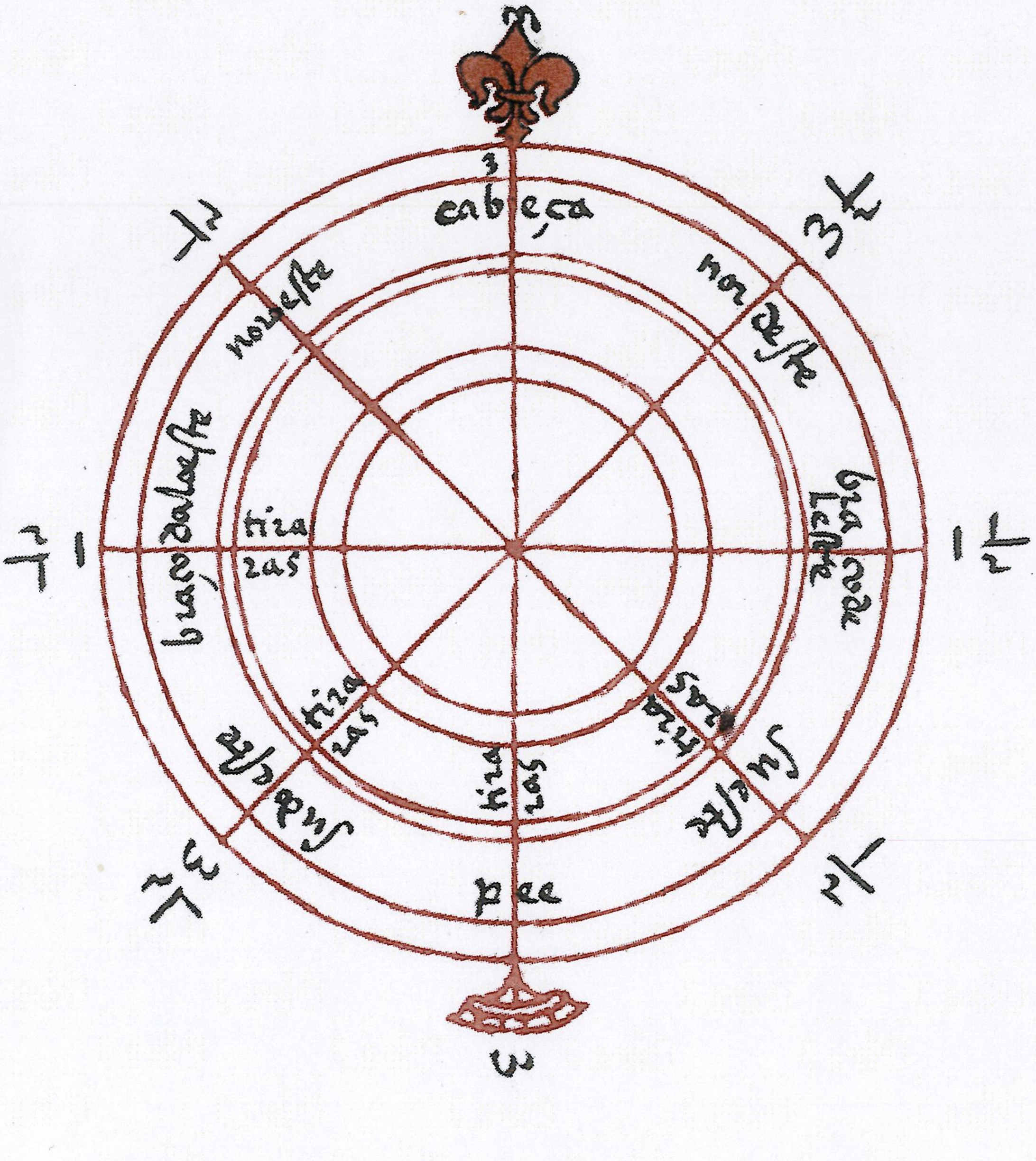
História e Educação Matemática

proceedings • actes • actas

vol. II



24-30 Julho 1996, Braga, Portugal

Associação de Professores de Matemática
Departamento de Matemática da Universidade do Minho

Quadratic Equations: Reinventing the formula. A Teaching Sequence Based on the Historical Development of Algebra[1]

Luis Radford
Université Laurentienne, Canada.

Georges Guérette
Conseil de l'éducation de Sudbury, Canada.

