

**LA EVOLUCIÓN DE PARADIGMAS Y PERSPECTIVAS
EN LA INVESTIGACIÓN.
EL CASO DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS¹**

LUIS RADFORD-HERNANDEZ

UNIVERSITÉ LAURENTIENNE (CANADA)

Desde el punto de vista histórico, la didáctica de las matemáticas emergió como resultado de las necesidades sociales y económicas que planteaba la modernización del mundo europeo a fines del siglo XIX y principios del siglo XX. Dichas necesidades llevaron a una reformulación de contenidos y métodos de enseñanza. De esa cuenta, la didáctica de las matemáticas apareció no como un apéndice de las teorías pedagógicas generales sino como reflexión relativamente autónoma alrededor de nuevos contenidos curriculares.

En efecto, hacia fines del siglo XIX, las matemáticas habían alcanzado un grado de desarrollo tanto en áreas tradicionales (por ejemplo, la teoría de números y la geometría) como en nuevas áreas (la mecánica matemática, análisis numérico, etc.). Sus aplicaciones en la industrialización del mundo no dejaban duda de que el futuro reposaba en una educación matemática escolar adecuada. Dado que, al alba del siglo XX, el progreso de un país no podía ser medido sino a través de su avance tecnológico, el progreso implicaba una educación matemática y científica de las nuevas generaciones. En este contexto, la matemática aparece como imprescindible. Es precisamente esta idea la que expresa de manera clara en 1914 el distinguido matemático francés Émile Borel: “Sin los principios de la mecánica, la geometría analítica y el cálculo diferencial, nada existiría de lo que constituye la civilización moderna.” (Borel, 1914, p. 205).

La emergencia de lo que llamamos hoy en día la didáctica de las matemáticas fue, no obstante, un proceso lento. Y así ha sido su evolución a lo largo de su existencia. En este artículo propongo una mirada retrospectiva a la emergencia y evolución de sus paradigmas, tratando de poner en evidencia los contextos socioculturales en que dicha didáctica se ha movido. Esta mirada histórica puede hacer aportes, me parece, a algunos de los ejes temáticos de la investigación

¹ Este artículo proviene de un programa de investigación subvencionado por The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH).

contemporánea, en particular a aquellos en los que se indaga la confrontación de paradigmas y perspectivas en la investigación en didácticas, así como las contribuciones de las didácticas a las áreas de conocimiento. En la primera parte me detengo sobre algunas discusiones que tuvieron lugar en el momento de la emergencia de la didáctica de las matemáticas y las ideas adoptadas alrededor del aprendizaje. En la segunda parte presento una visión general de la didáctica actual de las matemáticas, a la luz de dos de sus paradigmas más importantes. En la última parte hago un bosquejo de las nuevas tendencias ejemplificada con la aparición de paradigmas socioculturales.

LA EMERGENCIA DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

La didáctica de las matemáticas emergió directamente de la introducción de nuevos contenidos curriculares y de las necesidades de preparación de los futuros profesores de esta disciplina. Esta didáctica aparece acompañada de un cambio de posicionamiento de las matemáticas en la escuela. Como comenta Schubring, refiriéndose al caso de Francia, “en la mayor parte del siglo XIX, no hubo una enseñanza regular de las matemáticas... más bien [su enseñanza] fue reducida a unas pocas nociones en los primeros años [de escolaridad] y una instrucción concentrada hacia el final de la escuela” (Schubring, 2003, pp. 52-53). Schubring muestra, en efecto, que en las clases de principios de secundaria (Sixième, Cinquième y Quatrième), las matemáticas, en 1885, se enseñaban una hora por semana, aumentando a 4 al final, como parte del curso de filosofía. (*ibid.*, p. 51). Sin embargo, los cambios sociales y económicos de fines del siglo XIX y principios del siglo XX exigieron una educación más profunda, en particular para hacer frente a las necesidades de formación de técnicos y científicos al servicio de la industria. Es dentro de este contexto que, en 1902, Francia operó un cambio radical en su enseñanza secundaria, creando varias “secciones”. En las primeras el énfasis se puso en los estudios clásicos, mientras que en las segundas la prioridad se dio a las ciencias. En éstas, las ciencias y matemáticas se enseñan entre 11 y 18 horas por semana.

Este cambio no fue realizado sin oposiciones. Los profesores de estudios clásicos veían un peligro en el auge que tomaban las matemáticas. En un discurso de apertura de la *Conferencia internacional de la enseñanza de las matemáticas*, pronunciado por el matemático Gaston Darboux en 1914, éste cuenta una anécdota que ilustra el sentimiento suscitado por el cambio. Darboux, presidente perpetuo de la academia de ciencias de Francia, menciona el caso de un profesor de letras que comentaba con mucha pena que las ciencias estaban invadiendo el mundo.²

² Textualmente, el profesor de letras dice : «Les mathématiques sont quelque chose de bien envahissant» (Darboux, 1914, p. 193).

Es precisamente a fines del siglo XX, en medio de una efervescencia que conlleva a una nueva manera de ver el mundo, que aparece la primera revista internacional sobre la enseñanza de las matemáticas. Creada en 1899 por dos matemáticos, el francés Charles-Ange Laisant (1841-1920) y el suizo Henri Fehr (1870- 1954), *L'Enseignement Mathématique* se propone ofrecer un fórum donde las cuestiones de enseñanza de las matemáticas puedan ser discutidas desde una perspectiva de cooperación internacional. Fue apenas algunos años más tarde, en 1908 para ser precisos, que se funda la *Comission internationale de l'enseignement des mathématiques* (CIEM/ICMI) durante el encuentro del Congreso internacional de matemáticos que tuvo lugar en Roma (Menghini, Furinghetti, Giacardi y Arzarello, 2008).

