CHAPITRE 1

Processus d'abstraction en mathématiques

L'abstraction est l'un des processus cognitifs les plus élémentaires. Pourtant, quand il s'agit des mathématiques, l'abstraction peut devenir très difficile. C'est ce qu'on voit, jour après jour, dans la salle de classe. Pourquoi l'abstraction devient-elle difficile? En quoi exactement consiste-t-elle? Que peut-on faire pour aider les élèves à s'engager dans des processus d'abstraction et faciliter ainsi leur apprentissage?

Nous aborderons ces questions dans ce chapitre. Les concepts qui seront présentés et discutés ici serviront de base aux chapitres suivants.

L'abstraction en tant que processus élémentaire cognitif

Essayons d'imaginer un moment ce que serait notre monde si, pour une raison quelconque, nous n'arrivions plus à faire des abstractions. Nous ne serions plus en mesure de distinguer ce qui rend un objet différent d'un autre. Par exemple, nous ne pourrions pas distinguer une banane d'un tournevis. Reconnaître des objets similaires et former un concept par *abstraction*, à partir de ce qui leur est commun et différent, est un processus cognitif élémentaire. C'est un processus qui n'est pas réservé seulement à l'humain. On sait, par exemple, qu'il est à la portée des chimpanzés.

En effet, dans une recherche menée par Savage-Rumbaugh, Rumbaugh, Smith et Lawson, des chimpanzés ont été entraînés à distinguer entre deux types d'objets : des articles comestibles (bananes, pain, etc.) et des articles non comestibles (tournevis, règle, clés, etc.). À la suite de cet entraînement, les chimpanzés ont pu classifier de *nouveaux* objets d'apparence très différente selon ces deux catégories (voir Figure 1).

Figure 1. Classification, sans erreurs, effectuée par un chimpanzé consistant à classer 5 objets comestibles et 5 objets non comestibles lors d'un test mené par Sue Savage-Rumbaugh et ses collaborateurs (1980, p. 923).

Pour classifier les nouveaux objets, ces chimpanzés ont accompli une *abstraction*. Celle-ci leur a permis de *distinguer* les objets comestibles de ceux non comestibles. À la base de cette abstraction se trouve une capacité cognitive élémentaire, partagée par plusieurs primates, sans laquelle nous, les humains, rentrerions dans une quincaillerie en cherchant un restaurant![1]

L'abstraction mathématique est relationnelle

On peut apprendre une quantité importante de faits, mais si on n'arrive pas à les lier entre eux, à saisir ce qu'ils ont en commun, bref, à former un concept les liant, on ne pourra pas passer à un niveau conceptuel supérieur. Dans son livre, *Extraordinary People: Understanding Savant Syndrome*, Donald A. Treffert raconte le cas de plusieurs individus qui sont capables d'effectuer très rapidement des multiplications de nombres à 2 ou 3 chiffres, et de trouver la racine carrée de nombres assez grands, sans pour autant pouvoir expliquer leur procédure.

Ces personnes, appelées souvent des « calculateurs instantanés », accomplissent ces exploits par cœur, sans un sens mathématique de ce qu'ils font.

Ces démarches impressionnantes seraient une façon de compenser l'impossibilité à penser abstraitement. Par exemple, un enfant de cinq ans, qui avait une capacité extraordinaire pour effectuer des multiplications rapides, ne pouvait pas comprendre ou utiliser le langage de façon conceptuelle; il ne pouvait pas comprendre les définitions de mots ou utiliser des métaphores dans un sens abstrait. « Son langage, dit Treffert, était limité à des réponses concrètes, déterminées contextuellement; des réponses mécaniques d'un type automatique. »[2]

Ce qui est à la base de l'abstraction est la formation d'un *concept* (c'est-à-dire une *entité générale*) qui permet de regrouper les objets selon un élément commun. Ce concept apparaît en tant que résultat d'un processus qui fait *abstraction* de beaucoup de choses : la couleur, la taille, la forme, etc. Pourtant, comme nous l'avons mentionné ci-dessus, les abstractions mathématiques semblent souvent difficiles à accomplir. On peut se poser la question : pourquoi? Pourquoi les abstractions mathématiques semblent-elles poser autant de difficultés aux élèves alors que, chez l'humain ayant un développement normal du cerveau, l'abstraction semble être un mécanisme cognitif élémentaire?

