

Cet article a été traduit et publié en anglais dans la revue *Educational Studies in Mathematics*, 2003, vol 52, pp. 123-150.

DES LIMITES EPISTEMOLOGIQUES DU LANGAGE :

SAVOIR MATHEMATIQUE ET PRATIQUE SOCIALE A LA RENAISSANCE¹

Luis Radford

Professeur

Université Laurentienne

Résumé – Une des caractéristiques importantes des réflexions didactiques contemporaines est l'attention qu'on prête au langage et au discours. En cessant d'être considéré comme outil plus ou moins efficace –mais toujours imparfait– pour exprimer la pensée, le langage apparaît aujourd'hui muni de possibilités cognitives et épistémologiques sans précédent. On dirait que le mur entre langage et pensée s'est ébranlé et que l'on ne sait plus maintenant où se termine l'un et où commence l'autre. En tout cas, la thèse d'indépendance entre l'élaboration d'une pensée et sa codification n'est plus acceptable. Or, l'intérêt porté au langage nous amène à nous poser la question de ses limites épistémologiques. Plus précisément, peut-on imputer au langage et à l'activité discursive la force de création des objets théoriques du monde des individus? Cet article tente de montrer que tout essai de compréhension de la réalité conceptuelle et de la production du savoir ne peut pas se limiter au langage et à l'activité discursive, mais qu'il doit également tenir compte des pratiques sociales qui les soutiennent. Ce point est illustré par l'analyse de la relation entre savoir mathématique et pratique sociale à la Renaissance.

¹ Cet article fait partie des résultats d'un programme de recherche subventionné par le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (CRSH/SSHRC).

Le paradigme du langage

Un trait distinctif de la recherche contemporaine en sciences sociales est la place que le langage est venu y occuper. La didactique des mathématiques ne semble pas faire exception. En effet, on vit actuellement dans ce que Markus (1982) appelait « le paradigme du langage » . En utilisant ce terme, il faisait référence au paradigme qui saisit le rapport de l'homme au monde comme rapport analogue aux modes du fonctionnement linguistique. Ainsi, par exemple, le rapport de l'homme au monde peut être considéré comme forme universelle des rapports sociaux fonctionnant selon les modalités d'une communication toujours en cours . Le rapport de l'homme à son monde peut également être considéré comme système homogène structural existant derrière les actes de parole et transcendant l'historicité et la localisation de l'action humaine (comme dans le structuralisme de Lévi-Strauss et de Saussure). Que ce soit sous une forme ou sous une autre, dans ce paradigme, le rapport de l'homme au monde passe par les formes d'interactions sociales lesquelles se modèlent selon une certaine conception du langage. Sa question centrale n'est ni celle de comprendre la place de l'homme dans le monde créé par Dieu, ni celle de chercher les limites de la raison humaine dans sa quête de la connaissance objective (Kant, 1996). Maintenant la question est de saisir les possibilités du discours et de comprendre l'homme en tant qu'*homo dialogicus*. Il semble que l'âge du jugement inauguré par Kant disparaît peu à peu. Nous entrons maintenant dans l'âge de la communication.

Un événement d'importance entraîné par les nombreuses variantes de ce paradigme est la mise en évidence du besoin de reconceptualiser ce qu'est le fonctionnement cognitif des individus. En remettant en question la vue traditionnelle qui voyait la cognition comme un ensemble de processus strictement mentaux, le paradigme du langage prône une conception de la

cognition qui va au-delà des enceintes du psychisme individuel (Edwards, 1997; Myerson, 1994; Geertz, 1973). Dans la nouvelle conception, le langage acquiert une nouvelle dimension –une dimension épistémologique¹.

L'importance de la dimension épistémologique du langage, telle que conçue par le nouveau paradigme, peut être mise en évidence en référence au fait que le langage (et, plus généralement, le discours) apparaît maintenant doté d'une importance sans précédent au point que, dans beaucoup de cas, il apparaît (implicitement ou explicitement) comme l'arène où l'ontogenèse du savoir et celle de son sens sont constituées².

Ainsi, indépendamment de la diversité de thématisations possibles des relations entre pensée et langage³, nous trouvons au sein des réflexions didactiques une tendance marquée à considérer le langage et le discours comme producteurs du savoir et des idées. Toutefois, il nous semble qu'il y a lieu de poser la question suivante : peut-on imputer au langage cette force de création des objets théoriques du monde des individus ? Il y a de fortes raisons d'en douter. Comme Leontiev (1984) l'affirme, le langage n'est pas un démiurge : « les mots, les signes du langage ne sont pas de simples suppléants des choses, leurs substituts conventionnels », car, poursuit Leontiev, « sous les significations des mots il y a la pratique sociale ... » (p. 33).

Certainement, la parole du discours qui, selon le paradigme du langage, donnerait naissance à l'objet conceptuel, n'est pas une parole émise sur-le-champ, une parole neuve, inventée sur le coup. Les significations derrière les mots et les symboles conservent, sous forme cristallisée, l'activité des individus. Pour ne prendre qu'un exemple, derrière le mot « comptoir » se trouve, sous forme historiquement sédimenté, l'activité de *compter* des marchands du début de la

Renaissance. Le mot comptoir prend racine dans cette activité de compter qui se déroulait sur une *table* sur laquelle ces marchands plaçaient des jetons et d'autres objets servant de signes pour effectuer les comptes⁴. C'est, en effet, une parole qui a derrière elle une histoire culturelle.

Bakhtin (1984) disait que

L'objet du discours d'un locuteur, quel qu'il soit, n'est pas objet de discours pour la première fois dans un énoncé donné, et le locuteur donné n'est pas le premier à en parler. L'objet a déjà, pour ainsi dire, été parlé, controversé, éclairé et jugé diversement, il est le lieu où se croisent, se rencontrent et se séparent des points de vue différents, des visions du monde, des tendances. Un locuteur n'est pas l'Adam biblique, face à des objets vierges, non encore désignés, qu'il est le premier à nommer. L'idée simplifiée qu'on se fait de la communication, et qui est prise comme fondement logique-psychologique de la proposition, mène à évoquer l'image de cet Adam mythique. (p. 301)

La parole que nous prononçons et l'objet sur lequel cette parole porte sont inévitablement liés à une pratique sociale, historiquement constituée, qui établit et délimite son espace de mouvement. Et ce, évidemment, *avant* même que la parole ne soit dite. Cette pratique sociale, dans laquelle se meut la parole objectivante de la réalité conceptuelle, trouve ses conditions de possibilité dans les modes culturels d'investigation (scientifique, artistique, mathématique ou autre) qui, à leur tour, donnent forme aux relations entre l'objet du savoir et le sujet en quête de connaissance (Radford, 2003a).

En tenant ces propos nous ne visons pas à mettre en cause le rôle du langage dans la constitution du savoir. Il s'agit plutôt de soulever la question de ses limites épistémologiques et de prendre conscience qu'en succombant à la tentation de réifier la parole et le discours, nous risquons de laisser dans l'oubli le fait que l'objet du savoir, les sujets qui s'approprient ou

élaborent ce savoir et les relations mutuelles entre sujet et savoir sont prises dans un réseau plus vaste de significations culturelles historiquement constituées qui les subsume.

Il faudra peut-être, comme suggèrent certains courants de la psychologie culturelle, élargir les concepts mêmes de langage et de discours et les relier au concept plus général de système sémiotique, susceptible de conceptualiser l'artefact, le mot et le symbole comme des éléments clés dans l'organisation des processus mentaux telle que requise lors de l'objectivation des choses *dans* l'activité pratique (Radford, 1998). Il faudra surtout penser la relation entre les processus mentaux et le savoir qu'ils assurent comme étant entremêlée avec les formes d'organisation sociale, les types de productions et les modes de connaissance des individus :

La nature de la connaissance et de l'acquisition cognitive elle-même change historiquement. La façon dont nous connaissons change avec les changements dans nos modes de pratique sociale et technologique et avec nos formes d'organisation sociale. (Wartofsky, 1979, p. xiii)

Bien qu'il existe plusieurs courants en psychologie qui mettent en avant la relation entre pratique sociale et connaissance⁵, on peut dire que, à part quelques exceptions notables⁶, il y a encore peu de travaux qui explorent ce problème d'un point de vue épistémologique et encore moins qui tentent d'y cerner les limites du langage dans la construction du savoir⁷. Une avenue possible pour tenter d'explorer ces limites (celles-ci étant conçues non seulement dans leur négativité mais aussi dans leur positivité) est, il nous semble, celle qui situe le langage au sein de la pratique sociale et de la constitution culturelle du savoir. Même s'il est probablement vrai que tout ce qui est pensable est, comme dit Eagleton (1983, p. 175), restreint par le langage, il faut encore pouvoir répondre à la question suivante : comment se fait-il que ce qui a été rendu possible

par le langage en soit venu à être objet de thématization? Le savoir, comme dit Foucault (1966) n'est pas un savoir désintéressé. Nous ne choisissons pas nos objets du discours au hasard. De plus, une fois le choix effectué, quand nous parlons de quelque chose, nous ne le faisons pas n'importe comment. Ainsi, on parlait de mathématiques dans l'Académie de Platon. Mais on n'y parlait pas de ces genres d'énigmes arithmétiques que les Babyloniens et les Égyptiens résolvaient en utilisant des méthodes de fausse position et même des méthodes que nous qualifierions aujourd'hui d'algébriques. Et quand on parlait de géométrie on ne le faisait pas « à la babylonienne ». On pourrait difficilement dire que c'était parce que Platon n'était pas au courant des pratiques mathématiques de l'Orient. Et, évidemment, ce n'était pas non plus par manque de langage⁸. C'est une question de tri. Et ce tri n'est pas simplement l'effet d'une volonté capricieuse. Il se trouve inséré dans la logique grecque de significations culturelles (Radford, 2003a).

Le but de cet article est d'amorcer une exploration épistémologique sur la relation entre langage, savoir et pratique sociale. L'exploration que nous nous proposons sera centrée sur les mathématiques à la Renaissance. Il s'agira d'y cerner les configurations culturelles que rendent possibles ces mathématiques en leur conférant en même temps leurs limites. Les sections 3, 4 et 5 constituent le cœur de l'article. Dans ces sections nous discutons de la pensée mathématique abaquiste. La section 3 offre quelques éléments de l'épistémologie abaquiste, éléments qui sont repris, dans la section 4, en termes de représentation sémiotique. Nous cherchons à saisir le « mode de raison » que se donne la recherche abaquiste pour le mettre en corrélation ensuite avec la parole et le signe de l'action objectivante et l'objet conceptuel ainsi objectivé. Afin de mieux saisir l'accomplissement de la pensée abaquiste, la section 5 est consacrée à une discussion sur la différence du traitement des proportions entre abaquistes et géomètres grecs. Puisqu'il s'agit de

scruter la pensée et le discours mathématique dans son contexte historico-culturel, la section 2 est centrée sur les configurations culturelles dans lesquelles s'insèrent l'école et le maître d'abaque.

