CHAPITRE 2

Les actions didactiques qui favorisent les processus d'abstraction

Nous pouvons tirer deux conclusions du chapitre précédent. D'une part, l'abstraction est un mécanisme cognitif essentiel, qui a lieu dès que nous sommes très petits. D'autre part, l'abstraction mathématique semble complexe – elle paraît même hors de la portée de plusieurs élèves.

Ces conclusions, apparemment contradictoires, s'expliquent du fait que les abstractions à la base de la pensée mathématique sont en réalité des abstractions d'autres abstractions qui, à leur tour, reposent sur d'autres abstractions.

On voit l'importance de repérer les actions didactiques qui pourraient favoriser l'engagement de l'élève dans les processus d'abstraction qui ont lieu en salle de classe. Quelles sont ces actions? De quoi dépendent-elles? Comment peuvent-elles être prises en compte dans l'élaboration de leçons modèles? Ce chapitre tente de donner des éléments de réponse à ces questions.

Les dimensions cognitives et affectives sous-jacentes à l'abstraction

On s'entend en général sur l'idée que, pour favoriser le passage à l'abstrait, il faut choisir de bonnes activités (ou tâches) mathématiques. Mais qu'est-ce qu'une *bonne* activité?

Une bonne activité doit rendre possible un engagement soutenu de l'élève. Pour comprendre en quoi consiste cet engagement soutenu, il faut distinguer deux dimensions interreliées et complémentaires :

a) la dimension affective et

b) la dimension cognitive.

Marjorie Henningsen et Maru Kay Stein, de l'Université de Pittsburgh, se sont posé la question des facteurs qui sont favorables et ceux qui sont défavorables au maintien d'un engagement soutenu de l'élève. Un des facteurs défavorables est précisément le recours à des problèmes mathématiques inappropriés (Henningsen et Stein, 1997). Une activité trop facile ou difficile ou un mauvais choix du point de vue de la motivation conduit souvent à provoquer un déclin de l'engagement de l'élève. Une bonne activité doit donc partir du savoir de l'élève et s'articuler autour des problèmes qui sont intéressants pour celui-ci. Mais cela n'est pas suffisant.[4]

Un bon problème doit solliciter en profondeur les concepts visés. C'est ici qu'intervient la dimension cognitive. Des problèmes non pertinents du point de vue cognitif peuvent inhiber l'apparition de formes de pensée sophistiquée et empêcher le passage à l'abstrait. C'est le cas de problèmes simples. Si le problème que l'enseignante ou l'enseignant donne à l'élève est trop simple, l'élève ne va pas mobiliser les concepts visés. L'élève aura recours à des concepts ou à des procédures qu'il connaît déjà ou qui sont à la portée de

[4] Ces idées sont discutées en détail dans le document *Un survol de la recherche actuelle*, sur le DVD d'accompagnement.

ses connaissances présentes. Dans ce cas, il n'y aura pas d'apprentissage à proprement parler, car rien de vraiment nouveau ne s'est produit du point de vue conceptuel. L'exemple qui suit illustre cette idée.

Un exemple : la division en 3^e année

Dans une leçon en 3^e année, on pose le problème qui consiste à partager 18 galettes entre trois enfants. Le concept visé est celui de la division au sens mathématique du terme.

Imaginons qu'un élève dessine trois enfants et place, l'un après l'autre, les 18 galettes (ou des marques représentant ces galettes) devant les dessins de trois enfants, comme la Figure 1 le montre.

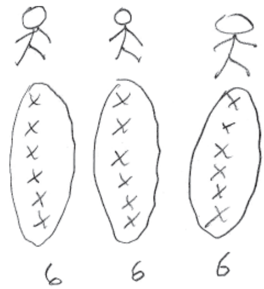

Figure 1. Algorithme personnel pour résoudre un problème de partage. L'algorithme se base sur un concept quotidien (c'est-à-dire intuitif) : l'action de partager séquentiellement des objets entre un certain nombre de personnes.