Naturalmente, la reforma curricular que se opera en varios países europeos conlleva a un replanteamiento de los fines de la educación matemática. El contexto histórico, social y económico de donde aparece la didáctica de las matemáticas hace que ésta nazca dentro de la tensión entre dos formas de concebir los fines de la enseñanza de esta disciplina, una que podemos llamar *clásica* por su apego a la tradición, y otra, que podemos llamar *moderna*. Mientras que la primera aboga por una enseñanza en la que lo que prima es el poder que las matemáticas tienen para formar un espíritu riguroso, cultivado y lógico, la segunda intercede por su valor útil, aplicado y transformador.

Un representante de la posición clásica es el matemático M. Veronèse, que afirma que “[l]es mathématiques ont un côté éducatif, elles doivent aider à la culture de l'esprit” (Veronese, en Fehr, 1911 p. 464). Para Veronèse, las matemáticas deben ayudar a salvar la enseñanza del giro utilitarista que tomaba la educación de entonces. Veronèse dirá: “Si l'industrialisme ou l'utilitarisme matériel avait en effet des influences prépondérantes dans l'enseignement des écoles moyennes, les mathématiciens devraient les combattre” (*op. cit.*, p. 465). Esta opinión es también expresada por A. N. Whitehead para quien “To teach mathematics is to teach logical precision. A mathematical teacher who has not taught that has taught nothing” (1913, p. 108), en tanto que “the object of a mathematical education is to acquire the powers of analysis, of generalization, and of reasoning” (p. 110).

Un representante de la posición moderna es Carlo Bourlet. Hablando de los profesores de matemáticas, dice:

Notre rôle est terriblement lourd, il est capital, puisqu'il s'agit de rendre possible et d'accélérer les progrès de l'Humanité tout entière. Ainsi conçu, de ce point de vue général, notre devoir nous apparaît sous un nouvel aspect. Il ne s'agit plus de l'individu, mais de la société ; et, lorsque nous recherchons la solution d'un problème d'enseignement, nous devons choisir une méthode non pas suivant sa valeur éducative pour l'élève isolé, mais uniquement suivant sa puissance vulgarisatrice pour la masse. (Bourlet, 1910, p. 374)

Como vemos, el nacimiento del siglo XX está marcado por la emergencia de una nueva forma de consciencia: la consciencia de un individuo que se mide

contra o a favor de la tecnificación de la vida y de la comprensión de sus propias posibilidades en la transformación de la naturaleza. Es una consciencia que presencia el desplazamiento de los valores clásicos, representados anteriormente por las letras y la filosofía, y la aparición de nuevos valores promovidos por las matemáticas, las ciencias y la tecnología.

LA CONCEPCIÓN DEL APRENDIZAJE

Durante las discusiones realizadas en la primera mitad del siglo XX, hubo, al lado de los problemas planteados por la reorganización curricular, una toma en cuenta de los problemas que plantea al alumno aprender los nuevos contenidos. Por ejemplo, en uno de los reportes de la *Comisión internacional de la enseñanza de las matemáticas*, presentado en Cambridge en 1912, se discute del papel de la intuición y de la experiencia en la enseñanza de las matemáticas en la escuela media (écoles moyennes; ver Schubring, 2003, p. 59). Estas y otras preguntas similares fueron abordadas desde el marco de una pedagogía positivista compeana. Así, una postura frecuente consistió en introducir las matemáticas desde un punto de vista experimental; dicha experiencia era considerada como la preparación del alumno para un estudio posterior en el cual serían abordados elementos deductivos de manera progresiva. En un documento francés, su autor sugiere que el profesor utilice “fréquemment les représentations graphiques, non seulement pour mieux montrer aux élèves l’allure des phénomènes, mais pour faire pénétrer dans leur esprit les idées si importantes de fonction et de continuité” (ver Schubring, 2003, p. 53).

Los supuestos ontológicos y epistemológicos en los que se sienta la discusión didáctica son aquellos comunes al pensamiento moderno y que podemos resumir de la manera siguiente.

A nivel ontológico, el pensamiento moderno supone, siguiendo una línea de pensamiento iniciada por de Cusa, da Vinci y Galileo, que los secretos de la naturaleza pueden ser descifrados a través del uso paciente del método científico. Las matemáticas y las ciencias contienen no solamente la clave para tal desciframiento sino también, y sobre todo, las bases para la transformación y sumisión de la naturaleza al hombre.

A nivel epistemológico, se supone una *continuidad* entre lo sensorial y lo conceptual. Los principios epistemológicos y ontológicos se amarran en la creencia en una adecuación entre *ordo rerum* y *ordo idearum*, esto es, entre el orden de las cosas en el mudo y el mundo de las ideas.

El discurso didáctico que surge de dichas creencias se traduce en la convicción que el origen del conocimiento empieza por los sentidos. Se asume que la estructura de la razón humana es tal que ésta recoge el conocimiento sensorial del mundo y lo transforma en pensamiento abstracto. Es con ese trasfondo

que un tema central de la enseñanza de la geometría fue precisamente el de la articulación entre el conocimiento empírico y el pensamiento deductivo.