L'école et le maître d'abaque dans le contexte historique

1. La configuration historico-culturelle

Dans un texte de synthèse écrit par l'historien des mathématiques Arrighi (1992), à la fin d'une longue carrière d'édition et d'analyse de textes des mathématiques du Haut Moyen Âge et de la Renaissance, celui-ci exprime ce qui serait une des plus grandes surprises pour quelqu'un qui ouvre pour la première fois un texte abaquiste. Il dit :

En examinant n'importe quel livre abaquiste, on serait surpris de remarquer la façon répandue et la variété avec laquelle les cas d'échanges de marchandises sont traités. C'est la même chose dans la presque totalité des (traités) abaquistes : « deux (personnes) troquent de la laine et du tissu » est la manière que Pier Maria Calandri commence chacun de ses 'ragione' ou problème d'échange. (p. 10)

Pour expliquer la fréquence des problèmes de troc, il continue :

La présence du troc est un indice d'une insuffisance naturelle ou guidé de la monnaie, et les abaquistes devaient compiler ces problèmes répandus afin de faciliter les calculs aux marchands dans ces temps difficiles. (*op. cit.*, p. 10)

Rappelons que la forme fondamentale de la propriété à l'époque féodale était la terre possédée par les seigneurs et les serfs qui la travaillaient. La forme fondamentale de la propriété

pouvait, dans d'autres cas, être constituée du travail de l'individu (par exemple, l'artisan) et son petit capital. Ces formes de propriétés restaient organisées dans les frontières que leur traçaient les conditions précaires de la production agricole et l'apport modeste d'industrie artisanale. Par contre, dans le capitalisme émergeant, la forme fondamentale de propriété devient le travail et l'échange. Dans *L'idéologie allemande*, Marx et Engels (1982) constatent qu'à l'époque féodale l'échange a lieu entre le travail de l'individu et la nature et que le résultat de cet échange ce sont les produits que l'individu obtient de celle-ci. À l'époque du capitalisme émergeant, par contre, l'échange prédominant est un échange entre individus *eux-mêmes*. C'est ce qu'on voit clairement dans un grand nombre de problèmes mathématiques abaquistes dont le problème suivant, tiré du *Trattato d'abaco* de Piero della Francesca (ca. 1416- ca. 1492), édité par Arrighi (1970) :

Deux personnes font du troc, l'un a de la cire, l'autre a de la laine. La cire vaut 9 ducats $\frac{1}{4}$ et (elle) est mise au troc à $10 \frac{2}{3}$; l'autre a de la laine et je ne sais pas combien vaut le mille, au troc elle coûte 34 ducats et le troc a été égal (c'est-à-dire équitable –LR). Combien valait la laine en espèces ? (Arrighi (éd), 1970, p. 51)

L'échange entre individus comme forme fondamentale de la propriété devient possible suite à la séparation entre production et commerce, séparation qui fait de l'activité commerciale une activité entre les individus qui va au-delà des frontières du voisinage du village et du village lui-même et atteint les villes lointaines. Dans ce contexte-là, il est bien évident que les distances qu'il fallait parcourir pour se livrer à des activités commerciales fructueuses représentaient des grands obstacles. Le temps devient de ce fait un facteur de première importance pour le succès de l'entreprise. Si, au départ, la majorité du temps était consacré au travail de la terre d'où l'homme tirait sa subsistance, progressivement le temps va se répartir entre l'agriculture et les

occupations de manufacture, puis, avec la division de plus en plus complexe du travail (producteurs, marchands, entrepreneurs, etc.) le temps va être consacré exclusivement à l'occupation d'une des nouvelles formes de métier qu'amène l'époque post-féodale.

Arrêtons-nous un moment sur les problèmes de troc sur lesquels Arrighi attire notre attention.

Les problèmes de troc relèvent des situations commerciales d'échange de marchandises. Ils mettent en scène deux personnes possédant des produits différents qu'elles décident d'échanger. Bien que le troc ait été pratiqué intensivement dès la naissance des premières civilisations, jamais cette activité n'avait été l'objet d'une étude mathématique systématique comme à la Renaissance. Cela exige un calcul méticuleux de poids et de mesures. Ce calcul a pour but soit de s'assurer un échange favorable, soit d'établir les conditions d'un juste échange visant à éliminer toute duperie. Pour Luca Pacioli, par exemple, l'échange n'est rien d'autre que de donner ses propres biens afin d'en recevoir d'autres avec l'intention d'en finir avec plus (voir Hadden, 1994, p. 90). Pour della Francesca, par contre, le calcul mathématique établit les conditions pour que ni l'une ni l'autre des personnes ne soient trompées lors de l'échange (c'est le 'troc égal' : voir le problème cité ci-dessus).

Mais, malgré sa simplicité apparente, le troc mobilise toute une série d'abstractions importantes. En effet, pour qu'on puisse concevoir le troc comme une activité à l'intérieur de laquelle on doit être en mesure de savoir combien donner d'un produit pour recevoir une certaine quantité d'un autre produit selon des procédures numériques précises, il faut imaginer les

marchandises en termes de leur *valeur d'usage*, c'est-à-dire de la valeur provenant de l'utilité que la marchandise représente dans la vie des individus⁹.

Le troc exige donc une mise en correspondance de deux valeurs d'usage. Mais il ne s'y réduit pas. En effet, que veut dire exactement cette correspondance? Que veut dire le fait que x quantité de cire est égale à y quantité de laine? Qu'est-ce que cette égalité est en train d'établir? Ce qu'elle établit c'est la *valeur d'échange* des marchandises. Comme disait Ricardo (1817/2001, p. 8) « l'utilité n'est pas la mesure de la valeur d'échange, bien qu'elle soit absolument essentielle à la valeur ». On doit lire l'égalité précédente à plusieurs niveaux.

Dans un premier temps, on a l'aspect *qualitatif*: c'est la relation qualitative entre deux objets de nature différente, la cire d'une part, la laine de l'autre. Après tout, comme le signalait déjà Marx dans le Livre 1 du *Capital*, l'habit ne s'échange pas contre l'habit. En d'autres mots, une égalité présuppose une différence qualitative.

Dans un deuxième temps, on a l'aspect *quantitatif*: quelle quantité de cire équivaut à 2 tissus de laine? L'égalité compare donc deux valeurs d'échange. Mais ce qui rend l'égalité possible ce n'est ni la laine en tant que telle ni la cire. C'est autre chose. C'est un nouvel objet mathématique : la *valeur*. Cela rend possible d'échanger la cire non pas seulement contre de la laine mais aussi contre d'autres produits.

L'activité du troc amène donc un emboîtement d'abstractions importantes : valeur d'usage, valeur d'échange et valeur. Ces abstractions ne sont pas l'objet d'une thématization explicite, ouverte chez les abaquistes. Elles s'insèrent plutôt à l'intérieur d'un savoir pratique structuré

selon la configuration des institutions culturelles de la Renaissance. Dans le prochain paragraphe nous verrons la structure formelle que les villes italiennes se sont donnée pour assurer la circulation de ce savoir.

2. L'école d'abaque comme institution sociale de production et de circulation du savoir

Comment échanger? Comment tenir des comptes précis? Dans une étude portant sur des documents provenant de marchands et d'hommes d'affaires de la Renaissance, Bec (1967) dit :

un des soucis des marchands est de faire des comptes justes et précis. Grâce aux chiffres, les mercatores mesurent l'univers et le ramènent à l'échelle humaine. Dans leurs livres de raison, ils précisent soigneusement le poids, la longueur, le volume, la surface et le prix des marchandises ou des biens qu'ils vendent et achètent. (Bec, 1967, p. 316)

Le calcul méticuleux de poids et de mesures sous-tendant la valeur des marchandises, la façon de tenir compte des transactions dans les livres comptables, etc. requièrent la mise en place et la circulation d'un nouveau savoir. C'est ce qui a été précisément à la base de la création des écoles d'abaque qui ont commencé à être mises sur pied au 13^e siècle, la première à Bologne en 1265 (Grendler, 1989, p. 5). Les conseils des cités italiennes avaient vite reconnu l'importance d'une éducation convenable dans la gestion du commerce et ont commencé à engager des maîtres (appelés des maîtres d'abaque) pour l'instruction des enfants. Un document mentionne la création, en 1284, à Verona, d'une école d'abaque où Maître Lotto de Florence avait été appelé à enseigner (Franci et Toti Rigatelli 1989, p. 68). Mais à côté de ces écoles communales, dont le curriculum et le choix des maîtres revenaient aux conseillers de la ville, il y avait aussi des

écoles indépendantes, c'est-à-dire des écoles dirigées par des maîtres sans filiation avec le conseil de la commune. Souvent il s'agissait d'une institution de formation commerciale appelée *bottega d'abaco*. Mais il y avait également des écoles indépendantes pour étudier le latin (des écoles dirigées par les *maestri di grammatica*).

L'importance des écoles indépendantes apparaît clairement dans un recensement effectué à Venise montrant qu'en 1587-88, les écoles indépendantes regroupaient environ 89% des élèves de cette ville (Grendler, 1989, p. 43). Dans le cas des écoles indépendantes, le maître mettait sur pied l'école à ses propres frais et obtenait sa rémunération avec ce que les enfants payaient pour l'enseignement reçu. Une autre variante consistait à dispenser une instruction de type tutorial selon laquelle le maître se faisait payer pour instruire un ou plusieurs enfants d'une personne pendant un certain nombre d'années à la fin desquelles les enfants devaient être capables de savoir rédiger les documents légaux commerciaux, savoir tenir les livres d'affaire et faire les comptes mathématiques exigés dans le commerce de la famille. Dans d'autres cas, enfin, plusieurs parents se mettaient d'accord et payaient un même maître pour instruire leurs enfants. C'est en effet comme tuteur des enfants du marchand Antonio de Rompiasi que Luca Pacioli a commencé sa carrière.

Il va de soi que les types d'instruction varient suivant les types d'école –types auxquels il faudra encore ajouter les écoles dirigées par l'église. Les conseillers des communes cherchaient les meilleurs moyens pour attirer les maîtres les plus prestigieux (les cherchant parfois dans les villes avoisinantes). Cela a induit une stratification à l'intérieur de la pratique mathématique destinée à la formation des marchands et de leurs fils. Dans l'introduction de son œuvre *Summa*

de arithmetica geometria proportioni et proportionalità, imprimée en 1494 et réimprimée de façon posthume en 1523, Pacioli précisait :

Plusieurs marchands ont de vieilles habitudes pour trouver (le chemin) qu'ils croient être le meilleur et le plus court, et qu'ils ont appris d'un vulgaire et ignorant numérateur (*numberer*) à l'intersection des rues, au lieu d'apprendre dans les carrés publiques de ceux qui ont été choisis par la commune, laquelle essaye d'avoir les hommes les mieux entraînés. (Pacioli, 1523; cité dans Taylor, 1980, p. 63).