L'élève arrive certainement à la solution. Il a produit ce qu'on appelle un « algorithme personnel » : une façon *propre* de résoudre le problème. Mais cette procédure se base sur ce que le psychologue Lev Vygotski appelait *concept quotidien* — c'est-à-dire un concept basé sur des idées plus ou moins intuitives. Le concept de division mathématique (ce qu'on peut appeler, en suivant la terminologie introduite par Vygotski, le *concept scientifique*) n'a pas été mobilisé. L'élève a eu recours à des procédures intuitives déjà connues, sans apparition réelle du concept scientifique de division.

En effet, tant que l'enfant continue à résoudre des problèmes comme le précédent par des méthodes intuitives déjà connues; tant qu'il ne parvient pas à utiliser les faits numériques de la multiplication et à se rendre compte qu'il y a une multiplication derrière la solution du problème, *il n'y aura pas d'apprentissage.*[5]

Dans la section qui suit nous verrons comment l'idée d'« unité conceptuelle » peut aider l'enseignante ou l'enseignant à appuyer l'élève dans son cheminement conceptuel.

[5] Les dangers qui entourent une mauvaise application pédagogique du concept d'algorithme personnel sont discutés dans le clip vidéo *Apprentissage et zone proximale de développement* sur le DVD d'accompagnement.

L'unité conceptuelle

Continuons notre réflexion sur le problème de la division en 3e année.

Remarquons que, pour l'enseignante ou l'enseignant, il n'est pas question de rejeter l'algorithme personnel de l'élève. L'algorithme personnel a un sens pour l'élève qui l'a produit. Le travail d'enseignement consiste précisément à partir de cet algorithme personnel pour le faire évoluer vers le concept scientifique visé. Comme nous l'avons déjà dit, se contenter de l'algorithme personnel (si celui-ci ne présente pas encore le niveau d'abstraction et de systématicité du concept scientifique visé) revient simplement à abandonner l'entreprise d'apprentissage.

Or, si l'algorithme personnel n'aboutit pas à mobiliser le concept scientifique visé, que peut faire l'enseignante ou l'enseignant?

Il est clair que l'élève ne doit pas se limiter à résoudre quelques problèmes de partage de difficulté égale. L'enseignante ou l'enseignant pourrait donc présenter une situation qui serait constituée de problèmes à difficulté croissante. Pour arriver au concept scientifique visé, il faut que l'élève prenne conscience que le problème peut se résoudre à l'aide d'une procédure multiplicative. De plus, il faut que la procédure multiplicative qui a fonctionné pour résoudre le problème des galettes soit généralisée à d'autres problèmes similaires (p. ex., diviser 24 crayons entre 6 élèves, puis 24 crayons entre 5 élèves) pour arriver, enfin, à une abstraction : les problèmes du type partage reviennent à trouver combien de fois va un nombre dans un nombre donné (le nombre d'enfants ou autres) pour arriver au nombre total (le nombre de galettes, dans notre exemple).

On voit donc, dans ce court exemple, qu'il est important de considérer la gradation du niveau de profondeur des problèmes à donner aux élèves. Il ne suffit pas de donner aux élèves une question ou un problème pour assurer le passage à l'abstrait. En général, le passage à l'abstrait va exiger une transition progressive au cours de laquelle l'élève répond à une série de problèmes de difficulté graduelle.[6]

Cette organisation progressive de l'activité en questions de plus en plus difficiles, c'est ce que nous appelons *unité conceptuelle*; elle est un élément clé dans la création des conditions qui favorisent le passage à l'abstrait.

Les propos précédents peuvent donc être résumés comme suit. Pour amener les élèves à de nouveaux niveaux d'abstraction, il faut considérer la dimension affective (la motivation) et la dimension cognitive. En ce qui a trait à cette dernière, nous avons vu la pertinence d'organiser les problèmes autour d'une unité conceptuelle qui assure la progression croissante des niveaux de difficulté des problèmes en question.