Les abstractions mathématiques partent d'une expérience sensorielle concrète qui peut être similaire à celle qui rend possible aux chimpanzés la formation de concepts élémentaires comme « comestible » et « non comestible ». Mais les abstractions mathématiques vont vite porter non pas sur des objets concrets, mais sur des symboles les représentant. De plus, ces abstractions, représentées par des symboles, vont se concaténer entre elles, donnant ainsi lieu à d'autres abstractions, et ainsi de suite.

[1] Pour plus de renseignements sur la capacité d'abstraction chez les chimpanzés, nous renvoyons la lectrice ou le lecteur au document vidéo *Introduction aux idées du livre* dans le DVD d'accompagnement, en particulier aux passages qui montrent le concept de numérosité chez le chimpanzé AI.

[2] Treffert, 1990, p. 178-179. Une bibliographie se trouve à la fin du chapitre.

Voyons deux exemples qui illustrent ces idées.

Exemple 1 : l'addition

L'introduction, en deuxième année, de l'addition de deux nombres à deux chiffres, se fait non pas à partir d'objets concrets, mais à partir de *symboles*.

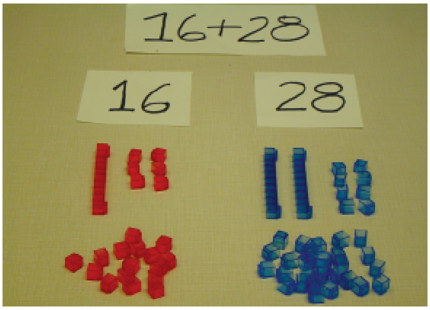


Figure 2. Une addition aussi simple que « 16 + 28 » repose sur plusieurs niveaux de conceptualisation. Dans un premier niveau, on a des objets concrets à additionner. Au niveau 2, on a un arrangement des mêmes objets concrets en concepts (« dizaines », « unités »). Au niveau 3, on a des *symboles* qui représentent les objets à additionner. Les symboles « 16 » et « 28 » sont les symboles de deux abstractions. Enfin, ces symboles se concatènent pour exprimer l'action d'additionner. Ce qu'on additionne ici ce n'est plus les objets, mais les symboles du niveau 3.

Par exemple, quand on demande à un élève d'effectuer 16 + 28, on ne fait plus référence à l'action concrète de mettre ensemble 16 blocs et 28 blocs, mais à une action sur des symboles (les symboles « 16 » et « 28 »). Pour effectuer l'addition, l'élève doit pouvoir mettre en relation les symboles et leurs significations (p. ex., 2 signifie deux dizaines, 6 signifie 6 unités, etc.). Bref, l'abstraction mathématique est une concaténation d'abstractions exprimée sous forme de symboles (voir Figure 2).

Les propos précédents peuvent être résumés comme suit : l'abstraction mathématique repose sur l'utilisation de symboles qui expriment des relations de plus en plus complexes. Accéder à des niveaux supérieurs d'abstraction (comme celui montré dans la Figure 2) demande à l'élève de comprendre les significations auxquelles renvoient les nouveaux symboles (par exemple, comment opérer les symboles « 16 » et « 28 ») et de *revenir aux significations préalables* lorsque nécessaire (le symbole « 16 » signifie une dizaine et six unités, mais aussi seize unités, etc.).

Exemple 2 : les patrons

Nous venons de dire que le moteur de l'abstraction est cette capacité à saisir les similarités et les différences à la base de la formation de concepts et à représenter cette abstraction par un symbole. Dans l'exemple précédent, le symbole « 6 » ne représente pas seulement les six blocs montrés ci-dessus, mais n'importe quel groupement de six objets indépendamment de leur nature, taille, couleur, poids, etc. On peut imaginer à quel point il serait difficile d'effectuer des calculs, si on devait utiliser des symboles différents selon qu'on compte six blocs, six bananes, six tournevis, etc. C'est grâce à cette abstraction et au symbole qui la représente que nous pouvons regrouper sous un même concept toutes les collections de six objets, indépendamment de leur nature. Dans l'exemple précédent, nous avons vu que l'abstraction peut être mise en relation avec d'autres abstractions par l'intermédiaire d'autres symboles, et ainsi de suite.