The true direction of the development of thinking is not from the individual to the socialised, but from the social to the individual
L. Vygotsky

Abstract: *In this paper, we present a teaching sequence dealing with quadratic equations. Our teaching sequence is based upon a careful epistemological study of the history of Algebra that takes into account J. Høyrup's modern reconstruction of Babylonian Geometric Algebra as well as the development of the semiotics of algebra. This study led us to structure the teaching sequence according to two different (albeit related) axes: (1) in the first axis, a particular attention is paid to the social context of the mathematical activity in the classroom; (2) in the second axis, the students are led to reinvent the formula that solves the general quadratic equation. This goal is achieved through a progressive itinerary, starting from manipulatives, that requires students to use different semiotic categories in order to express and solve problems. The teaching sequence was experimented successfully in a High School classroom.*

§1. Introduction

En plaçant le problème du développement de la pensée mathématique dans une perspective d'interaction sociale en salle de classe, la séquence d'enseignement que nous reportons ici a pour objet celui de permettre aux élèves de réinventer la formule qui résout les équations de deuxième degré. Une caractéristique importante de la séquence est la conceptualisation géométrique qui la sous-tend, conceptualisation qui tient en ligne de compte le développement historique de l'algèbre. La séquence est faite en sorte de permettre aux élèves d'accéder graduellement à des niveaux d'abstraction sémiotique différents sur lesquels les méthodes de résolution de problèmes sont formulées.

1.1 L'apprentissage comme activité sociale en salle de classe:

Il n'est probablement pas exageré de dire que la plupart des paradigmes prédominants en éducation mathématique relèvent du constructivisme, dont le principe fondamental est –comme on le sait– celui de supposer que l'individu construit ses propres connaissances. Bien que le socio-constructivisme, en opposition au constructivisme radical, porte quelque attention aux facteurs sociaux à la construction des connaissances par l'individu, il n'en reste pas moins que le social y apparaît plutôt comme une concession: celui-ci y est vu comme un agent externe (et en quelque sorte inevitable, car présent) à la connaissance qui demeure en fin de compte une affaire privée. C'est pourquoi, dans les approches constructivistes, la

[1]Ce travail fait partie d'une recherche en cours subventionée par FCAR No. 95ER0716, Québec, et les Fonds de Recherche de l'Université Laurentienne, FRUL, Ontario.

connaissance est vue comme une structure qui tend à se détacher du concret pour arriver à son niveau le plus achevé qui est caractérisé par des opérations sur des objets *formels* («empty shells»). À cette conception de la connaissance qui, comme l'a montré O'Loughlin. (1992) est loin d'être non problématique dès qu'on regarde de plus près la question «qu'est-ce que cela veut dire exactement que l'individu construit ses propres connaissances?»), a été opposée une conception d'après laquelle le savoir est toujours un savoir socio-contextualisé (cf. e.g. Lerman, 1996). «Kowlege -écrit Otte (1994)- is necessarily social knowledge». Dans cette perspective, la compréhension des dynamiques d'acculturation qui débouchent sur des processus d'interiorisation et la formation des «plan de conscience» chez l'individu prennent une importance capitale pour l'épistémologie en général et pour l'éducation matématique en particulier. À notre avis, cette compréhension est encore loin d'être claire aujourd'hui, d'autant plus que le problème ne peut plus être posé en termes behavioristes. Comme Leont'ev l'a signalé:

> «the process of internalization is not the transferal of an external to a pre-existing, internal "plan of consciousness"; it is the process in which this plane is formed» (quoted by Lerman, 1996, p. 136).

Un élément fondamental dans les processus d'acculturation est le langage (Wertsch et Stone. 1985). Il n'est pas seulement la voie d'expression de l'individu vers son entourage; il n'est pas non plus un outil médiatique à deux voies: il permet aussi à l'individu l'élaboration des plans conceptuels de conscience de représentations complexes et différenciées du monde. Dans le cas des mathématiques, le langage acquiert une importance particulière, car il se voit mobilisé à travers plusieurs catégories sémiotiques, chacune avec ses propres niveaux d'abstraction.

1.2 Catégories sémiotiques

Les catégories sémiotiques apparaissent au niveau social et individuel. Au niveau social, en salle de classe et en ce qui concerne les mathématiques, elles permettent la discussion de problèmes et leur solution à l'intérieur de groupes d'élèves. Le sens des concepts est élaboré à travers la communication qui s'établi au sein du groupe. Au niveau individuel, les catégories sémiotiques apparaissent comme moyens auto-régulatifs des actions entreprises.