[6] On l'a vu dans l'exemple mentionné au chapitre précédent. Pour amener les élèves de 2e année à des niveaux d'abstraction élevés, nous leur avons posé plusieurs questions : continuer quelques éléments de la suite en les dessinant; étudier des termes relativement éloignés (comme la Figure 12 et la Figure 25); expliquer les procédures de construction de ces figures et le calcul de rectangles dans chacune d'elles, etc.

L’interaction en salle de classe

Le choix d’une bonne activité, basée sur une unité conceptuelle appropriée, n’est pas encore suffisant pour assurer un bon apprentissage et le passage à l’abstrait. L’exemple tiré de la 2e année montre l’importance du travail en petits groupes. L’échange d’idées entre élèves et entre les élèves et l’enseignante ou l’enseignant est en fait crucial.

Tel que nous le concevons ici, le rôle de l’interaction est vu dans une optique de coopération, non seulement pour enrichir le savoir personnel, mais (et surtout) pour tisser des liens de solidarité et de compréhension avec les autres[7].

L’organisation de l’interaction suit les méthodes que nous avons élaborées précédemment (Radford et Demers, 2004). Nous suggérons des périodes de travail en petits groupes (2 à 4 élèves) au cours desquelles les élèves discutent des meilleures méthodes pour résoudre les problèmes donnés, suivies d’une discussion générale (c’est-à-dire discussion en groupe-classe) dirigée par l’enseignante ou l’enseignant.

Pour que cette méthodologie fonctionne, il faut, toutefois, que l’élève comprenne qu’il a une responsabilité envers ses compagnons de groupe, responsabilité qui, entre autres, l’empêche de laisser les autres faire le travail à sa place. Cette responsabilité est à la base de ce qui est le sentiment d’appartenance à une communauté. Elle ne va pas de soi. Elle s’apprend (Radford, 2006, 2008).

Quel est le rôle de l’enseignante et de l’enseignant au cours de l’interaction avec ses élèves? Dans plusieurs courants contemporains, l’enseignante et l’enseignant sont vus comme des *facilitateurs*. Dans notre perspective, l’enseignante et l’enseignant sont plus que cela : ils sont les *partenaires* des élèves.

Mais cela ne veut pas dire que l’enseignante ou l’enseignant fait le travail à la place des élèves et que ceux-ci sont relégués au rôle de contemplateurs.

Les élèves travaillent en petits groupes et essaient d’aller aussi loin que possible dans leur recherche de solutions aux problèmes proposés. Ils génèrent probablement des algorithmes personnels ou des idées basées sur des concepts quotidiens (c’est-à-dire intuitifs) ou même scientifiques. Il se peut, toutefois, que les procédures ou les concepts générés ne soient pas ceux qui sont attendus par l’enseignante ou l’enseignant. En fait, cela est généralement le cas, surtout quand l’apprentissage touche à des concepts assez abstraits ou complexes. L’enseignante ou l’enseignant doit alors intervenir. Pour comprendre le sens de cette intervention, rappelons ici le concept de *zone proximale de développement* introduite par Vygotski.

[7] Ces idées sont présentées de façon plus détaillée dans le clip vidéo *Apprentissage et zone proximale de développement* et dans le clip vidéo *Une approche socioculturelle vygotskienne* sur le DVD d’accompagnement.

Revenons au problème de la division qui a été mentionné ci-dessus et imaginons un élève de la 3e année qui utilise l'algorithme personnel de partage qui est montré à la Figure 1 de ce chapitre. Le concept quotidien de partage fait partie du répertoire conceptuel de l'élève. Ce concept et tous les autres concepts et les procédures dont dispose l'élève, à ce moment-là, constituent son niveau de développement conceptuel actuel. Celui-ci lui permet de résoudre certains problèmes, mais pas d'autres. Parmi ceux qu'il ne peut *pas* résoudre, il y en a qui sont absolument trop difficiles, car les concepts requis ne sont pas au niveau de sa maturité intellectuelle. Par exemple, il serait vain d'essayer qu'un enfant de 3e année divise des fonctions polynomiales. Le concept de division polynomiale est trop loin de ce qu'il pourrait arriver à faire à ce moment de son développement, même avec la meilleure aide pédagogique possible.

