centraux de l'enseignement en général et de l'enseignement des mathématiques en particulier est de trouver le moment opportun d'apprentissage, car la formation des connexions neurologiques est mieux accomplie quand les connexions sollicitées pour effectuer un apprentissage sont les plus malléables possibles, c'est-à-dire avant que ces connexions n'aient acquis une certaine fixité qui serait difficile à modifier par la suite (Healy, 1991, p. 53).

Les risques d'une intervention au-delà du moment opportun d'apprentissage sont nettement démontrés par le sort malheureux des enfants dits « sauvages » —ces enfants qui grandissent à l'extérieur de la société, souvent en compagnie de bêtes. Un des cas les plus cités est celui du sauvage de l'Aveyron (Newton, 2002). Après avoir été attrapé à Rhodez, une ville entre Montpellier et Toulouse, en France, en 1800, cet enfant, d'environ 1,40 m, semblait plus animal qu'humain. Sans savoir parler, l'enfant présentait un comportement déterminé par des instincts élémentaires et des fonctions physiologiques de base. Pierre-Joseph Bonnaterre, un professeur d'histoire naturelle de l'École centrale de l'Aveyron, s'est donné la tâche d'étudier l'enfant en détail. Bonnaterre remarqua qu'au-delà des nécessités immédiates, l'enfant ne montrait aucun signe d'affection ou d'amitié pour les personnes qui l'entouraient. L'indifférence

[11] Les cellules gliales offrent de l'appui au système nerveux et aident à l'activité fonctionnelle des neurones, en facilitant la myélinisation du système nerveux et, par là, à la transmission de signaux.

profonde envers les autres amena Bonnaterre à croire que l'enfant était sourd. La réaction de l'enfant à certains sons (par exemple, le chant des oiseaux) le poussa toutefois à penser autrement. Il se donna alors la tâche de lui apprendre à parler, mais sans succès : la période d'apprentissage de la langue était vraisemblablement terminée pour cet enfant. On pourrait dire que le temps de création de connexions neurologiques nécessaires au développement du langage était malheureusement dépassé.

Sans devenir nécessairement obsédés par la question du moment opportun d'apprentissage, le cas du sauvage de l'Aveyron nous rappelle qu'il y a des limites à la plasticité du cerveau. On peut très légitimement se poser la question de la pertinence de reporter l'enseignement des méthodes algébriques de résolution d'équations à la 9e année, quand on voit que les résultats expérimentaux en didactique des mathématiques — appuyés par les résultats neurologiques d'Anderson, Qin et collaborateurs dont on a discuté ci-dessus— montrent que, déjà à la fin de la 7e année, les enfants sont prêts à passer à l'abstraction algébrique. On peut énoncer l'hypothèse que les techniques arithmétiques de résolution par des essais systématiques ou par des opérations renversées, encouragées en 7e et 8e année, seraient en train de favoriser des liaisons neurologiques « arithmétiques » difficiles à défaire par la suite, quand on demande aux élèves de commencer à penser algébriquement. Lorsqu'on les garde trop longtemps, ces techniques deviendraient non pas des aides susceptibles de faire la transition entre l'arithmétique et l'algèbre, mais des obstacles à l'apprentissage de nouveaux concepts.

Le cas du sauvage de l'Aveyron et des autres enfants ayant subi le même sort nous rappellent également qu'un cerveau sain peut être une condition facilitatrice d'apprentissages, mais que, en aucun cas, le cerveau est, à lui seul, suffisant. Pour acquérir, à l'école, les connaissances que l'humanité a bâties au cours de millénaires, il faut plus qu'un bon cerveau : *il faut une culture*. Le langage —le français, par exemple— n'est pas produit par le cerveau tout seul. Comme le neuro-cognitiviste Bruce Wexler l'a remarqué récemment,

> le langage n'est pas la propriété du cerveau humain, mais plutôt de la société humaine et de la culture. Si tous les individus devenaient de façon permanente sans parole et analphabètes, leurs enfants et les générations suivantes seraient incapables de parler, malgré le fait d'avoir un cerveau normal; l'espèce humaine perdrait le langage —cette caractéristique la plus distinctive de toutes les caractéristiques humaines. (2006, p. 121)

Du point de vue de l'éducation, on ne peut pas tirer tout le potentiel de la plasticité du cerveau sans les conditions pédagogiques que la culture doit mettre en place pour assurer un plein développement chez l'élève.

L'étude des conditions pédagogiques idéales susceptibles d'assurer un bon développement de la pensée mathématique au cycle intermédiaire est l'objet du troisième rapport.

Références

Anderson, J. R., Qin, Y., Sohn, M., Stenger, V. A., & Carter, C. S. (2003). An information-processing model for the BOLD response in symbol manipulation tasks. *Psychonomic Bulletin & Review, 10*(2), 241-261.

Anderson, J. R., Reder, L., & Lebiere, C. (1996). Working memory: Activation limitations on retrieval. *Cognitive Psychology*, *30*, 221-256.

Ansari, D., Fugelsang, J. A., Dhital, B., & Venkatraman, V. (2006). Dissociating response conflict from numerical magnitude processing in the brain: an event-related fMRI study. *NeuroImage, 32*, 799-805.

Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J., & Sabena, C. (2008). The Ostensive Dimension Through the Lenses of Two Didactic Approaches. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education* (sous presse).

Arzarello, F., Edwards, L., & Radford, L. (2008). Gesture and Multimodality in the Construction of Mathematical Meaning. *Educational Studies in Mathematics*, (sous press).

Blessing, S. & Anderson, J. R. (1996). How people learn to skip steps. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *22*(3), 576-598.

Butterworth, B. (1999). *The Mathematical Brain*. London: Macmillan Publishers.