3. Le maître d'abaque

Bien sûr, quand Pacioli tient ces propos, il n'est plus un tuteur abaquiste. Il s'agit déjà d'un mathématicien renommé qui, en 1475, a été appelé à Perugia comme lecteur public des mathématiques et qui en 1494 (ou 1493 : voir Bernini, 1982) a été désigné professeur de mathématiques à la cour d'Urbino¹⁰. Les maîtres d'abaque, ainsi que les maîtres de latin, menaient, en effet, une vie caractéristique de la classe moyenne urbaine de la Renaissance (van Egmond, 1976). Habituellement, ils jouissaient d'un prestige similaire à celui des artisans (Franci, 1988, p. 183). Ils habitaient des maisons modestes et pouvaient parfois posséder une maison à la campagne ainsi qu'un serviteur.

À la différence de la plupart des professions artisanales (par exemple peintres et sculpteurs), qui, elles, avaient une association chargée d'accréditer et de contrôler l'exercice de la profession, les maîtres d'abaque n'avaient pas d'association professionnelle de contrôle de ses membres. Alors que les autres artisans devaient se soumettre à des épreuves garantissant la maîtrise de la profession, les maîtres d'abaque devaient bâtir leur réputation à travers la pratique

elle-même. Selon le nombre d'élèves, un maître pouvait faire appel à d'autres maîtres d'abaque pour dispenser l'enseignement nécessaire¹¹. Dans ce cas, comme dans le cas de la commune, le choix des maîtres se faisait soigneusement, de sorte à assurer la qualité de l'école et son prestige. Dans ce contexte, la rivalité entre écoles n'était pas exclue. Franci (1988, pp. 188-89) raconte le cas d'une école à Florence (la Bottega d'abaco di Santa Trinità) qui, suite au décès de son directeur, a été l'objet d'un complot par une autre école de la ville qui voulait la forcer à fermer. En 1346 un maître d'abaque a été mis en prison pour trois mois suite à un incident avec un autre maître après une dispute sur le droit à une clientèle d'élèves.

C'est à l'intérieur de ce contexte historique –contexte fortement compétitif dans lequel les maîtres d'abaque Scipione dal Ferro, Cardan et Tartaglia ont participé à la recherche d'une formule donnant la solution de l'équation du 3^e degré et ont accompli, par là, ce que Franci (1988, p. 188) appelle la première grande invention mathématique de l'époque moderne– que se constitue l'abaquiste comme sujet social et sa forme de pensée. Il va falloir maintenant situer de plus près cette pensée abaquiste et son « mode de raison ». C'est ce qui va être l'objet de la section suivante.

Le mode de raison chez les abaquistes

La recherche abaquiste se déploie, comme l'a remarqué Rojano (1996), selon l'axe de *formulation* de problèmes. Cet axe est, pour ainsi dire, « coupé » par un autre axe, qui est celui de la ou des *méthodes* qui résolvent le problème formulé. Bien que dans maints problèmes il s'agit d'appliquer une méthode connue à une situation donnée, dans d'autres cas, il s'agit d'élargir les méthodes mathématiques à travers des formulations de plus en plus complexes.

Ainsi, les problèmes de troc comme celui que nous avons mentionné dans la section 2.1 (et dont la solution sera analysée plus loin) sont suivis par d'autres problèmes où l'une des personnes participe au troc avec une partie en espèce et une autre partie avec sa marchandise. Dans des problèmes de compagnie, après avoir discuté de la distribution des profits en fonction du montant investi par chacun des investisseurs, les problèmes se compliquent si l'une des personnes ajoute, en plus d'un montant en espèce, un certain temps de travail. Dans d'autres cas, un certain montant d'argent est placé pendant une période de temps, ensuite une partie de l'argent est retirée, etc. (voir, par exemple, Swetz, 1989, p. 138 ff.). Les axes de formulation et de méthodologie de résolution ne s'organisent pas, toutefois, selon une structure plus ample. Les textes écrits par les maîtres d'abaque apparaissent, en effet, comme des collections de problèmes dont l'une des caractéristiques les plus intéressantes est de ne pas chercher à se donner une consolidation théorique assise sur des principes généraux. Cette caractéristique n'est pas spécifique aux textes abaquistes. Elle fait partie d'un mode de pensée où raison et exemple vont de pair. Les traités de perspective sont rédigés selon ce même format : il vont d'un problème au suivant, en essayant de montrer, *par l'exemple*, une gamme de méthodes diverses (voir Elkins, 1994, p. 123).

Or que signifie raisonner? Quelle relation le raisonnement entretient-il avec l'exemple? La pédagogie abaquiste jette un éclairage sur ces questions. Effectivement, cette pédagogie s'est élaborée à partir d'un principe qui porte sur une conception de la connaissance et un autre principe qui porte sur la façon dont celle-ci doit être acquise. Ces deux principes, l'un d'ordre épistémologique, l'autre d'ordre méthodologique, reviennent souvent dans une expression qu'on trouve à l'époque sous la forme d'enseignement par « le raisonnement et l'exemple » (Bec, 1967, p. 290). Cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de définitions cherchant une certaine organisation

conceptuelle dans la pratique mathématique abaquiste. Cela signifie que les définitions se trouvent vite prises dans un réseau d'exemples. Ainsi, dans les textes les plus élaborés, on trouve des définitions de quelques expressions mathématiques. Piero della Francesca commence son *Trattato d'abaco* en montrant, par l'exemple, comment effectuer des calculs avec des fractions. Il y explique des expressions telles que *schisare i rocti*, c'est-à-dire simplifier les fractions et *ridurre a una natura*, c'est-à-dire réduire au même dénominateur. Après qu'un problème est formulé, il commence souvent par : *Fa' così* (fais comme ça) ou *Volse fare così* (on fait comme ça). Si un texte abaquiste inclut des problèmes dont la solution repose sur des méthodes algébriques, alors ces problèmes apparaissent en général organisés selon le « cas » auquel appartient le problème, c'est-à-dire, comme nous dirions aujourd'hui, selon le type d'équation¹².

On voit donc que pour l'abaquiste raisonner ce n'est pas aller syllogistiquement de proposition en proposition en partant de vérités bien assurées. La raison n'apparaît pas à travers un cheminement qui descend des premiers principes, comme chez les géomètres grecs. Au contraire, un problème étant donné, la raison se révèle dans l'exemple de sa résolution. La maîtrise de la raison est liée à la possibilité de poser de problèmes et de reconnaître les méthodes appropriées pour les résoudre. La raison rend intelligible le monde, non pas à travers des prémisses abstraites mais à travers les problèmes qui émergent au cours des interactions des individus dans un monde toujours en changement. La raison indique quoi faire *maintenant* (comme dans les problèmes de troc) ou comment doit-on répartir les profits d'une inversion entre les personnes qui se mettent en compagnie (chacune ayant apporté un capital différent dans le *passé*) ou encore comment déterminer les paiements *futurs* d'un prêt à intérêt. Indépendamment donc de la modalité de l'action (c'est-à-dire indépendamment que l'action vise des événements du passé, du présent ou du futur), le mode de raison abaquiste rend l'univers intelligible en

rendant les actions des individus analysables en termes de procédures mathématiques. C'est pour quoi le problème abaquiste, en tant que réflexion de la vie de tous les jours, se raisonne dans le contexte d'une vision du monde qui se plie aux nombres. En effet, le problème abaquiste apparaît souvent désigné par le terme *ragione* dont le sens le plus général à l'époque est celui de

raison comme capacité d'évoquer le passé (*narratio rerum gestarum*), de pénétrer le présent (*ragionare*⁴⁷⁹) et, partant, de prévoir les événements futurs (*tener ragionamento*⁴⁸⁰). Cette ratio sous-entend un ordre *ragionevole* de l'univers, qui n'exclut pas cependant la part des hasards. Elle s'efforce de distinguer l'être du paraître, de connaître la nature des choses afin de les dominer et de les exploiter malgré *venture* et *fortune*. Propre aux hommes *ragionevoli e intendenti*⁴⁸¹, elle prétend, à son niveau le plus élevé, percer la *ragione delle cose*, selon les ambitions (du marchand) Morelli⁴⁸². (Bec, 1967, pp. 324-325)

On voit alors que dans le « mode de raison » qui sous-tend les problèmes mathématiques abaquistes, il s'agit de *montrer* comment les relations numériques contenues dans l'énoncé doivent s'organiser selon la méthode qui les gouverne et qui dévoile le résultat. Le mode de raison abaquiste n'est pas donné comme forme de théorisation sur les problèmes ou sur les « cas » ou équations auxquelles ils « appartiennent », mais comme manière d'envisager la résolution de problèmes de divers ordres. C'est dans la *ressemblance* des situations que décrivent ces problèmes qu'on apprendra à les résoudre. L'épistémè abaquiste apparaît de la sorte circonscrite par cette façon de penser le monde en termes de ressemblance et d'affinité dont Foucault discute en profondeur dans *Les mots et les choses* (Foucault, 1966).

Qu'en est-il de la *généralité* chez les abaquistes ? La généralité mathématique abaquiste ne peut être comprise qu'à l'intérieur des frontières que trace ce mode de raison, à l'œuvre dans la

multitude de problèmes particuliers. Il ne s'agit pas d'une généralité qui organise le monde à la verticale. La généralité abaquiste se donne par spécification des cas se conformant à une règle. Il s'agit d'une généralisation qui se déploie à l'horizontale, grâce au franchissement de difficultés techniques à chaque fois plus grandes sur l'axe des méthodes. Le général et le particulier se lient dans des nœuds formés à ces endroits où se croisent les divers axes de formulation de problèmes et de méthodes de solution selon l'espace qu'ouvre cette raison, qui est une raison des usages. C'est l'évidence pratique de l'adéquation du particulier à sa règle générale qui vient tenir lieu de nécessité fondatrice. On est encore loin d'imaginer le monde galiléen qui se lit *dans* et *à travers* le langage des mathématiques. Probablement le langage mathématique doit se spécifier davantage et les activités humaines de production doivent s'automatiser encore plus pour pouvoir imaginer l'univers mécaniciste du 17^e siècle. Quoi qu'il en soit, l'abaquiste parvient à développer une vision du monde dont le destin humain devient modifiable (ne serait-ce qu'en des proportions relatives) par l'action de l'homme et s'oppose ainsi à l'attitude médiévale de contemplation d'un monde transitoire gouverné par un ordre supranaturel.