Or, il y a des concepts que cet élève ne peut pas acquérir seul, mais qu'il pourrait acquérir si on lui donnait de l'aide. Ces concepts auxquels l'élève peut accéder sont justement ceux qui constituent sa *zone proximale de développement*[8]. La Figure 2 illustre cette idée.

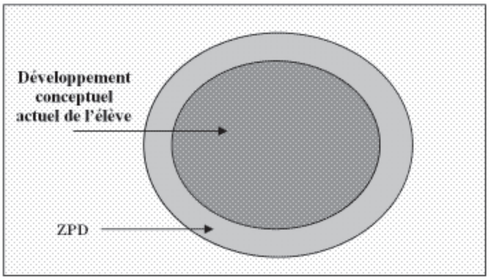

Figure 2. La petite ellipse au centre représente les concepts rattachés au développement conceptuel actuel de l'élève (DC). Au-delà de cette ellipse se trouve une zone constituée de concepts que l'élève peut acquérir en collaboration avec ses pairs ou avec l'enseignante ou l'enseignant. C'est la zone proximale de développement (ZPD). Au-delà de cette zone se trouve tout ce qui est définitivement au-delà du développement conceptuel de l'élève au moment en question.

Dire que l'enseignante ou l'enseignant est *partenaire* de l'apprentissage de l'élève signifie qu'elle ou il travaille avec l'élève et son groupe afin de les amener au-delà de ce qu'ils savent déjà, car c'est seulement en allant au-delà de ce que les élèves savent déjà faire qu'il y a véritablement un apprentissage. Autrement, on ne fait que tourner en rond.

Comment devenir partenaire efficace de l'apprentissage de l'élève? Voilà l'un des défis les plus importants de l'enseignante ou de l'enseignant. Il y a plusieurs niveaux d'intervention qui s'étalent le long d'un continuum qui va de donner un petit coup de pouce à l'élève jusqu'à travailler avec lui afin d'arriver à la solution.

On pourrait penser que, dans ce dernier cas, l'enseignante ou l'enseignant fait le travail à la place de l'élève. Ce n'est pas tout à fait vrai, puisque l'élève

[8] Remarquons que cette zone ne dépend pas que de l'élève. Elle dépend aussi de la *qualité* d'aide que l'enseignante ou l'enseignant et les pairs portent à l'élève.

a déjà fait tous les efforts qu'il pouvait. C'est-à-dire que l'élève a eu quand même la possibilité d'aller aussi loin que possible par ses propres moyens. L'intervention de l'enseignante ou de l'enseignant part donc de ce que l'élève a pu faire. De plus, l'élève ne fait pas que regarder l'enseignante ou l'enseignant faire : il participe à la solution, même s'il n'est pas le meneur.

La zone proximale de développement repose sur l'idée que la compréhension d'un concept par l'élève ne doit pas forcément émaner du seul élève : il y a des cas où elle émane des actions des autres. L'élève peut comprendre véritablement un concept au cours d'une discussion avec d'autres élèves et avec l'enseignante ou l'enseignant (Vygotski, 1985, p. 271). Dans cette perspective, l'élève ne construit pas ses propres connaissances. Il les acquiert à l'aide des autres.

Les remarques précédentes nous permettent d'énoncer quelques caractéristiques d'une leçon modèle. C'est ce que nous ferons dans la section suivante.

Les caractéristiques d'une leçon modèle

Une leçon modèle passe par la création d'une dynamique de salle de classe qui va permettre aux élèves de s'engager dans des discussions et des échanges de haut niveau conceptuel. L'enseignante ou l'enseignant doit créer les conditions favorables, tant conceptuelles qu'émotionnelles, pour que les élèves se sentent à l'aise. La classe doit devenir une communauté d'apprentissage où l'élève perçoit le fruit de sa participation et de son travail non pas sous une optique individuelle compétitive, mais sous une optique de coopération. Cette coopération fait partie de l'effort que l'élève fait en travaillant avec d'autres élèves, où il se montre responsable en essayant de proposer des idées et de comprendre celles des autres.