La aparición de un discurso epistemológico más sofisticado durante el periodo que va de 1950 a 1970, no pudo resolver, sin embargo, los problemas de fondo con los que se enfrentó la didáctica de las matemáticas en sus inicios. Luego de su crisis de fundamentos, el saber matemático y las matemáticas mismas se reformularon en términos estructurales. Este cambio conceptual no fue propio a las matemáticas sino que abarcó otras áreas del saber, como la sociología, la lingüística y la antropología. De esa cuenta podemos decir que la solución que se buscó al problema de la fundamentación de las matemáticas pertenece a un giro paradigmático que va más allá de las matemáticas y que abarca una nueva concepción del saber. Dentro del ámbito de la enseñanza de las matemáticas, nuevas reorganizaciones curriculares vieron la luz en lo que se conoció como la introducción de la matemática moderna en la escuela. Se hicieron esfuerzos en lo que parecía ser una reorganización razonable del currículo. Sin embargo, como Howson (2003, p. 127) indica, durante los años 1950 a 1970, un hecho se volvió más y más obvio: lo infundado de la idea que el éxito en el aprendizaje reside en explicar clara y lógicamente las matemáticas. Así, la controversia perenne entre habilidades computacionales y comprensión, o la relación entre lo concreto y lo abstracto, apareció de nuevo con gran fuerza (Siu, 2003, p. 188).

LA CONSOLIDACIÓN DE LA DIDÁCTICA COMO ÁREA DE INVESTIGACIÓN

Hay varios elementos en la base de la consolidación de la didáctica de las matemáticas como disciplina “científica” en el siglo XX. Uno de ellos fue la creación de dos nuevas revistas más o menos al mismo tiempo, *Educational Studies in Mathematics*, en 1968, y *Journal for Research in Mathematics Education*, en 1970. Otro elemento importante fue la creación del *International Group of Research for the Psychology of Mathematics Education* (PME) en 1976. Centrada en gran medida en el contenido, la problemática general pasa progresivamente a preocuparse por los *procesos de comprensión del estudiante* dentro de una visión estructural de las matemáticas. En un documento que proviene de un simposio de profesores de Lausanne, publicado al final del volumen 1 de *Educational Studies in Mathematics* de 1968, se consignan 8 puntos en los que los participantes han alcanzado un consenso general. En uno de ellos (el número 2 de la lista) se expresa la idea de que la educación matemática no debe ser una simple acumulación de conocimientos. Se insiste en dicho documento, que las matemáticas son una ciencia de estructuras generales y que la enseñanza de las matemáticas debe ser dirigida hacia el dominio y uso de esas estructuras en la comprensión de la realidad:

Mathematics develop [sic] more and more towards a general science of structures. These structures charge it with a remarkable power of application, information and unification. The knowledge and the mastership of these structures, its

utilization in the grasp of reality are the real objectives of mathematics teaching.
(*Autor desconocido*, 1968, p. 244)

DOS PARADIGMAS MAYORES DE LA SEGUNDA MITAD DEL SIGLO XX

En la concepción estructuralista de las matemáticas prima un formalismo que suprime prácticamente todo aquello que, de una manera u otra, tiene que ver con el individuo. Si Kant había insistido que la conceptualización es sostenida por la intuición (es decir una manera sensible de representación del objeto conceptual), dejando así una ventana abierta para la expresión de la subjetividad, la concepción estructuralista reposa sobre el signo abstracto (Nachanian, 1979). Louis Couturat expresa bien esta idea a principios del siglo XX:

Si l'on considère sans parti pris l'évolution de la mathématique depuis trente ou quarante ans, on est obligé de constater que tout le grand travail de refonte et d'épuration logique qu'elle a subi, notamment de la part de Weierstrass et de son école, a tendu sans cesse à affranchir les démonstrations mathématiques de l'intuition, et y a finalement réussi. (1904, p. 129)

Naturalmente, la exclusión del sujeto no es propia al discurso matemático; dicha exclusión es típica de la corriente estructuralista del siglo XX y fue tema de gran debate entre filósofos, como Sartre y Foucault (ver, por ejemplo, Le Bon, 1967). Esta llevó, en las matemáticas mismas, a oposiciones y debates y a la creación de la escuela intuicionista de Brouwer (Brouwer, 1948, 1952).

Obviamente, la tensión entre sujeto y saber matemático no podía ser evitada en el campo de la didáctica de las matemáticas. ¿Cómo puede el sujeto lograr el acceso a ese saber cultural matemático cuyo discurso lo excluye de entrada? Dos paradigmas mayores de la educación matemática dan una respuesta diferente a esta pregunta. El primero, de inspiración piagetiana, fue desarrollado en Estados Unidos: es el constructivismo americano, que se divide en varias ramas de acuerdo al grado en que la dimensión social se ve más o menos tomada en cuenta. Sin embargo, aún en su versión más social, el constructivismo queda marcado por su gran individualismo; esto es, su eje focal queda enmarcado por su atención al sujeto que aprende. El énfasis en el sujeto lleva a una desatención de lo cultural en sí. Concebido de esta manera, el problema principal del constructivismo no es tanto cómo enseñar las matemáticas, sino entender cómo es que el alumno las aprende. El segundo paradigma lo constituye la Teoría de las Situaciones Didácticas, una teoría desarrollada en Francia. Aquí la situación se invierte. Aunque inspirado inicialmente por la epistemología genética de Piaget, este paradigma centra su atención sobre el saber matemático cultural y postula que dicho saber es adquirido a través de un trabajo por el sujeto alrededor de situaciones matemáticas. Un problema principal de este paradigma es la búsqueda de esas situaciones “fundamentales” que convocan el saber en cuestión.