Campbell, S. (2007). The Engrammetron: Establishing an Educational Neuroscience Laboratory. *SFU Educational Review*, 1 (2007), pp. 17-29.

Cantlon, J. F., Brannon, E., & Carter, J. (2006). Functional imaging of numerical processing in adults and 4-y-old children. *PLoS Biology, 4*(5), 0844-0854.

Caviness, V. S. J., Kennedy, D. N., Bates, J. F., & Makris, N. (1997). The developing human brain: A morphometric profile. In R. W. Thatcher, G. R. Lyon, J. Rumsey & N. Krasnegor (Eds.), *Developmental neuroimaging: Mapping the development of brain and behavior* (pp. 3-14). Toronto: Academic Press.

Chochon, F., Cohen, L., Van de Moortele, P. F., & Dehaene, S. (1999). Differential contributions of the left and right inferior parietal lobules to number processing. *Journal of Cognitive Neuroscience, 11*(6), 617-630.

Delazer, M., Domahs, F., Bartha, L., Brenneis, C., Lochy, A., Trieb, T., et al. (2003). Learning complex arithmetic - an fMRI study. *Cognitive Brain Research, 18*, 76-88.

Devlin, K. (2005). *The math instinct. Why you're a mathematical genius (along with lobsters, birds, cats, and dogs)*. New York: Thunder's Mouth Press.

Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology, 22*(3/4), 455-479.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, *44*, 43-74.

Gazzaniga, M. (1969). *The Social Brain. Discovering the Networks of the Mind*. New York: Basic Books.

Gehlen, A. (1988). *Man. His Nature and Place in the World*. New York: Columbia University Press.

Gogtay, N., Giedd, J., Lusk, L., Hayashi, K., Greenstein, D., Vaituzis, A., et al. (2004). Dynamic mapping of human cortical development during childhood through early adulthood. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 101*(21), 8174-8179.

Gómez, J. C. (2004). *Apes, Monkeys, Children, and the Growth of Mind*. Cambridge: Harvard University Press.Goswami, U. (2004). Neuroscience and education. *British Journal of Educational Psychology, 74*, 1-14.

Grafman, J., Kampen, D., Rosenberg, J., Salazar, A., & Boller, F. (1989). Calculation abilities in a patient with a virtual left hemispherectomy. *Behavioural neurology, 2*, 183-194.

Healy, J.M. (1991). Endangered Minds: Why Children Don't Think and What We Can Do About It. New York: Touchstone.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.

Köhler, W. (1951). *The Mentality of Apes*. New York, London: The Humanities Press; Routledge & Kegan Paul.

Kosslyn, S., & Koening, O. (1992). *Wet Mind: The New Cognitive Neuroscience*. New York: The Free Press.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From*. New York: Basic Books.

Lefèvre, W. (1981). *Rechensteine und Sprache*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Luna, B. (2004). Algebra and the adolescent brain. *Trends in Cognitive Sciences, 8*(10), 437-439.

Luria, A. (1966). *Higher Cortical Functions in Man*. New York: Basic Books.

Luria, A. (1973). *The Working Brain*. New York: Basic Books.

Newton, M. (2002). *Savage Girls and Wild Boys. A History of Feral Children*. London: Faber and Faber.

Prochiantz, A. (1989). *La construction du cerveau*. Paris : Hachette.

Qin, Y., Carter, C. S., Silk, E. M., Stenger, V. A., Fissell, K., Goode, A., et al. (2004). The change of the brain activation patterns as children learn algebra equation solving. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *101*(15), 5686–5691.

Radford, L. (2008). Why do Gestures Matter? Sensuous Cognition and the Palpability of Mathematical Meanings. *Educational Studies in Mathematics.* (Sous presse).

Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the General: The Multisemiotic Dimension of Students' Algebraic Activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 507-530.

Saper, C. B., Iversen, S., & Frackowiak, R. (2000). Integration of sensory and motor function: The association areas of the cerebral cortex and the cognitive capabilities of the brain. In E. R. Kandel, J. H. Schwartz & T. M. Jessell (Eds.), *Principles of neural science* (349-380). Toronto: McGraw-Hill.

Savage-Rumbaugh, S., & Lewin, R. (1994). *Kanzi*. New York: John Wiley.

Schwartzman, S. (1994). *The words of mathematics. An etymological dictionary of mathematical terms used in English*. Washington: The Mathematical Association of America.

Sowell, E., & Jernigan, T. (1998). Further MRI Evidence of Late Brain Maturation: Limbic Volume Increases and Changing Asymmetries During Childhood and Adolescence. *Developmental Neuropsychology, 14*(4), 599-617.

Sowell, E., Thompson, P., Holmes, C., Jernigan, T., & Toga, A. (1999). In vivo evidence for post-adolescent brain maturation in frontal and striatal regions. *Nature Neuroscience*, *2*(10), 859-861.

Starkey, P., Spelke, E. & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition*, *36*, 97-127.

Ta'ir, J., Brezner, A., & Ariel, R. (1997). Profond developmental dyscalculia: evidence for a cardinal/ordinal skills acquisition device. *Brain and Cognition*, *35*, 184-206.

Tomasello, M., & Call, J. (1997). *Primate Cognition*. New York: Oxford University Press.

Tweed, D. B., Haslwanter, T. P., & Happe, V. (1999). Non-commutativity in the brain. *Nature*, *399*, 261-263.

Vita, V. (1982). Il punto nella terminologia matematica greca. *Archive for the History of Exact Sciences*, *27*, 101-114.

Wexler, B. E. (2006). *Neurobiology, ideology, and social change*. Massachusetts: MIT Press.

Willingham, D., T., & Lloyd, J. W. (2007). How educational theories can use neuroscience data. *Mind, Brain, and Education*, *1*(3), 140-149.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358*, 749-750.