L'exemple suivant aidera à clarifier cette idée. Il s'agit d'un exemple portant sur le domaine de modélisation et algèbre, tiré d'une classe de 2e.

Nous avons donné aux élèves la suite suivante :

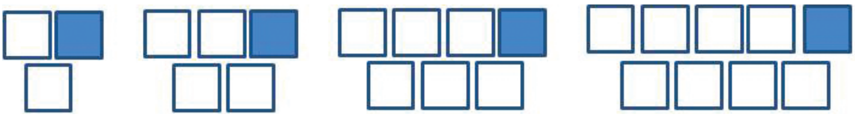


Figure 1 2 3 4

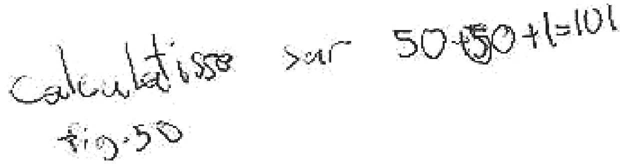
Dans la première partie de l'activité, en faisant des dessins, les élèves ont prolongé la suite jusqu'à la Figure 6. Ensuite, les questions ont porté sur un enfant factice, Mathieu, à qui les élèves devaient expliquer ce qu'il devait faire pour construire les Figures 8, 12 et 25.

Naturellement, pour répondre à ces questions, les élèves devaient d'abord distinguer ce qu'il y a de commun et de différent entre ces figures, afin de former le *concept* (ici une structure mathématique) qui correspond aux figures de la suite. Avec l'aide de l'enseignante, les élèves ont *imaginé* les éléments de la suite comme éléments divisés en deux rangées, l'une au bas, l'autre au haut, celle au haut ayant un rectangle foncé à la fin. Ils ont dégagé une similarité : le nombre de la figure coïncide avec le nombre de carrés pâles dans la rangée au bas et dans la rangée au haut : la Figure 1 a un carré pâle au bas, un carré pâle au haut et un carré foncé; la Figure 2 a deux carrés au bas, deux carrés pâles au haut et un foncé, etc.

En se référant à la Figure 12, Carl, un des élèves de cette classe de 2e année, a écrit :

Pour la constraire il doit
faire 12+12+1 et doit metre un foncés.

Les élèves ont accompli ici une première abstraction. Cette abstraction leur a permis de trouver le nombre de carrés dans d'autres figures comme la Figure 25 ou 50. Ainsi, pour répondre à la question suivante : « Pierre veut construire une grosse figure de la suite. Explique-lui ce qu'il doit faire », certains élèves ont pris la Figure 50. C'est le cas de Carl. Bien sûr, calculer le nombre total est une tâche difficile à ce stade; donc, Carl a suggéré d'utiliser la calculatrice :



Comme dans l'exemple précédent, l'abstraction s'exprime ici à l'aide d'un symbole « 50 + 50 + 1 = 101 ». Ce symbole est constitué d'autres symboles : « 50 », « 1 », « 101 ». On voit par là, encore une fois, la dynamique de concaténation de l'abstraction mathématique mentionnée ci-dessus.

Or, dans cette activité, nous voulions amener les élèves à faire face à une situation encore plus abstraite. Nous voulions que les élèves généralisent la procédure à une situation dans laquelle le nombre à calculer reste *indéterminé* (c'est-à-dire un nombre qui n'est pas 12, 25, 50 ou un autre nombre *particulier*, même s'il est grand).

Nous avons donc inventé l'histoire suivante, présentée sous forme de problème défi, dans laquelle les élèves devaient écrire un message :

> Voici une boîte contenant des billets marqués chacun d'un nombre : 100, 101, 102, 103, etc.
>
> Nous allons prendre au hasard un billet de la boîte. Le nombre sur le billet va représenter le nombre d'une figure de la suite.
>
> Nous allons mettre le billet dans une enveloppe et l'envoyer à Tristan, un élève d'une autre classe de 2e année qui n'a jamais vu cette suite.
>
> Écris un message à cet élève en lui expliquant clairement ce qu'il faut qu'il fasse pour qu'en regardant le nombre dans l'enveloppe il puisse calculer rapidement le nombre de rectangles qu'il y aura dans cette figure.