Dans notre séquence didactique, les deux groupes de catégories mentionnées ont varié quant au niveau de généralisation véhiculée (que nous avons appelés *niveaux d'abstraction sémiotique*): on a proposé aux élèves de vivre et de partager certaines expériences géométrico-numériques (inspirées du dévelopement conceptuel des idées algébriques) qui, à la fin, ont débouché sur l'utilisation d'un langage symbolique et la re-invention de la formule de deuxième degré.

Étant donné le rôle de l'histoire dans la structure de notre séquence, il convient de faire un court survol sur l'historique l'équation de deuxième degré[2].

§2. La géométrie du collage

Quand, suite aux excavations archéologiques entreprises au début du siècle, on a commencé à déchiffrer les tablettes babyloniennes, on a découvert qu'un certain nombre de ces tablettes portaient sur des questions de calcul métrologique (qui impliquait des calculs numériques aussi bien que géométriques), alors que d'autres tablettes portaient sur des problèmes à résoudre. Certains des problèmes posés concernent des rectangles dont la dimension des côtés doit être trouvée, étant donnée –par exemple– l'aire et la relation entre les côtés. Au-delà de la difficulté que posait la traduction de ces tablettes, il y avait la difficulté à comprendre comment les scribes avaient pu faire pour résoudre ces problèmes. Cela d'autant plus que, souvent, les tablettes contiennent seulement l'énoncé du problème et sa réponse. Dans d'autres cas, quelques tablettes exhibent les calculs numériques qui permettaient d'aboutir à la réponse cherchée à un niveau descriptif qui n'est pas «auto-explicatif» (ce qui demande, pour essayer de comprendre le fil de la pensée sous-jacent à la procédure de résolution, de reconstruire la procédure elle-même). Cependant, ces calculs deviennent clairs dès qu'ils sont traduits en utilisant le langage algébrique d'aujourd'hui. Cela a amené à penser que les scribes babyloniens connaissait la formule de l'équation de deuxième degré mais que, faute de symboles, ils ne l'avaient pas écrite. Il y a à peine une dizaine d'années, J. Høyrup, suite à une minutieuse étude linguistique, a proposé une autre interpretation (qui a fait d'ailleurs l'objet d'une des conférences présentées à la «Première Université européenne d'été, histoire et épistémologie ...»: voir Høyrup, 1995; cependant, l'exposé le plus complet se trouve dans son article monumental de 1990. Voir bibliographie). D'après la reconstruction de Høyrup, les procédures de résolution liées à ces problèmes reposent sur des configurations géométriques qui sont transformées grâce à des déplacements (de type «cut-and-paste») de figures ou parties de figures, comme celle qu'on trouve chez Al-Khwarizmi, dans le chapitre des «démonstrations» (cf. Hughes, éd. 1986, pp. 236-241) de son *Traité concis sur les règles d'al-gabr et d'al-muqabala* . Ce serait ce même type de transformations qui serait à la base de la résolution de maints problèmes contenus dans un livre médiéval, le *Liber Mensurationum* d'Abû Bekr (probablement 9e siècle), dont le manuscrit arabe a été perdu et qui nous est parvenu dans une traduction du 12 siècle due a Gerardo de Cremona (éd. Busard, 1968). En effet, beaucoup de ces

[2] On trouvera une analyse plus détaillée de l'aspect historique dans: Radford, L. La ecuación de segundo grado: una propuesta de enseñanza basada en su desarrollo histórico-conceptual, *Memorias de la IX Reunion centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa*, La Habana, Cuba (accepté pour publication).

problèmes sont formulés dans le langage de la «Géométrie du Coupage et du Collage» (G.C.C.). Voici, pour fixer les idées, le problème 41 (Busard, 1981, p. 95):

> «Et si quelqu'un te dit: ajoute le petit côté et l'aire [d'un rectangle] et le résultat fût 54, et le petit côté plus deux est égal au grand côté, quels sont chacun des côtés ?»