La sémiotique abaquiste

Qu'est-ce qu'on peut dire des signes, des objets et de leur relation dans les mathématiques des abaquistes ? Dans les sections précédentes nous avons vu que le passage du troc ponctuel fait à partir d'une négociation « sur le champ » au troc rationnellement calculé exige de se mettre d'accord sur la valeur d'usage des marchandises en question et l'élaboration d'une abstraction du concept du nombre lui-même. Il est clair que l'idéalité des nombres à la Renaissance (et cela est vrai des autres objets mathématiques) exprime une réflexion intellectuelle du monde selon la forme des activités que les individus poursuivent. Toutefois, même si les objets mathématiques

abaquistes apparaissent avant tout comme réflexion sur la vie de tous les jours, la variation continue dans la formulation de problèmes débouche sur des situations qui dépassent souvent le cadre strict de la réalité concrète. Il y a, en effet, une recherche de problèmes dans la direction de l'axe de la *formulation*, comportant de nouvelles difficultés (placées sur l'axe des *techniques*) menant à des situations qui, malgré le contexte apparemment réel, sont difficiles voire impossibles à trouver sur le petit marché du troc ou de la compagnie commerciale (voir Figure 1).



Figure 1. Illustration accompagnant un problème du *Trattato d'aritmetica* de Paolo dell'Abbaco (14^e siècle). Deux travailleurs (à gauche) mangent à côté d'une fontaine. L'un des travailleurs a 5 pains, l'autre en a 4. Un marchand (à droite) se joint à eux. Après avoir mangé trois pains chacun, le marchand part et laisse 5 soldi aux travailleurs. « Je demande », dit Paolo dell'Abbaco, « combien (d'argent) revient à chacun ? » (Arrighi (éd.), 1964a, p. 82). Ce problème est une variante des problèmes de compagnie.

Il y a, dans la variation continue des problèmes, un plaisir esthétique –assez évident dans la situation décrite dans la figure 1– qui fait que la réflexion que font les individus de leur monde aille au-delà des situations concrètes. Même si cette dimension esthétique est importante pour comprendre la pensée comme *praxis cognitive réflexive* et pour comprendre ce que signifie une réflexion intellectuelle du monde, je ne vais la discuter en détail ici (voir Furinghetti et Radford, 2002). Je vais plutôt me contenter de souligner que, comme résultat de cette praxis réflexive, le

nombre, pour l'abaquiste, n'est plus pensé comme étant constitué de monades. Le nombre devient divisible. Ainsi, les ducati utilisées pour résoudre le problème de la figure 1 sont des fractions des soldi. Une rupture se produit dans le mode de penser grec, que les humanistes de la Renaissance ne se rassasient pas de redécouvrir et d'interpréter grâce à une chasse sans précédent de manuscrits arrivant de l'autre bord de la Méditerranée¹³. À partir de cette fissure l'espace s'ouvre pour que les fractions entrent dans l'univers mathématique. Bien que les mathématiciens de la Renaissance aient toujours avoir en grande estime les géomètres grecs, et que parfois ils donnent même donner une définition du nombre « à la grecque »¹⁴, dans la pratique ils vont considérer les fractions comme de véritables objets mathématiques¹⁵. On peut dire que, dans la pratique abaquiste, au lieu de faire référence à des objets pré-existants (à des *eidos*), les objets mathématiques deviennent matériellement produits par l'activité des individus. Alors que l'objet du signe de la sémiotique grecque appartient au monde des *eidos*, c'est-à-dire à un monde d'objets pensés sans aucune origine sensuelle, pour l'abaquiste, au contraire, l'objet qu'il désigne avec les mots de la langue naturelle ou avec les signes de l'arithmétique indou-arabique est pris dans le monde concret, sensible et ce, même dans les problèmes non-appliqués, c'est-à-dire dans les problèmes sans relation par exemple à un contenu commercial ou d'échange. L'objet mathématique abaquiste est certainement un objet conceptuel mondain.

Afin de discuter de la relation de signification entre objet et signe chez les abaquistes, revenons sur le problème de troc contenu dans le *Trattato d'abaco* de Piero della Francesca mentionné précédemment et regardons de près sa résolution. On se rappelle que dans ce problème, il s'agissait d'un troc où une personne apportait de la cire d'une valeur comptant de 9 ducats $\frac{1}{4}$ et une valeur de troc de $10 \frac{2}{3}$. L'autre personne apportait de la laine dont le prix de

troc était 34 ducats. La question était celle de connaître sa valeur au comptant, dans des conditions de troc équitable. Pour résoudre ce problème, della Francesca dit :

Dis comme ça. La centaine de cire vaut $9 \frac{1}{4}$ et elle est mise à $10 \frac{2}{3}$. donc : $10 \frac{2}{3}$ donne $9 \frac{1}{4}$, combien donnera 34 ? . Multiplie 34 par $9 \frac{1}{4}$ cela fait 3774 douzièmes, fais des douzièmes de $10 \frac{2}{3}$ et c'est 128, divise 3774 par 128 et il vient $30 \frac{47}{64}$; cela valait le mille de la laine en espèces : $30 \frac{47}{64}$ ducats. J'ai fait des douzièmes parce qu'il y a des tiers et des quarts. (Arrighi (éd), 1970, p. 51)

Le signe (par exemple, le mot objectivant du langage écrit et le symbole arithmétique) apparaît comme transcription d'une production orale. Il porte sur des actions que quelqu'un doit effectuer sur certains objets mathématiques. Ceci est souligné par des expressions comme « multiplie », « fais », etc. Jusqu'ici il n'y aurait rien d'extraordinaire : si on se rapporte, par exemple, aux textes des mathématiques babyloniennes on y trouve également des instructions portant sur les actions spécifiques que quelqu'un doit entreprendre sur certains objets. La différence est que le calcul babylonien prend son sens sur des représentations de figures (par exemple, des rectangles, des carrés) qu'on coupe et déplace. Comme Høyrup (1990) l'a mis en évidence, il y a, à l'origine, un référent *visuel* (même si celui-ci n'accompagne pas le texte écrit). L'objet se donne donc à la pensée sous la forme d'une représentation iconique. Cette façon de se donner à la pensée par ce que Kant (1781, 1787, 1996) appelait l'intuition accorde à l'objet ce que Husserl (1901/1961) appelait son « sens remplissant » et qui sert à établir un lien de signification profond entre l'objet visé et sa représentation. Dans son iconicité, l'acte donateur de sens autorise certains traitements (au sens de Duval, 1993) sur les représentations. Dans ce cas-ci, ces représentations placent au premier plan de l'activité psychique certaines facettes visuelles de l'objet qui font que le référent n'est pas perdu. Dans une foule de problèmes abaquistes

similaires à celui que nous analysons, le référent, par contre, doit être volontairement supprimé. La multiplication de 34 et $9 \frac{1}{4}$, par exemple, n'a pas de sens concret. Pour pouvoir effectuer cette opération mathématique, il faut consentir à perdre le référent. Que peuvent donner, en effet, 34 ducats fois $9 \frac{1}{4}$ ducats?

Le deuxième point important à souligner est l'autonomie que prennent les objets mathématiques. Ceux-ci sont traités comme des entités qui produisent des choses : « $10 \frac{2}{3}$ dà $9 \frac{1}{4}$, che darà 34? ». Le verbe *donner* est central ici. Un nombre *donne* un certain nombre. Alors, le troisième nombre, combien *donnera-t-il* ?

D'où vient cette force créatrice des nombres ? Les anthropologues ont souligné plus d'une fois le fait que dans certaines cultures dites « animistes » on considère que les objets possèdent une sorte de vie. Il serait sans doute exagéré de dire que ceci est le cas des nombres chez les abaquistes. Il est plus juste de voir cet élan apparemment propre des nombres dans le contexte du capitalisme émergent et la division du travail qu'il implique, où l'argent *fait* de l'argent. En effet, dans les structures conceptuelles qui accompagnent la division du travail, le sujet se voit éloigné du produit que vise l'activité humaine. Une chaîne plus ou moins longue d'efforts humains socialement organisés vient s'interposer entre les sujets et les objets. La relation sujet/objet devient ainsi fortement médiatisée par une organisation sociale, qui, dans le cas que nous étudions, fait apparaître la valeur représentée par les signes numériques ($10 \frac{2}{3}$, $9 \frac{1}{4}$ ducats, etc.) comme entité qui se reproduit par elle-même¹⁶.

Pour mieux saisir le phénomène sémiotique abaquiste que je souligne ici on peut l'apposer à la conceptualisation de la multiplication dans d'autres cultures. Le cas des mathématiques

babyloniennes est très éclairant. Une des conceptualisations de la multiplication $x \cdot y$ est rendue par l'expression standard « x a-rá y » où l'expression « rá » correspond au verbe « aller ». Høyrup remarque que dans plusieurs textes séleucides le sens est mis en relation avec le nombre de pas x de longueur y . Ainsi « x a-rá y » correspond à « x pas de y ». Dans une deuxième conceptualisation, la multiplication apparaît comme une duplication ou une répétition. Dans une troisième conceptualisation, l'idée derrière la multiplication (par exemple multiplication par une constante ou par le réciproque d'un nombre) est d'élever ou de soulever. « La connexion entre 'élever' et multiplication n'est pas évidente pour la pensée moderne ... Une piste dérive de la façon dans laquelle les volumes sont calculés. Si la base est quadratique, rectangulaire ou circulaire, [lors du calcul du volume] elle est normalement [vue comme] allongée par la longueur et la largeur » (Høyrup, 1990, p. 47).

Du point de vue sémiotique, les considérations précédentes nous amènent à suggérer que la relation qu'entretient l'objet et le signe prend sa source non pas simplement dans la parole objectivante. Certes, dans le discours social où elle vient se loger, la parole dépasse pour ainsi dire la réalité empirique et finit par donner d'une certaine autonomie aux opérations entre nombres, créant par là une *autre* réalité. Mais cet effet créateur de la parole objectivante et du signe mathématique est en fait une conséquence de l'abstraction qui résulte du système de l'activité humaine (système qui comprend, entre autres, l'esthétique de la représentation sémiotique et la logique contextuelle du sens).

En parlant des objets en général, Leontiev (1984) dit :

Les objets en soi ne sont capables d'acquérir la qualité de force motivante, de but, d'outil que dans le système de l'activité humaine; hors des liaisons de ce système, ces qualités disparaissent. (p. 121)

Alors que la multiplication chez les Babyloniens s'enveloppe dans des métaphores issues des actions concrètes, sensuelles, comme celle de marcher ou, dans le cas du calcul des volumes, de creuser ou encore de déplacer du sable, la multiplication chez les abaquistes est liée à une conceptualisation des nombres en relation avec la pratique profondément médiatisée du capitalisme émergent.