Los postulados de ambas teorías pueden resumirse de la siguiente manera.

Constructivismo

p_1 : el conocimiento no es recibido pasivamente por el sujeto sino construido por éste.

p_2 : la función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización de la experiencia del mundo, no al descubrimiento de una realidad ontológica (ver von Glasersfeld, 1995, p. 18).

A estos postulados se añade otro que sirve para operacionalizar los dos primeros, aun si no se enuncia explícitamente:

p_3 : el sujeto no solamente construye su propio saber sino que lo construye de manera autónoma.

En el postulado p_1 reconocemos la oposición del constructivismo al aprendizaje por transmisión promovida por el conductismo y su pedagogía de enseñanza directa. El postulado p_2 , expresa la ontología constructivista y constituye lo que sus adherentes consideran su carácter más distintivo: la construcción del conocimiento por el sujeto es idiosincrática y sirve para interpretar el mundo. Como dice von Glasersfeld (1995), el conocimiento que construye el sujeto no es ni verdadero ni falso; es simplemente *viable*. El postulado p_3 indica la manera en que los dos primeros son operacionalizados y refleja la naturaleza individualista del paradigma.

Teoría de situaciones

La teoría de situaciones didácticas busca ofrecer un modelo inspirado de la teoría matemática de juegos para investigar, de manera *científica*, los problemas relacionados con la enseñanza de las matemáticas y los medios para mejorar dicha enseñanza. Sus principios epistemológicos son los siguientes:

p_1 : aprender es –siguiendo la pauta de la epistemología genética de Piaget– una forma cognitiva de adaptación.

p_2 : el conocimiento resulta de la solución óptima a cierta situación o problema.

Un ejemplo de la operacionalización de esos postulados aparece en el siguiente pasaje:

La concepción moderna de la enseñanza va a requerir del profesor que provoque la adaptación esperada en el alumno a través de una juiciosa escogencia de problemas que él pone frente a ellos. Los problemas, escogidos de manera que el estudiante pueda aceptarlos, deben hacer que el estudiante actúe, hable, piense y que evolucione por su propia cuenta. (Brousseau, 1986, p. 49)

La juiciosa escogencia de los problemas es, por supuesto, una tarea delicada. Su posibilidad concreta es expresada en el siguiente postulado epistemológico de existencia:

p_3 : para todo conocimiento [matemático] existe una familia de situaciones susceptible de darle un sentido correcto. (Brousseau, 1986, p. 67)

Dentro de este contexto, se espera del alumno que acepte el problema (su “devolución”, en la terminología de la teoría de situaciones) con el fin de resolverlo, lo que, dentro de la teoría, supone recurrir al conocimiento esperado.

Aunque ambos paradigmas se erigen contra la enseñanza magistral que campeaba en los años 70 y que llevaba a un aprendizaje sin comprensión verdadera, los dos dan una respuesta fundamentalmente distinta a la pregunta del acceso del sujeto al saber matemático. De hecho, cada uno de ellos plantea problemas de investigación completamente diferentes. Aún si este breve resumen no hace de ninguna manera justicia a la complejidad de estos dos paradigmas, podemos ver de lo que precede que el constructivismo explora la construcción personal de conocimientos del alumno e investiga la manera en que el profesor puede facilitar dicha construcción sin afectar la autonomía del alumno. La Teoría de las Situaciones estudia las características epistemológicas que llevan al alumno a la adquisición del conocimiento cultural e investiga la interacción del alumno con el profesor, y de manera más general, la interacción del alumno con el medio (*milieu*).

El constructivismo se enreda en un subjetivismo que lleva a un relativismo conceptual del conocimiento y a un inevitable solipsismo. Detrás de su planteamiento teórico yace una justificación ética que reposa en el concepto de autonomía y libertad que se atribuye al sujeto. Evidentemente, esta posición lleva a una serie de dificultades desde el punto de vista del profesor, pues, dados los postulados de la teoría, el profesor no puede intervenir en la construcción del saber del alumno bajo pena de infringir la autonomía y la libertad de éste. El profesor constructivista vive atormentado por la culpa potencial de revelar al alumno el saber que debe ser construido y arruinar así el proyecto de aprendizaje (Radford, 2009a).

El profesor de la teoría de situaciones vive también bajo la misma culpa potencial. El “Efecto Topaze” es un ejemplo. Dicho efecto consiste en que, al interactuar con el alumno, el profesor puede terminar por ofrecer índices al alumno y que, al hacer esto, produzca un aprendizaje que, a los ojos de la teoría, no es genuino sino aparente. Hay aquí una semejanza entre los dos paradigmas. Dicha semejanza se explica por el hecho que ambos se inspiran de los principios del constructivismo piagetiano y su sujeto autónomo,³ conceptualización que Piaget toma de Kant y los filósofos del Siglo de las Luces (Radford, 2008). Así, ambos

³ “The goal of intellectual education is not to know how to repeat or retain ready-made truths.... It is in learning to master the truth by oneself”. (Piaget, 1973, p. 106)

paradigmas asumen que el aprendizaje debe emanar del sujeto que aprende. Sin embargo, aunque importante, la semejanza entre estos paradigmas es relativa. Los dos paradigmas vehiculan en efecto una concepción diferente de la didáctica de las matemáticas, del sujeto que aprende, del saber matemático y de su forma de adquirirlo. De esta cuenta, las diferencias entre estos dos paradigmas no son simplemente diferencias a nivel de sus respectivos énfasis o preguntas de investigación.