La résolution est donnée comme suit:

> «La façon de trouver ceci est que tu ajoutes deux [à un], de sorte que tu as 3. Prends maintenant la moitié qui est un et demi et multiplie-la par elle-même et tu obtiendras deux et un quart. Alors ajoute 54 à cela et tu auras 56 et un quart; prend la racine et enlève un et demi; il te reste 6 et cela est le petit côté; ajoute-lui deux et tu auras le grand côté, c'est-à-dire 8. Cependant, il y a une méthode pour trouver cela d'après les gens de l'al-gabr ...»

La procédure de résolution que, comme on le voit, indique les opérations entre les nombres qu'on doit suivre, est vraisemblablement sous-tendue par la configuration géométrique ci-jointe (figs. 1 à 4). Le petit côté, x, est muni d'une «projection» de base égale à 1 (fig. 1), de sorte que la mesure du segment apparaît tantôt comme étant la mesure de la longueur du segment tantôt comme étant la mesure de l'aire du rectangle «projété». Ensuite, l'excédent du grand côté sur le petit côté donne lieu à deux petits rectangles de base égale à 1. La fig. 1 est donc décomposée en un carré (dont le côté est indiqué par x dans la fig. 2) et trois rectangles de dimensions $1 \times x$ (fig. 2). L'idée clé dans la résolution de ce type de problèmes (et qui apparaît de façon explicite dans l'oeuvre d'Al-Khwarizmi) est de se ramener à un carré. Pour ce faire, ici, Abû Bekr dit «prend maintenant la moitié [de 3]», ce qui voudrait dire, si on se refère à la figure, «prend la moitié des trois rectangles». Cela donne un couple de «rectangle et demi» Le rectangle et demi à droite serait ensuite coupé et collé au bas de la figure (voir fig. 3). La figure qui en résulte est presque un carré: il lui manque un petit carré de côté égal à $1\frac{1}{2}$. La complétion du grand carré se fait donc en lui ajoutant un carré d'aire égale à $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}$. Le carré final a donc une aire égale à $54 + 2\frac{1}{4} = 56\frac{1}{4}$, de sorte que son côté est $\sqrt{56\frac{1}{4}} = 7\frac{1}{2}$. Le petit côté, x, du rectangle original est alors égal à $7\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 6$, d'où l'on obtient que le grand côté est 8.

Nous n'allons pas discuter ici les arguments historiques qui soutiennent la reconstruction des procédures de résolution des problèmes comme le précédent en termes de la G.C.C.(voir Høyrup, 1986). Nous nous contenterons d'indiquer que l'apparition explicite de ces procédures dans l'oeuvre d'Al-khwarizmi ne laisse aucun doute que ces procédures étaient bien connues au 9e siècle dans certains milieux arabes. D'autre part, Abû Bekr offre souvent une autre solution à ses problèmes: une solution qu'il attribue «aux gens de l'al-gabr». C'est bien le cas du problème précédent (où le petit côté est désigé par la chose (*res* en latin) et son carré par le mot *census* qui, littéralement, veut dire fortune, bien). Cela a amené

Høyrup (1986) à suggérer la coexistence de deux traditions mathématiques, l'une étant celle de la G.C.C., l'autre celle des algébristes que Al-Khwarizmi serait en train de fusioner

§3. La séquence didactique

La séquence a duré 5 périodes de 80 minutes chacune et a été expérimentée auprès des éléves d'une classe de 11e année (16 ans) d'une école de Sudbury. Les problèmes ont été introduits comme des puzzles. Les élèves, réunis en groupes de travail, devaient proposer et discuter des procédures de résolution.

Étape 1:

Dans l'étape 1, on a présenté aux élèves le problème suivant:

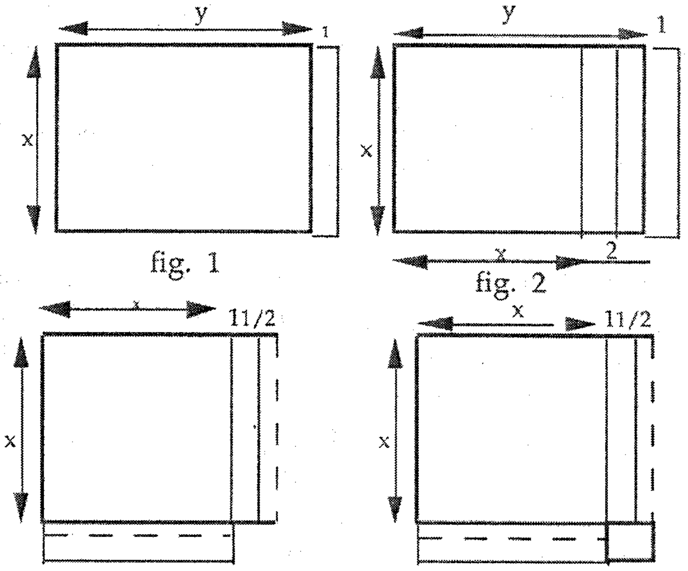


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4

Problème 1:

> Que devraient-être les dimensions d'un rectangle dont le demi-périmètre est 20 et dont l'aire devrait mesurer 96 unités carrées?