On peut essayer d'énoncer les remarques précédentes en termes plus généraux comme suit. La conceptualisation de l'objet du signe et son mode de dénotation apparaissent liés à la pratique sociale. Les « actes donateurs de sens » –pour reprendre l'expression de Husserl (1901/1961) – sont à localiser à l'intérieur des catégories culturelles que les individus forment dans leur activité. Dans le cas des abaquistes, l'objet du signe et son mode de désignation sont en relation directe avec le concept de valeur qui naît des nouvelles relations induites par la division du travail et par le rôle central que prend l'échange et la production. Une conséquence importante des changements conceptuels (c'est-à-dire au niveau de l'*objet* du signe) et sémiotiques (c'est-à-dire au niveau du mode de *désignation*) apportés par les abaquistes est le traitement mathématique des quantités non homogènes. Dans la section qui suit nous verrons que ceci a été rendu possible précisément par l'homogénéisation du monde qu'apporte le concept de valeur.

La perte de l'homogénéité

Tout lecteur d'Euclide n'a pas manqué de remarquer la définition complexe que celui-ci donne des magnitudes proportionnelles. Euclide exige, entre autres, que les rapports soient du même type. Ainsi, on s'interdit de mettre en rapport des objets de qualité différente. Depuis Aristote, l'épistémè grecque ordonne le monde selon un système de catégories qui compartimente le monde. Les abaquistes ne vont pas respecter ce principe, même s'ils se déclarent des continuateurs fidèles des anciens. Hadden (1994) remarque que

Niccolo Tartaglia (...) formule un problème de statique dans lequel il est nécessaire de calculer le poids d'un corps suspendu du bout d'une poutre, pour garder la poutre en position horizontale. La solution de Tartaglia comprend la multiplication et la division de pieds et de livres dans la même expression. Des propositions euclidiennes sont utilisées dans la technique de solution, mais des principes euclidiens sont également violés (p. 64)

Qu'est-ce qui rend possible le fait que des distances et des poids puissent se multiplier entre eux? Pour expliquer ce bouleversement, Hadden (1994) souligne qu'à la Renaissance il n'y a plus de raison pour garder la séparation entre objets de nature différente, et que derrière ce changement conceptuel se trouve l'idée d'« égalisation » entre objets qu'apporte la monnaie. Pour expliquer ceci, il met en évidence le fait que la conception de la monnaie à la Renaissance est différente de la conception de la monnaie à l'âge de la Grèce classique. En s'appuyant sur les réflexions d'Aristote dans l'*Éthique à Nicomaque*, il montre bien que, quand Aristote discute des problèmes de justice corrective provenant de certaines formes d'échange privé (par exemple, en transactions d'achat et de vente) où il peut arriver qu'un juge doive décider de la pénalité

accordée à une personne s'étant comportée indûment dans une transaction, le point « juste » est conçu à l'aide d'un raisonnement qui se modèle selon l'exemple du calcul des proportions, comme un point intermédiaire entre les gains et les pertes¹⁷. Ce traitement de la justice se distingue de la justice distributive, discutée par Aristote dans le livre V, 6, de l'*Éthique à Nicomaque*, où, comme dit Aristote, il faut tenir compte de « la valeur propre des personnes » (e.g. le rang) dans la recherche du point juste. Hadden ajoute :

Le travail est vu ici comme social mais non pas comme égal en termes de la détermination de la valeur; en fait, le travail *per se* n'apparaît pas comme un concept dans l'*Étique de Nicomaque* d'Aristote; le terme important dans l'équation est le rang du producteur en relation aux autres producteurs. (Hadden, *op. cit.*, p. 78)

La monnaie apparaît alors comme une mesure qui rend les biens commensurables. Mais sa nature demeure celle d'une pure convention humaine :

La monnaie, dès lors, jouant le rôle de mesure, rend les choses commensurables entre elles et les amène ainsi à l'égalité : car il ne saurait y avoir ni communauté d'intérêt sans échanges, ni échange sans égalité, ni enfin égalité sans commensurabilité. Si donc, en toute rigueur, il n'est pas possible de rendre les choses par trop différentes commensurables entre elles, du moins, pour nos besoins courants, peut-on y parvenir d'une façon suffisante. Il doit donc y avoir quelque unité de mesure, fixée par convention, et qu'on appelle pour cette raison *νομισμα*, car c'est cet étalon qui rend toutes choses commensurables, puisque tout se mesure en monnaie. (Aristote, *Éthique à Nicomaque*, 1133^b, 15-20, tr. Tricot, 1959)

C'est justement ce caractère de convention qu'Aristote accorde à la monnaie qui rend impossible un calcul des proportions dans les problèmes de la nature. Dans son traité *Physique*, la comparaison des quantités d'ordre catégoriel différent est interdite. La nature se voit cloisonnée dans des catégories conceptuelles de genre et d'espèce.

En opposant la conceptualisation de la monnaie dans la Grèce classique avec sa conceptualisation à la Renaissance, Hadden souligne que, dans le deuxième cas, la monnaie apparaît comme faisant partie de la nature des choses. Il fait référence à l'œuvre *De Moneta*, du prélat Nicole Oresme, où celui-ci affirme avec vigueur que plutôt qu'une valeur nominale, la monnaie a une valeur *réelle*¹⁸. Il en résulte que les objets deviennent maintenant comparables, même s'ils sont en *apparence* différents. Poids et distances, par exemple, deviennent multipliables. À l'intérieur de l'abstraction ainsi rendue possible, le temps du travail des individus devient marchandise et sa valeur peut s'additionner à d'autres valeurs.

Il y a un beau problème dans le *Trattato d'abaco* de Piero della Francesca qui dit ceci :

Un gentilhomme engage un servent à salaire, qu'il va payer 25 ducati plus un cheval (en échange d'un an de travail). Après deux mois, le servent dit qu'il ne veut plus rester avec lui et il veut être payé pour le temps qu'il lui a servi. Le gentilhomme lui donne le cheval et lui dit : donne-moi 4 ducati et tu seras payé. Je demande combien le cheval valait-il. (Arrighi (éd.), 1970, p. 107)

Nous voyons très clairement comment le temps de travail peut devenir une valeur marchande. Il s'y ajoute, s'échange et devient aussi concret que n'importe quel objet du monde¹⁹.

Comme dans le cas d'Aristote, la monnaie vient mesurer les objets qui peuplent l'univers des individus. Sauf qu'à la Renaissance, ce n'est plus comme convention : la monnaie, comme signifiant sémiotique du concept de valeur, est de l'ordre des choses de la nature et des produits des individus. Par là, il est possible de concevoir que la nature est, en un sens, homogène²⁰.

Mais qu'est-ce qui rend possible cette transformation? Quelles sont les conditions de possibilité qui font que la nature devient pensable comme entité homogène?

Après avoir longuement discuté du rôle que joue la monnaie dans la mesure de la valeur des marchandises à la Renaissance, Hadden (1994., p. 65) suggère que la transformation à la base de l'homogénéisation du monde –homogénéisation qui rend possible le calcul des proportions sans tenir compte de la nature des objets considérés– trouve son origine dans les nouvelles structures de relations sociales que se donnent les individus. Plus spécifiquement, ce seraient les relations de production de marchandises, leur échange ainsi que les nouvelles pratiques de contrôle des transactions qui permettrait de comprendre les changements épistémologiques profonds à la base de la transformation dans la manière de penser le monde. Cependant, il faudra entendre ces conditions non pas comme des conditions « ultimes » ou comme des conditions de nature logico-causale car, loin d'être au-delà de l'historicité, ces conditions se construisent elles-mêmes dans leur propre moment historique, dans un mouvement dialectique dans lequel la logique de la production et des conditions matérielles se fusionne avec la logique de la signification culturelle, c'est-à-dire avec la logique culturelle du sens²¹.

Synthèse et remarques finales

Cet article s'est donné comme tâche d'amorcer une exploration épistémologique de la relation entre langage, savoir et pratique sociale. Cette exploration était motivée, en partie, par une des propositions fondamentales de certains courants issus du « paradigme du langage », proposition selon laquelle c'est l'activité discursive qui, dans sa production de symboles, crée les objets mathématiques. La question était de savoir s'il est possible d'imputer à l'activité discursive une telle force créatrice. Nous avons présenté, dans la première section, certaines objections à cette position théorique²². Même dans sa forme plus nuancée, qui ajoute un mouvement d'aller-retour entre les objets ainsi créés et les symboles produits par le discours, la proposition semble nécessiter la prise en compte d'autres éléments qui se trouvent *au-delà* du discours lui-même. Nous sommes partis de la remarque de Leontiev qui nous rappelle que derrière la parole se trouve la pratique sociale.

Le point d'ancrage de notre objection gravite autour de la remarque que la réflexion que font les individus de leur monde –réflexion qui est à la base de la production du savoir– n'est pas objectivée seulement à travers les mots et les symboles. Cette réflexion entre dans le système de la connaissance sociale par d'autres portes que celles de l'expression verbale et de l'écriture. Comme Ilyenkov le constate, elle est aussi objectivée par d'autres moyens, tels que les formes sculpturales, graphiques et plastiques et dans la manière routinière historiquement constituée d'actions avec les choses et d'interaction avec les autres, de sorte que cette réflexion « n'est pas seulement exprimée à travers la parole ou le langage, mais aussi en dessins, modèles et d'autres objets symboliques » (Ilyenkov, 1977, p. 79).

Cette remarque ne veut pas dire que le langage ne possède pas de force créatrice. Notre remarque signifie en fait deux choses. *Primo*, que le langage est *un* moyen d'objectivation (certes, très important), mais qu'il y en a d'autres²³. *Secundo*, qu'en tant que moyen d'objectivation, le langage n'objective pas n'importe comment. Le langage, à l'instar de tout système sémiotique, fonctionne à l'intérieur d'un réseau culturel de significations où prennent sens sa grammaire, sa syntaxe ainsi que les modes de raisonnement scientifique, artistique et autres²⁴.