Parmi les caractéristiques que doit posséder une leçon modèle, nous avons retenu les suivantes :

Les leçons :

a) partent du savoir de l'élève;
b) sont intéressantes du point de vue de l'élève;
c) font appel au matériel de manipulation ou à la technologie;
d) offrent un espace de réflexion et d'échange en favorisant le travail en petits groupes;
e) sont centrées sur des problèmes qui mobilisent les concepts mathématiques visés à des niveaux de profondeur adéquat;
f) présentent aux élèves des occasions de réfléchir à plusieurs niveaux d'abstraction;
g) ont une *unité conceptuelle* qui favorise le passage à l'abstrait.

Les chapitres suivants donnent des exemples de leçons modèles qui ont été élaborées et mises à l'essai par notre équipe de recherche.

Travaux cités et lectures supplémentaires

Bartolini Bussi, M. G. (1998). "Verbal interaction in the mathematics classroom: a Vygotskian analysis", in H. Steinbring, M. B. Bussi and A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, p. 65-84.

Berger, M. (2005). "Vygotsky's theory of concept formation and mathematics education", *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Norway, vol. 2, p. 153-160.

Chaiklin, S. (2003). "The zone of proximal development in Vygotsky's analysis of learning and instruction", in A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev and S. M. Miller (Eds.), *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context*, Cambridge, Cambridge University Press, p. 39-64.

Forman, E. A., and J. McPhail (1993). "Vygotskian perspective on children's collaborative problem-solving activities", in E. A. Foreman, N. Minick and C. A. Stone (Eds.), *Contexts for Learning. Sociocultural Dynamics in Children's Development*, New York, Oxford University Press, p. 213-229.

Henningsen, M., and M. K. Stein (1997). "Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning", *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), p. 524-549.

Jansen, A. (2008). "An investigation of relationships between seventh-grade students' beliefs and their participation during mathematics discussions in two classrooms", *Mathematical Thinking and Learning, 10*(1), p. 68-100.

Karpov, Y. V. (2003). "Vygotsky's doctrine of scientific concepts. It's role for contemporary education", in A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev and S. M. Miller (Eds.), *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context*, Cambridge, Cambridge University Press, p. 65-82.

Kidron, I., A. Lenfant, A. Bikner-Ahsbahs, M. Artigue and T. Dreyfus (2008). Toward networking three theoretical approaches: the case of social interactions", *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *40*, p. 247-264.

Radford, L. (2006). « Communication, apprentissage et formation du “je communautaire” », dans B. D’Amore et S. Sbaragli (dir.), *Incontri con la Matematica, 20th National Italian Conference on the Teaching and Learning of Mathematics*, Bologna, Pitagora, p. 65-72. [disponible dans la section de publications du site : www.laurentian.ca/educ/lradford/]

Radford, L. (2009). « L’altérité comme problème éducatif », dans J. Boissonneault, R. Corbeil et A. Hien (dir.), *Actes de la 15e journée Sciences et Savoirs*, Sudbury, Université Laurientienne, p. 11-27. [disponible dans la section de publications du site : www.laurentian.ca/educ/lradford/]

Radford, L., et S. Demers (2004). *Communication et apprentissage. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques*, Ottawa, CFORP.

Schmittau, J. (2003). “Cultural-historical theory and mathematics education”, in A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev and S. M. Miller (Eds.), *Vygotsky’s Educational Theory in Cultural Context,* Cambridge, Cambridge University Press, p. 225-245.

Skovsmose, O., and P. Valero (2002). “Democratic access to powerful mathematical ideas”, in L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum, p. 383-407.

Tudge, J. (1990). “Vygotsky, the zone of proximal development, and peer collaboration: Implications for classroom practice”, in L. C. Moll (Ed.), *Vygotsky and Education*, Cambridge University Press, p. 155-172.

Vygotski, L. (1985). *Pensée et langage*, Paris, Messidor.

Vygotski, L. (2003). *Conscience, inconscient, émotions*, Paris, Dispute.