La réponse spontanée la plus fréquente donnée par les élèves est 10 par 10 (le nombre 10 provient de prendre la moitié de 20). Quand la vérification est entreprise, ils constatent que la réponse n'est pas correcte. Le professeur donne alors la signification géométrique au problème, en utilisant des grandes figures en carton collées au tableau: si on prend un carré de côté 10, son aire est de 100. On doit donc retrancher 4 unités carrées du carré de côté 10 (fig. 5) pour obtenir une figure d'aire 96. Cela peut s'obtenir (et c'est cela l'idée clé de la résolution) en retranchant du grand carré un petit carré de côté 2 (voir fig. 6). Pour obtenir un rectangle on coupe le rectangle montré en pointillé dans la fig. 7 et on le déplace verticalement vers la droite (fig. 8). Les côtés cherchés mesurent donc 12 et 8 unités.

La résolution de ce problème, qui se trouve en fait sous une formulation numérique dans l'*Arithmétique* de Diophante (*ca.* 250 ap. J.-C) (Livre I, problème 27) et dont l'origine remontrait aux babyloniens, est loin d'être évidente pour les élèves et il serait peu sensé, croyons-nous, de prétendre qu'ils la redecouvrent par «eux-mêmes». Cependant, la particularité géométrique de cette résolution a pu déclencher un vif intérêt chez les élèves qui, en essayant de l'utiliser devant d'autres problèmes similaires, ont

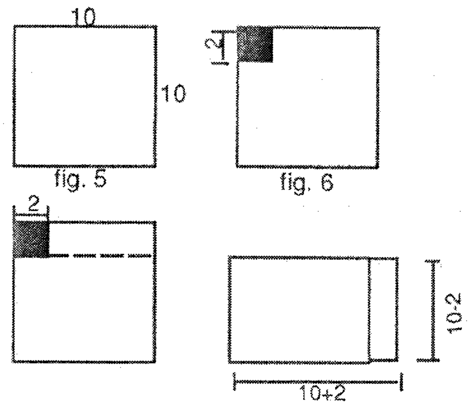


fig. 5 fig. 6 fig. 7 fig. 8

commencé le processus d'intériorisation conceptuelle mentionné au §1. Afin déviter une simple «répétition» (qui en fait n'est que l'utilisation d'un même concept au même niveau conceptuel, ou pour le dire en d'autres mots, l'utilisation du même référant sans changement de sens), nous avons inclus des problèmes dont l'aire du petit carré à enlever (fig. 6) n'a pas de racine carré exacte (par exemple, aire=30 et semi-périmètre =12).
Par ailleurs, on a demandé aux élèves de ramener le jour suivant par écrit une description des étapes à suivre pour résoudre ce type de problème.

Étape 2:
Cette étape a commencé avec une discussion des descriptions des étapes de résolution des problèmes vus à l'étape 1. Les élèves ont dû discuter avec une autre personne et se mettre d'accord sur les points qui auraient donné lieu à un conflit ou à une amélioration.
En plénière, une méthode développée par un des élèves est présentée et discutée au tableau. Cela a permis à certains élèves de mieux comprendre.
Suite à cela, on a demandé aux élèves de composer des problèmes eux-mêmes en respectant la restriction suivante: les côtés du rectangle cherché doivent s'exprimer en nombre entiers; puis, dans un deuxième temps, les côtés du rectangle cherché ne doivent pas s'exprimer en nombres entiers.
On a même demandé aux élèves de trouver des réponses s'exprimant en fractions. Certains de ces problèmes seraient utilisés pour le test à la fin de l'unité.