Pour élaborer nos propos, il fallait étudier le mouvement objectivant du langage dans son contexte historico-culturel. Compte tenu de nos objectifs épistémologiques, il fallait cerner le champ de possibilités du langage en l'articulant à la pratique sociale. Peut-être que le recours à l'histoire n'est pas indispensable pour ce genre d'entreprise. Il y a probablement d'autres moyens pour comprendre le langage dans son opération d'origine. En tout cas, Merleau-Ponty offre une piste intéressante. Il dit : « si nous voulons comprendre le langage dans son opération d'origine il nous faut feindre de n'avoir jamais parlé, (... il nous faut) comparer l'art du langage aux autres arts de l'expression, tenter de le voir comme l'un de ces arts muets. » (Merleau-Ponty, 1960 pp. 58-59). Par le dépaysement qu'elle apporte, l'histoire nous fournit l'occasion d'une telle comparaison. Nous avons choisi le cas des mathématiques à la Renaissance. Afin de saisir le rôle du langage dans la pensée abaque, nous avons commencé par discuter des relations sociales et des relations de production de l'époque²⁵. Dans ce contexte, nous nous sommes efforcés de mettre en relief certains traits caractéristiques du « mode de raison » abaque et de l'espace sémiotique correspondant. La recherche de l'objet conceptuel que la parole et le discours abaque thématisent a été menée en corrélation avec les phénomènes idéaux que la pratique sociale cherchait à consolider. Au fil de l'analyse, on a vu comment le concept de valeur

a été au centre de la pratique abaquiste. Ce concept n'a pas fait partie de la réflexion savante à la Renaissance. C'est un concept qui appartient au savoir pratique caractéristique de cette période de l'histoire, occupée, dans ses aspects les plus spéculatifs, à la restauration et à l'interprétation de la pensée ancienne. Car l'humanisme de la Renaissance se meut, en effet, entre deux pôles, l'un qui regarde en arrière avec admiration l'accomplissement des Anciens, et l'autre, qui se tourne vers l'avant et qui tente d'aller au-delà de ces accomplissements vénérés²⁶. Il se meut à l'intérieur de cette *volonté de vérité* (Foucault, 1971) qui coule le long des institutions culturelles –non pas seulement auprès des cours et des bibliothèques des princes mais aussi auprès du marché du troc et de la petite vente du monde du commerçant– à travers lesquelles l'individu établit un nouveau rapport au monde. Un rapport qui situe le savoir tant comme forme d'action que comme forme d'accomplissement personnel²⁷.

Au centre de la *volonté de vérité*, entre la sphère d'action et celle de la vie personnelle où commence à se dessiner l'idée de subjectivité de la modernité, on trouve le concept de valeur. Ce concept vient établir une nouvelle forme de *ressemblance* entre les choses. Cette ressemblance relève d'autres catégories que celles de la *convenientia*, l'*aemulatio*, l'*analogie* et de la *sympathie* que Foucault (1966) signalait comme étant caractéristique de l'époque pré-moderne. La cire et la laine sont différentes ; elles ont une valeur d'usage différent. Mais il y a une possibilité de les voir *pareilles*. C'est le rôle de la valeur. Sans s'y réduire causalement, cette abstraction formidable trouve ses conditions historiques de possibilité dans l'organisation sociale des forces de production de la Renaissance, c'est-à-dire dans les formes de fonctionnement des moyens de production. Dès lors, les signes et leurs objets vont entretenir des relations jusqu'alors impensables.

L'apparition du nouveau type de ressemblance qu'apporte la valeur (ressemblance qu'on pourrait appeler *formelle*) ouvre la possibilité historique d'émergence d'un langage algébrique symbolique (c'est-à-dire un langage de calcul, basé sur une désignation arbitraire, sans ressemblance avec l'objet désigné). La ressemblance formelle fait partie des phénomènes sémiotiques qui commencent à surgir vers la fin du Trecento avec le développement du commerce et de l'échange, et qui rendent possible de parler de la nature arbitraire de la monnaie, comme le fait Oresme, et d'imaginer une nouvelle représentation de l'espace (telle qu'elle apparaît chez Giotto, par exemple : voir Radford, 1997). Bien que l'abaquiste n'élabore pas un langage algébrique symbolique, il ouvre l'espace où viendront se loger les symboles arbitraires de Bombelli, Viète, Stifel, Descartes. S'il est vrai que l'abaquiste utilise le mot « chose » pour désigner l'inconnue dans les problèmes relevant de l'algèbre, il faut admettre qu'il n'y a plus de ressemblance entre le signifié et le signifiant. Certes, le mot « chose » prend sa source dans des pratiques mathématiques précédentes (Gandz, 1926, 1928). On ne saurait nier l'influence arabe chez les abaquistes, qu'eux-mêmes reconnaissaient volontiers d'ailleurs. Mais le signifié abaquiste de la « chose » se déplace dans un espace discursif pourvu de nouvelles dimensions rendues possibles par de nouvelles formes d'organisation sociale des forces de production et par une concomitante logique de la signification. Ce nouveau signifié est ce que nous avons appelé l'objet du signe et que nous avons tenté de cerner lors de notre discussion du « mode de penser » abaquiste et de sa sémiotique.

La nouvelle catégorie de représentation qui s'introduit dans la sémiotique abaquiste à partir du Trecento rend possible d'aller au-delà de l'iconicité propre à la sémiotique médiévale. Sans être le seul acteur de cette transformation, l'abaquiste contribue tout de même de façon décisive à préparer ce terrain où, comme dit Foucault, les mots et les choses vont se séparer. Mais la

préparation de cette cassure n'est pas juste le résultat d'un langage qui commence à se disloquer. Entre le langage et ce que celui-ci thématise –autrement dit, entre le signe et l'objet– gît la pratique sociale.

NOTES

1. Bien sûr, l'avènement du paradigme du langage ne signifie pas que les questions concernant la relation entre cognition, pensée et langage n'avaient pas été considérées avant. Par exemple, les discussions contemporaines portant sur la part du culturel et du biologique dans le langage et le rôle de celui-ci dans le fonctionnement cognitif remontent au 17^e siècle. C'est à cette période-là que Leibniz et Vico rejettent la conception 'arbitraire' du langage, c'est-à-dire la conception soulignant le rôle clé des dimensions sociales et culturelles véhiculées par le langage dans l'expérience qu'on fait du monde et prônent la position 'naturaliste' qui, au contraire, souligne que l'activité linguistique prend ses bases dans la constitution biologique opérant déjà à un niveau préalable à celui de l'expérience culturelle du monde (voir Gensini, 1995, p. 7).
2. Bien qu'avec des différences parfois notables, ceci est le cas de certaines approches interactionnistes et discursives (voir e.g., Gilly *et al.*, 1999). Notons que l'idée selon laquelle les objets conceptuels sont inséparables du langage est également un des points d'ancrage du post-modernisme. Dans cette perspective, « La vie sociale dérive son sens des actes du discours (*speech acts*). Plutôt qu'une conduite, le langage est une force créative » (Murphy, 1988, p. 603).
3. Thématisations qui recouvrent des positions aussi différentes que l'anti-psychologisme de Wittgenstein (1967) et de Frege (1971) ou le psychologisme du jeune Husserl du temps de *La philosophie de l'arithmétique* (Husserl 1891/1972).
4. Le comptoir, dit Jean Nicot, dans son *Thresor de la langue Francoyse*, ouvrage publié en 1606, est l'endroit « où anciennement les argentiers comptoient (l'argent) ». (Nicot, 1606, p. 138). Je remercie Louis Charbonneau d'avoir attiré mon attention sur l'étymologie du mot comptoir.
5. C'est le cas des recherches issues de la « cognition située » (*situated cognition*). Quelques travaux paradigmatiques sont ceux de Brown *et al.* (1989), Hutchins (1995), Lave (1988) et Lave et Wegner (1991). Pour quelques travaux sur la cognition distribuée (*distributed cognition*), voir Salomon (1993) ou encore

d'autres comme celui de Cole (1996) et Engeström *et al.* (1999), inspirés de la théorie de l'activité de Leontiev (1984).

6. Voir, par exemple, Otte (1994), Lizcano (1993), Høyrup (1995).
7. Restivo a fourni une analyse de certaines pratiques mathématiques (1992, 1993, 1998). En se plaçant dans une perspective sociologique, inspirée du matérialisme dialectique, il étudie en détail le rôle du pouvoir et de la lutte de classes dans l'utilisation qu'on fait des mathématiques dans plusieurs sociétés. Il ne fait aucun doute que la discussion de Restivo est intéressante à plusieurs égards. Toutefois, notre cadre théorique et les problèmes épistémologiques de recherche sur lesquels nous nous penchons sont différents.
8. Pour une discussion sur la familiarité de Platon avec l'orient en général voir Whitney (1979). Une discussion de l'héritage oriental dans la pensée grecque se trouve dans l'oeuvre de Bernal (1987). Voir particulièrement le volume 2, pp. 106 ff. En ce qui a trait aux mathématiques, voir Katz (1996).
9. L'économiste Nicholas Barbon disait, dans son traité « A Discourse of Trade », publié en 1690, que la valeur de toutes les marchandises provient de leur utilisation.
10. Pacioli et Cardan ont constitué deux rares exceptions d'abaquistes ayant réussi à se frayer un chemin dans les hautes sphères de la société de l'époque. À la fin de sa vie, Cardan a préféré néanmoins arrêter sa carrière de mathématicien et se consacrer à la pratique de la médecine (Fierz, 1983), une pratique sociale beaucoup plus prestigieuse que celle des mathématiques. L'accès aux hautes sphères sociales devenait d'autant plus difficile pour les abaquistes que les cours des villes Italiennes s'étaient entourées de mathématiciens occupés à la récupération et traduction de manuscrits grecs qu'on allait chercher aux pays du Levant.
11. Ainsi, un abaquiste pouvait lui-même devenir entrepreneur (voir Goldthwaite, 1972-73).
12. Bien sûr, la typologie abaquiste est différente de la nôtre, nos concepts de nombre n'étant pas tout à fait équivalents (voir Radford, 1995a, 1995b). Maestro Dardi s'est lancé dans une recherche typologique méticuleuse qui a abouti à un inventaire de 198 équations (voir Van Egmond, 1983). Une étude de l'algèbre abaquiste peut être trouvée dans Franci et Toti Rigatelli (1985).
13. Lors de la chasse aux manuscrits grecs, des émissaires sont souvent envoyés en mission par les souverains des cités italiennes pour aller les trouver. D'autres partent à leurs propres comptes. Dans ce contexte, Florence devient vite le marché le plus important de manuscrits classiques. On sait, par exemple, que, lors de son deuxième voyage dans l'est (1421-23), le sicilien Giovanni Aursipa ramena 238 manuscrits grecs dont un codex

de l'*Iliade* et un manuscrit de la *Collection Mathématique* de Pappus (Rose, 1975, p. 28). Filelfo, un attaché de l'ambassade de Venise à Constantinople pendant les années 1420-27, rentra avec un paquet de manuscrits de près de 40 auteurs grecs (Pfeiffer, 1976, p. 48). Ces manuscrits sont souvent gardés dans des bibliothèques privées. Une des librairies européennes les plus complètes de l'époque était celle du duc Federico da Montefeltro d'Urbino (1422-1482). C'est dans cette librairie que Luca Pacioli, alors appelé à la cour, pourra consulter une traduction d'Archimède et l'algèbre d'Al-Khwarizmi.