Les élèves ont travaillé en petits groupes. Comme il a été prévu, plusieurs élèves ont donné une explication à l'aide d'un exemple. Voici l'extrait d'une discussion entre les élèves du petit groupe de Carl et l'enseignante. Les élèves sont Carl, Zia et Émilie :

1. **Zia :** Si tu as la figure 50, tu dois faire 50 en bas, 50 en haut, plus 1 foncé.
2. **Enseignante :** Oui, oui. Alors ça, c'est un bon exemple. Mais, s'il a la figure 100?
3. **Carl :** 100 plus 100 plus 1 (…)
4. **Émilie :** Comme c'est, c'est le numéro, comme…
5. **Enseignante :** Oh! Qu'est-ce que tu dis?

6. **Émilie :** C'est le numéro qu'il a, le même numéro en bas, le même numéro en haut, plus 1.

7. **Enseignante :** Excellent!

À la ligne 6, Émilie offre une explication qui ne porte pas sur un nombre particulier, mais sur un nombre général, un nombre *quelconque*, exprimé ici par « le numéro », qui veut dire le numéro tiré de la boîte. C'est un formidable pas vers l'abstraction. Toutefois, l'explication demeure encore imprégnée de l'aspect géométrique des figures de la séquence. En fait, à y voir de près, on se rend compte qu'Émilie propose le processus de *construction* de la figure, alors que la question porte sur les *calculs* à faire (Émilie parle encore du haut et du bas de la figure). L'enseignante invite donc les élèves à aller encore plus loin :

8. **Enseignante :** Ça, c'est excellent. Mais n'oublie pas : il [l'élève de 2e année qui tirera le billet de la boîte] n'a pas besoin de dessiner la figure… Alors, comment est-ce qu'on pourrait faire pour qu'il additionne tout ça …?

9. **Carl :** Peut-être, il pourrait comme prendre les deux, le… un 100 et l'autre 100, et après faire comme 200 plus 1, qui égale à 201.

10. **Enseignante :** C'est un bon exemple concret, sauf que s'il ne [tire] pas de 100 [de la boîte]; supposons qu'il tire un autre numéro…?

11. **Zia :** Ouien

12. **Émilie :** Oui…

13. **Enseignante :** C'est pour ça que j'aimais l'autre idée d'Émilie qui disait : tu prends le numéro, puis…, (*en s'adressant à Émilie*) qu'est-ce que tu fais avec le numéro que t'as?

14. **Émilie :** […] On peut utiliser notre calculatrice pour calculer.

15. **Enseignante :** Ok, puis qu'est-ce qu'il va faire avec la calculatrice?

16. **Émilie :** Il va mettre le numéro.

17. **Zia :** Il va faire le numéro.

18. **Émilie :** Plus le même numéro, plus 1.

19. **Enseignante :** Awww! Qu'est-ce que vous pensez de ça?

20. **Carl :** Oui!

Les élèves ont enregistré leur message à l'aide d'un magnétophone numérique, devant la classe (voir Figure 3).

L'explication d'Émilie a été la suivante :

> Allô, Tristan! Si un numéro que tu as… tu mets le même numéro en bas, le même numéro en haut, plus 1. Après tu prends la calculatrice, tu mets le numéro dessus, plus le même numéro, plus 1. Après, ça va te dire la réponse.

Figure 3. À gauche, l'enseignante montre aux élèves la boîte où seront mis les billets qui porteront un « grand » numéro chacun (comme 101, 102, etc.). À droite, Émilie et son équipe enregistrent, devant la classe, le message qui sera envoyé à un élève de 2e année. Ce message lui dit les calculs à faire pour trouver le nombre de rectangles de la figure dont la position dans la suite correspond au nombre qui sera tiré de la boîte.

On voit donc comment les élèves de 2e année arrivent à accomplir ce double passage à l'abstrait. Dans un premier temps, ils ont formulé une abstraction, en énonçant la procédure de construction générale des figures sur des cas particuliers (Figures 8, 12 et 25). Par la suite, ils ont produit encore une autre abstraction. Bien sûr, les élèves n'ont pas encore écrit une formule algébrique telle que $n + n + 1$ ou $2n + 1$, mais ils ont réussi à effectuer une généralisation algébrique, c'est-à-dire une généralisation dont la variable est exprimée par un nombre indéterminé. Cette deuxième généralisation s'appuie sur la première, montrant ainsi le caractère d'enchaînement opératoire des abstractions mathématiques.

Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons vu que, grâce à l'abstraction, l'élève fait une synthèse d'expériences vécues précédemment et s'élève à un nouveau niveau de généralité. Cette synthèse organise le similaire et le différent et donne une cohérence à la multitude des faits que l'élève rencontre dans le monde de l'expérience.

Il ne faut pas oublier que l'abstraction n'est pas un acte contemplatif. L'abstraction est un *processus* par lequel l'élève crée des liens et *exprime* son expérience à un niveau conceptuel plus riche. Justement, on peut dire qu'on a fait une *abstraction* quand on a réussi à passer à un nouveau niveau de généralité. Une abstraction repose donc sur un saut ou sur un changement conceptuel[3].

[3] Comme nos exemples le montrent, il y a une relation étroite entre abstraction et généralisation. Ainsi, dans le deuxième exemple, on *généralise* les actions accomplies sur les figures visibles (Figures 1 à 4) à d'autres figures particulières qu'on ne voit pas (comme la Figure 12). Ce ne sont pas les actions qui sont généralisées, mais les objets sur lesquels portent les actions. Or, pour effectuer cette généralisation, on doit faire une *abstraction* et traiter la Figure 12 (ou une autre figure qu'on ne voit pas) comme les figures visibles. Plus tard, dans le problème de la boîte, tant les objets auxquels s'applique la procédure que la procédure elle-même sont généralisés. La procédure de calcul porte sur un nombre général, un nombre *quelconque*, qui est une *abstration* des nombres 1, 2, ... 100, 101, etc. Quant à la procédure précédente, elle est une *abstraction* de la procédure précédente. On voit donc que, sans s'identifier l'une à l'autre, abstraction et généralisation participent activement dans l'activité mathématique.

Ce qui distingue l'abstraction mathématique d'autres formes d'abstraction, c'est la concaténation opératoire de ses abstractions. Les abstractions mathématiques, on l'a dit, s'expriment à l'aide de symboles. À leur tour, ces symboles sont mis en rapport entre eux pour former d'autres abstractions.

La question pour nous est celle de déterminer les conditions didactiques qui peuvent favoriser les processus d'abstraction en mathématiques chez nos élèves. Ce sera le thème central du chapitre suivant.

Travaux cités et lectures supplémentaires

Barth, B.-M. (1987). *L'apprentissage de l'abstraction*, Paris, Retz.

Damerow, P. (1996). *Abstraction and representation. Essays on the cultural evolution of thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Gómez, J. C. (2004). *Apes, monkeys, children, and the growth of mind*, Cambridge, Harvard University Press.

Hershkowitz, R., B. Schwarz and T. Dreyfus (2001). "Abstraction in context: Epistemic actions", *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), p. 195-222.

Kidron, I. (2008). "Abstraction and consolidation of the limit procept by means of instrumented schemes: the complementary role of three different frameworks", *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), p. 197-216.

Luria, A. R., and L. S. Vygotski (1998). *Ape, primitive man, and child. Essays in the history of behavior*, Boca Raton, Fl., CRC Press LLC.

Núñez, R. (2007). "Understanding abstraction in mathematics education: Meaning, language, gesture, and the human brain", *Paper presented at the 31st Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group, Fredericton, University of New Brunswick,* June 8-12.

Savage-Rumbaugh, S., and R. Lewin (1994). *Kanzi*, New York, John Wiley.

Savage-Rumbaugh, E. S., D. M. Rumbaugh, S. T. Smith and J. Lawson (1980). "Reference: The Linguistic Essential", *Science, 210*(4472), p. 922-925.

Smith, S. B. (1983). *The great mental calculators*, New York, Columbia University Press.

Tomasello, M., and J. Call (1997). *Primate cognition*, New York, Oxford University Press.

Treffert, D. A. (1990). *Extraordinary People: Understanding Savant Syndrome,* New York, Ballantine Books.

Vygotski, L. (1985). *Pensée et langage*, Paris, Messidor.