Étape 3:
La recherche de problèmes ayant de réponses dans N^c avait pour but de faire en sorte que les élèves comprennent les détails de la démarche de résolution à un niveau de profondeur qui assure l'intériorisation des actions. À l'étape 3, on leur a présenté un problème qui demande une organisation conceptuelle différente de la précédente. Le problème, inspiré de celui d'Abû Bekr vu au §2, était le suivant (fig. 9)

Problème 2:

> Un rectangle mesure 10 unités de largeur. On construit un carré sur sa longueur. Ensemble, les deux figures ont une aire de 39 unités carrées. Quelle est la longueur du rectangle?

Après avoir reconnu que la procédure précedente ne s'applique pas au problème en question (fig. 10), des éleves ont proposé des solutions au tableau. Avec la participation des élèves, le professeur coupe le rectangle en deux sur sa longueur (fig. 10), puis prend un des morceaux pour le coller sur un autre côté du carré (fig. 11).Quand les élèves essayent d'identifier la figure, ils s'aperçoivent que «c'est presque un carré» (fig. 11). Le professeur indique

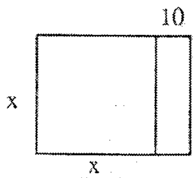


fig. 9

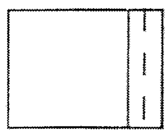


fig. 10

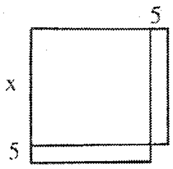


fig. 11

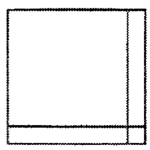


fig. 12

alors qu'on pourrait le compléter . Pour ce faire, il ajoute, au tableau, un petit carré de côté 5 (fig. 12). On donne d'autres problèmes similaires aux élèves qu'ils dovent faire en groupe. Comme à l'étape précédente, ils doivent revenir le lendemain avec une description écrite des étapes à suivre pour résoudre ce type de problème.

Étapes 4 et 5:

On discute les productions des élèves comme à l'étape 2. Suite à cela, les élèves doivent trouver les dimensions du carré, comme au problème 2, sauf que maintenant on passe à une nouvelle catégorie sémiotique: on ne donne pas de nombres concrets pour la largeur (ou base) et pour l'aire que les deux figures forment ensemble. On leur suggère d'utiliser des lettres à la place des mots et de réécrire la procédure de résolution qu'ils ont amenée le matin mais, maintenant, en utilisant les lettres choisies. Cela les amène à trouver une formule pour l'équation $x^2 + bx = c$. Après, on discute les équations $ax^2 + bx = c$ (voir fig. 13 contenant un extrait du travail fait par une élève) et $ax^2 + bx + c = 0$ (cette dernière donnant lieu à une discussion sur les nombres négatifs impossibles à modéliser dans le contexte géométrique utilisé). Le passage au symbolique ne consiste pas en une simple transcription, comme nous avons pu le noter. En effet, le symbole doit résumer maintenant l'expérience passée. Cela inclut une étape de généralisation et de réorganisation des actions qui débouche sur une description plus ample des objets mathématiques. En contre partie, les objets mathématiques se voient conférés d'une nouvelle dimension. Désormais, ils appartiennent à une catégorie conceptuelle (ou «plan de conscience») plus riche. Cela est particulièrement visible quand les élèves abordent, après avoir ré-inventé la formule de deuxième degré, des équations formulées en langage algébrique (par exemple, $2x^2 + 12x - 64 = 0$). Pour quelques équations, ils choisissent la démarche géométrique et pour d'autres ils choisissent la substitution de nombres dans les paramètres de la formule. La préférence pour une ou l'autre des méthodes semble être sous-tendue par l'existence de *tendances généralisantes* chez les élèves qu'il conviendrait d'étudier et de caractériser d'avantage dans l'avenir.

§4. Le parcours des catégories sémiotiques: un exemple

Pour trouver la formule qui permet de résoudre l'équation générale $ax^2 + bx = c$, l'élève utilise d'abord la méthode babylonienne (voir les deux dessins ci-contre). La méthode de résolution est exprimée dans une catégorie sémiotique plus générale que la catégorie sémiotique numérico-géométrique utilisée pour résoudre des problèmes où l'aire «c» et la base «b» étaient données (comme dans le problème 1 ou 2 vu ci-dessus). La stratégie de résolution suit cependant les mêmes actions que dans le cas de la catégorie sémiotique précédente. Au niveau de l'écriture, la résolution n'est pas, comme les résolutions babyloniennes, «autosuffisante» du point de vue de l'explication (c'est-à-dire du social). Certains mouvements de la pensée restent confinés au plan de la conscience.