14. Dans un manuscrit du 12^e siècle, édité par Arrighi (1964b), son auteur, maître Guglielmo, définit le nombre comme suit : « Numerus est unitatum collectio vel quantitatis acervus ex unitatibus profusus ».
15. Ceci apporte bien sûr une certaine incohérence, mais cela ne va pas plus loin. Ainsi, dans un passage de Fibonacci où celui-ci explique ce qu'est un nombre, il commence en donnant la définition selon la tradition grecque en termes de multitude d'unités et par la suite il a du mal à appliquer ce concept aux problèmes de monnaie, problèmes qui vont souvent exiger la considération des parties de l'unité, selon les systèmes monétaires de l'époque (voir Arrighi, 1965, p. 381)
16. Donham (1999) a bien mis en évidence ce caractère précis de l'action multiplicatrice de l'argent qui découle de l'abstraction qu'entraîne les processus de division du travail. Il fait remarquer que le capital *qua* capital ne produit rien, qu'il est le produit d'autres travailleurs mais que le discours entourant la valeur des marchandises fait en sorte que « le capital semble acquérir une vie propre » (Donham, 1999, p. 103). Il n'y a peut-être pas de meilleur exemple de discours faisant apparaître ce caractère de génération et de multiplication de l'argent que celui que les marchands ont tenu à l'égard du taux d'intérêt. Comment fixer ce taux? Hadden mentionne l'œuvre du treizième siècle *De contractibus usurariis* d'Olivi où celui-ci soutient que le profit d'un prêt est légitime si le même profit pouvait être obtenu en utilisant l'argent dans les affaires courantes. Dans ce cas, l'argent semble produire de l'argent. (Hadden, 1994, pp. 99-100). On trouvera une discussion fort intéressante de la sémiotique du billet-argent dans Rotman (1987). Nos remarques précédentes ne veulent pas toutefois soutenir la thèse réductrice que le capitalisme est *la* condition suffisante de l'émergence de la pensée mathématique abaquiste ou que cette émergence peut être posée en termes de la relation infrastructure/superstructure des analyses matérialistes marxistes. Cela ne peut pas être le cas car le problème des conditions de possibilité d'une épistémè ne peut pas être posé en termes d'une logique de la causalité. Très

vraisemblablement, comme suggère Lizcano, il ne peut même pas être ramené au problème de la « dernière instance explicative » (Lizcano, communication personnelle, 15.10.02). Je reviendrai sur ce point plus loin.

17. « Le juge restaure l'égalité. Il en est à cet égard comme d'une ligne divisée en deux segments inégaux: au segment le plus long le juge enlève cette partie qui excède la moitié de la ligne entière et l'ajoute au segment le plus court ; et quand le total a été divisé en deux moitiés, c'est alors que les plaideurs déclarent qu'ils ont ce qui est proprement leur bien, c'est-à-dire quand ils ont reçu l'égal. Et l'égal est moyen entre ce qui est plus grand et ce qui est plus petit, selon la proportion arithmétique. » Aristote, *Éthique à Nicomaque*, 1132^a 25-30 (cité ici d'après la traduction de Tricot, 1959).
18. Hadden cite le passage suivant de De Moneta (dans la traduction du Latin à l'Anglais de Charles Johnson):
“For if a man gives bread or bodily labour in exchange for money, the money he receives is as much his as the bread or bodily labour which he (unless he were a slave) was free to dispose. For it was not to princes alone that God gave freedom to possess property, but to our first parents and to all their offspring, as it is in Genesis.”
(Oresme, 1956, pp.10-11).
19. Voici la solution de della Francesca. La petite barre qu'il place sur certains nombres est utilisée pour les quantités inconnues. « Fais comme ça: Tu sais qu'il allait lui donner 25 ducats par an, en deux mois cela fait $4\frac{1}{6}$; et mets que le cheval vaut \bar{I} chose, en 2 mois cela vaut $\frac{2}{12}$ de la chose qui est $\frac{1}{6}$. Tu sais que tu dois avoir en deux mois 4 ducats et $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{6}$ de la chose. Et le gentilhomme veut 4 ducats qui additionné à $4\frac{1}{6}$ fait $8\frac{1}{6}$, car tu sais que $\frac{1}{6}$ de la chose afin d'arriver à I c'est $\frac{5}{6}$; donc $\frac{5}{6}$ de la chose sont égaux à $8\frac{1}{6}$ nombre. Réduis à une nature, tu auras 5 choses égales à 49; divise par les choses et il vient $9\frac{4}{5}$: ce montant vaut la chose, et nous mettons que le cheval vaut \bar{I} , donc il vaut 9 ducati et $\frac{4}{5}$ de ducato. (Piero della Francesca, *Trattato d'abaco*, Arrighi (éd.), 1970, p. 107)
20. Pour montrer le caractère particulier et local qui résulte de l'homogénéisation des produits à la Renaissance, Heilbroner mentionne le cas des Maoris de la Nouvelle Zélande, chez qui, dit-il, « il est impossible de demander combien de nourriture vaut un hameçon en os, car un tel négoce ne se fait jamais et la question serait considérée comme ridicule ». (Heilbroner, 1970, p. 26).
21. Tel que mentionné à la note de bas de page 16, un mode de pensée ne peut pas être réduit aux conditions matérielles et à la production de la culture. Même si les signes sont produits à l'intérieur des limites et des possibilités de la « technologie de l'activité sémiotique » (Radford, 2002), ils possèdent des sens imbriqués

dans la logique culturelle de la signification, cette dernière étant subsumée dans ce que j'appelle les *systèmes culturels sémiotiques* (voir Radford, 2003a).

22. On voit sans peine que, dans sa variante la plus radicale, cette position réduit souvent la réalité à celle que construisent les mots. L'analyse de la construction du savoir se centre alors uniquement sur « l'interaction sur-le-champ » et sur l'analyse discursive. Un des problèmes théoriques de cette position est qu'elle risque de réduire l'épistémologie à un behaviorisme verbal et la réalité à un nominalisme arbitraire (voir Radford, 2000a).
23. Les signes des autres moyens d'objectivation s'articulent, bien sûr, de façon différente aux signes du langage. Le rapport au temps et à l'espace qu'entretiennent les signes du registre figural, par exemple, est différent du rapport au temps qu'on trouve dans la langue. En analysant *La Vierge au manteau* de Piero della Francesca, Francastel dit : « Contrairement à ce qui se passe dans la langue, il n'existe pas de chaîne spatiale constituée comme un continu et servant de support au système figuratif tout entier comme la chaîne temporelle constitue le support de la langue. Le montage l'emporte comme outil de signification sur les découpages. D'où il résulte qu'on ne saurait considérer davantage que la langue constitue la forme type de la pensée humaine. » (Francastel, 1967, pp. 159-160).
24. Pour une élaboration détaillée du langage vu comme *un* des moyens d'objectivation avec les modifications apportées par les deux points de notre remarque (voir Radford, 2000b, 2002 et 2003b.)
25. « La production est le point d'entrée privilégié pour la compréhension des totalités sociales, pour comprendre comment les gens font leur propre histoire, même si ce n'est pas comme ils l'ont choisie. » (Donham, 1999, p. 58).
26. « À la Renaissance (...) on trouve une intensification de l'influence de l'Antiquité qui mène à une nouvelle affirmation de la dignité de l'homme à travers la considération de sa supériorité sur la nature. Cette supériorité consiste dans la capacité créative de l'homme qui détermine la formation de la culture et qui se manifeste dans un progrès sans limites. C'est sur cette capacité créative que réside pour l'écrivain de la Renaissance l'excellence de l'homme, une excellence qui se présente liée à l'activité humaine dans la conquête du savoir en s'affirmant à la fois comme idéal de l'élévation spirituelle de l'homme. » (Mondolfo, 1963, pp. 237-238).
27. Ainsi, en s'adressant à son fils, dans un passage de ses Mémoires, le commerçant Giovanni di Paolo Morelli dit : « Une fois que tu auras quitté l'école, fais en sorte, chaque jour durant une heure au moins, d'étudier Virgile, Boèce, Sénèque, ou d'autres auteurs comme à l'école. Il s'ensuivra pour toi de grands progrès dans ton

esprit. (...) lorsque tu atteindras à la maturité et que ton intelligence commencera à goûter la raison des choses et la douceur de la science, tu en éprouveras autant de plaisir, de joie, de réconfort que de tout ce que tu possèdes. » (G. Morelli, cité par Bec, 1967, p. 293)

Abstract – An important characteristic of contemporary reflections in mathematics education is the attention given to language and discourse. Ceasing to be viewed as a more or less useful tool - albeit always imperfect - to express thought, language today appears invested with unprecedented cognitive and epistemological possibilities. One would say that the wall between language and thought has crumbled to the point that now we no longer know where one ends and the other begins. At any rate, the thesis of independence between the elaboration of a thought and its codification is no longer sustainable. The attention given to language cannot ignore, nevertheless, the question of its epistemological limits. More precisely, can we ascribe to language and to the discursive activity the force of creating the theoretical objects of the individuals' world? In this article, I suggest that all efforts to understand the conceptual reality and the production of knowledge cannot restrict itself to language and the discursive activity, but that it equally needs to include the social practices that underlie them. This point is illustrated through the analysis of the relationship between mathematical knowledge and the social practice of the Renaissance.

Resumen – Una de las características de las reflexiones didácticas contemporáneas es la atención que se presta al lenguaje y al discurso. Al dejar de ser visto como herramienta más o menos eficaz –aunque siempre imperfecta– para expresar un pensamiento, el lenguaje aparece hoy en día dotado de posibilidades cognitivas y epistemológicas sin precedencia. Se diría incluso que el muro entre lenguaje y pensamiento se ha derrumbado y que éstos han terminado por fusionarse,

al punto que ya no sabemos dónde termina uno y dónde empieza el otro. En todo caso, la tesis de independencia entre el pensamiento y su codificación ya no puede ser sostenida (Grize, 1996, p. 58). Ahora bien, el interés prestado al lenguaje no hace superflua la pregunta de sus límites epistemológicos. De manera más precisa, ¿puede adjudicarse al lenguaje y a la actividad discursiva la fuerza de creación de los objetos teóricos de los individuos? Este artículo intenta mostrar que todo ensayo de comprensión de la realidad conceptual y de la producción del saber no puede limitarse al lenguaje y a la actividad discursiva sino que debe tener igualmente presente las prácticas sociales que los subyacen. Este punto es ilustrado a través del análisis de la relación entre saber matemático y práctica social en el Renacimiento.