Para el constructivismo, la didáctica trata del aprendizaje de sujetos *concretos* pensados, de entrada, como sujetos dotados de un poder de determinación propia. Se trata de un sujeto conceptualizado como sujeto auto-regulado, capaz de generar sus propios significados, escogencias y objetivos. El sujeto del paradigma constructivista es de esa cuenta un “bricoleur d’hypothèses”, alguien que construye hipótesis idiosincráticas sobre el mundo, siempre listo a cambiarlas si la necesidad parece así requerirlo.

El sujeto de la Teoría de las Situaciones no es un sujeto concreto. Es un sujeto epistémico. “El sujeto de la situación didáctica,” dice Brousseau (2005a, p. 23), “es una especie de sujeto teórico”, pues “cuando se hace didáctica, uno no se ocupa de un sujeto concreto, uno va a tomar en cuenta las características generales de un sujeto: lo que éste es susceptible de hacer y comprender” (*ibid.*). El sujeto de la teoría de situaciones aparece así descrito en términos de la situación matemática y de los conocimientos matemáticos que la situación convoca. El problema general es, pues, investigar las condiciones de las situaciones a través de las cuales el sujeto epistémico dará eventualmente un significado a esos conocimientos.

Evidentemente, las diferencias conceptuales resumidas anteriormente reaparecen a nivel metodológico. La metodología constructivista se sitúa en el campo de las ciencias sociales. Ésta se inspira del interaccionismo simbólico alemán y de análisis cualitativos del discurso. Por su lado, la Teoría de las situaciones se presenta como una teoría científica, cuya cientificidad hay que entenderla dentro de los grandes esfuerzos de modelización propios de las ciencias naturales. Esto no quiere decir, por supuesto, que la teoría de situaciones es una teoría positivista. Lo que la teoría de situaciones toma prestado de las ciencias es otra cosa: es esa *manera científica* con que mira los fenómenos de estudio, esto es, los fenómenos del aula.

Como hemos dicho anteriormente, la teoría de situaciones concibe la didáctica como *modelización* de los fenómenos del aula en la cual “los conocimientos matemáticos se manifiestan como instrumentos de control de las situaciones” (Barallobres y Giroux, 2008, p. 3). O como dice Brousseau, “il s’agit de modéliser par des jeux formels ces rapports locaux qui s’établissent entre les protagonistes. Puis d’utiliser ces modélisations pour une approche systémique dans laquelle les chaînes d’événements nécessaires sont confrontées aux chaînes d’événements observés” (Brousseau, 1986, p. 34).

Efectivamente, detrás de la concepción de la didáctica que vehicula la Teoría de las Situaciones hay una ontología según la cual, más allá de las contingencias de los hechos observados, yace algo más *permanente* que viene a constituir la trama central de la didáctica. Es precisamente esta idea de permanencia que Regis resalta al decir que “lo que me parece característico de Guy [Brousseau] es esta búsqueda de la necesidad a través de la contingencia” (Gras, 2005, p. 41). Claro, no se trata de una visión reductora “causa-efecto” de la realidad. Brousseau dice: “los fenómenos de la didáctica son esencialmente fenómenos estocásticos” (2005b, p. 43). Se trata más bien de asumir una ontología que gobierna, a través de reglas y regularidades, los fenómenos estudiados en el seno de los cuales aparecen eventos epistémicos *necesarios*, eventos relativos al conocimiento, su formación y evolución, eventos que pueden ser formulados y estudiados de forma *científica*, bajo un diseño adecuado y un control estricto de variables.

Frente al supuesto ontológico de la existencia de reglas que permanecen más allá de la contingencia fenomenal, funciona, pues, un supuesto epistemológico acerca de las matemáticas. Las matemáticas son imaginadas como si estuviesen dotadas de una lógica interna que asegura un diálogo con el sujeto epistémico (a través de una retracción apropiada que surge del diseño del medio didáctico), lógica y dialogo que hacen posible la evolución de las conceptualizaciones del alumno “por su propia cuenta”.

Vemos, pues, que el aula es a la Teoría de las Situaciones lo que la naturaleza es a Galileo: una realidad detrás de la cual operan reglas generales que se abren a una lectura inteligible a través de la modelización científica y su concomitante escogencia y control de las variables en juego.