Pour trouver la formule, l'élève s'engage dans une troisième catégorie sémantique: celle qui rendra explicite ces mouvements de pensée demeurés jusqu'alors silencieux (il y a, en particulier, une linéarité des actions au niveau de l'écriture qu'on a pas dans la catégorie sémiotique précédente). Elle commence par réécrire l'aire du grand carré (2e dessin) de deux façons différentes: d'abord en termes de l'aire d'un carré dont on connaît le côté, puis comme somme de deux aires disjointes, le «gnomon», comme disaient les grecs, et le petit carré. C'est dans cette dernière catégorie sémiotique que le détachement au contexte aura lieu: il y a des opérations qui n'ont plus d'équivalent dans la catégorie précédente: c'est le cas de la ligne 4 et suivantes.

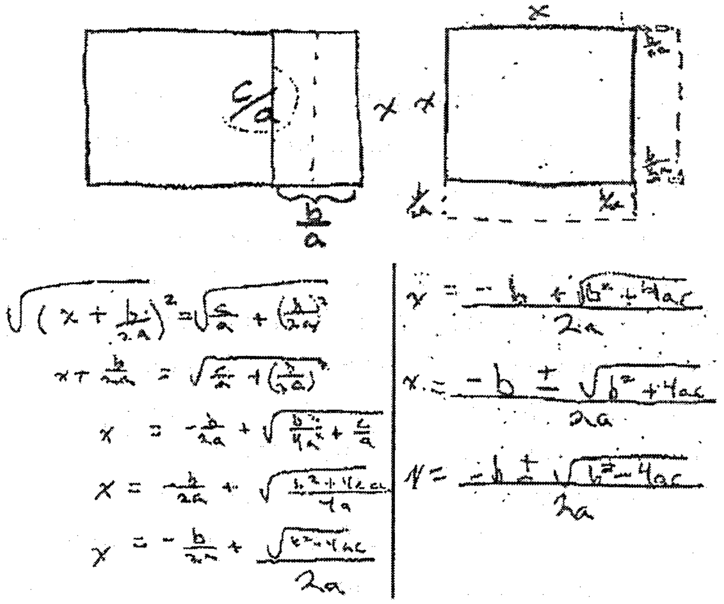


fig. 13
Une élève ré-invente la formule pour résoudre l'équation $ax^2+bx=c$

Références

Busard, H. (1968) L'Algèbre au Moyen Âge: Le «Liber Mensurationum» d'Abû Bekr, *Journal des savants*, Avril-juin, 65-124.

Høyrup, J. (1986) Al-Khwarizmi, Ibn-Turk, and the Liber Mensurationum: on the Origins of Islamic Algebra, *Erdem* 2 (Ankara), 445-484.

Høyrup, J. (1990) Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought, *Altorientalische Forschungen*,17, 27-69, 262-354.

Høyrup, J. (1995) «Les quatre côtés et l'aire» - sur une tradition anonyme et oubliée qui a engendré ou influencé trois grandes mathématiques savantes, *Actes de la 1ère Université d'été européenne* Histoire *et épistémologie dans l'éducation mathématique*, F. Lalande, F. Jaboeuf et Y. Nouazé (éds.), IREM de Montpellier, pp. 507-531.

Hughes, B. (1986) Gerard of Cremona's Translation of Al-Khwarizmi's *Al-Jabr*: A Critical Edition, *Mediaeval Studies*, No. 48, 211-263.

Lerman, S. (1996) Intersubjectivity in Mathematics Learning: A Challenge to the Radical Constructivist Paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2) 133-150.

O'Loughlin, M. (1992) Rethinking Science Education: Beyond Piagetian Constructivism Towards a Sociocultural model of Teaching and Learning, *Journal of research in science teaching*, 29 (8), pp. 791-820.

Otte, M. (1994) Historiographical Trends in the Social History of Mathematics and Science, in: *Trends in the Historiography of Sciences*, K. Gavroglu et al. (eds.), Kluwer Academic Publishers, pp. 295-315.

Wertsch, J. et Stone, C. A. (1985) The concept of internalization in Vygotsky's account of the genesis of higher mental functions, in: *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*, J. V. Wertsch (éd.), Cambridge University Press, pp. 162-179.