REFERENCES

- Aristote (1959). *Éthique à Nicomaque*. (Nouvelle traduction, avec introduction, notes et index, par J. Tricot). Paris : Vrin.
- Arrighi, G. (éd.) (1964a). *Paolo dell'Abaco. Trattato d'Aritmetica*. Pisa: Domus Galileana.
- Arrighi, G. (éd.) (1964b). *De Arithmetica compendiose tractata di M^o Guglielmo Vescovo di Lucca (12th century)*. Pisa : Domus Galilæana.
- Arrighi, G. (1965). Il codice L. IV 21 della Bobliothecadegl'intronati di Siena e la "Bottega dell'abaco a Santa Trinita" in Firenze. *Physis*, 7(4), 369-400.
- Arrighi, G. (éd.) (1970). *Piero Della Francesca: Trattato de Abaco*. Pisa : Domus Galileana.
- Arrighi, G. (1992). Problemi e proposte di matematica medievale. *Contributi alla storia della Matematiche. Scritti in onore di Gino Arrighi*. Coll. Studi, 8, Accad. Naz. Sci. Lett. Arti, Modena vol. 8, 9-18.
- Bakhtin, M. (1984). *Esthétique de la création verbale*. Paris : Gallimard.
- Barbon, N. (1690). *A Discourse of Trade*. London, Printed by Tho. Milbourn for the Author.

- Bec, C. (1967). *Les marchands écrivains. Affaires et humanisme à Florence 1375-1434*. Paris/ La Haye : Mouton.
- Bernal, M. (1987). *Black Athena. The Afroasiatic roots of Classical Civilization*. London : Free Association Books.
- Bernini, D. (1982). Luca Pacioli alla corte ducale di Urbino. *Antichita Viva*, 21, 36-41.
- Brown, J. S., Collins, A. et Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18(1), 32-42.
- Cole, M. (1996). *Cultural Psychology*. Cambridge, Massachusetts and London, England : The Belknap Press of Harvard University Press.
- Donham, D. L. (1999). *History, Power, Ideology – Central Issues in Marxism and Anthropology*. Berkeley/Los Angeles/London : University of California Press.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, 5, 37-65.
- Eagleton, T. (1983). *Literary Theory*. (Second Edition, 1996). Minnesota : The University of Minnesota Press.
- Edwards, D. (1997). *Discourse and Cognition*. London / Thousand Oaks / New Delhi : Sage Publications.
- Elkins, J. (1994). *The poetics of perspective*. Ithaca and London : Cornell University Press.
- Engeström, Y., Miettinen, R. et Punamäki, R.-L. (éds.) (1999). *Perspectives on activity theory*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Fierz, M. (1983). *Girolamo Cardano 1501-1576 Physician, Natural Philosopher, Mathematician, Astrologer, and Interpreter of Dreams*. Boston/Basel/Stuttgart : Birkhäuser.
- Foucault, M. (1966). *Les mots et les choses*. Paris : Gallimard.
- Foucault, M. (1971). *L'ordre du discours*. Paris : Gallimard.

- Francastel, P. (1967). *La figure et le lieu. L'ordre visuel du Quattrocento*. Paris : Gallimard.
- Franci, R. et Toti Rigatelli, L. (1985). Towards a History of Algebra. From Leonardo of Pisa to Luca Pacioli. *Janus*, 72, 17-82.
- Franci, R. et Toti Rigatelli, L. (1989). La matematica nella tradizione dell'abaco nel XIV e XV secolo. *Storia sociale e culturale d'Italia, vol. V da Storia delle Scienze*, 68-94.
- Franci, R. (1988). L'insegnamento della Matematica in Italia nel tre-quattrocento. *Archimedes*, 4, 182-194.
- Frege, G. (1971). *Écrits logiques et philosophiques*. Paris : Éditions du Seuil.
- Furinghetti, F. et Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics : from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. English (éd.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (p. 631-654). New Jersey : Lawrence Erlbaum.
- Gandz, S. (1926). On the Origin of the Term "Root". *American Mathematical Monthly*, 33(5), 261-265.
- Gandz, S. (1928). On the Origin of the Term "Root". Second Article. *American Mathematical Monthly*, 35, 67-75.
- Geertz, C. (1973). *The Interpretation of Cultures*. New York : Basic Books.
- Gensini, S. (1995). Criticisms of the Arbitrariness of Language in Leibniz and Vico and the 'Natural' Philosophy of Language. In R. Simone (éd.), *Iconicity in Language* (p. 3-18). Amsterdam/Philadelphia : John Benjamins Publishing Company.
- Gilly, M., Roux, J.-P. et Trognon, A. (éds.) (1999). *Apprendre dans l'interaction*. Nancy : Presses Universitaires de Nancy.
- Goldthwaite, R. A. (1972-73). Schools and teachers of commercial arithmetic in Renaissance Florence. *Journal of European Economic History*, 1, 418-433.

- Grendler, P. F. (1989). *Schooling in Renaissance Italy*. Baltimore / London : The Johns Hopkins University Press.
- Grize, J.-B. (1996). *Logique naturelle et communications*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Hadden, R. W. (1994). *On the Shoulders of Merchants*. New York : State University of New York Press.
- Heilbroner, R. L. (1970). *Les grands économistes*. (Traduit de l'américain par Pierre Antonmattei). Paris : Éditions du Seuil.
- Høyrup, J. (1990). Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought. *Altorientalische Forschungen*, 17, 27-69, 262-354.
- Husserl, E. (1891/1972). *Philosophie de l'arithmétique*. (Traduit par J. English de l'édition allemande de 1891). Paris : Presses universitaires de France.
- Husserl, E. (1901/1961). *Recherches Logiques* (Recherches I et II). Paris : Presses universitaires de France.
- Hutchins, E. (1995). *Cognition in the Wild*. Cambridge MA : The MIT Press.
- Ilyenkov, E. (1977). The Concept of the Ideal. *In Philosophy in the USSR : Problems of Dialectical Materialism*. Moscow : Progress Publishers.
- Kant, I. (1781, 1787/1996). *Critique of Pure Reason*. (Traduit par W. S. Pluhar). Indianapolis / Cambridge : Hackett Publishing Company.
- Katz, V. (1996). Egyptian Mathematics. *In Actes de la Deuxième université d'été Européenne sur l'histoire et l'épistémologie dans l'éducation mathématique*. Braga, Portugal, 1, 45-53.
- Lave, J. (1988). *Cognition in Practice*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Lave, J. et Wegner, E. (1991). *Situated learning*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Leontiev, A. N. (1984). *Activité, conscience, personnalité*. Moscou : Éditions du Progrès.

- Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Barcelona : Editorial Gedisa.
- Markus, G. (1982). *Langage et production*. Paris : Éditions Denoël /Gonthier.
- Marx, K. et Engels, F. (1982). *L'idéologie allemande*. Paris : Éditions sociales-Messidor.
- Merleau-Ponty, M. (1960). *Signes*. Paris : Gallimard.
- Mondolfo, R. (1963). *Figure e idee della filosofia del rinascimento*. Firenze : La nouva Italia, editrice.
- Murphy, J. W. (1988). Making sense of postmodern sociology. *The British Journal of Sociology, Volume XXXIX, (4)*, 600-614.
- Myerson, G. (1994). *Rhetoric, reason, and society: rationality as dialogue*. London : Sage Publications.
- Nicot, J. (1606). *Thresor de la langue Francoyse*. Paris : Chez David Douceur.
- Oresme, N. (1956). *The De Moneta of Nicholas Oresme*. (Translated by Charles Johnson). London/Edinburgh, Paris/Melbourne, Toronto et New York : Thomas Nelson and Sons.
- Otte, M. (1994). Historiographical Trends in the Social History of Mathematics and Science. In K. Gavroglu *et al.* (éds.), *Trends in the Historiography of Sciences* (p. 295-315). Dordrecht/ Boston/ London : Kluwer Academic Publishers.
- Pfeiffer, R. (1976). *History of Classical Scholarship. From 1300 to 1850*. Oxford : Clarendon Press.
- Radford, L. (1995a). Before the Other Unknowns Were Invented : Didactic Inquiries on the Methods and Problems of Mediaeval Italian Algebra. *For the Learning of Mathematics, 15(3)*, 28-38.
- Radford, L. (1995b). L'Émergence et le développement conceptuel de l'algèbre (III siècle - XIV siècle). In F. Lalonde, F. Jaboeuf et Y. Nouazé (éds.), *Actes de la première Université d'été*

européenne. *Histoire et Épistémologie dans l'éducation Mathématique* (p. 69-83). IREM de Montpellier.

Radford, L. (1997). L'invention d'une idée mathématique : la deuxième inconnue en algèbre. *Repères* (Revue des instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques), 28, 81-96.

Radford, L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 35(1), 277-302. Ce texte est accessible au site : <http://luisradford.ca>

Radford, L. (1999). La razón desnaturalizada. Ensayo de epistemología antropológica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3, 47-68. Ce texte est accessible au site : <http://luisradford.ca>

Radford, L. (2000a). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática*, 12(1), 51-69. Ce texte est accessible au site <http://luisradford.ca>

Radford, L. (2000b). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking : A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237-268.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

Radford, L. (2003a). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. In M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, and V. V. Cifarelli (éds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis : From Thinking to Interpreting to Knowing* (p. 49-79). Ottawa : Legas Publishing.

Radford, L. (2003b). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Restivo, S. (1992). *Mathematics in Society and History, Sociological Inquiries*. Dordrecht/ Boston/ London : Kluwer Academic Publishers.

- Restivo, S. (1993). The social life of mathematics. In S. Restivo, J. P. Bendegem et R. van, Fischer (éds.), *Math Worlds* (p. 247-278). Albany, NY : State University of New York Press.
- Restivo, S. (1998). Mathematics, Mind, and Society: An anarchist theory of inquiry and education. In P. Gates et T. Cotton (éds.), *Proceedings of the First International Mathematics Education and Society Conference* (p. 34-36). Nottingham University.
- Ricardo, D. (1817/2001). *On Principles of Political Economy and Taxation*. Kitchener, Ontario : Batoche Books.
- Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (éds.), *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching* (p. 55-62). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publisher.
- Rose, P. L. (1975). *The Italian Renaissance of Mathematics*. Genève : Librairie Droz.
- Rotman, B. (1987). *Signifying Nothing. The Semiotics of Zero*. London : The MacMillan Press Ltd.
- Salomon, G. (1993). *Distributed cognitions*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Swetz, F. J. (1989). *Capitalism and Arithmetic*. La Salle, Illinois : Open Court.
- Taylor, R. M. (1980). *No Royal Road. Luca Pacioli and His Times*. N.Y. : Arno Press.
- Van Egmond, W. (1976). *The Commercial Revolution and the Beginnings of Western Mathematics in Renaissance Florence, 1300-1500*. Ph. D. Dissertation. Bloomington, IN : Indiana University Press.
- Van Egmond, W. (1983). The Algebra of Master Dardi of Pisa. *Historia Mathematica*, 10, 399-421.
- Wartofsky, M. (1979). *Models, Representation and the Scientific Understanding*. Dordrecht : D. Reidel.

Whitney, M. (1979). Plato on Egyptian Art. *Journal of Egyptian Archeology*, 66, 121-127.

Wittgenstein, L. (1967). *Philosophical investigations*. Oxford : Blackwell.