LA EMERGENCIA DE NUEVOS PARADIGMAS

En los últimos años han aparecido en la didáctica de las matemáticas cierto número de aproximaciones de tipo sociocultural. Para estas aproximaciones, en particular para aquellas que se inspiran de los trabajos de Vygotski, el aula y sus fenómenos de enseñanza-aprendizaje no son investigados a través de modelizaciones. Dichos fenómenos son más bien vistos como *dinámicos* o *emergentes*, en el sentido de las ciencias sociales (Davis y Simmt, 2006), con un énfasis en métodos interpretativos etnográficos. Así, dichas aproximaciones vehiculan de entrada concepciones que son incompatibles con los procedimientos y posiciones ontológicas y epistemológicas de las ciencias naturales. Lo menos que puede decirse es que hay una ruptura con el paradigma en que se inscribe la Teoría de las Situaciones y su forma de entender la didáctica de las matemáticas. Esta ruptura se traduce en concepciones diferentes en cuanto a la manera de teorizar conceptos claves como el alumno, el profesor, el saber y el aprendizaje. Por ejemplo, los sujetos de investigación no son sujetos teóricos, epistémicos, sino sujetos *concretos*.

Desde el punto de vista metodológico, hay cierta cercanía entre las aproximaciones socioculturales y el constructivismo, pero esa cercanía es en realidad ilusoria.

En efecto, por un lado, los fenómenos del aula emergen no como fenómeno *sui generis*, sino como fenómenos sostenidos por una historia cultural e histórica del saber. El aula no es pues vista como espacio auto-suficiente, cerrado en sí mismo, como lo hace el constructivismo. El saber que circula en el aula no es un saber construido *ex nihilo* sino que es un saber histórico.

El primer postulado de las aproximaciones socioculturales resume esta idea; dicho postulado puede enunciarse de la manera siguiente:

p_1 : el saber es generado por los individuos en el curso de las prácticas sociales constituidas histórica y culturalmente.

Por otro lado, el sujeto sobre el que teorizan las aproximaciones socioculturales no es movido por un poder de auto determinación cuyos proyectos y significados emanan del sujeto en cuestión, como sugieren los constructivistas. A esta concepción burguesa-liberal del sujeto constructivista, las aproximaciones socioculturales oponen un sujeto contextual, cultural, concreto cuya formulación de proyectos y de significados no pueden hacerse sino dentro del espectro de posibilidades que la cultura pone a su disposición, a través de instituciones y sus inevitables redes de distribución de poder y saber.

Esto explica, por ejemplo, que dentro de ciertas teorías socioculturales, una atención importante es puesta en la manera cómo, a través de las estructuras económicas, sociales, políticas, etc. que lo trascienden, el sujeto se convierte en sujeto pensante y sensitivo (Alrø & Skovsmose, 2002; Brown, 2008; Lerman, 1996; Morgan, 2006; 2009; Valero, 2009; Valero & Zevenbergen, 2004; Skovsmose, 2008).

La ruptura del paradigma sociocultural con los paradigmas examinados en la sección anterior se explican también en términos de lo que las teorías socioculturales entienden por cognición y saber. Para los socioculturalistas, el concepto de adaptación (entendido como conocimiento viable o como solución óptima a una situación) es insuficiente para dar cuenta de la producción y apropiación del conocimiento. Una de las razones es que los socioculturalistas consideran la cognición no como resultado de estructuras epistémicas que trascienden la cultura, sino como una forma cultural e históricamente constituida de reflexión y acción incrustada en prácticas sociales, mediatizadas por el lenguaje, la interacción social, los signos y artefactos (Arzarello, 2006; Bagni, 2009; Bartolini-Bussi y Mariotti, 2008; Radford, 2009b; Roth, 2009).

Para las concepciones socioculturales, el conocimiento es producido por sujetos concretos subsumidos en tradiciones históricas de pensamiento. El sujeto de las teorías culturales es, en efecto, un sujeto que piensa y siente dentro de un trasfondo cultural que va más allá de las necesidades de

adaptación y de meros impulsos y afanes a-históricos, lógico-universales, de producción de un saber viable u óptimo. En otros términos, la voluntad de saber –la *volonté de vérité*, para utilizar la expresión de Michel Foucault (1971)– y el saber mismo son mediatizados por valores y formas culturales de pensamiento (estético, político, científico, matemático, etc.) que orientan (sin imponer) el desarrollo del saber en ciertas direcciones. Es por eso que la interpretación que hace la Teoría de las Situaciones de la adaptación como motor de la cognición aparece insuficiente: la adaptación no puede plantearse en términos de ciertos mecanismos universales, intrínsecos al saber matemático. Dicho de otra forma, la lógica de las matemáticas es insuficiente para explicar la producción y el aprendizaje de éstas. El pensamiento matemático está siempre enmarcado por la racionalidad de la cultura en donde éste se desarrolla, trascendiendo así la esfera de la acción matemática (Lizcano, 1993; Radford, 1997).

El segundo postulado de las aproximaciones socioculturales expresa esta idea de la manera siguiente:

p_2 : la producción del saber no corresponde a necesidades de adaptación sino que está enmarcado por formas culturales de pensamiento imbricadas en una realidad material y simbólica, la cual provee las bases para interpretar y transformar el mundo de las personas y los conceptos que éstas forman acerca de ese mundo.

UN EJEMPLO: LA TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN

La teoría de la objetivación (TO) es un ejemplo concreto de aproximación sociocultural que ilustra la orientación de nuevos paradigmas en la didáctica de las matemáticas (Radford, 2008).

Para la TO la didáctica no puede ser reducida a la difusión de saberes disciplinarios, como sugiere, por ejemplo, la Teoría de las Situaciones. Dentro del contexto político y social de las sociedades globalizadas y multiétnicas contemporáneas, la educación no puede limitarse solamente a la transmisión de saberes. Para responder a las exigencias del mundo contemporáneo, las didácticas disciplinarias, y la didáctica de las matemáticas en particular, deben ocuparse tanto del *saber* como del *ser*.

Es dentro de esta concepción general de la didáctica que la TO plantea el problema del aprendizaje como un proceso social que se mueve simultáneamente en las dos esferas: la del saber y la del ser. Aprender no es simplemente adquirir un conocimiento sino también un proceso formativo y *trans*-formativo del ser, del sujeto que aprende. Ser y saber son, en efecto, considerados dentro de la TO los dos lados de una misma moneda: dos aspectos interrelacionados de la enseñanza y del aprendizaje.

La formulación del aprendizaje como un proceso en el que ser y saber son mutuamente constituidos lleva a una manera no utilitarista ni instrumental de ver la didáctica de las matemáticas. Esta formulación lleva igualmente a una concepción no tecnicista de las matemáticas, concepción contra la cual se pronunciaron en el pasado filósofos tales como Heidegger y Husserl.

Dentro de esta perspectiva, el aula y sus fenómenos de enseñanza-aprendizaje aparecen enraizados en una dimensión ética inevitable. El aula aparece como el espacio del crecimiento de formas culturales de pensamiento y de ser.

Para teorizar el crecimiento de formas culturales de pensamiento y de ser, la TO moviliza dos constructos teóricos interrelacionados, el primero es el de objetivación propiamente dicho y el segundo el de subjetivación. El primero se expresa en términos de los procesos sociales a través de los cuales el alumno alcanza una comprensión crítica, a través de dotación de significados, de los objetos culturales matemáticos y de la lógica cultural de estos. El segundo se expresa en términos de los procesos intersubjetivos a través de los cuales el alumno se posiciona en las configuraciones de las prácticas sociales a las que participa y a través de las cuales se reconoce y es reconocido miembro de una comunidad sociocultural.

Entre las preguntas de investigación de la teoría están aquellas en que se trata de dar cuenta de la manera en que los procesos de objetivación y de subjetivación ocurren. Obviamente, estos procesos no son conceptualizados como naturales. Estos procesos son considerados *culturales*. Desde esta perspectiva no se espera que ellos provengan del “interior” del sujeto. Estos provendrán de la interacción del sujeto con su medio, de la participación activa y responsable del sujeto en la praxis escolar. Los procesos de objetivación y subjetivación son procesos mediatizados por el cuerpo, el lenguaje, los signos, los artefactos y la interacción social. Esto significa que, metodológicamente hablando, la TO hace un esfuerzo por rastrear las acciones del alumno que lo conducen a objetivar el saber y a posicionarse como individuo crítico, responsable y abierto. Esta metodología implica un estudio minucioso de la dimensión fenomenológica del encuentro del alumno con el saber y con las formas de ser de la cultura (Miranda, Radford y Guzmán, 2007; Radford, Bardini y Sabena, 2007). La TO retiene la idea de trabajo de los alumnos alrededor de una “situación” que ofrece la teoría de situaciones, pero sin adjudicarle el mismo valor epistémico. La “situación” aparece como noción heurística sujeta a un análisis *a priori* (Artigue, 1995, 2009) y semiótico (Duval, 1995, 1998), que opera, no en un espacio a-didáctico, sino dentro de una zona proximal de desarrollo (Vygotsky, 1987). Para realizar dicha teorización, la TO se inspira además de la psicología vygotskiana y de la fenomenología de Husserl, de la fenomenología francesa, en particular de los trabajos fundadores de Merleau-Ponty (1945) y de la generación de fenomenólogos que lo siguieron, como Michel Henry (1965, 2003) y Jean-Luc Marion (1997). La dimensión ética se inspira de los trabajos de Bakhtin (1990) y de las corrientes francesas sobre la alteridad iniciadas por Paul Ricoeur (1990) et Emmanuel Lévinas (2006).

Aprender es, en esta perspectiva, reconocerse en tanto que ser histórico, cultural, político, responsable, y donde responsabilidad significa no solamente aquella que atañe nuestras propias acciones: responsabilidad significa sobre todo comprender y asumir nuestra posición en una cadena histórica del ser y del saber, y comprometerse en la búsqueda de una realización humana que es más que personal; pues la realización del otro es también la mía.

BIBLIOGRAFÍA

- Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique*. New York: Kluwer.
- Artigue, M. (1995). *The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics education*. Paper presented at the Proceedings of the 1995 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group, University of Western Ontario.
- Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winsløw (Ed.), *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings of NORMA08*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking*, 267-299.
- Autor desconocido (1968). Propositions for the teaching of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 244.
- Bagni, G. T. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.
- Barallobres, G., & Giroux, J. (2008). Modélisation et scientificité dans la didactique des mathématiques. Le cas de la Théorie de Situations Didactiques. *Actes du colloque international "Les didactiques et leurs rapport à l'enseignement et à la formation. Quel statut épistémologique de leurs modèles et de leurs résultats?"* Bordeaux.
- Bartolini Bussi, M., & Mariotti, M., A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education (2nd Edition)* (pp. 746-783). New York: Routledge, Taylor and Francis.
- Bakhtin, M. (1990). *Art and answerability*. Austin: University of Texas Press.
- Borel, É. (1914). L'adaptation de l'enseignement secondaire aux progrès de la science [The adaptation of high-school teaching to the progress of science]. *L'Enseignement Mathématique*, 16, 198-210.
- Bourlet, C. (1910). La pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire. *L'Enseignement Mathématique*, 12, 372-387.

- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (2005a). Réponses orales à Gérard Vergnaud. In M.-H. Salin, P. Clanché & B. Sarrazy (Eds.), *Sur la théorie des situations didactiques* (pp. 22-28). Grenoble: La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (2005b). Réponses orales à Régis Gras. In M.-H. Salin, P. Clanché & B. Sarrazy (Eds.), *Sur la théorie des situations didactiques* (pp. 43-47). Grenoble: La pensée sauvage.
- Brower, L. E. J. (1948). Consciousness, philosophy, and mathematics. *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy*, 1, 1235-1249.
- Brower, L. E. J. (1952). Historical background, principles and methods of intuitionism. *South African journal of Science*, 49, 139-146.
- Brown, T. (2008). Lacan, subjectivity, and the task of mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (3), 249-263
- Couturat, L. (1904). Kant et la mathématique moderne. *Bulletin de la Société française de Philosophie*, 4e année, 125-134.
- Darboux, G. (1914). Discours à la réunion d'ouverture de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique. *L'Enseignement Mathématique*, 16, 192-197.
- Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 293-319.
- Duval, R. (1995). *Sémoisis et pensée humaine*. Bern: Lang.
- Duval, R. (1998). Signe et objet, I et II. *Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg*, 6, 139-196.
- Fehr, H. (1911). Compte rendu du congrès de Milan. *L'Enseignement Mathématique*, 13, 437-511.
- Foucault, M. (1971). *L'ordre du discours*. Paris: Gallimard.
- Glaserfeld von, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London: The Falmer Press.
- Gras, R. (2005). Questions de Régis Gras. In M.-H. Salin, P. Clanché & B. Sarrazy (Eds.), *Sur la théorie des situations didactiques* (pp. 40-42). Grenoble: La pensée sauvage.
- Henry, M. (1965). *Philosophie et phénoménologie du corps*. Paris: Presses universitaires de France.
- Henry, M. (2003). Phenomenology of life. *Journal of Theoretical Humanities*, 8(2), 97-110.
- Howson, G. (2003). Geometry: 1950-70. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. Hodgson & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of L'Enseignement Mathématique* (pp. 113-131). Geneva: L'Enseignement Mathématique.

- Le Bon, S. (1967). Un positiviste désespéré: Michel Foucault. *Les temps modernes*, 248, 1299-1319.
- Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 133-150.
- Lévinas, E. (2006). *Totalité et infini. Essai sur l'extériorité*. Paris: Totalité et infini. Essai sur l'extériorité.
- Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Barcelona: Editorial Gedisa.
- Marion, J.-L. (1997). *Étant donné*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Menghini, M., Furinghetti, F., Giacardi, L., & Arzarello, F. (Eds.). (2008). *The first century of the international commission on mathematical instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*. Rome: Enciclopedia Italiana.
- Merleau-Ponty, M. (1945). *Phénoménologie de la perception*. Paris: Gallimard.
- Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 1-26.
- Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics*, 61, 219-245.
- Morgan, C. (2009). Understanding practices in mathematics education: structure and text. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 49-66). Thessaloniki, Greece.
- Nachanian, M. (1979). *La question générale du fondement: écriture et temporalité [The general question of foundations: writing and temporality]*. Unpublished Ph. D. Dissertation: Université des Lettres et Sciences Humaines de Strasbourg, France.
- Piaget, J. (1973). *To understand is to invent. The future of education*. New York: Grossman.
- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.
- Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.
- Radford, L. (2009a). L'altérité comme problème éducatif. In J. Boissonneault, R. Corbeil & A. Hien (Eds.), *Actes de la 15e journée Sciences et Savoirs* (pp. 11-27). Sudbury: Université Laurentienne.

- Radford, L. (2009b). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 111-126.
- Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 507-530.
- Ricoeur, P. (1990). *Soi-même comme un autre*. Paris: Éditions du Seuil.
- Roth, W.-M. (Ed.). (2009). *Mathematical Representations at the Interface of the Body and Culture*. Charlotte, NC: Information Age Publishers.
- Schubring, G. (2003). L'Enseignement Mathématique and the first international commission (IMUK): The emergence of international communication and cooperation. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. Hodgson & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of L'Enseignement Mathématique* (pp. 47-65). Geneva: L'Enseignement Mathématique.
- Siu, M.-K. (2003). Learning and teaching of analysis in the mid twentieth century. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. Hodgson & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of L'Enseignement Mathématique* (pp. 179-190). Geneva: L'Enseignement Mathématique.
- Skovsmose, O. (2008). Critical Mathematics Education for the Future. In M. Niss (Ed.), *ICME-10 Proceedings* (on CD). Roskilde: IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University, Denmark, 2008.
- Valero, P. (2009). Mathematics education as a network of social practices. *Proceedings of the CERME 9 Conference* (in press). Lyon, France.
- Valero, P. & Zevenbergen, R. (Eds.). (2004) *Researching the Socio-Political Dimensions of Mathematics Education*. Boston: Kluwer.
- Vygotsky, L. S. (1987). *Collected works (vol. 1)*. New York: Plenum.
- Whitehead, A. N. (1913). The principles of mathematics in relation to elementary teaching. *L'Enseignement Mathématique*, 15, 105-112.

